Vol. XX, № 1, Junio (2012)
Matemáticas: 49–62

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Convolución de medidas radonianas con valores en álgebras de Banach separables

Liliana Posada Vera
Universidad del Valle

Guillermo Restrepo
Universidad del Valle

Recibido Ago. 9, 2011 Aceptado Feb. 10, 2012

Abstract

Let S be a topological group, and $(s,t) \mapsto \theta(s,t) = st$ from $S \times S$ in S the group multiplication. If μ and ν are Radon measures defined on the σ-algebra $\mathcal{A}$ of Borel sets in S with values in a separable Banach algebra X, we will define the convolution product $\mu * \nu$ as a Radon measure defined on the Borel subsets of S with values in X. The definition of $\mu * \nu$ is closely related to the linearization of the bilinear map $m : X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto m(x,y) = xy$ (product in X). Our definition of $\mu * \nu$ for Radon measures resembles that given by Kawabe in [4] for τ-smooth measures.

Keywords: Radon measures, product Radon measure, convolution of Radon measures.

MSC(2000): 28C05

Resumen

Sea S un grupo topológico y $(s,t) \mapsto \theta(s,t) = st$ de $S \times S$ en S la operación multiplicación. Si μ y ν son medidas radonianas definidas en la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de los conjuntos borelianos con valores en un álgebra de Banach separable X, definiremos el producto de convolución $\mu * \nu$ como una medida radoniana definida en los subconjuntos borelianos de S con valores en X. La definición $\mu * \nu$ está íntimamente relacionada con la linealización de la función bilineal $m : X \times X \to X$, $(x,y) \mapsto m(x,y) = xy$ (producto en X). Nuestra definición de $\mu * \nu$ para medidas radonianas se parece a la dada por Kawabe en [4] para medidas τ-suaves.

Palabras y frases claves: medidas radonianas, producto de medidas radonianas, convolución de medidas radonianas.

1 Introducción

Sea (T,τ) un espacio topológico hausdorffiano. La σ-álgebra generada por la colección de los conjuntos abiertos, llamada σ-álgebra de los conjuntos borelianos de T, se denotará por $bor(T)$. Una *medida boreliana* es cualquier función σ-aditiva definida en la σ-álgebra $bor(T)$ de los conjuntos borelianos con valores en $[0,\infty]$. Una medida boreliana μ en T se llama *radoniana* (medida de Radón), si satisface las siguientes condiciones:

rad 1) La medida de cualquier abierto es el extremo superior de las medidas de los subconjuntos compactos contenidos en él. Es decir si $G \in ab(T)$, entonces

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : G \supseteq K \ \text{ compacto}\}$$

(Propiedad de la regularidad interior).

rad 2) La medida de cualquier conjunto boreliano es el extremo inferior de las medidas de los abiertos que lo contienen. Es decir, si $B \in bor(T)$, entonces

$$\mu(B) = \text{ínf}\{\mu(G) : B \subseteq G \text{ abierto}\}$$

(Propiedad de la regularidad exterior).

rad 3) μ es localmente finita. Es decir, todo $t \in T$ posee una vecindad V tal que $\mu(V) < \infty$.

La propiedad (rad 3) implica que la medida de todo conjunto compacto es finita. La propiedad de regularidad interior es válida para todo boreliano de medida finita. Es decir, si $B \in bor(T)$ y $\mu(B) < \infty$, entonces $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B,\ \ K \text{ compacto}\}$. La definición de medida radoniana que hemos adoptado es la definición R_2 en [9] página 13. Sean S y T espacios topológicos y $f : S \to T$ una función boreliana. Si μ es una medida boreliana en S, *su imagen por* f, es la medida boreliana ν definida por $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)),\ B \in bor(T)$. Denotaremos por μ_f o f_μ a la imagen de μ por f. En el caso en que S y T son espacios topológicos hausdorffianos, μ es una medida radoniana finita y f es una función continua entonces f_μ es una medida radoniana finita en $bor(T)$. En [3], Gómez y Restrepo demostraron que si μ y ν son medidas radonianas en los espacios topológicos hausdorffianos S y T respectivamente, entonces existe una medida radoniana única λ en $bor(S \times T)$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y todo $B \in bor(T)$. Llamaremos *medida radoniana producto* a la medida λ y la denotaremos por $\lambda = \mu \otimes \nu$. Adicionalmente mostraron un teorema de Fubini para medidas radonianas que se enuncia a continuación: Sean S y T espacios topológicos hausdorffianos, μ y ν medidas radonianas finitas en $bor(S)$ y $bor(T)$ respectivamente y $f : S \times T \to \mathbb{R}$ boreliana. Entonces:

$$\int\limits_{S\times T} f d(\mu \otimes \nu)(s,t) = \int_T \left(\int_S f_t(s) d\mu(s) \right) d\nu(t) = \int_S \left(\int_T f_s(t) d\nu(t) \right) d\mu(s).$$

Es parte de la conclusión que $f_t : S \to \mathbb{R}$ y $f_s : T \to \mathbb{R}$ son funciones borelianas.

Sean S un grupo topológico hausdorffiano, $\theta : S \times S \to S$ la operación multiplicación $(s,t) \mapsto st$ y μ y ν medidas radonianas finitas definidas en $bor(S)$. Definimos el producto convolución de μ y ν como la imagen de $\mu \otimes \nu$ por medio de θ y la denotamos por $\mu * \nu$. Como θ es continua, se tiene que $\mu * \nu$ es una medida radoniana en $bor(S)$. Adicionalmente si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función boreliana, por el teorema de Fubini se tiene que

$$\int_S f(x) d(\mu * \nu)(x) = \int_{S\times S} f \circ \theta(s,t) d(\mu \otimes \nu)(s,t) = \int_{S\times S} f(st) d(\mu \otimes \nu)(s,t)$$

$$= \int_S \int_S f(st) d\mu(s) d\nu(t) = \int_S \int_S f(st) d\nu(t) d\mu(s).$$

Por otro lado es fácil probar que

$$\mu * \nu(B) = \int_S \chi_B d(\mu * \nu) = \int_S \mu(Bt^{-1}) d\nu(t) = \int_S \nu(s^{-1}B) d\mu(s).$$

Si $S = \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mu * \nu(B) = \int_S \chi_B d(\mu * \nu) = \int_S \mu(B - t) d\nu(t) = \int_S \nu(B - s) d\mu(s).$$

Ahora podemos explicar el objetivo de este artículo. Si S es un grupo topológico y μ y ν son medidas radonianas con valores en un álgebra de Banach separable X, definiremos de la manera siguiente el producto convolución $\mu * \nu$ como una medida radoniana en S con valores en X. Si $m : X \times X \to X$ es la función multiplicación $m(x, y) = xy$ del álgebra, $\overline{m} : X \widehat{\otimes}_\epsilon X \to X$ es la linealización $\overline{m}(x \otimes y) = xy$, se define $\mu * \nu(B) = \overline{m}(\theta_\lambda(B))$ donde $B \in bor(S)$. Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función boreliana y acotada y $\theta : S \times S \to S$ es la función multiplicación $\theta(s, t) = st$ del grupo, demostraremos que

$$\int_S f(x) d(\mu * \nu)(x) = \int_{S \times S} f \circ \theta(s, t) d(\mu \otimes \nu)(s, t) = \int_S \int_S f(st) d\mu(s) d\nu(t).$$

Resaltamos que el concepto de medida radoniana con valores vectoriales es el mismo establecido por Posada y Restrepo en [7] y las integrales involucradas en la fórmula anterior son integrales en el sentido de Bartle con respecto a medidas radonianas. Esta integral ha sido utilizada ampliamente en [7].

El producto convolución que acabamos de describir ha sido definido por Kawabe en [4] cuando μ y ν son medidas τ-suaves y los métodos que utilizamos son similares a los utilizados en el artículo mencionado. En este artículo denotaremos por $X \otimes Y$ al producto tensorial de los espacios de Banach X y Y. Es el subespacio de las formas lineales en $\mathbf{B}(X \times Y)$ (espacio de las funciones bilineales de $X \times Y$) generado por aquellas de la forma $f \mapsto (x \otimes y)(f) = f(x, y)$ para todo $f \in \mathbf{B}(X \times Y)$. Es decir $u \in X \otimes Y$ si es de la forma $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i \otimes y_i)$. La ϵ-norma en $X \otimes Y$ es

$$\|u\|_\epsilon = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} x'(x_i) y'(y_i) \right| : (x', y') \in X' \times Y',\ \|x'\| \leq 1,\ \|y'\| \leq 1 \right\}.$$

donde $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$. La π-norma en $X \otimes Y$ es

$$\|u\|_\pi = \text{ínf} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}.$$

El completante de $X \otimes Y$ con la ϵ-norma se denota por $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ y el completante de $X \otimes Y$ con la π-norma se denota por $X \widehat{\otimes}_\pi Y$.

2 Medidas vectoriales e integral de Bartle

A continuación mostraremos algunos conceptos y resultados que son necesarios para el desarrollo de este artículo desarrollados por Bartle en [1] y de una manera ampliada por Posada en [6]. Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medición y X un espacio de Banach. Una función $\nu : \mathcal{A} \to X$ es una medida vectorial contablemente aditiva (σ-aditiva) si para toda sucesión disjunta $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$, la sucesión de sumas parciales $\sum\limits_{k=1}^{n} \nu(A_k)$ es convergente en X con respecto a la topología de la norma y

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Si $\nu : \mathcal{A} \to X$ es una medida vectorial, definimos la *variación* de ν como la función

$$E \mapsto |\nu|(E) = \sup\left\{\sum_{A\in\pi} \|\nu(A)\| : \pi \in \pi(E)\right\}$$

de $\mathcal{A}$ en $[0,\infty]$, donde $\pi(E)$ es el conjunto de todas las particiones finitas de $E \in \mathcal{A}$. Si $|\nu|(\Omega) < \infty$ diremos que ν es una medida de *variación acotada*. La *semivariación* de ν es la función

$$E \mapsto \|\nu\|(E) = \sup\{|x' \circ \nu|(E) : x' \in X', \|x'\| \leq 1\}$$

donde $|x' \circ \nu|$ es la variación de la medida de valor complejo $x' \circ \nu$. La variación es una medida con valores en $[0,\infty]$; la semivariación es una función monótona y subaditiva con valores en $[0,\infty)$, pero en general no es una medida (ver [2]). Se comprueba fácilmente que $\|\nu(E)\| \leq \|\nu\|(E) \leq |\nu|(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$.

Sean $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medición dotado de una medida μ finita. Un subconjunto E de Ω es *μ-nulo* si existe un $A \in \mathcal{A}$ tal que $E \subseteq A$ y $\mu(A) = 0$. La colección $\mathcal{N}$ de los subconjuntos μ-nulos es estable bajo las uniones numerables y la inclusión de conjuntos. Denotaremos por $\mathcal{A}_\mu$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$, la cual se suele llamar la μ-completación de $\mathcal{A}$. Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es *$(\mathcal{A}, bor(\mathbb{R}))$-medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo conjunto boreliano B. Es *μ-medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_\mu$ para todo conjunto boreliano B. Los siguientes enunciados se demuestran sin dificultad:

i) Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es *$(\mathcal{A}, bor(\mathbb{R}))$-medible* si y sólo si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales que converge puntualmente a f. Es decir, $f_n(w) \to f(w)$ para todo $w \in \Omega$.

ii) Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es *μ-medible* si y sólo si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales que converge a f μ-c.t.p. Es decir, $f_n(w) \to f(w)$ para todo w en el complemento de un conjunto μ-nulo.

Es muy pertinente preguntarse por la relación entre la definición usual de función $(\mathcal{A}, bor(X))$-medible ($f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ si A es boreliano) y la definición dada por Bartle en [1] siendo X un espacio de Banach. Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita los enunciados i) y ii) no son válidos. Estos resultados sugieren la siguiente definición propuesta por Bartle en [1].

Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medición, X un espacio de Banach y $\nu : \mathcal{A} \to X$ una función σ- aditiva y $f : \Omega \to X$ una función. Diremos que f es *ν-medible* si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω en X tal que $f_n(w) \to f(w)$ ν-c.t.p, es decir, $f_n(w) \to f(w)$ para todo w en el complemento de un conjunto $E \in \mathcal{A}$ que es $\|\nu\|$-nulo, es decir $\|\nu\|(E) = 0$. Sean T un espacio topológico hausdorffiano, $\mathcal{A} = bor(T)$ y X un espacio de Banach. Una σ-medida $\mu : bor(T) \to X$ es *radoniana* si $x' \circ \mu$ es una medida radoniana con valores complejos para toda forma lineal $x' \in X'$, es decir, $|x' \circ \mu|$ es una medida radoniana para cada $x' \in X'$.

Se demostró en [7] que una σ-medida $\mu : bor(T) \to X$ es radoniana si y sólo si para todo conjunto boreliano B y todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset B$ tal que $\|\mu\|(B - K) < \epsilon$.

Sean X, Y y Z espacios de Banach y $b : X \times Y \to Z$ una función bilineal y continua. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio de medición y $\nu : \mathcal{A} \to Y$ es una σ-medida vectorial, la *b-semivariación* de ν es el número

$$\|\nu\|_b(E) = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} b(x_i, \nu(E_i)) \right\| \right\}$$

donde $E \in \mathcal{A}$ y el supremo es tomado sobre todas las familias finitas $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ contenidos en E y todas las familias finitas $\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq X$ con $\|x_i\| \leq 1$.

Observación 1. *En [7] se postula que la medida ν es μ-continua para alguna medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, es decir, $\|\nu\|_b(E) \to 0$ si $\mu(E) \to 0$. Supondremos que $\|\nu\|_b \leq \|\nu\|$. Esto no es cierto en general (ver [1]). Afortunadamente cuando $Z = X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ y $b(x, y) = x \otimes y$ entonces $\|\nu\|_b \leq \|\nu\|$.*

Describiremos brevemente la integral de Bartle (ver [1] y [6]). Sean X, Y y Z espacios de Banach y $b : X \times Y \to Z$ una función bilineal continua. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio de medición y $\nu : \mathcal{A} \to Y$ es una medida vectorial, la (b, ν)-integral de una función elemental $f : \Omega \to X$, $f = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \chi(E_k)$ sobre $E \in \mathcal{A}$ es el vector

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) := \sum_{k=1}^{n} b(x_k, \nu(E \cap E_k)) \in Z.$$

La función $f \mapsto \int_E b(f(w), d\nu(w))$ es una función lineal definida en el espacio vectorial de las funciones elementales de Ω en X en el espacio de Banach Z. Una función $f : \Omega \to X$ es *(b, ν)-integrable* si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales de Ω en X que converge a f (b, ν)-c.t.p y su integral es

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) := \lim_{n\to\infty} \int_E b(f_n(w), d\nu(w))$$

($f_n \to f$ (b,ν)-c.t.p significa que $f_n(w) \to f(w)$ en el complemento de un conjunto $\|\nu\|_b$-nulo.) Por la observación anterior, el límite anterior no depende de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ utilizada para definir la integral.

Teorema 1. ***De la convergencia acotada.*** *Ver ([7]) Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones (b,ν)- integrables de Ω en X las cuales convergen (b,ν)-c.t.p a una función $f:\Omega\to X$. Si f es (b,ν)-acotada (existe una constante $M>0$ tal que $\|f_n(w)\|\leq M$ para todo n y todo w en el complemento de un conjunto $\|\nu\|_b$-nulo), entonces f es (b,ν)-integrable y*

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \lim_{n\to\infty}\int_E b(f_n(w), d\nu(w)).$$

Observación 2. *Si $Z = X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ (producto tensorial inyectivo de los espacios de Banach X y Y) y b es la función bilineal $b(x,y)=x\otimes y$ (función tensorial), se suele escribir*

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \int_E f(w)\otimes d\nu(w).$$

Los siguientes teoremas se demostraron en [7] y juegan un papel fundamental en este artículo.

Teorema 2. *Sean S y T espacios topológicos hausdorffianos, X y Y espacios de Banach separables, $\mu : bor(S)\to X$ y $\nu : bor(T)\to Y$ medidas radonianas. Entonces existe una y sólo una medida radoniana $\lambda : bor(S\times T)\to X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ (producto tensorial inyectivo de X y Y) tal que $\lambda(A\times B)=\mu(A)\otimes\nu(B)$ para todo $A\in bor(S)$ y $B\in bor(T)$.*

Esta medida λ se llama *medida producto* de μ y ν y se denota por $\lambda=\mu\otimes\nu$. La medida producto satisface un teorema de Fubini generalizado:

Teorema 3. *Sean S y T espacios topológicos hausdorffianos, X y Y espacios de Banach separables, $\mu : bor(S)\to X$ y $\nu : bor(T)\to Y$ medidas radonianas. Si $f : S\times T\to\mathbb{R}$ es una función boreliana y acotada, entonces*

$$\int\limits_{S\times T} f(s,t)d\lambda(s,t) = \int_T\left(\int_S f_t(s)d\mu(s)\right)\otimes d\nu(t).$$

3 Imagen de una medida vectorial

Teorema 4. *Sean $(S,\mathcal{A})$ y $(T,\mathcal{B})$ espacios de medición, ϕ una función $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-medible de S en T y X un espacio de Banach. Si $\mu:\mathcal{A}\to X$ es una σ-medida con valores en X, entonces $\nu:\mathcal{B}\to X$ definida por $\nu(B)=\mu(\phi^{-1}(B))$ es una σ-medida con valores en X.*

La demostración de este enunciado es simple y la omitimos. La medida ν así definida se llama *imagen de la medida μ por ϕ* y se suele denotar por ϕ_μ.

Proposición 1. *Sean $(S,\mathcal{A})$ y $(T,\mathcal{B})$ espacios de medición, ϕ una función $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-medible de S en T y X un espacio de Banach. Si $\mu:\mathcal{A}\to X$ es una σ-medida con valores en X, entonces*

$$\|\phi_\mu\|(B)\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B))\quad\text{para todo }\ B\in\mathcal{B}.$$

Demostración. Sea $\{B_k : 1\le k\le n\}$ una partición de B y $\{\phi^{-1}(B_k)\}$ una partición de $\phi^{-1}(B)$. Entonces para cada $x'\in X'$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|x'\circ\phi_\mu(B_k)| &= \sum_{k=1}^{n}|x'\circ\mu(\phi^{-1}(B_k))|\le|x'\circ\mu|(\phi^{-1}(B))\\ &\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B)).\end{aligned}$$

Si tomamos el supremo sobre todas las particiones de B tenemos que

$$|x'\circ\phi_\mu|(B)\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B)).$$

Por último si tomamos el supremo sobre todas las $x'\in X'$ tal que $\|x'\|\le 1$ entonces $\|\phi_\mu\|(B)\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B))$. □

Teorema 5. *Sean S y T espacios topológicos hausdorffianos, X un espacio de Banach, y $\phi:S\to T$ una función continua. Si $\mu:bor(S)\to X$ es una medida vectorial radoniana entonces ϕ_μ también es radoniana.*

Demostración. Debemos mostrar que para todo $B\in bor(T)$ y para todo $\epsilon>0$ existe $K'\subset B$ compacto tal que $\|\phi_\mu\|(B-K')<\epsilon$. Por ser μ una medida vectorial radoniana entonces se cumple que dado $C\in bor(S)$ y todo $\epsilon>0$ existe $K\subset C$ compacto tal que $\|\mu\|(C-K)<\epsilon$. Si $B\in bor(T)$ entonces $C=\phi^{-1}(B)\in bor(S)$ y $\phi(K)=K'$ es compacto por ser ϕ continua. Usando la proposición anterior y el hecho de que la semivariación de una medida vectorial es subaditiva se tiene que

$$\begin{aligned}\|\phi_\mu\|(B-\phi(K)) &\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B-\phi(K)))\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B)-\phi^{-1}(\phi(K))\\ &\le\|\mu\|(\phi^{-1}(B)-K)<\epsilon.\end{aligned}$$

□

4 Convolución de medidas vectoriales radonianas

En esta sección X es un álgebra de Banach separable y S es un grupo topológico con una topología completamente regular. Denotemos por m a la función multiplicación $(x,y)\mapsto xy=m(x,y)$ del álgebra X. Es claro que m es una función bilineal y continua, pues $\|xy\|\le\|x\|\|y\|$. La linealización de m se denotará por $\overline{m}$ y por tanto $\overline{m}(x\otimes y)=xy$. Si $u=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k\otimes y_k$, entonces

$$\overline{m}(u)=\sum_{k=1}^{n}\overline{m}(x_k\otimes y_k)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k.$$

Denotaremos por $\|.\|_\epsilon$ a la ϵ-norma en $X \otimes X$. En lo que sigue haremos la misma hipótesis de Kawabe en [4], es una hipótesis ciertamente muy fuerte, que explicaremos al final de esta sección:

$$\|\overline{m}(u)\|_X \leq \|u\|_\epsilon. \tag{1}$$

Esta hipótesis asegura que la linealización $\overline{m} : X \otimes X \to X$ es continua respecto a la ϵ-norma en el producto tensorial y por tanto se puede considerar, como en efecto lo haremos, que $\overline{m}$ es una función lineal y continua de $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$ en X. Si S es un grupo topológico, la multiplicación se denota por $(s,t) \mapsto st = \theta(s,t)$.

Definición 1. *Sean S un grupo topológico y μ y ν dos medidas radonianas en S con valores en un álgebra de Banach X que satisface la condición* (1)*. Sea $\lambda = \mu \otimes \nu$ la medida radoniana producto definida en $bor(S \times S)$ y con valores en $X \widehat{\otimes}_\epsilon X$. Por el teorema* 5*, el producto de convolución de estas medidas es la medida $\gamma = \mu * \nu : bor(S) \to X$ definida por*

$$\gamma(A) = \mu * \nu(A) = \overline{m} \circ \theta_\lambda(A) = \overline{m}(\lambda(\theta^{-1}(A))).$$

Teorema 6. *El producto de convolución de dos medidas radonianas con valores en un álgebra de Banach que satisface la condición* (1) *es una medida radoniana.*

Demostración. Es claro que γ es una medida boreliana, pues si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección disjunta en $bor(S)$ cuya unión es A, entonces $\theta_\lambda(A) = \sum_n \theta_\lambda(A_n)$ y por la continuidad y linealidad de $\overline{m}$,

$$\overline{m} \circ \theta_\lambda(A) = \sum_n \overline{m} \circ \theta_\lambda(A_n) \quad \text{y} \quad \gamma(A) = \sum_n \gamma(A_n).$$

Demostremos que γ es radoniana. Si $x' \in X'$, entonces $x' \circ \gamma = (x' \circ \overline{m}) \circ \theta_\lambda$ es radoniana para todo $x' \in X'$, lo que implica que γ es radoniana. □

El lema siguiente es una consecuencia inmediata de la condición (1) y de la propiedad de la norma en un álgebra de Banach.

Lema 1. *Si T es un espacio topológico, $\nu : bor(T) \to X$ es una medida vectorial y $b(x,y) = x \otimes y$ es la función bilineal tensorial entonces*

$$\|\nu\|_m(E) \leq \|\nu\|_b(E)$$

para todo $E \in bor(T)$.

Demostración.

$$\|\nu\|_m(E) = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^n m(x_i, \nu(E_i))\right\|\right\} = \sup\left\{\left\|\overline{m}\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes \nu(E_i)\right)\right\|\right\}$$

$$\leq \|\overline{m}\| \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^n x_i \otimes \nu(E_i)\right\|\right\} \leq \|\nu\|_b(E)$$

por la condición (1). □

Notación 1. *Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medición, X un álgebra de Banach con la operación multiplicación $m(x, y) = xy$ y ν una medida de $\mathcal{A}$ en X. Si $f : \Omega \to X$ es una función (m, ν)-integrable, usaremos la notación*

$$\int_\Omega m(f(w), d\nu(w)) := \int_\Omega f(w) d\nu(w) \in X.$$

Proposición 2. *Sean S y T espacios topológicos, μ y ν medidas radonianas en S y T respectivamente con valores en un álgebra de Banach X y $\lambda = \mu \otimes \nu$ la medida radoniana producto. Si $h : S \times T \to \mathbb{R}$ es una función boreliana acotada, entonces la función vectorial*

$$t \mapsto \int_S h_t(s) d\mu(s)$$

de T en X es (m, ν)-integrable y

$$\overline{m}\left(\int_{S\times T} h(s,t) d\lambda(s,t)\right) = \int_T \int_S h_t(s) d\mu(s) d\nu(t).$$

Demostración. Demostremos la primera parte del teorema. Por ser h una función boreliana y acotada, entonces existe una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que converge uniformemente a h. Es inmediato que $(h_{n,t}(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $h_t(s)$. Sean

$$M := \sup_{(s,t)} |h(s,t)| \quad \text{y} \quad g_n(t) := \int_S h_{n,t}(s) d\mu(s).$$

Entonces g_n es una función simple de T en X y $\|g_n(t)\| \leq M\|\mu\|(S)$ uniformemente en n. Ahora

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t) = \int_S f_t(s) d\mu(s).$$

Por el teorema de la convergencia acotada $g(t)$ es (m, ν)-integrable.

Demostremos la segunda parte de la proposición. Por el teorema 3 se tiene que

$$\int\limits_{S\times T} h(s,t) d(\mu \otimes \nu)(s,t) = \int_T \left(\int_S h_t(s) d\mu(s)\right) \otimes d\nu(t).$$

Ahora, como $\overline{m}$ es lineal y continua,

$$\overline{m}\left(\int_{S\times T} h(s,t) d\lambda(s,t)\right) = \overline{m}\left(\int_T \left[\int_S h_t(s) d\mu(s)\right] \otimes d\nu(t)\right) =$$

$$\int_T \overline{m}\left(\int_S h_t(s) d\mu(s) \otimes d\nu(t)\right) = \int_T m\left(\int_S h_t(s) d\mu(s), d\nu(t)\right) =$$

$$\int_T \left[\int_S h_t(s) d\mu(s)\right] d\nu(t) = \int_T \int_S h_t(s) d\mu(s) d\nu(t).$$

□

Del teorema anterior se deduce la propiedad usual del producto de convolución relacionada con integrales.

Teorema 7. *Sean S un grupo topológico y μ y ν medidas radonianas definidas en $bor(S)$ y con valores en un álgebra de Banach X que satisface la condición (1). Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función boreliana y acotada, entonces*

$$\int_S f(x)d(\mu * \nu)(x) = \int_S \int_S f(st)d\mu(s)d\nu(t).$$

Demostración. Sean $\theta(s,t) = st$ la multiplicación del grupo topológico y $h(s,t) = f(\theta(s,t)) = f(st)$. Recordemos que $\mu * \nu = \overline{m} \circ \theta_\lambda$, donde $\lambda = \mu \otimes \nu$. Ahora,

$$\int_{S\times S} h(s,t)d\lambda(s,t) = \int_S f(x)d\theta_\lambda(x)$$

y nos proponemos demostrar que

$$\overline{m}\left(\int_S f(x)d\theta_\lambda(x)\right) = \int_S f(x)d(\mu * \nu)(x). \tag{2}$$

Este enunciado es cierto si $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \chi(E_k)$ es una función elemental. En efecto,

$$\int_S f(x)d\theta_\lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \theta_\lambda(E_k).$$

Luego

$$\overline{m}\left(\int_S f(x)d\theta_\lambda(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \overline{m} \circ \theta_\lambda(E_k) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu * \nu(E_k) = \int_S f(x)d(\mu * \nu)(x).$$

Veamos el caso general. Existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones elementales que converge a f en S. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\overline{m}\left(\int_S f_n(x)d\theta_\lambda(x)\right) = \int_S f_n(x)d(\mu * \nu)(x).$$

Al pasar al límite se obtiene que

$$\overline{m}\left(\int_S f(x)d\theta_\lambda(x)\right) = \int_S f(x)d(\mu * \nu)(x).$$

Hemos casi terminado. Recordemos que

$$\int_S \int_S h_t(s)d\mu(s)d\nu(t) = \int_S m\left(\int_S h_t(s)d\mu(s), d\nu(t)\right).$$

Ahora por la proposición 2 se tiene que

$$\overline{m}\left(\int_{S\times S} h(s,t)d\lambda(s,t)\right) = \int_S \int_S h_t(s)d\mu(s)d\nu(t)$$

y por (2)

$$\int_S \int_S h_t(s)d\mu(s)d\nu(t) = \int_S f(x)d(\mu * \nu)(x).$$

□

Proposición 3. *Sean S un grupo topológico y μ y ν medidas radonianas definidas en $bor(S)$ con valores en un álgebra de Banach X que satisface la condición* (1)*. Entonces*

$$\mu * \nu(B) = \int_S \chi_B(s)d(\mu * \nu)(s) = \int_S \mu(Bt^{-1})d\nu(t).$$

Demostración. Sean $B \in bor(S)$, $f = \chi_B$ y $D = \{(s,t) : st \in B\}$. Entonces $h(s,t) = \chi_D(s,t)$ y $h_t(s) = \chi(Bt^{-1})(s)$ y por el teorema anterior

$$\mu * \nu(B) = \int_S \int_S h_t(s)d\mu(s)d\nu(t) = \int_S \mu(Bt^{-1})d\nu(t).$$

□

Teorema 8. ***Unicidad del producto de convolución****. Sean S un grupo topológico y μ y ν medidas radonianas en $bor(S)$ con valores en un álgebra de Banach X que satisface la condición* (1)*. Entonces existe una y sólo una medida radoniana $\gamma : bor(S) \to X$ tal que*

$$\int_S f(x)d\gamma(x) = \int_S \int_S f(st)d\mu(s)d\nu(t)$$

para toda función boreliana y acotada $f : S \to \mathbb{R}$.

Demostración. Supongamos $\beta : bor(S) \to X$ una medida vectorial radoniana que satisface

$$\int_S f(x)d\beta(x) = \int_S \int_S f(st)d\mu(s)d\nu(t)$$

para toda $f : S \to \mathbb{R}$ boreliana y acotada y probemos que $\mu * \nu(B) = \beta(B)$ para todo boreliano $B \in bor(S)$. En efecto sea $B \in bor(S)$ y $f = \chi_B$ entonces utilizando la propiedad anterior se tiene que

$$\mu * \nu(B) = \int_S \mu(Bt^{-1})d\nu(t) = \beta(B)$$

para todo $B \in bor(S)$, completándose así la prueba. □

Proposición 4. *Sean μ y ν medidas vectoriales definidas en $bor(S)$ con valores en un espacio de Banach X. Entonces*

$$\|\mu + \nu\| \leq \|\mu\| + \|\nu\|.$$

Demostración. Sea $A \in bor(S)$ y $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ una partición de A. Entonces

$$\begin{aligned}
|x' \circ (\mu + \nu)|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x' \circ (\mu + \nu)(A_k)| \right\} = \\
\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x' \circ \mu(A_k) + x' \circ \nu(A_k)| \right\} \leq \\
\sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x' \circ \mu(A_k)| \right\} + \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x' \circ \nu(A_k)| \right\} = \\
|x' \circ \mu|(A) + |x' \circ \nu|(A)
\end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los $\|x'\| \leq 1$ se tiene para todo $A \in bor(S)$ que

$$\|\mu + \nu\|(A) \leq \|\mu\|(A) + \|\nu\|(A).$$

□

Proposición 5. *Sean μ una medida vectorial y r un real no negativo entonces $\|r\mu\| = r\|\mu\|$.*

Demostración.

$$|x' \circ (r\mu)|(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x' \circ r\mu(A_k)| \right\} = r \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |x' \circ \mu(A_k)| \right\} = r|x' \circ \mu|(A).$$

Nuevamente tomando el supremo sobre los $\|x'\| \leq 1$ se tiene que $\|r\mu\|(A) = r\|\mu\|(A)$ para todo $A \in bor(S)$. □

Proposición 6. *Sean μ y ν medidas vectoriales radonianas definidas en $bor(S)$ con valores en un álgebra de Banach X y r un real no negativo. Entonces $\mu + \nu$ y $r\mu$ son medidas vectoriales radonianas.*

Demostración. Es consecuencia de las proposiciones 4 y 5. □

Proposición 7. *La convolución tiene las siguientes propiedades:*

1. $(\mu_1 + \mu_2) * \nu = \mu_1 * \nu + \mu_2 * \nu$.
2. $(r\mu) * \nu = r(\mu * \nu)$ *para todo r real no negativo.*

Demostración. Probaremos 1. Sea $B \in bor(S)$. Por la proposición 3 se tiene que

$$(\mu_1+\mu_2)*\nu(B) = \int_S (\mu_1+\mu_2)(Bt^{-1})d\nu(t) = \int_S \mu_1(Bt^{-1})d\nu(t)+\int_S \mu_2(Bt^{-1})d\nu(t)$$
$$= (\mu_1 * \nu)(B) + (\mu_2 * \nu)(B)$$

para todo $B \in bor(S)$.

Probaremos 2. Sea $B \in bor(S)$. Nuevamente por la proposición 3 se tiene que

$$(r\mu) * \nu(B) = \int_S (r\mu)(Bt^{-1})d\nu(t) = r\int_S \mu(Bt^{-1})d\nu(t) = r(\mu * \nu)(B)$$

para todo $B \in bor(S)$. $\square$

5 Observaciones finales

Una suposición que hemos hecho en el teorema de existencia del producto de convolución de medidas radonianas es que $\|\overline{m}(u)\| \leq \|u\|_\epsilon$. En las observaciones siguientes aclararemos esta hipótesis.

1. Hemos designado $m(x, y) = xy$ el producto en un álgebra de Banach X. Esta es una función bilineal y continua de $X \times X$ en X y por tanto su linealización $\overline{m}$ es una función lineal de $X\widehat{\otimes}_\pi X$ en X, donde π es la norma proyectiva en $X\otimes X$. Si $u = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$, entonces

$$\|\overline{m}(u)\| = \left\|\overline{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k\right)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \overline{m}(x_k \otimes y_k)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|\|y_k\|$$

para toda representación de u y por tanto $\|\overline{m}(u)\| \leq \|u\|_\pi$.

2. En general $\|u\|_\epsilon \leq \|u\|_\pi$, pero la igualdad puede darse. Tal como lo demostró Pisier en [5] existen espacios de Banach separables tales que $X\widehat{\otimes}_\pi X = X\widehat{\otimes}_\epsilon X$. Para estos espacios llamados espacios de Pisier vale que $\|u\|_\epsilon = \|u\|_\pi$ para todo $u \in X \otimes X$.

3. De estas afirmaciones se podía predecir que existe una clase amplia de álgebras de Banach para los cuales $\|\overline{m}(u)\| \leq \|u\|_\epsilon$. Pero recurriendo a un procedimiento sencillo se puede demostrar esta afirmación: si X es un álgebra de Banach, $C(\Omega)$ el espacio de las funciones continuas definidas en el espacio topológico compacto Ω y con valores en $\mathbb{K}$, entonces $C(\Omega)\widehat{\otimes}_\epsilon X$ es isométrico al espacio de Banach $C(\Omega, X)$ de las funciones continuas de Ω en X con la norma del supremo por medio de la isometría definida así: si $z = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \otimes y_k$, se define $J(z)(w) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k(w)y_k$ (ver [8]). Entonces

$$\|\overline{m}(z)\| = \sup_{w\in\Omega}\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(w)y_k(w)\right\|\right) = \left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(w)y_k(w)\right\| : w \in \Omega\right\}.$$

Mostraremos ahora que $\|J(z)\| = \|z\|_\epsilon \geq \|\overline{m}(z)\|$. En efecto

$$\|J(z)\| = \sup_{w\in\Omega}\left\|\sum_{k=1}^{n} x_k(w)y_k\right\| = \sup_{w\in\Omega}\left(\sup_{t\in\Omega}\left|\sum_{k=1}^{n} x_k(w)y_k(t)\right|\right) = \sup_{(w,t)\in\Omega\times\Omega}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} x_k(w)y_k(t)\right|\right).$$

Referencias

[1] R.G. Bartle: A general bilinear vector integral. Studia Math 15 (1956), 337-352.

[2] J. Diestel y J. J. Uhl: Vector Measures. American Mathematical Society Mathematical Surveys No 15 (1977).

[3] M. Gómez y G. Restrepo: Producto Tensorial de Medidas Radonianas y el Teorema de Fubini. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVII, N° 1, Junio (2009), 23-34.

[4] J. Kawabe: Borel Injective Tensor Product and Convolution of Vector Measures and Their Weak Convergence. Contemporary Mathematics Volume 321, (2003).

[5] G. Pisier: Counterexample to a conjeture of Grothendieck. Acta Math. 151 (1983).

[6] L. Posada Vera: Producto de medidas radonianas con valores en espacios de Banach separables. Tesis de maestría. Universidad del Valle (2009).

[7] L. Posada y G. Restrepo: Producto de medidas radonianas con valores en espacios de Banach separables. Revista Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Vol. XVIII, N° 1, Junio (2010), 57-69.

[8] R. Raymond: Introduction to tensor products of Banach spaces. Springer, (2002).

[9] L. Schwartz: Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures. Oxford University Press, (1973).

Dirección de los autores
Liliana Posada Vera — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia
e-mail: `lilianapos@yahoo.com.mx`
Guillermo Restrepo — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia
e-mail: `guireste@yahoo.com`