

Método Galerkin–Rosenbrock adaptativo para un modelo de reacción–combustión

Carolina Domínguez García
Universidad del Valle

Jairo Duque
Universidad del Valle

Recibido Feb. 17, 2009

Aceptado Oct. 28, 2009

Abstract

In this paper the existence and uniqueness of a weak solution for a nonlinear parabolic system modeling a combustion-reaction process are proved. The combustion-reaction process obeys Arrhenius' Law for small values of time. The boundary conditions describe the ignition process of the reaction by means of a Dirichlet condition on a portion of the boundary kept at a constant temperature, while on the rest of the boundary a homogeneous Neumann condition is maintained after ignition. Numerical results validating the efficiency of the proposed multistep method are also presented.

Keywords: Finite element method, a priori estimate, nonlinear parabolic system, Fixed-Point Theorem, Rosenbrock method

MSC(2000): 47J25, 65M60

Resumen

En este trabajo se demuestra existencia y unicidad de la solución débil de un sistema parabólico no lineal de ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera mixtas, las cuales modelan un proceso de reacción–combustión. El proceso de reacción–combustión obedece la ley de Arrhenius para valores pequeños del tiempo. Las condiciones de frontera describen el proceso de ignición de la reacción mediante una condición tipo Dirichlet que calienta una parte de la frontera, mientras el resto de la frontera tiene una condición tipo Neumann homogénea la cual se mantiene después de la ignición. Además se presentan resultados numéricos que validan la eficiencia del método multipaso propuesto.

Palabras y frases claves: Método de los elementos finitos, estimativo a priori, sistema parabólico no lineal, teorema de punto fijo, método de Rosenbrock

1 Introducción

Consideremos el siguiente sistema parabólico no lineal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + A(x, t) u &= f(u) & \text{en } \Omega \times (0, \tau], \\ B(x, t) u &= g(x, t) & \text{sobre } \partial\Omega \times [0, \tau], \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es el dominio espacial con frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ que satisface $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $x = (x^1, \dots, x^N) \in \Omega$ es la variable espacial, t es la variable temporal con $t \in [0, \tau]$ para algún $\tau > 0$, A es un operador lineal, B es el operador que describe las condiciones de frontera, $u \in \mathbb{R}^m$ es la función solución en términos de las variables (x, t) y el término $f(u)$ es una función no lineal en u . Denotaremos

con Ω_τ al conjunto $\Omega \times (0, \tau]$ ($\bar{\Omega}_\tau$ al conjunto $\bar{\Omega} \times (0, \tau]$) y con ∂_i la derivada parcial respecto a x_i . El operador A está definido como

$$A(x, t)u = \sum_{j,k=1}^N -\partial_j(a_{jk}(x, t) \partial_k u) + a_j(x, t) \partial_j u + c(x, t)u.$$

Las condiciones de frontera son mixtas; definidas de tipo Dirichlet

$$B(x, t)u = u \text{ sobre } \Gamma_1,$$

donde $u = 0$ en Γ_1 , y de tipo Neumann

$$B(x, t)u = \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x, t)\eta_j \partial_k u = g(x, t)|_{\Gamma_2} \text{ sobre } \Gamma_2,$$

donde η_j es la j -ésima componente del vector $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, el cual es normal hacia afuera de la frontera $\partial\Omega$.

Hipótesis del problema del sistema parabólico en estudio:

- i. Ω es una región abierta y acotada en \mathbb{R}^N con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$ y $N \geq 1$.
- ii. $g(x, t) \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega \times [0, \tau], \mathbb{R}^m)$ y $f(u(\cdot, t)) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ es Lipschitz continua.
- iii. Los coeficientes $a_{jk}(x, t)$, $a_j(x, t)$, $c(x, t) \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}_\tau, \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ para $j, k = 1, \dots, N$, son matrices $m \times m$ para cada $j, k = 1, \dots, N$, las cuales se pueden representar como

$$\begin{aligned} a_{jk} &= (a_{jk}^{rs}(x, t))_{1 \leq r, s \leq m}, & a_j &= (a_j^{rs}(x, t))_{1 \leq r, s \leq m}, & 1 \leq j, k \leq N, \\ c &= (c^{rs}(x, t))_{1 \leq r, s \leq m}. \end{aligned}$$

Además, existe una constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{jk=1}^N \sum_{rs=1}^m a_{jk}^{rs}(x, t) \zeta_k^s \zeta_j^r \geq \theta |\zeta|^2 \quad (x, t) \in \bar{\Omega}_\tau, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{mN}, \quad (2)$$

donde la norma de cada uno de los anteriores coeficientes está dada por

$$\begin{aligned} \|a_{jk}\|_{\text{máx}} &= \sum_{rs=1}^m \|a_{jk}^{rs}(x, t)\|_{\text{máx}_{x \in \Omega}}, & \|a_j\|_{\text{máx}} &= \sum_{rs=1}^m \|a_j^{rs}(x, t)\|_{\text{máx}_{x \in \Omega}} \\ \|c\|_{\text{máx}} &= \sum_{rs=1}^m \|c^{rs}(x, t)\|_{\text{máx}_{x \in \Omega}}. \end{aligned}$$

En lo sucesivo usaremos la siguiente notación:

- Escribiremos las funciones $a_{jk}(x, t)$, $a_j(x, t)$, $c(x, t)$ y $g(x, t)$ sin sus argumentos.
- Denotaremos con u' , la derivada parcial de u respecto al tiempo $\frac{\partial}{\partial t}u$.
- El espacio $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ contiene las funciones $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde $v = (v^1, \dots, v^m)$, tal que cada $v^i \in L^2(\Omega)$ para $0 \leq i \leq m$, y la norma se define como $\|v\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)} = \left(\sum_{i=1}^m \|v^i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$.

De forma análoga se define el espacio $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ cuya norma es

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)} &= \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^m (v^i)^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^N (\partial_j v^i)^2 \right) dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\|v\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 + \|Dv\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En lo sucesivo denotaremos la norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}$ y $\|\cdot\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)}$, como $\|\cdot\|_{L^2}$ y $\|\cdot\|_{H^1}$, respectivamente.

- X es un espacio de Banach. Los espacios $L^p(0, \tau; X)$ y $\mathcal{C}(0, \tau; X)$, se tomarán como esta definido en [7, cap 5.9.2].

2 Formulación variacional del problema

A continuación plantearemos la formulación variacional del sistema (1). Consideremos la forma bilineal b dependiente del tiempo

$$b(u, v; t) = \sum_{j,k=1}^N \left(\int_{\Omega} a_{jk} \partial_k u \partial_j v \, dx + \int_{\Omega} (a_j \partial_j u v + cuv) \, dx \right). \quad (3)$$

Ahora, supongamos que u es una solución regular del problema con la siguiente transformación

$$\mathbf{u} : [0, \tau] \rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^m), \quad (4)$$

definida como $[\mathbf{u}(t)](x) := u(x, t)$ para $x \in \Omega$ y $0 \leq t \leq \tau$, análogamente definimos $\mathbf{g} : [0, \tau] \rightarrow L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)$ tal que $[\mathbf{g}(t)](x) := g(x, t)$ para $x \in \Gamma_2$ y $0 \leq t \leq \tau$.

Supongamos $v \in V = H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, luego multiplicamos la EDP (1) por v e integramos sobre Ω . Y aplicando integración por partes en el término de segundo orden en la derivada, obtenemos la siguiente expresión

$$(\mathbf{u}', v) + b(\mathbf{u}, v; t) = (f, v) + (\mathbf{g}, v) \quad (5)$$

para cada $0 \leq t \leq \tau$, donde (\cdot, \cdot) denota el producto interno en $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, excepto para el término (\mathbf{g}, v) en donde se toma el producto interno en $L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)$.

En lo sucesivo los superíndices indicarán las componentes de las funciones y se considerará $\|v\|_V \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V}(\mathbf{u}', v) &= \sup_{v \in V}(-b(\mathbf{u}, v; t) + (f, v) + (\mathbf{g}, v)) \\ &\leq \sup_{v \in V} \left(\sum_{j,k=1}^N \|a_{jk}\|_{\text{máx}} \int_{\Omega} |D\mathbf{u}| |Dv| dx + \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\text{máx}} \int_{\Omega} |D\mathbf{u}| |v| dx + \right. \\ &\quad \left. \|c\|_{\text{máx}} \int_{\Omega} |\mathbf{u}| |v| dx + \int_{\Omega} |fv| dx + \int_{\Gamma_2} |\mathbf{g}v| dS \right), \end{aligned}$$

luego tomamos $a = \sum_{j,k=1}^N \|a_{jk}\|_{\text{máx}}$, $\tilde{a} = \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\text{máx}}$, y $\tilde{c} = \|c\|_{\text{máx}}$, y aplicando la desigualdad de Hölder para integrales, obtenemos

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V}(\mathbf{u}', v) &\leq \sup_{v \in V} \left(a \|D\mathbf{u}\|_{L^2} \|Dv\|_{L^2} + \tilde{a} \|D\mathbf{u}\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \tilde{c} \|\mathbf{u}\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \right. \\ &\quad \left. \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)} \|v\|_{L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)} \right), \quad (6) \end{aligned}$$

como Ω es acotado y $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, aplicamos el teorema de la Traza para garantizar que existe un operador lineal acotado E^r y una constante μ_r tal que

$$\begin{aligned} \|E^r v^r\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 &\leq \mu_r \|v^r\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{para } 1 \leq r \leq m, \\ \|Ev\|_{L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)} &\leq \mu \|v\|_{H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)} \quad \text{con } \mu = \left(r \max_{1 \leq r \leq m} \mu_r \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

aplicando en (6), la desigualdad de Hölder para sumas finitas, se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{v \in V}(\mathbf{u}', v) &\leq \sup_{v \in V} \left(\left(a^2 \|D\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \tilde{a}^2 \|D\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \tilde{c}^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \left(\|Dv\|_{L^2}^2 + 3\|v\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)} \mu \|v\|_{H^1} \right), \end{aligned}$$

usando la desigualdad $(|x| + |y|)^q \leq |x|^q + |y|^q$ para $0 < q < 1$ en el primer término del lado derecho y posteriormante dividiendo en ambos lados por $\|v\|_{H^1}$ nos queda

$$\sup_{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)} \frac{(\mathbf{u}', v)}{\|v\|_{H^1}} \leq \sqrt{3}(a^2 + \tilde{a}^2 + \tilde{c}^2) \|\mathbf{u}\|_{H^1} + \sqrt{3} \|f\|_{L^2} + \mu \|\mathbf{g}\|_{L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)}, \quad (7)$$

por tanto $\mathbf{u}'(t)$ pertenece al espacio dual de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, siempre que $\mathbf{u}(t) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $f(u(\cdot, t)) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ y $\mathbf{g}(t) \in L^2(\Gamma_2, \mathbb{R}^m)$.

Entonces la formulación del problema variacional consiste en encontrar $\mathbf{u} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$(\mathbf{u}', v) + b(\mathbf{u}, v; t) = (f, v) + (\mathbf{g}, v), \quad \text{para } v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \quad (8)$$

con $v|_{\Gamma_1} = 0$, $u(x, 0) = u_0(x)$ en Ω , donde $t \in (0, \tau]$, $\mathbf{u}'(t)$ pertenece al dual de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ y $b(\mathbf{u}, v; t)$ es la forma bilineal presentada en (3).

3 Existencia y unicidad de la solución débil

Para demostrar existencia y unicidad de la solución débil del sistema (1), primero se resuelve el problema lineal de existencia y unicidad, suponiendo $f = f(x, t)$, y posteriormente recurrimos al teorema de punto fijo de Banach considerando $f = f(u)$.

Supongamos $f = f(x, t)$ para definir $[\mathbf{f}(t)](x) := f(x, t)$, escribiremos $\mathbf{f} : [0, \tau] \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, adicionalmente de (7) podemos considerar la solución $u = u(x, t) \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ para cada $0 \leq t \leq \tau$. El espacio $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ separable implica la existencia de una base ortogonal $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ del espacio de soluciones $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$, con funciones suaves $w_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($w_i = (w_i^1, w_i^2, \dots, w_i^m)$), para las cuales $w_i|_{\Gamma_1} = 0$, y a su vez estas funciones forman una base ortonormal del espacio $L^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m)$.

A continuación aplicaremos el método de Galerkin usando la notación dada en (4), tomando n como un entero positivo en la función de la solución aproximada $\mathbf{u}_n : [0, \tau] \rightarrow H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ definida como

$$\mathbf{u}_n(t) = \sum_{i=1}^n d_i^n(t) w_i(x). \quad (9)$$

La condición inicial está dada por

$$u_0(x) = \mathbf{u}_0(x) = \sum_{i=1}^n d_i^n(0) w_i(x), \quad (10)$$

multiplicando por $w_l(x)$ e integrando sobre Ω , obtenemos

$$(\mathbf{u}_0(x), w_l(x)) = d_l^n(0). \quad (11)$$

Nuestro objetivo es determinar los coeficientes $d_i^n(t)$ para $t \in (0, \tau]$ con $i = 1, \dots, n$ de la ecuación variacional

$$(\mathbf{u}'_n, w_l) + b(\mathbf{u}_n, w_l; t) = (\mathbf{f}, w_l) + (\mathbf{g}, w_l). \quad (12)$$

Además $(\mathbf{u}'_n, w_l) = (d_l^n)'(t)$ y $b(\mathbf{u}_n, w_l; t) = \sum_{i=1}^n d_i^n(t) b(w_i, w_l; t)$; de esta manera (12) se puede reescribir como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$(d_l^n)'(t) + \sum_{i=1}^n b(w_i, w_l; t) d_i^n(t) = (\mathbf{f}, w_l) + (\mathbf{g}, w_l), \quad l = 1, \dots, n$$

con $(\mathbf{u}_0(x), w_l(x)) = d_l^n(0)$, y aplicando el teorema fundamental de existencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias se garantiza existencia y unicidad de $(d_1^n(t), d_2^n(t), \dots, d_n^n(t))$ para casi todo $0 \leq t < \tau$. De esta manera obtenemos que la función \mathbf{u}_n es solución de (12) en $\bar{\Omega}_\tau$ con condición inicial (11).

Proposición 3.1. *Supongamos que la forma bilineal $b(\cdot, \cdot, t)$ satisface la condición definida en (2), entonces existen constantes $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ tales que*

$$\kappa_1 \|\mathbf{u}\|_{H^1} \leq b(\mathbf{u}, \mathbf{u}; t) + \kappa_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2}.$$

Demostración. De la condición (2), tenemos que existe una constante $\theta > 0$ tal que $\sum_{j,k=1}^N \sum_{r,s=1}^m a_{jk}^{rs} \zeta_k^s \zeta_j^r \geq \theta |\zeta|^2$, con $\zeta \in \mathbb{R}^{mN}$, observemos que $\zeta = D\mathbf{u}$, donde $|D\mathbf{u}| = \left(\sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^N (\partial_j \mathbf{u}^s)^2 \right)^{1/2}$, reemplazando estos valores en la desigualdad e integrando sobre Ω obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \theta |D\mathbf{u}|^2 dx &\leq \int_{\Omega} \sum_{j,k=1}^N \sum_{r,s=1}^m a_{jk}^{rs} \partial_k \mathbf{u}^s \partial_j \mathbf{u}^r \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{u}; t) - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \sum_{r,s=1}^m a_j^{rs} \partial_j \mathbf{u}^s \mathbf{u}^r dx - \int_{\Omega} \sum_{r,s=1}^m c^{rs} \mathbf{u}^s \mathbf{u}^r dx \\ &\leq b(\mathbf{u}, \mathbf{u}; t) + \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\max} \int_{\Omega} |D\mathbf{u}| |\mathbf{u}| dx + \|c\|_{\max} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx, \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Young para $\epsilon > 0$

$$\int_{\Omega} \theta |D\mathbf{u}|^2 dx \leq b(\mathbf{u}, \mathbf{u}; t) + \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\max} \int_{\Omega} \left(\epsilon |D\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{4\epsilon} |\mathbf{u}|^2 \right) dx + \|c\|_{\max} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx,$$

escogemos ϵ que satisfaga $\epsilon \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\max} = \frac{\theta}{2}$, luego adicionamos el término $\frac{\theta}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx$ en ambos lados de la desigualdad, y finalmente agrupando términos semejantes obtenemos

$$\frac{\theta}{2} \int_{\Omega} (|D\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}|^2) dx \leq b(\mathbf{u}, \mathbf{u}; t) + \left(\frac{1}{4\epsilon} \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\max} + \|c\|_{\max} + \frac{\theta}{2} \right) \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx,$$

tomando $\kappa_1 = \frac{\theta}{2}$ y $\kappa_2 = \frac{1}{4\epsilon} \sum_{j=1}^N \|a_j\|_{\max} + \|c\|_{\max} + \frac{\theta}{2}$, se concluye el resultado. \square

Observación 3.2. *Como $\kappa_1 > 0$ también se tiene el siguiente estimativo*

$$0 \leq b(\mathbf{u}, \mathbf{u}; t) + \kappa_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2}^2$$

Proposición 3.3. *(Estimativos de la energía) Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{u}_n(t)\|_{L^2} + \|\mathbf{u}_n(t)\|_{L^2(0,\tau,H^1(\Omega,\mathbb{R}^m))} + \|\mathbf{u}'_n(t)\|_{L^2(0,\tau,(H^1(\Omega,\mathbb{R}^m))')} \leq \\ C (\|u_0(x)\|_{L^2} + \|\mathbf{f}(t)\|_{L^2(0,\tau,L^2(\Omega,\mathbb{R}^m))} + \|\mathbf{g}\|_{L^2(0,\tau,L^2(\Gamma_2,\mathbb{R}^m))}) \quad (13) \end{aligned}$$

Demostración. La demostración de este estimativo es técnica y puede ser consultada en el trabajo de tesis [5, cap. 2] \square

De los estimativos de la energía dados en la proposición 3.3 se obtiene que la sucesión $\{\mathbf{u}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L^2(0, \tau, H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))$ y que la sucesión $\{\mathbf{u}'_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $L^2(0, \tau, (H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))')$. Como

$$L^2(0, \tau, H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)) \text{ y } L^2(0, \tau, (H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))')$$

son espacios de Hilbert (ver [3, pag 473]), entonces existen subsucesiones

$$\{\mathbf{u}_{n_l}(t)\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\mathbf{u}_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \text{ y } \{\mathbf{u}'_{n_l}(t)\}_{l=1}^{\infty} \subset \{\mathbf{u}'_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$$

tales que

$$\mathbf{u}_{n_l}(t) \rightharpoonup \mathbf{u}(t) \quad \text{en } L^2(0, \tau, H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)), \quad (14)$$

$$\mathbf{u}'_{n_l}(t) \rightharpoonup \mathbf{v} \quad \text{en } L^2(0, \tau, (H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))'), \quad (15)$$

por tanto $\mathbf{v} = \mathbf{u}'(t)$.

El siguiente resultado usa las subsucesiones $\{\mathbf{u}_{n_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ y $\{\mathbf{u}'_{n_l}(t)\}_{l=1}^{\infty}$ para demostrar la convergencia de la aproximación de Galerkin.

Teorema 3.4. *Existe una única solución débil del sistema parabólico lineal.*

Demostración. Demostremos existencia: Fijemos un entero $L \in \mathbb{N}$ y tomemos una función $v \in C^1(0, \tau, H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))$ tal que $v(t) = \sum_{l=1}^L d_l(t) w_l(x)$, donde $\{d_l(t)\}_{l=1}^L$ son funciones suaves. Multiplicando la ecuación (12) por $d_l(t)$ y sumando desde 1 hasta L , tenemos

$$(\mathbf{u}'_n(t), v(t)) + b(\mathbf{u}_n(t), v(t); t) = (\mathbf{f}(t), v(t)) + (\mathbf{g}(t), v(t)),$$

luego integramos de 0 a τ y reemplazamos n por n_l

$$\int_0^{\tau} \left((\mathbf{u}'_{n_l}(t), v(t)) + \sum_{j,k=1}^N \left(\int_{\Omega} (a_{jk} \partial_k \mathbf{u}_{n_l} \partial_j v) dx + \int_{\Omega} a_j \partial_j \mathbf{u}_{n_l} v dx \right) + \int_{\Omega} c \mathbf{u}_{n_l} v dx \right) dt = \int_0^{\tau} \left((\mathbf{f}(t), v(t)) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}(t) v dS \right) dt, \quad (16)$$

de (14) y (15) aplicamos la convergencia débil para las sucesiones \mathbf{u}'_{n_l} y \mathbf{u}_{n_l} , por lo tanto

$$\int_0^{\tau} \left((\mathbf{u}'(t), v(t)) + b(\mathbf{u}(t), v(t); t) \right) dt = \int_0^{\tau} \left((\mathbf{f}(t), v(t)) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}(t) v dS \right) dt.$$

Ahora, reemplazando $(\mathbf{u}'(t), v(t))$ por $(\mathbf{u}(t), v(t))' - (\mathbf{u}(t), v'(t))$ y considerando $v(\tau) = 0$, obtenemos

$$\int_0^\tau (- (\mathbf{u}(t), v'(t)) + b(\mathbf{u}(t), v(t); t)) dt = \int_0^\tau \left((\mathbf{f}(t), v(t)) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}(t)v dS \right) dt + (\mathbf{u}(0), v(0)). \quad (17)$$

Retomando la ecuación (16) escribimos

$$\int_0^\tau (- (\mathbf{u}_{n_l}(t), v'(t)) + b(\mathbf{u}_{n_l}(t), v(t); t)) dt = \int_0^\tau \left((\mathbf{f}(t), v(t)) + \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}(t)v dS \right) dt + (\mathbf{u}_{n_l}(0), v(0)), \quad (18)$$

y por definición de $v(t)$ tenemos $(u_0(x), v(0)) = \sum_{l=1}^L (u_0(x), w_l(x))^2$, adicionalmente $\mathbf{u}_{n_l}(0) = \sum_{k=1}^{n_l} d_k^{n_l}(0)w_k(x)$ implica que $(\mathbf{u}_{n_l}(0), v(0)) = \sum_{k=1}^L (u_0(x), w_k(x))^2$, por tanto $(\mathbf{u}_{n_l}(0), v(0)) = (u_0(x), v(0))$. En consecuencia (18) converge a

$$\int_0^\tau (- (\mathbf{u}(t), v'(t)) + b(\mathbf{u}(t), v(t); t)) dt = \int_0^\tau (\mathbf{f}(t), v(t)) dt + \int_0^\tau \int_{\Gamma_2} \mathbf{g}(t)v(t)dS dt + (u_0(x), v(0)), \quad (19)$$

por consiguiente $\mathbf{u}_{n_l}(0)$ converge débilmente a u_0 , y por (17) y (19) concluimos que $\mathbf{u}(0) = u_0$ por ser $v(0)$ arbitrario.

A continuación demostremos unicidad: supongamos que \mathbf{u} y \mathbf{w} son soluciones débiles del problema lineal ($f = f(x, t)$), entonces

$$(\mathbf{u}', v) + b(\mathbf{u}, v; t) = (\mathbf{f}, v) + (\mathbf{g}, v), \quad (20)$$

$$(\mathbf{w}', v) + b(\mathbf{w}, v; t) = (\mathbf{f}, v) + (\mathbf{g}, v), \quad (21)$$

restando (21) a (20), y reemplazando $v = \mathbf{u} - \mathbf{w}$, obtenemos

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{w}', \mathbf{u} - \mathbf{w}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w}; t) = 0. \quad (22)$$

Luego

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \mathbf{w})^2 dx = (\mathbf{u}' - \mathbf{w}', \mathbf{u} - \mathbf{w}), \quad (23)$$

obsérvese que el producto interno en el dual de $H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ se puede identificar con el producto interno de $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$, debido a la inclusión continua y densa

$H^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^2(\Omega, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow (L^2(\Omega, \mathbb{R}^m))' \hookrightarrow (H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))'$, donde se identifica el espacio $L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ con su dual por el teorema de representación de Riesz. Por lo anterior y la Observación 3.2 en (22), obtenemos

$$(\mathbf{u}' - \mathbf{w}', \mathbf{u} - \mathbf{w}) = -b(\mathbf{u} - \mathbf{w}, \mathbf{u} - \mathbf{w}; t) \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2,$$

luego

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2,$$

como $C > 0$ usamos la desigualdad de Gronwall

$$\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{w}(t)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2 \leq e^{\int_0^t 2C ds} \|\mathbf{u}(0) - \mathbf{w}(0)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}^2,$$

para todo $0 \leq t \leq \tau$, y por definición $u_0(x) = \mathbf{u}(0) = \mathbf{w}(0)$, entonces $\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t)$ para todo $0 \leq t \leq \tau$. \square

En lo sucesivo denotaremos con X el espacio $X = \mathcal{C}(0, \tau, L^2(\Omega, \mathbb{R}^m))$, y $\|v\|$ como

$$\|v\| = \max_{0 \leq t \leq \tau} \|v(t)\|_{L^2(\Omega, \mathbb{R}^m)}. \quad (24)$$

Considerando \mathbf{u} como en (4), tenemos que si $\mathbf{u}(t) \in L^2(0, \tau, H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))$ y $\mathbf{u}'(t) \in L^2(0, \tau, (H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))')$ entonces $\mathbf{u} \in X$ ([3, pág 473]).

A continuación presentamos nuestro resultado de existencia

Teorema 3.5. *Existe una única solución débil del sistema no lineal de EDPs parabólicas planteado en (1).*

Demostración. Considerando $\mathbf{u}(t) \in X$ como en (4), definamos la función $\mathbf{h}(t) := f(\mathbf{u}(t))$ para $0 \leq t \leq \tau$ tal que $\mathbf{h} \in L^2(0, \tau, L^2(\Omega, \mathbb{R}^m))$, siendo $f(\mathbf{u}(t))$ una función Lipschitz continua. Ahora consideremos el siguiente sistema parabólico lineal de EDPs

$$\begin{aligned} \mathbf{w}' + A(x, t)\mathbf{w} &= \mathbf{h}(t) & \text{en } \Omega_\tau \\ B(x, t)\mathbf{w} &= g(x, t) & \text{en } \partial\Omega \times [0, \tau] \\ \mathbf{w}(0) &= u_0(x) & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (25)$$

donde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $B(x, t)\mathbf{w} = \mathbf{w}$ con $\mathbf{w}|_{\Gamma_1} = 0$ en Γ_1 y $B(x, t)\mathbf{w} = \sum_{j,k=1}^N a_{jk}(x, t)\partial_k \mathbf{w} \eta_j = g(x, t)|_{\Gamma_2} = \mathbf{g}(t)|_{\Gamma_2}$ en Γ_2 . Por el Teorema 3.4 el problema (25) presenta una única solución débil con $\mathbf{w} \in L^2(0, \tau, H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))$ y $\mathbf{w}' \in L^2(0, \tau, (H^1(\Omega, \mathbb{R}^m))')$, en consecuencia $\mathbf{w} \in X$ y satisface

$$(\mathbf{w}'(t), v) + b(\mathbf{w}(t), v) = (\mathbf{h}(t), v) + (\mathbf{g}(t), v), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (26)$$

para cada $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ y $\mathbf{w}(0) = u_0(x)$.

Ahora definimos la aplicación $G : X \rightarrow X$ tal que para $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in X$ se tiene $\mathbf{w} = G(\mathbf{u})$ y $\tilde{\mathbf{w}} = G(\tilde{\mathbf{u}})$; como \mathbf{w} satisface (26) para $\mathbf{h} = f(\mathbf{u}(t))$ y $\tilde{\mathbf{w}}$ satisface (26) para un $\tilde{\mathbf{h}} = f(\tilde{\mathbf{u}}(t))$, entonces al reemplazar estos valores en (26) tenemos

$$(\mathbf{w}'(t), v) + b(\mathbf{w}(t), v) = (\mathbf{h}(t), v) + (\mathbf{g}(t), v) \quad (27)$$

$$(\tilde{\mathbf{w}}'(t), v) + b(\tilde{\mathbf{w}}(t), v) = (\tilde{\mathbf{h}}(t), v) + (\mathbf{g}(t), v), \quad (28)$$

restando (28) a (27)

$$(\mathbf{w}'(t) - \tilde{\mathbf{w}}'(t), v) + b(\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t), v; t) = (\mathbf{h}(t) - \tilde{\mathbf{h}}(t), v).$$

Considerando $v = \mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)$, junto con (23) y la Observación 3.2, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 + b(\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t), \mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t); t) + \\ &\quad C \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 \\ &= (\mathbf{h}(t) - \tilde{\mathbf{h}}(t), \mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)) + C \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Luego, por la desigualdad de Young para $\delta > 0$ escribimos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 &\leq 2\delta \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{4\delta} \|f(\mathbf{u}) - f(\tilde{\mathbf{u}})\|_{L^2}^2 + \\ &\quad 2C \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

por ser $f(\mathbf{u}(t))$ Lipschitz continua, existe un $K > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 \leq 2(\delta + C) \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 + \frac{K}{2\delta} \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}^2.$$

Tomando $\delta = \frac{K}{2}$

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 \leq (K + 2C) \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}^2,$$

y observando que $K + 2C > 0$, y $\|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}^2$ es una función no negativa y sumable sobre $[0, \tau]$, entonces por la desigualdad de Gronwall (forma diferencial) se obtiene

$$\|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{(K+2C) \int_0^t ds} \left(\|\mathbf{w}(0) - \tilde{\mathbf{w}}(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)\|_{L^2}^2 ds \right), \quad (29)$$

por definición de \mathbf{w} y $\tilde{\mathbf{w}}$ se tiene $\mathbf{w}(0) = \tilde{\mathbf{w}}(0) = u_0(x)$, y tomando el máximo sobre $0 \leq t \leq \tau$ en ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2}^2 &\leq e^{(K+2C)\tau} \max_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}^2 \\ \max_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{w}(t) - \tilde{\mathbf{w}}(t)\|_{L^2} &\leq \left(e^{(K+2C)\tau} \right)^{1/2} \max_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}, \end{aligned}$$

por (24) escribimos

$$\|G(\mathbf{u}) - G(\tilde{\mathbf{u}})\| \leq \left(e^{(K+2C)\tau}\tau\right)^{1/2} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|,$$

escogiendo un $\tau = t_1 \ll 1$ tal que $\left(e^{(K+2C)t_1}t_1\right)^{1/2} < 1$. De esta manera la aplicación G es una contracción y por el Teorema de Punto Fijo de Banach concluimos que G tiene un punto fijo, es decir, existe un $\mathbf{u}(t) \in X$ tal que $G(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{u}(t)$ para $0 \leq t \leq t_1$.

Ahora demostremos unicidad: supongamos que \mathbf{u} y $\tilde{\mathbf{u}}$ son dos soluciones débiles de (1), lo cual implica que en la desigualdad (29) $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ y $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{u}}$, así pues

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}^2 &\leq e^{(K+2C)\int_0^t ds} \left(\|\mathbf{u}(0) - \tilde{\mathbf{u}}(0)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \\ &= e^{(K+2C)t} \int_0^t \|\mathbf{u}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq \tau$ y por la desigualdad de Gronwall $\|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t)\|_{L^2}^2 = 0$ para $0 \leq t \leq \tau$, por lo tanto $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t)$ para $0 \leq t \leq \tau$. \square

4 Método de Galerkin–Rosenbrock adaptativo

El método de Rosenbrock es un método multipaso para calcular la solución aproximada u_n en el tiempo t_n a partir del dato inicial u_0 . Concretamente u_n se puede obtener de la siguiente forma recursiva

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{i=1}^s m_i U_{ni}, \quad \hat{u}_{n+1} = u_n + \sum_{i=1}^s \hat{m}_i U_{ni}, \quad (30)$$

con

$$\left(\frac{1}{\varepsilon\gamma}I - F_u(t_n, u_n)\right)U_{ni} = F(t_i, U_i) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{c_{ij}}{\varepsilon} U_{nj} + \varepsilon\gamma_i F_t(t_n, u_n), \quad (31)$$

donde $\varepsilon > 0$ es el tamaño del paso en el tiempo, $1 \leq s \leq 7$ es un entero positivo que determina el número de pasos de Rosenbrock, los valores internos están definidos como $t_n = n\varepsilon$, $t_i = t_n + \alpha_i\varepsilon$, $U_i = u_n + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} U_{nj}$, y los coeficientes m_i , \hat{m}_i , γ , γ_i , α_i vienen predeterminados según el s escogido, los cuales se pueden consultar en [8, cap. II y V.1, Appendix B] junto con la ecuaciones que discretizan las condiciones de frontera y demás detalles del método.

Los cálculos numéricos fueron realizados con **MuFeS** [6], un código basado en el método de los elementos finitos, desarrollado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle. Las rutinas de refinamiento que hemos implementado usan el código Triangle [11], donde en cada proceso de refinamiento producimos una triangulación de Delaunay, reduciendo el área de los triángulos

en un 50 %, este mismo procedimiento se aplica a la generación de los subdominios $\Omega_i \subset \Omega$.

En cada iteración del método de Rosenbrock calculamos los vectores U_{ni} (con $i = 1, \dots, s$ en la iteración n) de (31) mediante una discretización de Galerkin con elementos finitos lineales, combinando esta discretización con la técnica adaptativa descrita en [4], la cual consiste en enriquecer el espacio de elementos finitos, refinando localmente. Para realizar este proceso adaptativo consideremos una partición regular \mathcal{T}^h de Ω de elementos triangulares T de diámetro h_T (área del triángulo), y sea w_T el conjunto formado por el elemento T unido con los elementos triangulares que comparten vértice con el. Obtenida la discretización del dominio se aplica el método de los elementos finitos para calcular una solución aproximada U_{ni}^h de (31), a esta solución se le llamara solución global. Luego tomamos el subdominio $\Omega_i \subset \Omega$, con frontera $\partial\Omega_i$ determinada por el valor que presenta la solución aproximada U_{ni}^h en los nodos de la frontera, donde Ω_i esta formado por los elementos resultantes de la refinación del conjunto w_T (véase la figura 1). En Ω_i se resuelve la ecuación (31), calculandose U_{ni}^h de manera local, este procedimiento se realiza hasta completar todos los elementos de la partición \mathcal{T}^h , luego se considera un indicador del error basado en la solución local y la global para cada elemento $T \in \mathcal{T}^h$ y se refina en los elementos $T \in \mathcal{T}^h$ que contribuyen con el 60 % o mas del error en la solución ($\mu = 0,6$ en [4]). En la malla refinada se calcula de nuevo U_{ni}^h . Finalmente con los vectores $U_{n1}, U_{n2}, \dots, U_{ns}$ y con la solución actual u_n se determina u_{n+1} en la malla final refinada, sin embargo solo tomaremos el valor de u_{n+1} en los nodos pertenecientes a la malla inicial (es decir la malla que se utilizó para el primer calculo de U_{n1}). De esta forma evitamos refinar elementos ya refinados que no contribuyen al error durante la evolución de la reacción en el tiempo (ver figura 5).

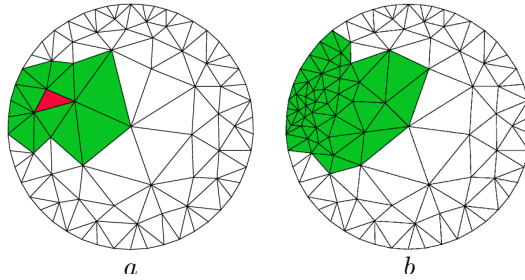


Figura 1: Refinamiento local realizado por el proceso adaptativo, donde (a) es el conjunto $w_{\mathcal{T}}$ asociado al triángulo $T \in \mathcal{T}^h$ y (b) es el respectivo subdominio Ω_i generado de la refinación de $w_{\mathcal{T}}$.

A continuación presentamos el proceso de reacción-combustión en un sólido, en donde seguiremos el comportamiento de la concentración de un reactante Y que comienza a combustionar en la medida en que se incrementa la temperatura T , debido a una fuente variable de calor que calienta una sección de la frontera

del sólido. Estos procesos describen una reacción química caracterizada por la combustión del reactante, por lo tanto la evolución del fenómeno de reacción-combustión se desarrolla en lapsos de tiempo muy cortos. El término no lineal del sistema determina la reacción química utilizada, la cual es de primer orden y contiene un término de Arrhenius, que acopla las componentes de la solución $u = (T, Y)$ y a su vez requiere una energía de activación E mínima para que la reacción ocurra.

Problema. Consideremos el siguiente problema, el cual ilustra un fenómeno de reacción-combustión

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(x, y, t) - \kappa \Delta T(x, y, t) &= Qw && \text{en } \Omega \times (0, \tau], \\ \frac{\partial}{\partial t} Y(x, y, t) &= -w && \text{en } \partial\Omega \times [0, \tau], \\ T(x, y, 0) &= 300 && \text{en } \bar{\Omega} \times \{t = 0\}, \\ Y(x, y, 0) &= 1 && \text{en } \bar{\Omega} \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (32)$$

con $w = K_0 Y e^{\frac{-E}{T}}$, donde el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es un círculo abierto de radio $R = 0.0024$ cm, $(x, y) \in \Omega$ son las variables espaciales, $t \in (0, \tau]$ es la variable temporal y la frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, la cual se ilustra en la figura 2.

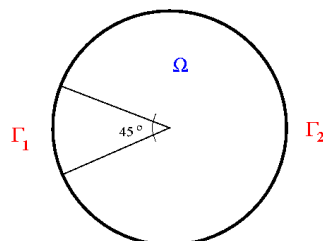


Figura 2: El dominio Ω y su frontera $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ tal que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, donde Γ_1 es un arco de circunferencia de 45° y el resto de circunferencia es Γ_2 .

Además suponemos condiciones de frontera mixtas, las cuales serán de tipo Neumann homogéneas excepto para T durante los primeros 0.05 seg, a esta condición la llamaremos T_D y viene dada por

$$T_D(x, y, t) = 300 + \theta t \quad \text{en } \Gamma_1 \quad \text{para } t \in (0, 0.05], \quad (33)$$

El reactante comienza activarse por una fuente variable descrita por la condición de frontera T_D hasta $t \leq 0.05$, posterior a este tiempo la condición cambia a una condición de frontera Neumann homogénea. Como la fuente no sigue siendo suministrada entonces tendremos que la temperatura alcanza su valor máximo \tilde{T}

en algún momento del proceso de reacción-combustión, donde $\tilde{T} > 300$. Q , E , θ y κ son coeficientes constantes positivos tales que Q es un parámetro liberador de calor, E es la energía de activación de la reacción y κ es un coeficiente de difusividad térmica. Adicionalmente K_0 es una función que describe el coeficiente de difusión microscópico respecto al radio, tal que $K_0 = 5800$ hasta el radio interno $r = 0.0018$ cm y se incrementa linealmente hasta llegar al radio del disco $R = 0.0024$ cm.

En este problema la función $f(T, Y) = (Qw, -w)$ corresponde a la parte no lineal del sistema (32), por consiguiente debemos probar que $f(T, Y)$ es Lipschitz continua. Para ello utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *Sea $f : X \rightarrow V$, X un conjunto convexo respecto a las componentes $x = (x_1, \dots, x_n)$ y V un espacio vectorial. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f(X)/\partial x_i$, $i = 1, \dots, n$ y están acotadas por M para toda $x \in X$, entonces f es Lipschitz continua en X .*

Se tiene

$$Df(T, Y) = \begin{pmatrix} -QK_0 \frac{Y}{T^2} e^{-E/T} & QK_0 e^{-E/T} \\ K_0 \frac{Y}{T^2} e^{-E/T} & -K_0 e^{-E/T} \end{pmatrix}$$

como Q y E son constantes positivas, y $K_0(x, y)$ es una función continua y acotada en Ω , entonces cada una de las derivadas parciales de f existen. Además el conjunto $[0, 1] \times (0, \tilde{T}]$ es convexo. Ahora probaremos que éstas derivadas parciales son acotadas en sus intervalos de definición; como $T > 0$ se determina que $\lim_{T \rightarrow 0^+} \frac{e^{-E/T}}{T^2} = 0$ (utilizando la sustitución $z = e^{1/T}$ para $T > 0$). Por tanto

$$\left| -QK_0 \frac{Y}{T^2} e^{-E/T} \right| \leq |(Q+1)5800 \frac{1}{T^2} e^{-E/\tilde{T}}| \leq |(Q+1)5800 e^{-E/\tilde{T}}|.$$

De esta forma se concluye que las derivadas parciales de $f(T, Y)$ son acotadas, por tanto $f(T, Y)$ es una función Lipschitz continua. Entonces aplicando el Teorema 3.5 concluimos que para el sistema de ecuaciones (32) existe una única solución débil.

Discretización del sistema aplicando el método de Rosenbrock: Partiendo pues del sistema de ecuaciones (32) y aplicando a éste el método de Rosenbrock, se tiene que

$$F_u U_{nj} = \begin{pmatrix} QK_0 \frac{Y}{T^2} e^{-E/T} + \kappa(\partial_x^2 + \partial_y^2) & QK_0 e^{-E/T} \\ -K_0 Y \frac{E}{T^2} e^{-E/T} & -K_0 e^{-E/T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,nj} \\ U_{2,nj} \end{pmatrix}.$$

Haciendo los respectivos calculos, la ecuación (31) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon\gamma}U_{1,nj} - QK_0Y\frac{E}{T^2}e^{-E/T}U_{1,nj} - \kappa(\partial_x^2U_{1,nj} + \partial_y^2U_{1,nj}) - QK_0e^{-E/T}U_{2,nj} \\ - QK_0U_{2,i}e^{-E/U_{1,i}} - \kappa(\partial_x^2U_{1,i} + \partial_y^2U_{1,i}) + \sum_{j=1}^{i-1}\frac{c_{ij}}{\varepsilon}U_{1,nj} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon\gamma}U_{2,nj} + K_0Y\frac{E}{T^2}e^{-E/T}U_{1,nj} + K_0e^{-E/T}U_{2,nj} + K_0U_{2,i}e^{-E/U_{1,i}} + \\ \sum_{j=1}^{i-1}\frac{c_{ij}}{\varepsilon}U_{2,nj} = 0. \end{aligned}$$

Las condiciones de fronteras (véase (33)) se agrupan apropiadamente en la ecuación $g(x, y, t, u) - B(x, y, t, u)u = 0$ sobre $\partial\Omega$ para $t \in (0, \tau]$ y en el esquema del método de Rosenbrock se representan como

$$-D_nU_{ni} = g(\cdot, t_i, U_i) - B(\cdot, t_i, U_i)U_i + \varepsilon\gamma_iE_n \quad (34)$$

$$g(x, y, t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} T_D \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para } (x, y) \in \Gamma_1 \text{ con } t \in (0, 0.05] \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para } (x, y) \in \Gamma_2 \text{ con } t \in (0, 0.05] \end{cases}$$

$$B(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \partial_\eta \end{pmatrix} & \text{para } (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ con } t \in (0.05, \tau] \\ \begin{pmatrix} \partial_\eta & 0 \\ 0 & \partial_\eta \end{pmatrix} & \text{para } (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ con } t \in (0.05, \tau]. \end{cases}$$

Siguiendo la nomenclatura de [8, cap. II.2 y VII.2], calculamos D_n y E_n , como g no depende de u y B no depende de t , entonces $D_n = -B(x, y)|_{u=u_n, t=t_n}$ en $\partial\Omega$ y $E_n = \frac{\partial}{\partial t}g(x, y, t)|_{u=u_n, t=t_n} = \theta$ en Γ_1 , reemplazando los anteriores resultados en (34) obtenemos

$$-(-B(x, y))U_{ni} = g(x, y, t_i) - B(x, y)U_i + \varepsilon\gamma_i\frac{\partial}{\partial t_n}g(x, y, t_n).$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} U_{1,ni} \\ \partial_\eta U_{2,ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_D - U_{1,i} + \varepsilon\gamma_i\partial_t T_L \\ -\partial_\eta U_{2,i} \end{pmatrix}$$

en Γ_1 para la primera componente, en $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ para la segunda componente, donde $t \in (0, 0.05]$, y

$$\begin{pmatrix} \partial_\eta U_{1,ni} \\ \partial_\eta U_{2,ni} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_\eta U_{1,i} \\ -\partial_\eta U_{2,i} \end{pmatrix} \text{ en } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ para } t \in (0.05, \tau]$$

El proceso adaptativo se limita a una iteración para cada cálculo del vector U_{ni} (para $i = 1, 2, 3$) en cada paso, en el cual refinamos los elementos que contribuyen con el 60% del error en la solución ($\mu = 0,6$ en [4]).

La solución del problema se obtuvo aplicando la técnica adaptativa con los siguientes datos: $\kappa = 0.05$, $\theta = 22000$, $s = 3$, el tamaño del paso fue $\varepsilon = 0.0003$ y se efectuaron 1200 iteraciones, así pues la combustión del reactante se efectuó en 0.36 segundos. La figura 3 muestra los cambios de temperatura en el disco. Una ilustración de la secuencia de refinación de la malla para el cálculo de los vectores U_{n1} , U_{n2} y U_{n3} , se puede observar en la figura 5, donde se calculó la solución aproximada $u = (T, Y)$ en el tiempo $t = 0.290$ seg. La solución se puede visualizar en la figura 3 para la componente T y en la figura 4 para la componente Y .

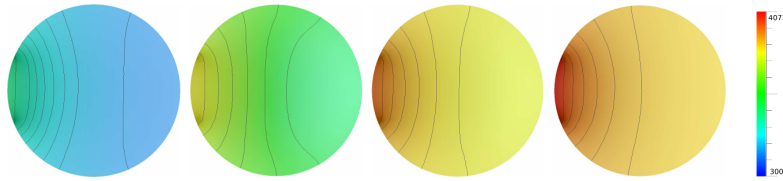


Figura 3: Temperatura T para $t = 0.156, 0.241, 0.30, 0.42$ seg.

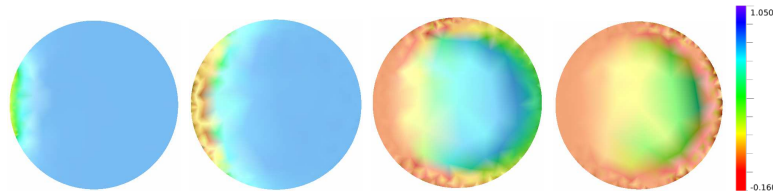


Figura 4: Concentración del reactante Y para $t = 0.074, 0.204, 0.285, \text{ y } 0.299$ seg. El color azul representa el reactante que aún no combustiona.

5 Conclusiones

1. En este trabajo presentamos un marco teórico apropiado para demostrar la existencia y unicidad de la solución débil de un sistema parabólico no lineal de ecuaciones de segundo orden en donde ilustramos un modelo de reacción-combustión en un sólido dominados por una reacción tipo Arrhenius, este

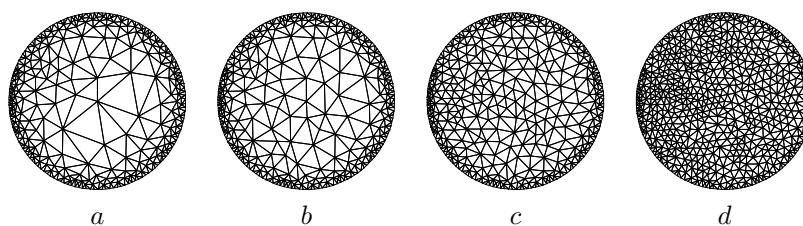


Figura 5: Proceso de refinación de la malla para el cálculo de U_{n1} , U_{n2} y U_{n3} , tomado en el tiempo $t_n = 0.290$ seg en la iteración $n = 969$. De izquierda a derecha se muestra en (a) la malla inicial de 347 nodos y 542 triángulos, en (b) se refinan 10 triángulos de los 542 de (a), en (c) se refinan 76 triángulos de los 562 de (b) y en (d) se refinan 260 triángulos de los 702 de (c). En (a) se calcula U_{n1} , luego se aplica la técnica adaptativa y se calcula U_{n1} en la malla (b), posteriormente se calcula U_{n2} en (b) y así se sigue el proceso sucesivamente.

análisis supone que el término de Arrhenius w es una función Lipchitz continua. Este estudio teórico se puede emplear para describir procesos de difusión mas generales de una sustancia ó soluto, es decir, la evolución en el tiempo de la densidad de alguna cantidad u en una región Ω .

2. El estimativo a-posteriori usado en el método adaptativo se basa en la solución de un problema lineal local. Este estimativo es muy costoso dada la naturaleza multipaso del método. Por tanto es necesario desarrollar un indicador a posteriori más eficiente.
3. En este trabajo no se abordó el proceso adaptativo en el tiempo, el cual queda sugerido para estudios posteriores, en donde se puede seguir aplicando el método de Rosenbrock adaptativo para el tiempo (véase [8])

Referencias

- [1] R. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press INC, New York, 1975.
- [2] R. Dautray, J. L. Lions; Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Volume 2, Spectral theory and applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [3] R. Dautray, J. L. Lions; Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Volume 5, Spectral theory and applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [4] C. Domínguez, Estimación a posteriori del error de la solución con elementos finitos de un flujo compresible estacionario, Universidad del Valle, Cali-Colombia, 2006.

- [5] C. Domínguez, Método Galerkin-Rosenbrock adaptativo para un modelo de reacción-combustión, Universidad del Valle, Cali-Colombia, 2006.
- [6] J. Duque, MuFes: A Multilevel Finite element Solver, version 0.3.0, <http://www.univalle.edu.co/~jjduque/Mufes>, (2003).
- [7] L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, U.S.A, 1998.
- [8] J. Lang, Adaptive Multilevel Solution of Nonlinear Parabolic PDE Systems: theory, algorithm and applications, Springer-Verlag, Germany, 2001.
- [9] Python, Python copyright 1991-1995 by Stichting Mathematisch Centrum, Amsterdam, The Netherlands, <http://www.python.org>
- [10] Ch. Schwab, p and hp Finite Element Methods: Theory and applications in solid and fluid mechanics; Oxford Science Publications, Great Britain, (1998).
- [11] J. R. Shewchuck, Triangle: A Two-Dimensional quality mesh generator and Delaunay Triangulator, version 1.4 <http://www.cs.cmu.edu/quake/triangle.html>
- [12] R. Verfürth, A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques, Wiley Teubner, Great Britain, 1996.
- [13] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor The Finite Element Method, The basis, Vol 1, fifth edition, Butterworth Heinemann, Spain, (2000)

Dirección de los autores

Carolina Domínguez García — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia

e-mail: cardomin@univalle.edu.co

Jairo Duque — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia

e-mail: jjduque@univalle.edu.co