Vol. XIX, Nº 2, Diciembre (2011)
Matemáticas: 75–88

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Una dualidad en birretículos

Samin Ingrith Cerón Bravo
Universidad del Valle

Recibido Dic. 16, 2010 Aceptado Jul. 13, 2011

Abstract
In this paper we introduced the north and south lattices of an interlaced bilattice. By using this definition of interlaced lattices with conflation and the concept of opposite lattice, we proved that the category of interlaced bilattices with conflation and the category of bounded lattices are naturally equivalent. As a consequence of Priestley's duality, we obtain that the category of Priestley's spaces and the category of distributive bilattices with conflation are dually equivalent. Finally, we found that the categories of bounded lattices with negation and interlaced bilattices with negation and conflation (which commute each other) are naturally equivalent.

Keywords: Bilattice, Bilattices with conflation, Bilattices with negation and conflation, Duality.

MSC(2000): 06A75, 06D50, 08A99, 18A25, 18B35, 55U30

Resumen
Este artículo introduce los retículos norte y sur de un birretículo entrelazado, a través de esta definición para birretículos entrelazados con fusión y por el concepto de retículo opuesto, probamos que la categoría de los birretículos entrelazados con fusión y la categoría de los retículos acotados son naturalmente equivalentes. Como consecuencia de la Dualidad de Priestley se obtiene que la categoría de los espacios de Priestley y la categoría de los birretículos distributivos con fusión son dualmente equivalentes. Por último, obtuvimos que las categorías de los retículos acotados con negación y los birretículos entrelazados con negación y fusión (los cuales conmutan entre sí) son naturalmente equivalentes.

Palabras y frases claves: Birretículos, Birretículos con fusión, Birretículos con negación y fusión, Dualidad.

1 Introducción

Basados en la definición de los retículos positivo y negativo de un birretículo entrelazado introducida en [7], definimos los retículos norte y sur de un birretículo entrelazado, utilizando esta definición para birretículos entrelazados con fusión y el concepto de retículo opuesto, demostramos que la categoría de los birretículos entrelazados con fusión y la categoría de los retículos acotados son naturalmente equivalentes, además como consecuencia de la Dualidad de Priestley se deduce que la categoría de los espacios de Priestley y la categoría de los birretículos distributivos con fusión son dualmente equivalentes. Por otra parte del resultado de Fitting [4] el cual afirma que un retículo $\boldsymbol{L}$ es un retículo con negación si y sólo si $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}$ es un birretículo con negación y fusión, y del teorema de dualidad para birretículos con negación presentada en [7], probamos que las categorías de los retículos acotados con negación y los birretículos entrelazados con negación y fusión (operaciones unarias que conmutan entre si) son naturalmente equivalentes.

2 Birretículos

Ginsberg en 1988 introduce la definición de birretículo y la usa en inteligencia artificial, en particular en sistemas de mantenimiento de la verdad y razonamientos con información incompleta, también Ofer Arieli y Arnon Avron usaron los birretículos para obtener evidencias eficientes desde posibles datos inconsistentes. Fitting mostró que estas estructuras son muy útiles para proveer semánticas a programas lógicos, esto también se ve reflejado en el artículo [5] de Komendantskaya y Seda en el cual se introducen birretículos basados en programas de lógicas anotadas.

Definición 1. *Un* ***birretículo*** *es un álgebra* $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, f, t, \bot, \top\rangle$ *tal que* $\boldsymbol{B}_1 = \langle B, \wedge, \vee, f, t\rangle$ *y* $\boldsymbol{B}_2 = \langle B, \otimes, \oplus, \bot, \top\rangle$ *son retículos acotados y los cuatro elementos* $f, t, \bot, \top$ *son diferentes entre sí.*

Un birretículo se puede denotar identificando los ordenes parciales de cada retículo que lo componen, como sigue: $\mathcal{B} = (B, \leq_t, \leq_k)$, donde $\boldsymbol{B}_1 = (B, \leq_t)$ y $\boldsymbol{B}_2 = (B, \leq_k)$.

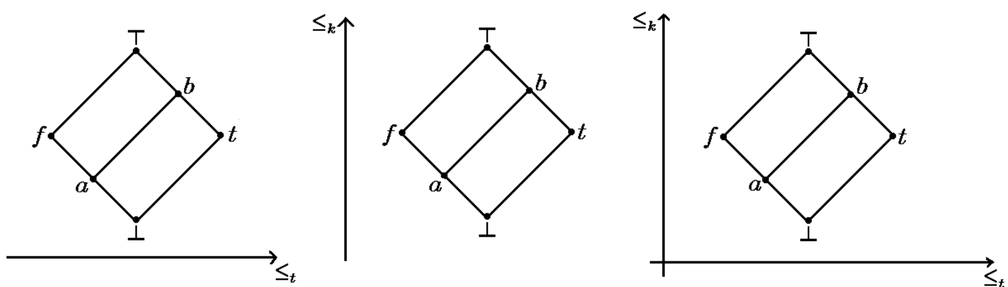

Figura 1: $\boldsymbol{B}_1 = (B, \leq_t)$, $\boldsymbol{B}_2 = (B, \leq_k)$ y $\mathcal{B} = (B, \leq_t, \leq_k)$

Así el eje horizontal muestra un incremento en el grado de verdad, mientras el eje vertical muestra un incremento en el grado de conocimiento.

Definición 2. *Un birretículo* $\mathcal{B}$ *es* ***birretículo entrelazado****, si cada operación binaria* $\wedge, \vee, \otimes, \oplus$ *es monótona respecto a ambos ordenes, se reduce a:*

$$a \leq_t b \;\Rightarrow\; a \otimes c \leq_t b \otimes c \quad y \quad a \oplus c \leq_t b \oplus c$$
$$a \leq_k b \;\Rightarrow\; a \wedge c \leq_k b \wedge c \quad y \quad a \vee c \leq_k b \vee c.$$

Una clase de birretículos son los distributivos, los cuales para cada $\diamond, \star$ en $\{\wedge, \vee, \otimes, \oplus\}$ y para todo $x, y, z \in B$, cumplen que $x\star(y\diamond z) = (x\star y)\diamond(x\star z)$. Fitting define en 1989 los birretículos entrelazados y probó que las leyes distributivas implican la condición de birretículo entrelazado. Existe una construción general de birretículos entrelazados por medio de una operación entre retículos acotados, introducida por Ginsberg y generalizada por Fitting, ver [2].

Definición 3. *Sean* $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge_L, \vee_L, 0_L, 1_L\rangle$ *y* $\boldsymbol{M} = \langle M, \wedge_M, \vee_M, 0_M, 1_M\rangle$ *dos retículos acotados no triviales, se definen las operaciones* $\wedge, \vee, \otimes, \oplus$ *sobre el conjunto* $L \times M$ *como sigue, para cualquier* $(a, b), (c, d) \in L \times M$*:*

$$(a,b) \sqcap (c,d) = (a \wedge_L c\ ,\ b \vee_M d); \quad (a,b) \sqcup (c,d) = (a \vee_L c\ ,\ b \wedge_M d)$$
$$(a,b) \otimes (c,d) = (a \wedge_L c\ ,\ b \wedge_M d); \quad (a,b) \oplus (c,d) = (a \vee_L c\ ,\ b \vee_M d)$$

más aún, si $f = (0_L, 1_M)$, $t = (1_L, 0_M)$, $\perp = (0_L, 0_M)$, $\top = (1_L, 1_M)$. *El* ***producto de Ginsberg de L** y **M** es la estructura:*

$$\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{M} = \langle L \times M, \sqcap, \sqcup, \otimes, \oplus, (0_L, 1_M), (1_L, 0_M), (0_L, 0_M), (1_L, 1_M)\rangle.$$

$\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{M}$ es un birretículo entrelazado, cuando $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{M}$ son retículos distributivos acotados, se tiene que $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{M}$ es un birretículo distributivo. Los retículos que conforman el birretículo $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{M}$ son: $\langle L \times M, \sqcap, \sqcup, (0_L, 1_M), (1_L, 0_M)\rangle = (L \times M, \sqsubseteq_t)$, donde $(a, b) \sqsubseteq_t (c, d) \Leftrightarrow a \leq_L c$ y $d \leq_M b$ y $\langle L \times M, \otimes, \oplus, (0_L, 0_M), (1_L, 1_M)\rangle = (L \times M, \sqsubseteq_k)$, donde $(a, b) \sqsubseteq_k (c, d) \Leftrightarrow a \leq_L c$ y $b \leq_M d$. Fitting describe la intuición de estos ordenes así: supongamos que se colecciona evidencia acerca de proposiciones, si se supone que el retículo $\boldsymbol{L}$ es usado para registrar las creencias-evidencia a favor con el orden $\leq_L$, mientras que en el retículo $\boldsymbol{M}$ se registran las no creencias-evidencia en contra con el orden $\leq_M$, así hay un aumento en el orden de verdad $\sqsubseteq_t$ cuando hay un aumento en la evidencia a favor y una disminución en la evidencia en contra, el aumento en el orden de información $\sqsubseteq_k$ se da en el crecimiento de la evidencia a favor y en contra.

Definición 4. *Sean birretículos* $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, f_{\mathcal{B}}, t_{\mathcal{B}}, \perp_{\mathcal{B}}, \top_{\mathcal{B}}\rangle = (B, \leq_t, \leq_k)$ *y* $\mathcal{D} = \langle D, \sqcap, \sqcup, \boxtimes, \boxdot, f_{\mathcal{D}}, t_{\mathcal{D}}, \perp_{\mathcal{D}}, \top_{\mathcal{D}}\rangle = (B, \sqsubseteq_t, \sqsubseteq_k)$ *una función* $\varphi : B \to D$ *es un* ***homomorfismo*** *entre birretículos si para todos* $a, b \in B$ *se tiene que:*

$$\varphi(a \wedge b) = \varphi(a) \sqcap \varphi(b), \quad \varphi(a \vee b) = \varphi(a) \sqcup \varphi(b), \quad \varphi(a \otimes b) = \varphi(a) \boxtimes \varphi(b),$$
$$\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \boxdot \varphi(b), \quad \varphi(t_{\mathcal{B}}) = t_{\mathcal{D}}, \quad \varphi(f_{\mathcal{B}}) = f_{\mathcal{D}}, \quad \varphi(\top_{\mathcal{B}}) = \top_{\mathcal{D}}, \quad \varphi(\perp_{\mathcal{B}}) = \perp_{\mathcal{D}}.$$

Los birretículos y los homomorfismo entre ellos forman una categoría.

3 Dualidad para birretículos con fusión

Definición 5. *Una* ***fusión sobre un birretículo*** $\mathcal{B}$*, es una operación unaria* $-$ *sobre un birretículo* $\mathcal{B}$*, la cual satisface las siguientes propiedades:*

$$\textbf{\textit{i.}}\ a \leq_t b \Rightarrow -a \leq_t -b, \quad \textbf{\textit{ii.}}\ a \leq_k b \Rightarrow -b \leq_k -a, \quad \textbf{\textit{iii.}}\ --a = a.$$

En 1990 Fitting define el operador fusión, denotaremos un birretículo con fusión por $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, -, f, t, \perp, \top\rangle$ o por $\mathcal{B} = (B, \leq_t, \leq_k, -)$. Si $\varphi : B \to C$ es un morfismo entre birretículos entrelazados con fusión B y C, además de ser un homomorfismo entre birretículos, debe cumplir que $\varphi(-_{\mathcal{B}} a) = -_{\mathcal{C}} \varphi(a)$. Los birretículos entrelazados con fusión, con homomorfismos entre ellos forman una categoría la cual denotamos $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-}$. El siguiente teorema da cuenta de algunas propiedades de un birretículo con fusión.

Teorema 1. *Sea un birretículo con fusión $-$, entonces para cada a, b en B:* $-(a \wedge b) = -a \wedge -b$, $-(a \vee b) = -a \vee -b$, $-(a \otimes b) = -a \oplus -b$, $-(a \oplus b) = -a \otimes -b$, $-f = f$, $-t = t$, $-\bot = \top$, $-\top = \bot$.

Ya que al birretículo de la forma $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}$ no se le puede asignar un fusión recurrimos al retículo opuesto de $\boldsymbol{L}$, si $\leq$ es el orden parcial de $\boldsymbol{L}$, el orden parcial opuesto $\geq$, cumple que $y \geq x$ si y sólo si $x \leq y$, así el ***retículo opuesto*** de $\boldsymbol{L} = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$, lo denotamos por $\boldsymbol{L^*} = \langle L, \wedge^*, \vee^*, 0^*, 1^*\rangle$, donde $\wedge^* = \vee$, $\vee^* = \wedge$, $0^* = 1$ y $1^* = 0$. Usando el producto de Ginsberg y la propiedades del retículo opuesto a $\boldsymbol{L}$, entonces $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L^*}$ es un retículo entrelazado, con las siguientes operaciones para cualquier $(a, b), (c, d) \in L \times L$:

$$\begin{gathered}(a,b) \sqcap (c,d) = (a \wedge_L c\ ,\ b \wedge_L d); \quad (a,b) \sqcup (c,d) = (a \vee_L c\ ,\ b \vee_L d);\\ (a,b) \otimes (c,d) = (a \wedge_L c\ ,\ b \vee_L d); \quad (a,b) \oplus (c,d) = (a \vee_L c\ ,\ b \wedge_L d);\\ f = (0_L, 0_L),\ \ t = (1_L, 1_L),\ \ \bot = (0_L, 1_L),\ \ \top = (1_L, 0_L)\end{gathered}$$

Encontramos que dado $\boldsymbol{L} = (L, \leq)$ un retículo acotado, $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L^*}$ es un birretículo entrelazado con fusión $\boldsymbol{-}$ definida por $\boldsymbol{-}(a, b) = (b, a)$. Ahora definimos los elementos norte y sur en un birretículo entrelazado.

Definición 6. *Sea $\mathcal{B} = (B, \leq_t, \leq_k)$ un birretículo entrelazado sea $x \in B$: x es norte, si para cada $y \in B$ tal que $x \leq_k y$, entonces $x \leq_t y$; x es sur, si para cada $y \in B$ tal que $y \leq_k x$, entonces $x \leq_t y$.*

Denotaremos $Nor(\mathcal{B}) = \{x \in B \mid x \text{ es norte}\}$, $Sur(\mathcal{B}) = \{x \in B \mid x \text{ es sur}\}$.

Teorema 2. *Si $\mathcal{B}$ un birretículo entrelazado, se cumplen las siguientes igualdades: $Nor(\mathcal{B}) = [f, \top]_{\leq_k} = [f, \top]_{\leq_t}$ y $Sur(\mathcal{B}) = [\bot, f]_{\leq_k} = [\bot, f]_{\geq_t}$.*

Demostración. A continuación se demuestra la primera parte, la otra es similar:

$$\begin{aligned} x \in [f,\top]_{\leq_k} \ \text{ y } \ x \leq_k y \ &\Rightarrow\ f \leq_k x \leq_k \top \ \text{ y } \ f \leq_t y\\ &\Rightarrow\ f \oplus x \leq_t y \oplus x\\ &\Rightarrow\ x \leq_t y\\ &\Rightarrow\ x \in Nor(\mathcal{B})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in Nor(\mathcal{B}) \ &\Rightarrow\ (x \leq_k y \Rightarrow x \leq_t y)\\ &\Rightarrow\ (x \leq_k \top \Rightarrow x \leq_t \top)\\ &\Rightarrow\ f \leq_t x \leq_t \top\\ &\Rightarrow\ x \in [f,\top]_{\leq_t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in [f,\top]_{\leq_k} \ &\Rightarrow\ f \leq_k x \leq_k \top \ \text{ y } \ f \leq_t \top\\ &\Rightarrow\ x \oplus f \leq_t \top \oplus x\\ &\Rightarrow\ x \leq_t \top\\ &\Rightarrow\ f \leq_t x \leq_t \top\\ &\Rightarrow\ x \in [f,\top]_{\leq_t}\end{aligned}$$ □

Así tenemos los retículos acotados $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) = ([f, \top]_{\leq_k}, \leq_k) = ([f, \top]_{\leq_t}, \leq_t)$ y $\boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}) = ([\bot, f]_{\leq_t}, \leq_k) = ([\bot, f]_{\geq_t}, \geq_t)$.

Observación 1. *Si* $\mathcal{B} = (B, \leq_t, \leq_k)$ *es un birretículo entrelazado se tiene:* $x \leq_k y$ *si y sólo si* $x \leq_t y$ *para todo* $x, y \in Nor(\mathcal{B})$*. En efecto si* $x \leq_k y$ *implica que* $x \leq_t y$*, puesto que* $x \in Nor(\mathcal{B})$*, por otra parte si* $x \leq_t y$*, como* $y \in [f, \top]_{\leq_k}$ *y* $x \leq_k \top$*, entonces* $x \wedge y \leq_k \top \wedge y$*, por lo tanto* $x \leq_k y$*. También se obtiene que:* $y \leq_k x$ *si y sólo si* $x \leq_t y$ *para todo* $x, y \in Sur(\mathcal{B})$*.*

El siguiente teorema permite representar un birretículo entrelazado con sus retículos $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})$ y $\boldsymbol{Sur}(\mathcal{B})$, la idea central de este teorema se obtuvo de [6], nosotros lo demostramos en términos de los elementos norte y sur.

Teorema 3. *Si* $\mathcal{B}$ *es un birretículo entrelazado entonces*

$$\mathcal{B} \cong \boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) \odot \boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}).$$

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, f, t, \bot, \top \rangle$ un birretículo entrelazado, entonces la función:

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathcal{B} & \rightarrow & Nor(\mathcal{B}) \times Sur(\mathcal{B}) \\ x & \rightarrowtail & (x^{\uparrow}\ ,\ x^{\downarrow}) \end{array}$$

es un isomorfismo entre los birretículos $\mathcal{B}$=$\langle B, \wedge, \vee, \otimes, \oplus, f, t, \bot, \top \rangle$=$(B, \leq_t, \leq_k)$ y $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) \odot \boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}) = (\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) \times \boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}), \sqsubseteq_t, \sqsubseteq_k)$ donde: $(a, b) \sqsubseteq_t (c, d)$ si y sólo si $a \leq_t c$ y $d \geq_t b$, $(a, b) \sqsubseteq_k (c, d)$ si y sólo si $a \leq_t c$ y $b \geq_t d$. Donde $x^{\uparrow} = x \wedge \top$ y $x^{\downarrow} = x \wedge \bot$.

Para la demostración basta obtener las siguientes igualdades, que permiten garantizar que μ es biyectiva: si $x \in B$, $x = x^{\uparrow} \vee x^{\downarrow}$ y si $(n, s) \in Nor(\mathcal{B}) \times Sur(\mathcal{B})$, entonces $n = (n \vee s)^{\uparrow}$ y $s = (n \vee s)^{\downarrow}$. Por otra parte μ preserva los ordenes ya que si $x \leq_t y$, entonces $x \wedge \top \leq_t y \wedge \top$ y $y \wedge \bot \geq_t x \wedge \bot$, esto es $(x^{\uparrow}, x^{\downarrow}) \sqsubseteq_t (y^{\uparrow}, y^{\downarrow})$, si $x \leq_k y$, entonces $x \wedge \top \leq_k y \wedge \top$ y $x \wedge \bot \leq_k y \wedge \bot$ y por la observación 1 $x \wedge \top \leq_t y \wedge \top$ y $x \wedge \bot \geq_t y \wedge \bot$, de lo cual $(x^{\uparrow}, x^{\downarrow}) \sqsubseteq_t (y^{\uparrow}, y^{\downarrow})$. Más aún la función inversa de μ asigna a $(n, s) \in Nor(\mathcal{B}) \times Sur(\mathcal{B})$ el elemento $n \vee s$ de $\mathcal{B}$ y preserva los ordenes. □

Basados en el anterior teorema obtuvimos tres resultados que se presentan a continuación.

Teorema 4. *Si* $\mathcal{B}$ *es un birretículo entrelazado con fusión* $-$*, entonces se tiene que* $\boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}) \cong [\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})]^{*}$*.*

Demostración. Sea $x \in Sur(\mathcal{B})$, entonces $\bot \leq_k x \leq_k f$, así $f \leq_k -x \leq_k \top$ luego $-x \in Nor(\mathcal{B})$. Así la función que asigna a cada elemento $x \in Sur(\mathcal{B})$ su fusión, está bien definida, además como $y \in Nor(\mathcal{B})$ entonces $-y \in Sur(\mathcal{B})$ y $-x = -y$ implica que $x = y$ entonces es biyectiva, por último se tiene que $[\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})]^{*} = ([\top, f]_{\geq_t}, \geq_t)$ y $\boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}) = ([\bot, f]_{\geq_t}, \geq_t)$, de lo cual $x, y \in Sur(\mathcal{B})$ si y sólo si $x \geq_t y$, $-x \geq_t -y$, por lo tanto $\boldsymbol{Sur}(\mathcal{B}) \cong [\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})]^{*}$. □

Teorema 5. *Si $\mathcal{B}$ es un birretículo entrelazado con fusión, entonces existe un retículo $\boldsymbol{L}$ acotado tal que $\mathcal{B} \cong \boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*$. En particular si el birretículo es distributivo, $\boldsymbol{L}$ es un retículo acotado distributivo.*

La demostración se obtiene de manera similar que el teorema 3 tomando $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})$ y la función: δ_B de $\mathcal{B}$ en $Nor(\mathcal{B}) \times Nor(\mathcal{B})$, tal que $\delta_B(x) = \big(x^{\uparrow}, -(x^{\downarrow})\big)$, la cual es un isomorfismo entre los birretículos $\mathcal{B}$ y $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) \odot \boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})^*$.

Teorema 6. *Sean $\boldsymbol{L}$ un retículo acotado, entonces $\boldsymbol{L} \cong Nor(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$.*

Demostración. La función Ψ de L en $Nor(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$ tal que $\Psi(l) = (l, 0_L)$ es un isomorfismo entre los retículos $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{Nor}(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$. Como $\boldsymbol{Nor}(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$ es el retículo $\big([(0,0),(1,0)], \sqsubseteq_t\big)$, si $(x,y) \in Nor(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$ entonces $(0,0) \sqsubseteq_t (x,y) \sqsubseteq_t (1,0)$ así $0 \leq x,\ y \geq 0$ y $x \leq 1,\ 0 \geq y$, por tanto $0 \leq x \leq 1$ y $y = 0$. Luego $(x,y) = (x,0)$. Ψ es sobreyectiva, ya que si $(x,0) \in Nor(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$, entonces $x \in L$, Ψ es una función inyectiva, ya que si $\Psi_L(x) = \Psi_L(y)$, entonces $(x,0) = (y,0)$, de lo cual $x = y$. Por último Ψ_L es un orden isomorfismo, puesto que $x \leq y$ si y sólo si $x \leq y$ y $0 \geq 0$, lo cual equivale a que $(x,0) \sqsubseteq_t (y,0)$. $\square$

4 Dualidad para birretículos entrelazados con fusión

Obtuvimos un teorema de dualidad para birretículos entrelazados con fusión, basado en los teoremas de representación anteriores.

Teorema 7. *Las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ de los retículos acotados y $\boldsymbol{\mathcal{IBL}_-}$ son naturalmente equivalentes. Específicamente:*

1. *Los siguientes funtores son covariantes:*

   a) *$H : \boldsymbol{\mathcal{L}} \to \boldsymbol{\mathcal{IBL}_-}$, definido por $H(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*$ y para cualquier $f : L \to M \in Mor(\boldsymbol{\mathcal{L}})$:*

   $$\begin{aligned} H(f) : L \times L &\to M \times M \\ (x,y) &\rightarrowtail \big(f(x), f(y)\big). \end{aligned}$$

   b) *$S : \boldsymbol{\mathcal{IBL}_-} \to \boldsymbol{\mathcal{L}}$, definido por $S(\mathcal{B}) = Nor(\mathcal{B})$ y para cualquier $g : B \to C \in Mor(\boldsymbol{\mathcal{B}_{e-}})$ con:*
   $\mathcal{B} = \langle B, \wedge_B, \vee_B, \otimes_B, \oplus_B, -_B, f_B, t_B, \perp_B, \top_B \rangle$,
   $\mathcal{C} = \langle C, \wedge_C, \vee_C, \otimes_C, \oplus_C, -_C, f_C, t_C, \perp_C, \top_C \rangle$:

   $$\begin{aligned} S(g) : Nor(\mathcal{B}) &\to Nor(\mathcal{C}) \\ x &\rightarrowtail g(x) \wedge_C \top_C. \end{aligned}$$

2. *Las siguientes familias de morfismos son isomorfismos naturales:*

   a) *$\delta = \{\delta_B : B \to Nor(\mathcal{B}) \times Nor(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in obj(\boldsymbol{\mathcal{IBL}_-})\}$, definida por $\delta_B(x) = \big(x^{\uparrow}, -(x^{\downarrow})\big)$ entre los birretículos $\mathcal{B}$ y $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) \odot [\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})]^*$.*

b) $\Psi = \{\Psi_L : L \to \boldsymbol{Nor}(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L^*})$ *tal que* $\boldsymbol{L} \in obj(\boldsymbol{\mathcal{L}})\}$, *definida por* $\Psi_L(l) = (l, 0_L)$.

Demostración.

1. **a)** Si f es un homomorfismo entre los retículos $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{M}$, entonces f también es un homomorfismo entre los retículos $\boldsymbol{L}^*$ y $\boldsymbol{M^*}$, puesto que:

$f(x{\wedge^*}_L y) = f(x \vee_L y) = f(x) \vee_M f(y) = f(x){\wedge^*}_M f(y)$ y

$f(x{\vee^*}_L y) = f(x \wedge_L y) = f(x) \wedge_M f(y) = f(x){\vee^*}_M f(y)$.

Notemos que:

$$\begin{aligned} H\big(f\big)\big((a,b) \sqcap_{L \,\odot\, L^*} (c,d)\big) &= H\big(f\big)\big((a \wedge_L c,\ b \wedge_L d)\big) \\ &= \big(f(a \wedge_L c),\ f(b \wedge_L d)\big) \\ &= \big(f(a), f(b)\big) \sqcap_{M \,\odot\, M^*} \big(f(c), f(d)\big) \\ &= H\big(f\big)(a,b) \sqcap_{M \,\odot\, M^*} H\big(f\big)(c,d) \end{aligned}$$

de manera similar se obtiene para $\blacklozenge_{L \,\odot\, L^*} = \{\sqcup_{L \,\odot\, L^*}, \otimes_{L \,\odot\, L^*}, \oplus_{L \,\odot\, L^*}\}$ y $\blacklozenge_{M \,\odot\, M^*} = \{\sqcup_{M \,\odot\, M^*}, \otimes_{M \,\odot\, M^*}, \oplus_{M \,\odot\, M^*}\}$ la igualdad:

$$H\big(f\big)\big((a,b)\blacklozenge_{L \,\odot\, L^*}(c,d)\big) = H\big(f\big)\big((a,b)\big)\blacklozenge_{M \,\odot\, M^*} H\big(f\big)\big((c,d)\big).$$

Además $H\big(f\big)\big((0_L, 0_L)\big) {=} \big(f(0_L), f(0_L)\big) {=} (0_M, 0_M)$, también se tiene: $H\big(f\big)\big((1_L, 1_L)\big) {=} (1_M, 1_M)$, $H\big(f\big)\big((0_L, 1_L)\big) {=} (0_M,\ 1_M)$ y $H\big(f\big)\big((1_L, 0_L)\big) {=} (1_M, 0_M)$.

Ahora veremos que H es un funtor covariante:

- Sea $\mathbf{1}_L : L \to L$ un morfismo identidad en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned} H(\mathbf{1}_L) : L \times L &\to L \times L \\ (x,y) &\rightarrowtail \big(\mathbf{1}_L(x), \mathbf{1}_L(y)\big), \end{aligned}$$

así $H(\mathbf{1}_L) = \mathbf{1}_{L \times L}$, un morfismo identidad en la categoría de birretículos entrelazados con fusión sobre $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L^*}$.

- Sean $g : L \to T$ y $f : T \to M$ morfismos en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, para los cuales la composición $f \circ g$ existe,

$$\begin{aligned} \big[H(f) \circ H(g)\big]\big((x,y)\big) &= H\big(f\big)\big((g(x), g(y))\big) \\ &= \big((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)\big) \\ &= H\big[f \circ g\big]\big((x,y)\big). \end{aligned}$$

Entonces H es un funtor covariante.

b) $g : B \to C \in Mor(\boldsymbol{\mathcal{IBL}_-})$, así $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) = \langle [f, \top]_{\leq_t}, \wedge_B, \vee_B, f_B, \top_B \rangle$, $\boldsymbol{Nor}(\mathcal{C}) = \langle [f, \top]_{\leq_t}, \wedge_C, \vee_C, f_C, \top_C \rangle$ son objetos de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y

$$\begin{aligned} S(g) : Nor(\mathcal{B}) &\to Nor(\mathcal{C}) \\ n &\rightarrowtail g(n) \wedge_C \top_C \end{aligned}$$

es un homomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ por ser g un homomorfismo entre los birretículos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

- Si $\mathbf{1}_B : B \to B$ un morfismo identidad en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-}$, como en el item anterior $S(\mathbf{1}_B)$ es un morfismo identidad en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$.
- Sean $g : B \to C$ y $j : C \to D$ morfismos en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-}$, con $\mathcal{D} = \langle B, \wedge_D, \vee_D, \otimes_D, \oplus_D, f_D, t_D, \perp_D, \top_D\rangle$, para los cuales $j \circ g$ existe. Las siguientes igualdades verifican que S es un funtor covariante $[S(j) \circ S(g)](x) = (j \circ g)(x) \wedge_D \top_D = S(j \circ g)(x)$.

2. **a)** δ_B y δ_C son isomorfismos por el teorema 5 resta probar que el siguiente diagrama es conmutativo para cualquier $\alpha : B \to C$ un homomorfismo entre los birretículos entrelazados con fusión $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\delta_B"'] & C \arrow[d, "\delta_C"] \\ Nor(\mathcal{B}) \times Nor(\mathcal{B}) \arrow[r, "(H\circ S)(\alpha)"'] & Nor(\mathcal{C}) \times Nor(\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

Figura 2:

En efecto: $(\delta_C \circ \alpha)(x) = \big(\alpha(x) \wedge_C \top_C, -(\alpha(x) \wedge_C \perp_C)\big)$ y

$$\begin{aligned} \big((H \circ S)(\alpha) \circ \delta_B\big)\big(x\big) &= \big((H \circ S)(\alpha)\big)\big(\delta_B\big(x\big)\big) \\ &= \big(H\big[S(\alpha)\big]\big)\big((x^{\uparrow}, -(x^{\downarrow}))\big) \\ &= \big(\alpha(x \wedge_B \top_B) \wedge_C \top_C, \alpha(-[x \wedge_B \perp_B]) \wedge_C \top_C\big) \\ &= \big(\alpha(x) \wedge_C \top_C, -(\alpha(x) \wedge_C \perp_C)\big). \end{aligned}$$

Por tanto δ es una transformación natural, más aún $\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-}} \dot{\approx} H \circ S$.

b) Del Teorema 6 se tiene que Ψ_L y Ψ_M son isomorfismos en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$. La siguiente igualdad verifica que el diagrama 3 es conmutativo para cualquier morfismo $f : L \to M$ en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi_L"'] & M \arrow[d, "\Psi_M"] \\ Nor(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*) \arrow[r, "(S\circ H)(f)"'] & Nor(\boldsymbol{M} \odot \boldsymbol{M}^*) \end{tikzcd}$$

Figura 3:

$$\begin{aligned} \big[(S \circ H)(f) \circ \Psi_L\big]\big(l\big) \quad &= \quad \big[(S \circ H)(f)\big]\big((l, 0_L)\big) \\ &= \quad (f(l), f(0_L)) \sqcap_{\boldsymbol{M} \odot \boldsymbol{M}^*} (1_M, 0_M) \\ &= \quad \big(f(l) \wedge_M 1_M, 0_M \vee_{M^*} 0_M\big) \\ &= \quad \big(f(l), O_M\big) \\ &= \quad [\Psi_M \circ f](l). \end{aligned}$$

Se concluye que Ψ es una transformación natural, así $\Psi : \boldsymbol{1_{\mathcal{L}}} \stackrel{\cdot}{\approx} S \circ H$.

En consecuencia se terminó de probar que la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{IBL}_-}$ son naturalmente equivalentes. $\square$

Corolario 1. *Las categorías $\boldsymbol{\mathcal{PS}}$ de los espacios de Priestley y $\boldsymbol{\mathcal{DBL}_-}$ de los birretículos distributivos con fusión son dualmente equivalentes.*

Demostración. Se describen los funtores contravariantes y las trasformaciones naturales, que se deducen del teorema de dualidad anterior, del teorema de dualidad de Priestley y la dualidad para birretículos distributivos expuesta en [7] y en [3].

1. Los siguientes funtores son contravariantes, ya que surgen de componer un funtor covariante H o S con otro funtor contravariante usado en la prueba del teorema de dualidad de Priestley vía filtros respectivamente U^{clo} o F, para mas detalles de estos funtores ver [3] donde se presenta la dualidad de Priestley vía filtros (en [8] se encuentra vía ideales), para lo cual dada una función entre conjuntos no vacíos $f : A \to B$, se define la **función inversa inducida** $f^{-1} : \wp(B) \to \wp(A)$, tal que si $V \subseteq B$, entonces

$$f^{-1}(V) = \{a \in A \mid f(a) \in V\}$$

Cuando el dominio de f^{-1} se restringe a un subconjunto de $\wp(B)$, entonces f^{-1} se llama **función inversa inducida-restringida**.

a) $H \circ U^{clo} : \boldsymbol{\mathcal{PS}} \to \boldsymbol{\mathcal{DBL}_-}$, es el funtor definido por

$H \circ U^{clo}(X) = \boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)} \odot [\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}]^*$ y para cualquier $g : X \to Y$ morfismo de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{PS}}$

$$\begin{aligned} H \circ U^{clo}(g) = H(g^{-1}) : \mathcal{U}^{clo}(Y) \times \mathcal{U}^{clo}(Y) \to \ & \mathcal{U}^{clo}(X) \times \mathcal{U}^{clo}(X) \\ (A, B) \mapsto \ & \big(g^{-1}(A), g^{-1}(B)\big). \end{aligned}$$

b) $F \circ S : \boldsymbol{\mathcal{DBL}_-} \to \boldsymbol{\mathcal{PS}}$, es el funtor definido por

$F \circ S(\mathcal{B}) = (\mathcal{F}_p(\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})), \tau_{\mathcal{M}_{\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})}}, \subseteq)$ y para cualquier morfismo $f : B \to C$ en $\boldsymbol{\mathcal{DBL}_-}$

$F(f) = f^{-1} : \mathcal{F}_p(\boldsymbol{Nor}(\mathcal{C})) \to \mathcal{F}_p(\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}))$.

2. Las siguientes familias de morfismos son isomorfismos naturales:

a) $\varrho = \{\varrho_B : B \to \mathcal{U}^{clo}(\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})) \times \mathcal{U}^{clo}(\boldsymbol{Nor}(\mathcal{B})) \mid \mathcal{B} \in obj(\boldsymbol{\mathcal{DBL}_-})\}$ definida por $\varrho_B(x) = \big(\mathcal{P}_{x^{\uparrow}}, \mathcal{P}_{-(x^{\downarrow})}\big)$.

b) $\gamma = \{\gamma_X : X \to \mathcal{F}_p(\boldsymbol{Nor}(\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)} \odot \boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)})) \mid X \in obj(\boldsymbol{\mathcal{PS}})\}$, definida por $\gamma_X = \big((\Psi^{\boldsymbol{-1}}_{\mathcal{U}^{clo}(X)})^{-1}(\kappa_X(x))\big)$.

con el siguiente isomorfismo:

$$\begin{array}{rcl}\Psi_{\mathcal{U}^{clo}(X)}:\mathcal{U}^{clo}(X) & \to & Nor(\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}\odot[\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}]^{*})\\ V & \rightarrowtail & (V,\emptyset)\end{array}$$

cuya función inversa la notamos $\Psi^{\mathbf{-1}}_{\mathcal{U}^{clo}(X)}$.

Luego la función inversa inducida restringida de $\Psi^{\mathbf{-1}}_{\mathcal{U}^{clo}(X)}$ es:

$(\Psi^{\mathbf{-1}}_{\mathcal{U}^{clo}(X)})^{-1}:\mathcal{F}_p(\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)})\to \mathcal{F}_p(\boldsymbol{Nor}(\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}\odot[\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}]^{*})$
tal que

$(\Psi^{\mathbf{-1}}_{\mathcal{U}^{clo}(X)})^{-1}(T)=\{Z\in Nor(\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}\odot[\boldsymbol{\mathcal{U}^{clo}(X)}]^{*}):\Psi^{\mathbf{-1}}_{\mathcal{U}^{clo}(X)}(Z)\in T\}$.

□

5 Retículos positivo y negativo de un birretículo

En el artículo [MPSV] se definen los elementos positivos y negativos en un birretículo entrelazado $\mathcal{B}=(B,\leq_t,\leq_k)$ de la siguiente manera, sea $x\in B$: x es positivo, si para cada $y\in B$, $x\leq_t y$ implica que $x\leq_k y$; x es negativo, si para cada $y\in B$, $y\leq_t x$ implica que $x\leq_k y$. Definen los siguientes conjuntos: $Pos(\mathcal{B})=\{x\in B\mid x \text{ es positivo}\}$ y $Neg(\mathcal{B})=\{x\in B\mid x \text{ es negativo}\}$ y prueban que $\mathcal{B}\cong \boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})\boldsymbol{Neg}(\mathcal{B})$, además identifican que los elementos $Pos(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{M})$ y $Neg(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{M})$ son de la forma $(l,0)$ y $(0,m)$ respectivamente y que g_1 y g_2 son isomorfismos entre los retículos acotados $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{Pos}(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{M})$; $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{Neg}(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{M})$:

$$\begin{array}{rcl}g_1:L & \to & Pos(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{M})\\ l & \rightarrowtail & (l,0_M)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}g_2:M & \to & Neg(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{M})\\ m & \rightarrowtail & (0_L,m).\end{array}$$

En 1988 Ginsberg definió un birretículo con negación:

Definición 7. *Una* ***negación sobre un birretículo*** $\mathcal{B}$ *es una operación unaria* $\sim$ *sobre* $\mathcal{B}$ *que satisface:*

i. $a\leq_t b\ \Rightarrow\ \sim b\leq_t\ \sim a$; ***ii.*** $a\leq_k b\ \Rightarrow\ \sim a\leq_k\ \sim b$; ***iii.*** $\sim\sim a=a$.

Teorema 8. *Si* $\mathcal{B}$ *es un birretículo entrelazado con negación* $\sim$*, entonces se tiene que* $\mathcal{B}\cong\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})\odot\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$.

La función δ_B permite el isomorfismo entre $\mathcal{B}$ y $\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})\odot\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$, donde $x\otimes t=x^+$ y $x\otimes f=x^-$:

$$\begin{array}{rcl}\delta_B:\mathcal{B} & \to & Pos(\mathcal{B})\times Pos(\mathcal{B})\\ x & \rightarrowtail & \big(x^+\ ,\ \sim(x^-)\big).\end{array}$$

6 Birretículos entrelazados con negación y fusión

Definición 8. *Un* ***Retículo con negación*** *es un retículo* $\boldsymbol{L} = (L, \leq)$ *con una operación unaria* $\neg$*, la cual satisface:*

$$\textbf{\textit{i.}}\ \text{Si } x \leq y, \text{ entonces } \neg y \leq \neg x; \quad \textbf{\textit{ii.}}\ \neg(\neg x) = x.$$

Los retículos acotados con negación, con los homomorfismos entre ellos forman una categoría la cual denotamos $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\neg}$. Si $f : L \to M$ es un morfismo en $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\neg}$, además de ser homomorfismo entre retículos acotados, $f(\neg_L a) = \neg_M f(a)$. El siguiente resultado se enuncia en el artículo [4] en 1994.

Teorema 9. *Si* $(L, \leq)$ *es un retículo acotado con negación* $\neg$*, entonces* $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}$ *es un birretículo entrelazado con fusión definida por* $\boldsymbol{-}(a, b) = (\neg b, \neg a)$*, para todo* $(a, b) \in L \times L$*.*

Se tiene que $\boldsymbol{\sim}(a, b) = (b, a)$ es una negación para el birretículo $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}$ y que conmuta con la fusión del teorema anterior. El siguiente teorema de representación para birretículos distributivos con negación lo presenta Melvin Fitting en [4], aquí lo probamos identificando una operación de negación en el retículo $\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$.

Teorema 10. *Si* $\mathcal{B}$ *es un birretículo entrelazado con negación* $\sim$ *y fusión* $-$ *que conmutan entre si, entonces existe un retículo* $\boldsymbol{L}$ *con una negación, tal que* $\mathcal{B} \cong \boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}$*.*

Demostración. Como $B \cong \boldsymbol{Pos}(\mathcal{B}) \odot \boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$, mediante la función δ_B definida en la anterior sección. Veamos que el retículo $\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$ tiene una negación que representamos por la función η:

$$\begin{array}{rcl} \eta : Pos(\mathcal{B}) & \to & Pos(\mathcal{B}) \\ p & \rightarrowtail & - \sim p \otimes t \end{array}$$

η está bien definida ya que $\perp \leq_k p \leq_k t$ así $\perp \leq_k - \sim p \otimes t \leq_k t$, ahora se verifica que "η" es una negación en $\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$, $\eta(\eta(p)) = (p \oplus f) \otimes t$ y como $p \leq_k p \oplus f$, entonces $p \otimes t \leq_k (p \oplus f) \otimes t$, así $p \leq_k (p \oplus f) \otimes t$, supongamos que $m = (p \oplus f) \otimes t$, entonces $p \leq_k m$ y $p \oplus f \leq_k m \oplus f$, también $m \leq_k p \oplus f$ y $m \oplus f \leq_k p \oplus f$, por lo tanto $m \oplus f = p \oplus f$ y por la ley de absorción $p = m$. Concluimos que $\eta(\eta(p)) = p$. Ahora bien, si $a, b \in Pos(B)$ tales que $a \leq_t b$, entonces $\sim b \leq_t \sim a$ así $- \sim b \leq_t - \sim a$ y por ser $\mathcal{B}$ entrelazado $- \sim b \otimes t \leq_t - \sim a \otimes t$, por lo tanto $\eta(b) \leq_t \eta(a)$.

La función δ_B preserva la operación fusión entre los birretículos, ya que: $\delta_B(-x) = \big((-x)^+, \sim (-x)^-\big) = \big(-x \otimes t, \sim (-x \otimes f)\big) = (-x \otimes t, \sim -x \otimes t)$. Por otra parte del teorema 9 se tiene una fusión en el birretículo $\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B}) \odot \boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$, así $\boldsymbol{-}\delta_B(x) = \boldsymbol{-}\big(x^+, \sim (x^-)\big) = \big(\eta(\sim x \otimes t), \eta(x \otimes t)\big) = \big((-x \oplus f) \otimes t, (- \sim x \oplus f) \otimes t\big)$, a continuación probamos que $(-x \oplus f) \otimes t = -x \otimes t$, ya que $-x \leq_k -x \oplus f$, entonces $-x \otimes t \leq_k (-x \oplus f) \otimes t$, como $-x \otimes t$ es un elemento positivo se tiene que $-x \otimes t \leq_t (-x \oplus f) \otimes t$, por otra parte $f \leq_t -x$ y $-x \oplus f \leq_t -x$, luego

$(-x\oplus f)\otimes t \leq_t -x\otimes t$; de manera similar, se tiene que $(-\sim x\oplus f)\otimes t = -\sim x\otimes t$. Por lo tanto $\delta_B(-x) = \boldsymbol{-}\delta_B(x)$. □

7 Dualidad para birretículos entrelazados con negación y fusión

De los teoremas de representación demostrados en esta sección se obtuvo en el desarrollo de este trabajo el siguiente teorema de dualidad:

Teorema 11. *Las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg$ y $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim}$ con negación y fusión operaciones unarias que conmutan entre si son naturalmente equivalentes. Específicamente:*

1. *Los siguientes funtores son covariantes:*

   a) *$H : \boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim}$, definido por $H(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{L}$ y para cualquier $f : L \rightarrow M \in Mor(\boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg)$:*

   $$\begin{array}{rcl} H(f) : L\times L & \rightarrow & M\times M \\ (x,y) & \rightarrowtail & \big(f(x), f(y)\big). \end{array}$$

   b) *$S : \boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim} \rightarrow \boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg$, definido por $S(\mathcal{B}) = \boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$ y para cualquier morfismo $g : B \rightarrow C$ en $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim}$, con*
   $\mathcal{B} = \langle B, \wedge_B, \vee_B, \otimes_B, \oplus_B, -_B, \sim_B, f_B, t_B, \perp_B, \top_B\rangle$,
   $\mathcal{C} = \langle C, \wedge_C, \vee_C, \otimes_C, \oplus_C, -_C, \sim_C, f_C, t_C, \perp_C, \top_C\rangle$,

   $$\begin{array}{rcl} S(g) = g^+ : Pos(\mathcal{B}) & \rightarrow & Pos(\mathcal{C}) \\ x & \rightarrowtail & g(x)\otimes_C t_C. \end{array}$$

2. *Las siguientes familias de morfismos son isomorfismos naturales:*

   a) *$\delta = \{\delta_B : B \rightarrow Pos(\mathcal{B})\times Pos(\mathcal{B}) \mid \mathcal{B} \in obj(\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim})\}$ definida por $\delta_B(x) = (x^+, \sim(x^-))$.*

   b) *$\gamma = \{\gamma_L : L \rightarrow Pos(\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{L})$ tal que $\boldsymbol{L} \in obj(\boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg)\}$ definida por $\gamma_L(l) = (l, 0_L)$.*

Demostración. Por la dualidad para birretículos entrelazados con negación encontrada en [7], se tiene la mayor parte de la demostración, a continuación se completan los aspectos que permiten verificar el enunciado.

1. **a)** $H(f)$ es un homomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{\sim}$, por las siguientes igualdades es un homomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim}$, con $\boldsymbol{-}$ y $\boldsymbol{-'}$ operaciones fusión en $\boldsymbol{L}\odot\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{M}\odot\boldsymbol{M}$, respectivamente identificadas en el teorema 9.
   $H\big(f\big)\big(\boldsymbol{-}(a,b)\big)=\big(f(\neg b),\ f(\neg a)\big)=\big(\neg f(b),\ \neg f(a)\big)=\boldsymbol{-'}H\big(f\big)\big((a,b)\big)$.

   b) $\boldsymbol{Pos}(\mathcal{B})$ es un objeto de la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg$ ya que $S(g) = g^+$ es un homomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y

   $$g^+(\eta(x)) = g(\eta(x))\otimes_C t_C = -_C \sim_C g(x)\otimes t_C = \eta(g^+(x)),$$

   entonces $S(g)$ es un homomorfismo en $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\neg$.

2. **a)** δ es una transformación natural y del teorema 10 se tiene que
   $\delta : \mathbf{1}_{\mathcal{IBL}_{-\sim}} \dot{\approx} H \circ S$.

   b) $(g_1)_{Pos(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L})}$ es un isomorfismo en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y por las siguientes igualdades es un isomorfismo en la categoría $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\neg}$.
   Sea $(a, 0_L) \in Pos(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L})$,

$$
\begin{aligned}
\eta\big((a,0_L)\big) &= -\sim(a,0_L) \otimes_{\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}} (1_L, 0_L) \\
&= -(0_L, a) \otimes_{\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}} (1_L, 0_L) \\
&= (\neg a, 1_L) \otimes_{\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}} (1_L, 0_L) \\
&= (\neg a \wedge 1_L, 1_L \wedge 0_L) \\
&= (\neg a, 0_L)
\end{aligned}
$$

   por lo tanto $\eta\big((g_1)_{Pos(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L})}(a)\big) = (g_1)_{Pos(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L})}(\neg a)$ y $\eta : \mathbf{1}_{\mathcal{L}_{\neg}} \dot{\approx} S \circ H$.

En consecuencia las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\neg}$ y $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-\sim}$ son naturalmente equivalentes. □

8 Conclusiones

Hemos presentado teoremas de representación para birretículos con fusión, en los cuales utilizamos la definición de retículo opuesto de un retículo $\boldsymbol{L}$ que denotamos $\boldsymbol{L}^*$ y se demostró que el producto $\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*$ es un retículo con fusión, por otra parte la definición de los elementos norte y sur en un birretículo entrelazado $\mathcal{B}$ que permite otra forma de representarlo $\mathcal{B} \cong \boldsymbol{Nor}(\mathcal{B}) \odot \boldsymbol{Sur}(\mathcal{B})$, también obtuvimos que para birretículos con fusión sus retículos norte y sur son isomorfos, además los elementos norte del birretículo $\boldsymbol{Nor}(\boldsymbol{L} \odot \boldsymbol{L}^*)$ son de la forma $(0, l)$. Estos teoremas permiten identificar las transformaciones naturales necesarias para probar que las categorías $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{IBL}}_{-}$ son naturalmente equivalentes y así deducir que las categorías $\boldsymbol{\mathcal{PS}}$ y $\boldsymbol{\mathcal{DBL}}_{-}$ son dualmente equivalentes.

El teorema 11 relaciona la dualidad de birretículos con negación presentada en [7], permitiendo incluir la operación unaria de fusión en estos birretículos. Esto se logró por medio de teoremas de representación estudiados en [4] para birretículos entrelazados con negación y fusión, los cuales permiten reconocer los funtores y las transformaciones naturales necesarias para establecer la dualidad.

Referencias

[1] Arieli, Ofer. *Multiple-valued logics for Reasoning with uncertainty.* Tel-Aviv University, (1999), pp. 55-74,.

[2] Avron, A.: The structure of Interlaced Bilattices, Journal of Mathematical Structure in computer Science. Vol 6, (1996), pp. 287-299.

[3] Cerón, S.: Una dualidad en birretículos, Tesis de Maestría en Matemáticas, Universidad del Valle, (2010).

[4] Fitting, M.: Kleene's three-valued logics and their children, Fundamenta Informaticae. Vol 20, (1994), pp. 113-131.

[5] Komendantskaya, E and Seda, A.: Sound and Complete SLD-Resolution for Bilattice-Based Annotated Logic Program, Electronic Notes in Theoretical Computer Science. Vol 225, (2009), pp. 141-159.

[6] Kondo, Michiro.: Representation theorem of interlaces bilattice with conflation, Far East Journal of mathematical Sciencies. Vol 1(3), (1999), pp. 343-350.

[7] Mobasher, B., Pigozzi, D. Slutzki, D. and Voutsadakis, G.: A duality theory for bilattices, Algebra universalis. Vol: 43, (2000), pp. 109-125.

[8] Roman, S.: Lattices and Ordered Sets, Springer, USA, (2008).

Dirección del autor
Samin Ingrith Cerón Bravo — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
e-mail: `sicbravo@gmail.com`