

VALORACIÓN DE LA ROBUSTEZ DEL GRÁFICO DE CONTROL TIPO SHEWHART Y UNA ALTERNATIVA NO PARAMÉTRICA EN EL CONTROL DEL CENTRAMIENTO DE VARIABLES CRÍTICAS CON DISTRIBUCIÓN ASIMÉTRICA

Edison A. Zuluaga Duque

*Estudiante Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística Universidad de Valle, Cali
edanzud@univalle.edu.co*

John J. Millán Hernández

*Estudiante Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística Universidad de Valle, Cali
johnjami@univalle.edu.co*

Jaime Mosquera Restrepo

*Universidad del Valle, Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística, Cali
jaimores@pino.univalle.edu.co*

Resumen

Shewhart (1927) propuso una metodología de diagnóstico para el control del centramiento de una variable crítica en un proceso de producción. Su propuesta se apoya en el supuesto de distribución normal de la característica a controlar o al menos de sus promedios muestrales, lo cual de alguna manera se puede garantizar a través del Teorema del Limite Central. Sin embargo, en la práctica es común encontrarse con variables de proceso que provienen de distribuciones asimétricas, frente a las cuales la eficiencia de la metodología es de alguna manera incierta. En el presente artículo se realiza una evaluación de la eficiencia de esta metodología, mediante ejercicios de simulación que reproducen situaciones de distribuciones tanto simétricas como asimétricas. Los resultados obtenidos se contrastan con los observados por la propuesta no paramétrica de Bajgier (1992) contrastando las potencias observadas en cada procedimiento.

Palabras clave: Control Estadístico de Procesos, Gráficos de Control, Remuestreo, Bootstrap, Potencia.

Abstract

Shewhart (1927) proposed a diagnostic methodology for controlling the centering of a critical variable in a production process. His proposal is based on the assumption of normal distribution of property to controlling or at least of their sample averages, which somehow can be guaranteed through the Central Limit Theorem. However, in practice is common to face with process variables that are from asymmetric distributions, against which the efficiency of the methodology is somewhat uncertain. This article offers an evaluation of the efficiency of this methodology, through simulation exercises that reproduce situations of both symmetrical and asymmetrical distributions. The results are contrasted with those observed from the proposed nonparametric of Bajgier (1992) contrasting the powers observed in each case.

Keywords: Statistical Process Control, Control Charts, Resampling, Bootstrap, Power Test.

1. Introducción

Shewhart (1927), propuso la que hoy en día es quizás la herramienta de control de procesos mayormente implementada a nivel industrial. Hablamos de los gráficos de control, los cuales han venido demostrando su eficiencia a lo largo del tiempo. La propuesta de Shewhart consiste en la revisión periódica de la característica crítica del proceso, realizando seguimiento de la misma a través de la recolección periódica de muestras de producto, siendo posible obtener una secuencia de valoraciones tanto del centramiento como de la variabilidad del proceso. De tal manera que, un proceso centrado en el objetivo de producción, con los mínimos niveles de variabilidad, garantizarían al usuario final que cualquiera de los productos obtenidos tendrán la característica ofrecida y serán lo más similares entre si, en poca palabras tendrá en su manos un producto de gran calidad. Para lograr este objetivo se hace necesario la detección y aislamiento de posibles fuentes de variación, condición que según la propuesta de Shewhart se puede lograr mediante la representación gráfica de la secuencia temporal de las estimaciones del centramiento y variabilidad del proceso, sobre las cuales se determinan algunos límites mediante técnicas probabilísticas, cuyo sobrepaso puede interpretarse como una posible situación de falta de control en el proceso, o lo que es equivalente, una señal de presencia de fuentes de variabilidad inusuales en el mismo.

En su propuesta de ubicación de los límites de control, Shewhart hace uso del supuesto de normalidad de la característica a controlar, el cual en algunas situaciones es razonable, mientras que en otras, a pesar de no cumplirse, puede obviarse dada la propiedad asintótica otorgada por el Teorema del Límite Central (TLC), al estudiar los promedios de diferentes muestras aleatorias extraídas desde el mismo proceso cuando se dispone de tamaños de muestra suficientemente grande. Sin embargo, en los procesos de producción actuales, es común encontrarse con variables críticas cuya distribución de probabilidad sea totalmente asimétrica, necesitando de grandes tamaños de muestra para garantizar la asintoticidad del TLC, tamaños de

muestra que violan las condiciones de operatividad en el control de proceso, al convertirlos en tediosos y costosos.

Motivados por el planteamiento anterior, en el presente artículo se valora la robustez del método propuesto por Shewhart, para una situación particular en la cual la distribución de partida presenta problemas de asimetría. Los resultados se contrastan con los obtenidos en la implementación de la propuesta no paramétrica realizada por Bajgier (1992) quien sugiere la aplicación de métodos Bootstrap en la determinación de los límites del gráfico de control, contrastando los resultados encontrados desde un ejercicio de simulación que permita identificar la mejor opción de control en situaciones similares.

2. Métodos

En su propuesta de control para el centramiento del proceso, Shewhart sugiere la recolección periódica de muestras de tamaño n extraídas desde el proceso en un instante t , sobre las cuales se realizan valoraciones de la característica de calidad y se verifica la estabilidad en el centramiento del proceso mediante el contraste de su estimador natural \bar{X} frente a un par de límites previamente establecidos (Inferior (LIC); Superior (LSC)), mediante métodos probabilísticos que toman como insumo el comportamiento histórico del proceso cuando se asume que este se encuentra bajo control estadístico. De esta manera se emite un juicio de falta de control de proceso en la eventualidad en que $\bar{X} > LSC$ o $\bar{X} < LIC$.

2.1. Límites de control tipo Shewhart

Bajo el supuesto de distribución normal de los promedios obtenidos de las muestras del proceso, Shewhart propone establecer los límites de control como en (1) y (2), esto para cuando los parámetros de centramiento (μ_0) y de variabilidad (σ_0) del proceso en su estado bajo control son previamente conocidos.

$$LSC = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

$$LIC = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

Para el caso en el cual los parámetros de proceso μ y σ son desconocidos, surge la necesidad de estimarlos de forma adecuada, en cuya situación Shewhart propone realizar esta estimación desde el análisis de la historia generada por el proceso en condiciones normales (bajo control), conformando lo que se conoce como la fase I o fase de instalación de un Gráfico de control. La propuesta de estimación de Shewhart y posterior establecimiento de los límites de control se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Recolección de m muestras, cada una de tamaño n cuando se asume que el proceso se está desarrollando bajo condiciones estables o bajo control.
2. Cálculo, para cada una de las muestras, de la media muestral \bar{X}_i y de la medida de dispersión que representará la variabilidad del proceso (R_i o S_i), la cual se define tomando como referencia el tamaño de la muestra. “Cuando el tamaño de la muestra es relativamente pequeño, el método de la amplitud representa un buen estimador de la variabilidad del proceso, mientras que para tamaños de muestra grandes, es más eficiente utilizar la desviación estándar como estimador de variabilidad”. Montgomery (2004).
3. Cálculo del promedio $\bar{\bar{X}}$ de las medias muestrales obtenidas y del promedio de la medida de dispersión adoptada \bar{R} o \bar{S} , según sea el caso.
4. Estimación de los parámetros μ y σ del proceso a través de (3), (4) y (5). Siendo (4) y (5) excluyentes.

$$\hat{\mu}_0 = \bar{\bar{X}} \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\bar{S}}{c_4} \quad (5)$$

5. Fijación de los límites de control, mediante el remplazo de las estimaciones obtenidas en (3), (4) y (5) en las ecuaciones (1) y (2) que definen los límites de control. Las expresiones resultantes se presentan en la Tabla 1. α representa la tasa de falsas alarmas deseadas para la fase II de control.

Tabla 1. Límites de control según medida de dispersión.

	Rango	Desviación
LSC	$\bar{\bar{X}} + z_{\alpha/2} \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}} + z_{\alpha/2} \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}}$
LIC	$\bar{\bar{X}} - z_{\alpha/2} \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$	$\bar{\bar{X}} - z_{\alpha/2} \frac{\bar{S}}{c_4 \sqrt{n}}$

Montgomery (2004) presenta la tabulación de las constantes d_2 y c_4 . Para el caso en el cual se cumple el supuesto de normalidad de los promedios monitoreados en el proceso bajo control, es posible calcular la potencia del Gráfico mediante (6).

$$\beta = P(Z < Z_{\alpha/2} - r\sqrt{n}) - P(Z < -Z_{\alpha/2} - r\sqrt{n}) \quad (6)$$

r se define como la magnitud del cambio medida en unidades de desviación estándar, como en (7).

$$r = \frac{\mu - \mu^r}{\sigma} \quad (7)$$

2.2. Límites de control tipo Bootstrap

Como se mencionó anteriormente, los límites de control propuestos por Shewhart, parten del supuesto de normalidad de los promedios monitoreados desde un proceso bajo control, lo cual en la mayoría de las ocasiones es razonable. Sin embargo existen situaciones para las cuales la distribución de la característica de calidad a controlar es asimétrica y el tamaño de muestra no es suficiente para garantizar la condición asintótica de normalidad para sus promedios muestrales. La aplicación de los límites tipo Shewhart en este tipo de situaciones no permite predecir con certeza el nivel de eficiencia del procedimiento de control.

Efron (1979). Propone un método para la reconstrucción de la distribución probabilística de algún estadístico muestral, para el caso en el que el número de realizaciones observadas del estadístico sea restringido. La propuesta de Efron, denominada Bootstrap contempla la observación de una muestra inicial de tamaño restringido, que conforma la base para la reconstrucción de la distribución poblacional a partir de técnicas de remuestreo con remplazamiento. Algunos autores como Liu y Tang (1996) y Bajgier (1992) retomaron las ideas de Efron y realizaron una propuesta de implementación en el control estadístico de procesos, la cual complementa la metodología de control propuesta por Shewhart, con un método de estimación de los límites de control que no presentan ningún supuesto de distribución poblacional. La propuesta de estos autores se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Recolección de m muestras, cada una de tamaño n cuando se asume que el proceso se está desarrollando bajo condiciones estables o bajo control. De esta manera se cuenta con un total de $N=n*m$ unidades muestrales.
2. Partiendo de la muestra combinada de tamaño N , se realizan extracciones con reemplazo de n unidades muestrales. Conformando una nueva muestra denotada por $X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*$, que recibirá el nombre de muestra Bootstrap.

3. Sobre la muestra Bootstrap se calcula el promedio Muestral Observado como en (8).

$$\bar{X}_n^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m X_i^* \quad (8)$$

4. Los pasos 2 y 3 se repiten un número B suficientes de veces, conformándose una muestra de promedios Bootstrap de tamaño B , sobre la cual es posible construir su función de probabilidades empírica.
5. Sobre la distribución de probabilidad empírica de los B promedios Bootstrap generados $\bar{X}_1^*, \bar{X}_2^*, \dots, \bar{X}_B^*$ se ubican los límites de control sobre los percentiles $\alpha/2$ y $(1-\alpha/2)$ tal como en (9) y (10).

$$LIC = \bar{X}_{\alpha/2}^* \quad (9)$$

$$LSC = \bar{X}_{1-\alpha/2}^* \quad (10)$$

3. Metodología

El análisis de la eficiencia de la metodología propuesta por Shewhart y su contraparte no paramétrica basada en métodos Bootstrap, se realizará a través de la implementación de ambas metodologías en escenarios que simulan el comportamiento de procesos de producción en dos casos o escenarios de estudio: Escenario I. Variable de control que proviene de una distribución normal. Escenario II. Variable de control que proviene de una distribución asimétrica. En ambos casos se generan simulaciones de proceso en su estado bajo control, es decir bajo un nivel de centramiento μ_0 y de variabilidad σ_0 previamente establecidos, a partir de las cuales se construirán los respectivos límites de control desde el enfoque paramétrico y el no paramétrico (Fase I simulación). En el caso paramétrico se valoraran los límites que utilizan tanto el rango como la desviación en la valoración de la dispersión. Una vez establecidos los límites

de control de proceso, se generan alteraciones deliberadas en el proceso, consistentes en obtener k nuevas muestras (subgrupos de tamaño n) desde la misma distribución de probabilidad, esta vez con parámetro de centramiento $\mu^r = \mu_0 + r\sigma_0$, manteniendo el parámetro σ_0 constante a través de los diferentes escenarios de simulación. Al final de los ejercicios se valorará la eficiencia de los métodos a través de la estimación de la probabilidad de falsa alarma ($\hat{\alpha}$) y de la potencia de la prueba ($1 - \hat{\beta}$), cuyo calculo sigue las expresiones (11) y (12).

$$\hat{\alpha}_h = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [I_h(\bar{X}_i > LSC_h) + I_h(\bar{X}_i < LIC_h)] \quad (11)$$

$$1 - \hat{\beta}_h = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [I_h(\bar{X}_i > LSC_h) + I_h(\bar{X}_i < LIC_h)] \quad (12)$$

Donde:

$$I_h(\bar{X}_i > LSC_h) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X}_i > LSC_h \\ 0 & \text{si } \bar{X}_i \leq LSC_h \end{cases}$$

$$I_h(\bar{X}_i < LIC_h) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{X}_i < LIC_h \\ 0 & \text{si } \bar{X}_i \geq LIC_h \end{cases}$$

$$h = 1, 2, 3$$

h denota los diferentes tipos de límites de control a evaluar: 1. Tipo Shewhart basado en el Rango. 2. Tipo Shewhart basado en la desviación. 3. Tipo Bootstrap. $\hat{\alpha}$ Se calcula en aquellas simulaciones en las que $\mu_x = \mu_0$, mientras que $(1 - \hat{\beta})$ se calcula para los casos en los que $\mu_x = \mu^r$. Para los Escenarios tipo Ia, distribución normal, y Ib distribución no normal simétrica, se inducirán variaciones de proceso de magnitudes $-3 \leq r \leq 0$, disminuyendo la media del proceso hacia un nivel inferior. Para los escenarios tipo II, se inducirán variaciones de magnitud $-3 \leq r \leq 3$. Esto con la intención de representar procesos que se descentran en el mismo sentido de la asimetría de la distribución original (Escenario IIa), al igual que procesos con descentramientos contrarios a la

asimetría de su distribución de probabilidad (Escenario IIb).

3.1. parámetros de la simulación

En el ejercicio de simulación se generaron un total de $m=100$ subgrupos de tamaño $n=5$ para la estimación de los parámetros de proceso (μ_0 y σ_0) y la construcción de los límites de control en la fase I de instalación del Gráfico. En la fase II, de control, se generan un total de $k=1000$ subgrupos desde procesos con centramiento μ^r y varianza constante σ_0 . Los límites de control tipo Bootstrap se obtiene a través de un total de $B=$ iteraciones.

Los escenarios tipo Ia se generaron desde una distribución de probabilidad normal con parámetro de centramiento $\mu_0=5$ y de dispersión $\sigma_0=1$, mientras que los Escenarios tipo Ib se generaron desde una distribución gamma (ligeramente asimétrica) con parámetro de centramiento $\mu_0=5$ y $\sigma_0=1$, o lo que es equivalente, parámetro de escala $a=25$ y $b=5$. Induciendo en ambos casos desplazamientos de magnitud $r = 0, -0.25, -0.5, -0.75, -1.0, -1.25$ tal como se ilustra en las Figuras 1 y 2 respectivamente.

Los Escenarios tipo IIa (distribución asimétrica con cambios en el sentido de la asimetría) se generaron desde una distribución gamma (asimétrica positiva), con parámetros $a=1$ y $b=1$, induciendo cambios de magnitud $r= 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, 1.25$. Para los Escenarios tipo IIb (distribución asimétrica con cambios en el sentido contrario de la asimetría) se empleo una distribución base gamma con parámetros $a=5.0625$ y $b=2.25$ con $r= 0, -0.25, -0.5, -0.75, -1.0, -1.25$. Estos escenarios se representan en la Figura 3.

4. Resultados

Haciendo uso del software R versión 2.9.1, se implementó un algoritmo que ejecuta la simulación diseñada. Los resultados obtenidos para cada Escenario de Simulación se presentan a continuación.

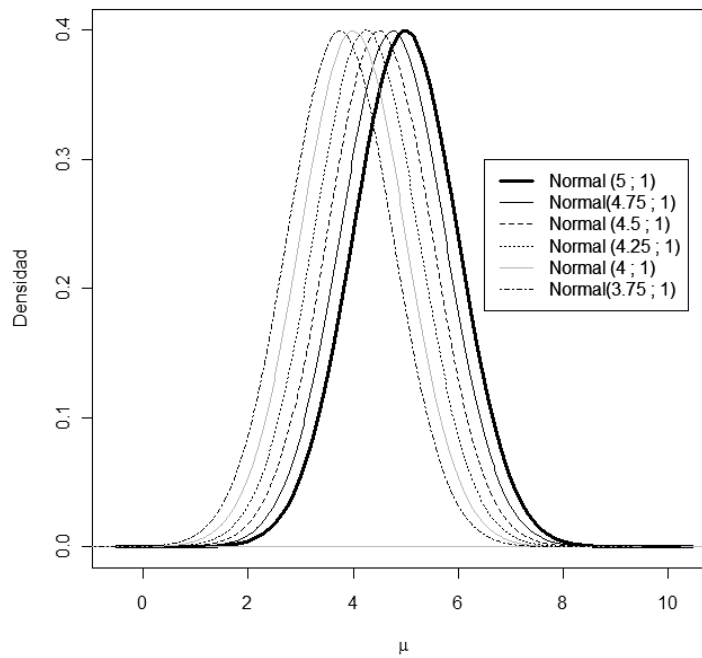


Figura 1. Distribuciones de probabilidad empleadas para Escenarios tipo I a, distribución base Normal ($\mu = 5, \sigma^2 = 1$).

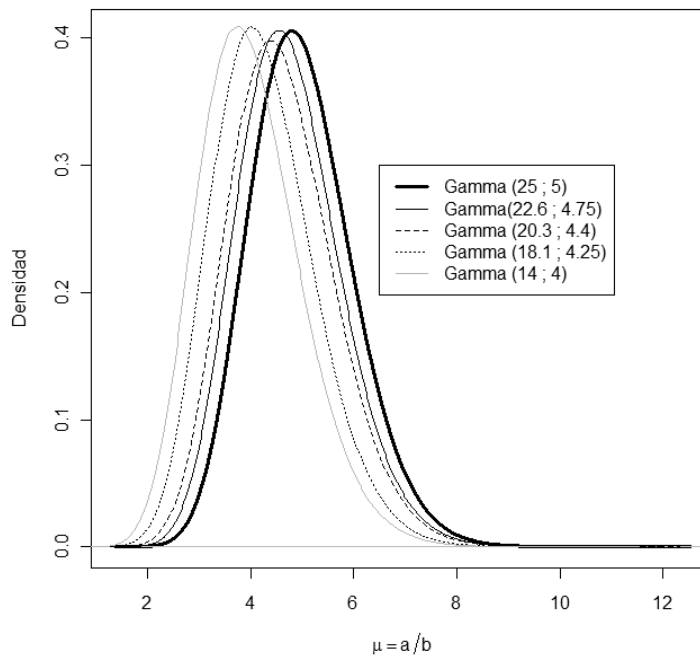


Figura 2. Distribuciones de probabilidad empleadas para Escenarios tipo Ib, distribución base Gamma ($a = 25; b = 5$).

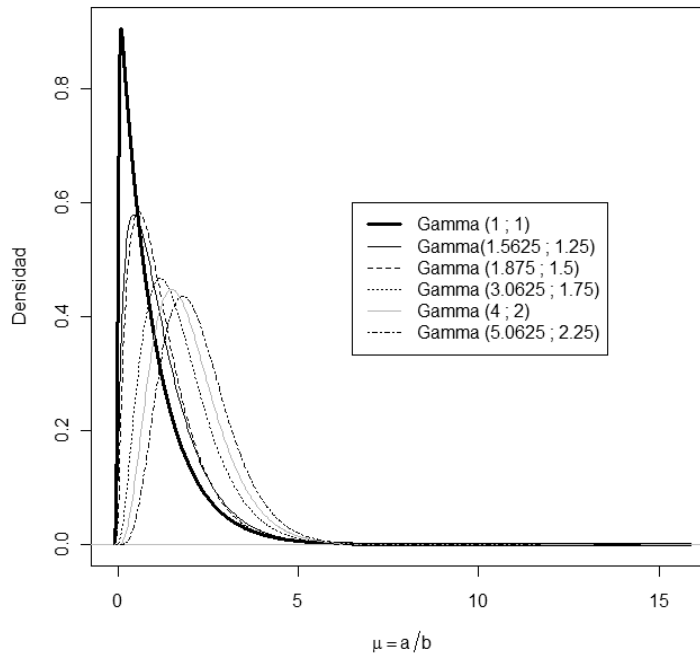


Figura 3. Distribuciones de probabilidad empleadas para Escenarios tipo II a y II b.

4.1. Escenarios tipo I a

La Tabla 2 contiene los límites de control establecidos durante la simulación de procesos bajo control cuya variable crítica cumple el supuesto de normalidad. Se puede observar en este caso que los límites de control, tanto tipo Shewhart basados en rango y en la desviación, como los tipo Bootstrap, presentan resultados muy similares, lo cual hace presagiar que la eficiencia de ambos métodos en la fase II de control debe ser muy similar, situación que se puede corroborar a través de los resultados que se presentan en la Tabla 3.

Nótese como las potencias estimadas para ambos casos son muy similares y las probabilidades de error tipo II no distan de forma significativa de aquella teórica calculada a través de (6).

Tabla 2. Límites de control contruidos en la primera fase bajo un Escenario tipo Ia. Distribución base Normal ($\mu = 5, \sigma^2 = 1$).

Límites De Control	Bootstrap	LCI	4,125339
		LCS	5,824149
	Rango	LCI	4,140025
		LCS	5,861541
	Desviación	LCI	4,149504
		LCS	5,82061

Tabla 3. Eficiencia de los gráficos de control a diferentes niveles de descentramiento de proceso (r) en Escenarios tipo Ia.

		LIMITES DE CONTROL	$\hat{\alpha}$	$(1-\hat{\alpha})$	(1- α) Teórico
r= 0,00	$\mu= 5,00$	BootStrap	0,06	0,94	0,95
		Rango	0,06	0,94	
		Desviación	0,07	0,93	
		LIMITES DE CONTROL	$(1-\hat{\beta})$	$\hat{\beta}$	β Teórico
r= -0,25	$\mu= 4,75$	BootStrap	0,11	0,90	0,91
		Rango	0,11	0,89	
		Desviación	0,12	0,88	
r= -0,5	$\mu= 4,5$	BootStrap	0,21	0,79	0,80
		Rango	0,22	0,78	
		Desviación	0,22	0,78	
r= -0,75	$\mu= 4,25$	BootStrap	0,40	0,60	0,61
		Rango	0,41	0,59	
		Desviación	0,41	0,59	
r= -1,00	$\mu= 4,00$	BootStrap	0,60	0,40	0,39
		Rango	0,61	0,39	
		Desviación	0,62	0,38	
r= -1,25	$\mu= 3,75$	BootStrap	0,79	0,21	0,20
		Rango	0,80	0,20	
		Desviación	0,80	0,20	

4.2. Escenarios tipo I b

La Tabla 4 resume los límites de control establecidos para un proceso cuya variable crítica en condiciones normales de producción proviene de una distribución gamma con parámetros $a=25$ y $b=5$, que garantiza un promedio $\mu_0=5$ y desviación $\sigma_0=1$. Cabe notar que esta distribución es ligeramente simétrica positiva, violando el supuesto de normalidad básico de los gráficos de

control tipo Shewhart. Sin embargo puede observarse que los límites Bootstrap obtenidos no difieren de forma importante de los propuestos por Shewhart, siendo siempre ligeramente superiores, lo que hace pensar que al parecer recogen el sentido de la asimetría de la distribución de partida. Esta situación se ilustra gráficamente a través de la Figura 4.

Tabla 4. Límites de control construidos en la primera fase bajo un Escenario tipo Ib.
Distribución base Gamma ($a = 25, b = 5$).

Límites De Control	BootStrap	LCI	4,231455
		LCS	5,838484
	Rango	LCI	4,114697
		LCS	5,815691
	Desviación	LCI	4,128579
		LCS	5,801809

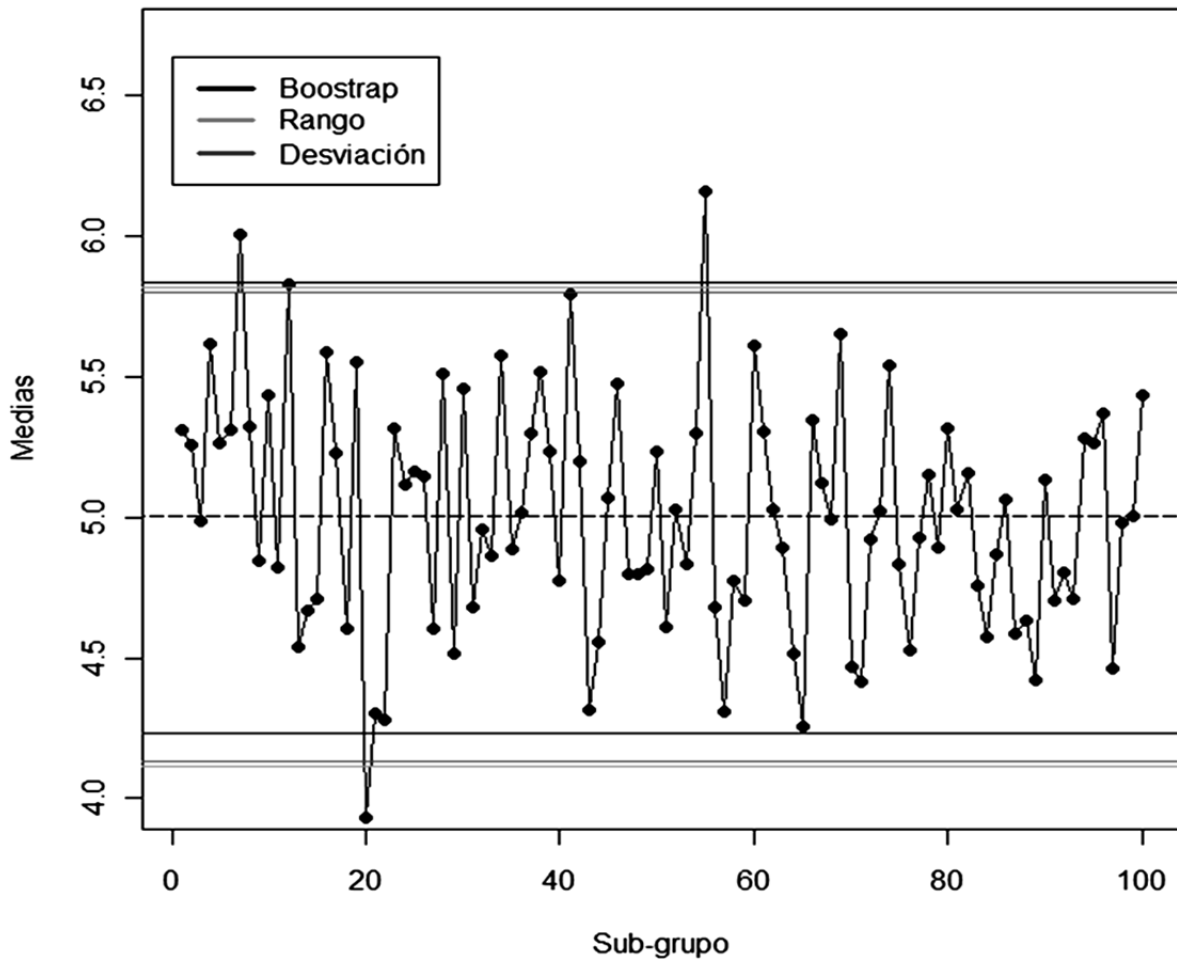


Figura 4. Establecimiento de los Límites de control) para un proceso bajo control con distribución Gamma ($a=25, b= 5$)

De la Tabla 5, puede observarse como en este escenario de simulación resultan un poco más eficientes en la detección de descentramientos en el proceso los límites de control propuestos por Shewhart, cuyas probabilidades de error tipo II observadas se mantienen cercanas a la que teóricamente se presentaría de cumplirse el supuesto de normalidad. Según los resultados obtenidos, los límites tipo Bootstrap presentan una potencia estimada que supera la observada para los límites Shewhart entre un 9% y un 10% para procesos que se descentran en magnitudes comprendidas entre -0,5 y -1,0 desviaciones estándar.

4.3. Escenarios tipo II a

En este escenario se trabaja desde la simulación de una característica de calidad con distribución asimétrica positiva, $\text{Gamma}(a = 1 ; b = 1)$.

Para este caso, como se ilustra en la Tabla 6, se obtiene diferencias marcadas entre los límites obtenidos a través de la propuesta de Shewhart y los obtenidos a través de métodos Bootstrap, recogiendo estos últimos el sentido de la asimetría de la distribución al presentar valores superiores a los obtenidos en la propuesta de Shewhart.

Tabla 5. Eficiencia de los gráficos de control a diferentes niveles de descentramiento de proceso (r) en Escenarios tipo I b.

		LIMITES DE CONTROL	$\hat{\alpha}$	$(1 - \hat{\alpha})$	$(1 - \alpha)$ Teórico
r= 0,00	(a/b) = 5,00	BootStrap	0,08	0,92	0,95
		Rango	0,05	0,95	
		Desviación	0,06	0,94	
		LIMITES DE CONTROL	$(1 - \hat{\beta})$	$\hat{\beta}$	β Teórico
r= -0,25	(a/b) = 4,75	BootStrap	0,12	0,88	0,91
		Rango	0,07	0,93	
		Desviación	0,08	0,92	
r= -0,50	(a/b) = 4,50	BootStrap	0,29	0,71	0,80
		Rango	0,19	0,81	
		Desviación	0,20	0,80	
r= -0,75	(a/b) = 4,25	BootStrap	0,55	0,45	0,61
		Rango	0,46	0,54	
		Desviación	0,46	0,54	
r= -1,00	(a/b) = 4,00	BootStrap	0,72	0,28	0,39
		Rango	0,63	0,37	
		Desviación	0,64	0,36	
r= -1,25	(a/b) = 3,75	BootStrap	0,86	0,14	0,20
		Rango	0,80	0,20	
		Desviación	0,81	0,19	

Al contaminar estos escenarios, involucrando cambios positivos (en el mismo sentido de la asimetría de la distribución base) en el centramiento del proceso, se observa que los límites de control tipo Shewhart mantienen una mejor respuesta que los límites tipos Bootstrap. Desde los resultados que se presentan en la Tabla 7, podría concluirse que la probabilidad estimada de error tipo 2 es superior para los límites tipo Bootstrap en comparación con la propuesta de Shewhart en el orden del 9% para el caso de cambios de magnitud superior a 0.5 desviaciones estándar. De otro lado, se observa que por primera vez en el ejercicio de simulación la tasa de falsas alarmas observadas para los límites tipo Shewhart supera la presentada por los límites tipo Bootstrap.

Tabla 6. Límites de control construidos en la primera fase bajo un Escenario tipo II a. Distribución base Gamma($a = 1 ; b = 1$).

Límites De Control	Método	LCI	0,3355775
		BootStrap	LCS
Rango	LCS	0,2219266	
	LCS	1,774142	
Desviación	LCS	0,190024	
	LCS	1,806075	

Tabla 7. Eficiencia de los gráficos de control a diferentes niveles de descentramiento de proceso (r) en Escenarios tipo II a.

		LIMITES DE CONTROL	$\hat{\alpha}$	$(1 - \hat{\alpha})$	(1- α) Teórico
r= 0,00	(a/b) = 1,00	BootStrap	0,05	0,95	0,95
		Rango	0,07	0,93	
		Desviación	0,06	0,94	
		LIMITES DE CONTROL	$(1 - \hat{\beta})$	$\hat{\beta}$	β Teórico
r= 0,25	(a/b) = 1,25	BootStrap	0,07	0,93	0,91
		Rango	0,13	0,87	
		Desviación	0,11	0,89	
r= 0,5	(a/b) = 1,50	BootStrap	0,05	0,95	0,80
		Rango	0,11	0,89	
		Desviación	0,10	0,91	
r= 0,75	(a/b) = 1,75	BootStrap	0,30	0,70	0,61
		Rango	0,42	0,58	
		Desviación	0,40	0,61	
r= 1,00	(a/b) = 2,00	BootStrap	0,52	0,48	0,39
		Rango	0,66	0,34	
		Desviación	0,63	0,37	
r= 1,25	(a/b) = 2,25	BootStrap	0,79	0,21	0,20
		Rango	0,89	0,11	
		Desviación	0,87	0,13	

4.4 Escenarios tipo II b

Los escenarios tipo IIb representan el comportamiento de los diferentes gráficos de control ante una variable crítica de calidad que proviene de una distribución asimétrica positiva Gamma($a = 5.0625 ; b = 2.25$) y que presenta problemas de descentramiento en el sentido contrario a la asimetría de su distribución bajo control. Los límites de control calculados en las simulaciones de primera fase, se presentan en la Tabla 8. En este caso, al igual que en el caso de los escenarios IIa se observa que los límites de control tipo Bootstrap superan los valores observados en los límites de control tipo Shewhart. Confirmando nuevamente que los límites tipo Bootstrap recogen el sentido de la asimetría de la distribución. Al parecer, de acuerdo a los resultados que se presentan en la Tabla 9, es en este tipo de escenarios en los cuales el método Bootstrap demuestra su eficiencia, al mejorar de forma notable las

probabilidades de error tipo II observadas por los límites tipo Shewhart, especialmente para niveles de descentramiento comprendidos entre 0,5 y 1 desviación estándar, para el caso en el que estos cambios ocurren en sentido contrario a la asimetría de la distribución base.

Tabla 8. Límites de control construidos en la primera fase bajo un Escenario tipo II b. Distribución base Gamma ($a = 5.0625 ; b = 2.25$).

Límites De Control	BootStrap	LCI	1,441348
		LCS	3,285767
Rango	LCI	1,361341	
	LCS	3,185734	
Desviación	LCI	1,361818	
	LCS	3,182567	

Tabla 9. Eficiencia de los gráficos de control a diferentes niveles de descentramiento de proceso (r) en Escenarios tipo II b.

		LIMITES DE CONTROL	$\hat{\alpha}$	$(1 - \hat{\alpha})$	$(1 - \alpha)$ Teórico
r= 0,00	(a/b)=2,25	BootStrap	0,04	0,96	0,95
		Rango	0,05	0,95	
		Desviación	0,05	0,95	
		LIMITES DE CONTROL	$(1 - \hat{\beta})$	$\hat{\beta}$	β Teórico
r= -0,25	(a/b)=2,00	BootStrap	0,09	0,91	0,91
		Rango	0,07	0,93	
		Desviación	0,07	0,93	
r= -0,50	(a/b)=1,75	BootStrap	0,26	0,74	0,80
		Rango	0,19	0,81	
		Desviación	0,19	0,81	
r= -0,75	(a/b)=1,5	BootStrap	0,49	0,51	0,61
		Rango	0,40	0,60	
		Desviación	0,40	0,60	
r= -1,00	(a/b)=1,25	BootStrap	0,69	0,31	0,39
		Rango	0,63	0,37	
		Desviación	0,63	0,37	
r= -1,25	(a/b)=1,00	BootStrap	0,86	0,14	0,20
		Rango	0,83	0,17	
		Desviación	0,83	0,17	

5. Conclusiones

Los resultados obtenidos a través de los ejercicios de simulación permiten finalmente conformar un marco de referencia para apoyar la toma de decisión al momento de escoger el mejor tipo de Gráfico de control para controlar el centramiento de un proceso de producción, situación cotidiana en el ejercicio profesional de los ingenieros de proceso o de calidad. Desde los resultados observados es posible deducir que:

i. Para procesos cuya característica crítica de calidad en un estado normal de funcionamiento presenta una función de distribución normal, la fijación de límites de control a través de la propuesta de Shewhart o a través de técnicas Bootstrap presentará niveles de eficiencia muy similares, por tanto ante estas situaciones sería indiferente inclinarse por algunas de las dos opciones.

ii. Caso contrario se observó para las situaciones en las cuales la distribución de la variable crítica, en un proceso bajo control, correspondía con una distribución que presentaba algún nivel de asimetría, frente a la cual los límites tipo Shewhart demostraron mayor eficiencia en la detección de cambios en el centramiento, cuando estos se presentan en el mismo sentido de la asimetría de la distribución, mientras que, cuando el descentramiento del proceso ocurre en sentido contrario a la asimetría de la distribución pierden eficiencia, al tiempo que los límites tipo Bootstrap la adquieren. Esta diferencia se hace más notoria en la medida que se incrementa la asimetría de la distribución.

En este sentido el ingeniero de proceso debería hacer una revisión del comportamiento de su proceso y priorizar los tipos de cambios que desea mayormente detectar, bien sea tomando como argumento las implicaciones que tendría un descentramiento en uno de los dos sentidos, o en su lugar, la frecuencia de este tipo de cambios en su proceso.

6. Referencias Bibliográficas

1. Bajgier (1992). *"The use of Bootstrapping to Construct Limits on Control Charts"*. En "Proceedings of the Decision Science Institute", San Diego, California, pp. 1611-1613.
2. Efron B. (1979). *Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife*. The Annals of Statistics. Vol. 7, No.1. 1979. pp. 1-26.
3. Liu y Tang (1996). *"Control Charts for Dependent and Independent Measurement Based on Bootstrap Methods"*. Journal of the American Statistical Association. Vol. 91. Pp 1694-1696.
4. Montgomery D. (2004). *Control Estadístico de la Calidad*. 3ra Edición. Edit. Limusa – Wiley.
5. Shewhart, W. A. (1927). *Quality Control*. Bell Systems Technical Journal.