Vol. VIII, Nº 1, Mayo (3004)
Matemáticas: 1–6

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Existencia de soluciones para un problema de Dirichlet sublineal

John Bayron Baena   Jorge Cossio   Carlos Augusto Vélez

Recibido May. 2, 2006   Aceptado Jun. 20, 2006

Abstract

The purpose of this work is to ilustrate the use of variational techniques for solving a nonlinear analysis problem. More precisely, we show the existence of at least one solution for a certain sublinear Dirichlet problem when the growth of the nolinearity at infinity is bounded by a line whose slope is less than the first eigenvalue. For proving this theorem we use a classical result of the minimization theory of functionals.

Keywords: Sublinear Dirichlet problem, minimization of functionals.

AMSC(2000): Primary: 35J20. Secondary: 35J25, 35J60.

Resumen

El objetivo del trabajo es ilustrar la aplicación de técnicas variacionales para la solución de un problema del análisis no lineal. Más específicamente, se demuestra que un problema de Dirichlet sublineal tiene por lo menos una solución cuando el crecimiento de la no linealidad en infinito está controlado por una recta de pendiente menor que el primer valor propio. La demostración utiliza un resultado clásico de la teoría de minimización de funcionales.

Palabras y frases claves: Problema de Dirichlet sublineal, minimización de funcionales.

1 Introducción

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera suave y $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ el operador de Laplace. Sea λ_1 el primer valor propio del problema lineal

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

En este artículo se demuestra, usando técnicas variacionales, el siguiente resultado.

Teorema 1. *Supongamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory que envía conjuntos acotados en conjuntos acotados. Si existen $\mu \in (0, \lambda_1)$ y $M_1 > 0$ tales que*

$$|f(x,s)| \leq \mu\,|s| \qquad \forall\,|s| \geq M_1 \;\forall\; x \in \Omega \tag{2}$$

entonces el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + f\,(x,u) = 0 & en\ \Omega, \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

tiene al menos una solución.

El Teorema 1 se puede probar también empleando técnicas de punto fijo, más especificamente el Teorema de Schauder (véase [12]). Esta técnica se puede usar gracias a la hipótesis $\mu < \lambda_1$ en el Teorema 1. Bajo condiciones diferentes, por ejemplo cuando la derivada de la no linealidad es mayor que el primer valor propio, la existencia de soluciones para el problema (3) se puede obtener por medio de métodos variacionales. Este problema ha sido ampliamente estudiado por distintos autores tanto en el caso radial (véase [2] y [9]) como en el caso no radial (véase [3], [4], [5], [6], [7], [8]). La solubilidad del problema (3) ha estado ligada a la posición de la derivada de la no linealidad con respecto al espectro del operador de $-\Delta$. En efecto, A. Castro y J. Cossio en [2], usando técnicas de bifurcación, demostraron que el problema (3), con f dependiendo sólo de u, tiene $4j-1$ soluciones radiales cuando Ω es una bola y la no linealidad tiene un cero positivo y el rango de la derivada de la no linealidad incluye al menos los primeros j valores propios. En [3], usando técnicas variacionales y teoría de grado, A. Castro y J. Cossio demostraron que si el intervalo $(f'(0), f'(\infty))$ contiene los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ y $f'(t) < \lambda_{k+1}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces (3) tiene por lo menos cuatro soluciones no triviales. K.C. Chang (véase [7]) se ha aproximado al problema (3) usando Teoría de Morse.

El Teorema 1 se demuestra usando un resultado clásico de la teoría de minimización de funcionales, el cual hemos incluido, por efecto de completez, en la Sección 2. La demostración del Teorema 1 se presenta en la Sección 3. Allí se incluye, además, un ejemplo donde se aplica el Teorema 1 (véase Proposición 3).

2 Un teorema de minimización de funcionales

Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Carathéodory, es decir $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua c.t.p $x \in \Omega$ y $f(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$. Supongamos que f que satisface la condición de crecimiento

$$|f(x,s)| \leq c\,|s|^{p-1} + b(x) \qquad \forall s \in \mathbb{R} \text{ y para casi todo } x \in \Omega, \tag{4}$$

donde

$$\begin{cases} 1 \leq p < \frac{2N}{N-2} & \text{si } N \geq 3 \\ 1 \leq p < +\infty & \text{si } N = 2, \end{cases}$$

$b \in L^{p'}(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y c es una constante positiva.

Consideremos el espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ (véase [1]) y el funcional $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u)\,, \tag{5}$$

donde $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)\,dt$. Con las hipótesis que se tienen sobre f se puede probar que J está bien definido, J es débilmente inferiormente semicontinuo (véase [10], p.18), $J \in C^1\left(H_0^1(\Omega),\mathbb{R}\right)$ (véase [13], p.90) y

$$\langle DJ(u),v\rangle_{H_0^1}=\int_\Omega \nabla u.\nabla v-\int_\Omega f(x,u)\,v \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{6}$$

El siguiente teorema, que es de carácter abstracto, se utiliza en la demostración del Teorema 1. Recordemos que un funcional $I: X\to\mathbb{R}$ definido en un espacio de Banach X es secuencialmente semicontinuo inferiormente si $x_n \rightharpoonup x_0$ implica que $I(x_0)\le \liminf_{n\to\infty} I(x_n)$.

Teorema 2. *Sea X un espacio de Banach reflexivo real y sea $I: X\to\mathbb{R}$ un funcional débilmente secuencialmente semicontinuo inferiormente. Si I es coercivo en X, es decir $I(x)\to\infty$ cuando $\|x\|\to\infty$, entonces existe un $x_0\in X$ tal que*

$$I(x_0)=\min_{x\in X} I(x). \tag{7}$$

Además, si I es diferenciable entonces $DI(x_0)=0$.

Demostración. Consideremos una sucesión $\{x_n\}_n\subset X$ tal que $I(x_n)\to \inf_X I$ cuando $n\to\infty$. En virtud de la coercividad de I, la sucesión $\{x_n\}_n$ está acotada. Por la reflexividad de X existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_k$ y un $x_0\in X$ tales que $x_{n_k}\rightharpoonup x_0$ cuando $k\to\infty$. Debido a la hipótesis de semicontinuidad de I,

$$I(x_0)\le \liminf_{k\to\infty} I(x_{n_k})=\inf_X I.$$

Esto demuestra la primera afirmación del teorema. A partir de la definición de diferenciabilidad se demuestra fácilmente que $DI(x_0)=0$. $\square$

En las siguiente sección aplicaremos el Teorema 2 tomando $X=H_0^1(\Omega)$ e $I=J$, donde J está definido por (5).

3 Demostración del teorema 1

Recordamos que una solución débil de (3) es una función $u\in H_0^1(\Omega)$ que satisface

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v-\int_\Omega f(x,u)\,v=0 \qquad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Como f envía conjuntos acotados en conjuntos acotados, existe una constante $c_1>0$ tal que

$$|f(x,s)|\le c_1 \qquad \forall\,|s|\le M_1\ \forall\, x\in\Omega. \tag{8}$$

De (2) y (8) se tiene que

$$|f(x,s)|\le \mu\,|s|+c_1 \qquad \forall s\in\mathbb{R},\forall x\in\Omega \tag{9}$$

es decir, f satisface (4) con $p = 2$. Por lo tanto el funcional J definido por (5) es tal que $J \in C^1\left(H_0^1(\Omega), \mathbb{R}\right)$ y

$$\langle DJ(u), v\rangle_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u.\nabla v - \int_\Omega f(x,u)\, v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{10}$$

En particular $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (3) si y sólo si u es un punto crítico de J. Usando (2), (8) y la descomposición $F(x,s) = \int_0^{M_1} f(x,t)dt + \int_{M_1}^s f(x,t)dt$, se obtiene

$$F(x,s) \le \frac{1}{2}\mu s^2 + c_2 \qquad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall x \in \Omega, \tag{11}$$

donde c_2 es una constante positiva. Sea $u \in H_0^1(\Omega)$. De (11) se sigue que

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega F(x,u) \\ &\ge \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{2}\mu\int_\Omega u^2 - c_2|\Omega|. \end{aligned}$$

Por la caracterización variacional de λ_1 (véase Brézis [1], p.168-174) se tiene que

$$\int_\Omega u^2 \le \frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

Por lo tanto

$$J(u) \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\mu}{\lambda_1}\right)\|u\|_{H_0^1}^2 - c_2|\Omega|.$$

Como $\mu < \lambda_1$ se sigue que

$$J(u) \longrightarrow +\infty \text{ cuando } \|u\|_{H_0^1} \longrightarrow +\infty,$$

lo cual prueba que el funcional J es coercivo. Como f satisface (4), por el Teorema 3 se concluye que existe $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ que es un punto crítico de J y por lo tanto u_0 es una solución débil del problema (3). Como f es sublineal y continua, por la teoría de regularidad para operadores elípticos (véase [6]) se sigue que las soluciones débiles son soluciones clásicas. Por lo tanto u_o es una solución clásica de (3).■

Como un ejemplo de aplicación del Teorema 1 demostramos la siguiente proposición.

Proposición 3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si existe $k > 0$ tal que*

$$\left|f'(t)\right| \le k < \lambda_1 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{12}$$

entonces el problema de Dirichlet

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = f(u) & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{13}$$

tiene una única solución.

Demostración. Por el Teorema del valor medio, para todo s

$$|f(s) - f(0)| \leq |f'(\xi)s| \leq k|s|$$

donde ξ está entre 0 y s. Por tanto para todo s

$$|f(s)| \leq k|s| + |f(0)|$$

que es la desigualdad (10) en el caso que estamos considerando. El resto de la prueba se sigue de manera análoga a la demostración del Teorema 1.

Demostremos ahora la unicidad. Sean u y v soluciones del problema (13). Entonces, usando la fórmula de Green, se tiene

$$\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 = \int_\Omega (u - v)(f(u) - f(v)).$$

Utilizando el Teorema del valor medio y la hipótesis (12) se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 \leq k \int_\Omega (u - v)^2.$$

Por la desigualdad de Poincaré se sigue entonces que

$$\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 \leq \frac{k}{\lambda_1} \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 .$$

Como $\frac{k}{\lambda_1} < 1$, $||u - v||_{H_0^1} = 0$ de donde se concluye la unicidad. $\square$

Observación: Supongamos que f envía conjuntos acotados en conjuntos acotados, satisface la condición (4) y cumple

$$\lim_{|s| \to \infty} \sup \frac{f(x, s)}{s} \leq \overline{\mu} < \lambda_1$$

en lugar de (2). Razonando como en la demostración del Teorema 1, también se puede demostrar que bajo estas hipótesis el problema (3) tiene al menos una solución.

Agradecimientos: Los autores agradecen al evaluador del artículo por sus correcciones y valiosas observaciones relacionadas con el mismo.

Referencias

[1] H. Brézis, Análisis Funcional, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[2] A. Castro and J. Cossio, Multiple Radial Solutions for a Semilinear Dirichlet Problem in a Ball, Rev. Colombiana Mat. 27 (1993), 15-25.

[3] A. Castro and J. Cossio, Multiple Solutions for a Nonlinear Dirichlet Problem, SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 1554-1561.

[4] A Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger, A Sign–changing Solution for a Superlinear Dirichlet Problem, Rocky Mountain J.M. 27 (1997), 1041-1053.

[5] A Castro, J. Cossio and J. M. Neuberger, On Multiple Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem, Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications, 30 (1997), 3657-3662.

[6] A. Castro and A. Lazer, Critical Point Theory and the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet problem, Ann. Mat. Pura Appl., 70 (1979), 113-137.

[7] K. C. Chang, Solutions of Asymptotically Linear Operators Equations via Morse Theory, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 693-712.

[8] J. Cossio, Múltiples Soluciones para un Problema Elíptico Semilineal, Academia Colombiana de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Colección Memorias No. 7 (1995), 53-59.

[9] M. Esteban, Multiple Solutions of semilinear Elliptic Problems in a Ball, J. Differential Equations 57 (1985), 112-137.

[10] D. G. De Figueiredo, The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.

[11] D. G. De Figueiredo, Positive Solutions of Semilinear Elliptic Problems, Lecture Notes in Mathematics, Differential Equations, Proceedings (Sao Paulo), Springer-Verlag, 1981.

[12] S. Kesavan, Topics in functional analysis and applications, Wiley Eastern Limited, Bangalore, India, 1989.

[13] P. H. Rabinowitz, Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations, Regional Conference Series in Mathematics, number 65, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1986.

Dirección de los autores: J.B. Baena, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. jbbaena@unalmed.edu.co. — J. Cossio, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. jcossio@unalmed.edu.co. — C. A. Vélez, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín. cauvelez@unalmed.edu.co.