

**Análisis exploratorio de propiedades complejas en modelos dinámicos de equilibrio
general a la Ramsey-Cass-Koopmans**

Juan Camilo Escandón Wittsack

**Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Sociales y Económicas
Programa de Economía
Santiago de Cali**

2015

**Análisis exploratorio de propiedades complejas en modelos dinámicos de equilibrio
general a la Ramsey-Cass-Koopmans**

Juan Camilo Escandón Wittsack

Trabajo presentado para optar al título de Economista

Director:

Boris Salazar Trujillo

Universidad del Valle

Facultad de Ciencias Sociales y Económicas

Programa de Economía

Santiago de Cali

2015

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	2
1. MARCO TEÓRICO.....	4
1.1. Sistema y modelo.....	4
1.2. Trayectoria del concepto moderno de modelación en economía.....	4
1.3. Fenómenos complejos y caóticos en modelos dinámicos.....	9
2. MODELO DE CRECIMIENTO ÓPTIMO RAMSEY-CASS-KOOPMANS.....	16
2.1. Planteamiento.....	16
2.2. Formulación.....	18
2.2.1. Hogares.....	18
2.2.2. Firmas.....	20
2.3. Solución.....	21
2.3.1. Estado estacionario.....	23
2.4. Dinámica de transición.....	23
2.4.1. Inestabilidad dinámica.....	27
3. FENÓMENOS COMPLEJOS EN UN MODELO DINÁMICO DE EQUILIBRIO GENERAL A LA RCK EN PRESENCIA DE RESTRICCIONES DE CASH-IN- ADVANCE.....	30
3.1. Modelo, características y usos potenciales.....	31
3.2. Planteamiento: formulación y resolución.....	32
3.2.1. Consumidores.....	32
3.2.2. Firmas.....	35
3.2.3 Estado Estacionario.....	36
3.3 Dinámica de transición.....	37
3.3.1 Inestabilidad dinámica.....	40
3.3.2 Inestabilidad estructural.....	41

4. CONCLUSIÓN.....	44
5. BIBLIOGRAFÍA.....	49

TABLA DE ANEXOS

Tabla de Ecuaciones

Anexo 1.....	53
Anexo 2.....	53
Anexo 3.....	54
Anexo 4.....	54
Anexo 5.....	55
Anexo 6.....	55
Anexo 7.....	56
Anexo 8.....	56
Anexo 9.....	56
Anexo 10.....	57
Anexo 11.....	58
Anexo 12.....	58
Anexo 13.....	59
Anexo 14.....	59
Anexo 15.....	60
Anexo 16.....	62
Anexo 17.....	63

Tabla de Figuras

Figura 1. Campo vectorial y trayectorias de convergencia y divergencia.....	64
Figura 2. Campo vectorial y dinámica de transición para múltiples condiciones iniciales.....	64
Figura 3. Senda de convergencia a partir de k_0 y c_0 , entre $t_0 = -10$ y $t_f = 10$	65
Figura 4. Dinámica de transición bajo condiciones iniciales con diferentes grados de precisión.....	65
Figura 5. Separación de las trayectorias de la acumulación de capital bajo distintos grados de precisión de $c(0)$	66
Figura 6. Comportamiento del exponente de Lyapunov de variable sometida a imprecisión ($c(t)$).....	66
Figura 6.1. Comportamiento del exponente de Lyapunov de variable sometida a imprecisión ($k(t)$).....	67
Figura 7. Campo vectorial bidimensional de la variable de consumo $C(t)$ y de acumulación $K(t)$, para distintos valores constantes de la variable de oferta de trabajo.....	68
Figura 8. Separación progresiva de las trayectorias de acumulación de capital $K(t)$, oferta de trabajo $L(t)$, y elecciones de consumo $C(t)$	68
Figura 9. Exponente de Lyapunov asociado a la variable sometida a imprecisión: $K(t)$	70
Figura 9.1. Exponente de Lyapunov asociado a la variable sometida a imprecisión: $C(t)$	70
Figura 10. Exponente de Lyapunov asociado a la variable sometida a imprecisión: $L(t)$	71
Figura 11. Región de indeterminación potencial del equilibrio dinámico del modelo.....	71
Figura 12. Valores propios y región de indeterminación potencial del equilibrio dinámico del modelo.....	72

Figura 13. Estado estacionario de modelo no-lineal para distintos valores de φ	73
Figura 14. . Solución del modelo lineal para los valores diversos valores de los parámetros φ y σ	74
Figura 15. Equilibrios posibles cuando la variable de acumulación de capital toma su valor de estado estacionario y se determinan los valores de φ y σ	75

Tabla de Cuadros

Tabla No.1 Condiciones iniciales de los parámetros fundamentales.....	76
Tabla No.1.1 Valores iniciales próximos de la variable consumo en el modelo lineal.....	76
Tabla No. 1.2 Valores iniciales próximos de la variable capital en el modelo lineal.....	76
Tabla No. 2 Condiciones iniciales de los parámetros fundamentales.....	77
Tabla No. 3 Determinismo teórico y determinismo científico.....	77

ANÁLISIS EXPLORATORIO DE PROPIEDADES COMPLEJAS EN MODELOS DINÁMICOS DE EQUILIBRIO GENERAL A LA RAMSEY-CASS-KOOPMANS

“Now more than never I perceive that a tiny error in the beginning causes a big difference and a serious deviation at the end; a single problem was multiplied gradually branching out into an infinite number of other, just as a root spreads in infinite branches and masses”.

Giordano Bruno. Del Infinito Universo Mondi, 1583.

RESUMEN

En este trabajo se realiza un análisis exploratorio de las propiedades dinámicas de un Modelo Dinámico de Equilibrio General a la Ramsey-Cass-Koopmans (en tiempo continuo) que incorpora restricciones de liquidez tipo cash-in-advance y del modelo de crecimiento neoclásico (en tiempo discreto) que lo fundamenta. Esto con el fin de evaluar y contrastar la posible emergencia de procesos de inestabilidad dinámica y estructural que pueden comprometer su desempeño empírico-predictivo potencial a lo largo de su dinámica evolutiva. Lo anterior se lleva a cabo a la luz de algunos instrumentos y métodos empleados en el análisis de sistemas caóticos y complejos. Como resultado de este ejercicio, es posible establecer que ambos modelos están sometidos a un indeterminismo práctico, pues una precisión limitada (entre tres y seis cifras significativas) del estado inicial de alguna de las variables involucradas, sea el consumo agregado o la acumulación de capital, no resulta suficiente para establecer de forma adecuada los estados futuros menos próximos de la economía bajo análisis; mientras los requisitos para la emergencia de un estado de equilibrios indeterminados, en el primero, resultan ser factibles y poco exigentes. Por lo anterior, se establecen los límites epistemológicos de la aplicación empírica de este tipo de modelos, pues bajo determinadas condiciones no sólo se restringe la posibilidad de predecir de forma precisa sino también de establecer una trayectoria unívoca de previsión perfecta.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se realiza un análisis exploratorio de la estructura matemática determinista de aquellos Modelos Dinámicos de Equilibrio General (DEG de ahora en adelante) que se fundamentan en el modelo de crecimiento neoclásico Ramsey-Cass-Koopmans (RCK). Esto con el fin de aproximarse al comportamiento de las propiedades dinámicas cuantitativas y cualitativas del componente tendencial de largo plazo, es decir, aquellas que comprometen la transición hacia el equilibrio de estado estacionario y la estabilidad del punto de equilibrio de largo plazo ante la incorporación de restricciones (leves o significativas), respectivamente. Para esto, se analiza un modelo DEG particular (en tiempo discreto) que incorpora restricciones de liquidez de tipo cash-in-advance y el modelo neoclásico de crecimiento que lo fundamenta (en tiempo continuo), pues el desempeño de esta base natural en los problemas de interés puede comprometer de forma extensiva los modelos de mayor complejidad que se erigen sobre sus cimientos, independientemente de la forma en que el tiempo sea medido.

Este ejercicio se hace relevante en la medida en que aquellas herramientas metodológicas resultan ser una de las más importantes para el análisis empírico moderno, por lo cual se debe evaluar su potencial desempeño práctico a luz de algunos instrumentos para el estudio de sistemas dinámicos (caóticos y complejos), con los que es posible determinar, contrastar, y/o evaluar fenómenos como: la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, que implica la desincronización de trayectorias evolutivas infinitesimalmente cercanas en su punto de partida; y la inestabilidad estructural, que sugiere cambios cualitativos en los movimientos orbitales del modelo ante la incorporación de elementos adicionales, restricciones, imperfecciones, o como producto de variaciones paramétricas que permiten la aparición de fenómenos cualitativos distintos al punto fijo unívoco en el largo plazo. Esto se hace necesario debido a que la presencia de alguna de estas características, en

modelos dinámicos, indica la imposibilidad de predecir de forma adecuada sobre periodos largos de tiempo y de determinar una única trayectoria óptima de previsión perfecta, respectivamente.

Por lo anterior, al realizar este ejercicio, es posible establecer que ambos modelos están sometidos a un indeterminismo práctico en el momento de ser aplicados en investigaciones empíricas, pues al limitar la precisión de las condiciones iniciales de las variables de estado del primer modelo a tres y cuatro cifras significativas, y a cuatro y seis en el segundo, no resulta factible lograr pronósticos adecuados del comportamiento futuro de ambas estructuras a menos que estas condiciones de partida se determinen con un grado de precisión infinita. Además de lo anterior, para el segundo modelo, las exigencias para la emergencia de un estado de equilibrios indeterminados resultan ser leves, pues para pequeñas cuotas de consumo que deben pagarse con efectivo en cada periodo (entre 0 y 0.5) se presenta una amplia gama de valores de la elasticidad de consumo intertemporal que permiten condiciones factibles para la aparición de este fenómeno.

Posterior a esta sección, en la que se plantea la introducción del ejercicio a desarrollar, este documento se estructura de la siguiente manera: en la segunda sección, se presenta el marco teórico que fundamenta y justifica el análisis propuesto al permitir establecer una coherencia entre algunos desarrollos, postulados y técnicas del conocimiento científico ligados a la disciplina económica, la filosofía de la ciencia, la historia de la ciencia, la teoría general de sistemas y la teoría del caos, entre otros elementos. En la tercera sección, se desarrolla y soluciona el modelo de crecimiento neoclásico Ramsey-Cass-Koopmans en un contexto de control óptimo y se analizan las propiedades de su estabilidad dinámica cuantitativa que se evidencian en el tránsito entre estados estacionarios, lo cual compromete su capacidad predictiva y la de los modelos a los que sirve como base natural. Por último, en la cuarta sección, se desarrolla el modelo DEG a la Ramsey-Cass-Koopmans que incorpora restricciones de liquidez tipo cash-in-advance en un ejercicio de control óptimo, lo cual permite analizar y evaluar el desempeño predictivo potencial de un modelo como este, para

periodos largos de tiempo, en la medida que se cuestiona la posibilidad de una predicción adecuada bajo ciertas condiciones iniciales tanto de las variables de estado como de sus parámetros estructurales.

1. MARCO TEÓRICO

1.1 Sistema y modelo

Se puede afirmar que un modelo es el resultado de la identificación de un sistema, que es un conjunto de elementos o unidades de conducta que generan un producto final (salida) como resultado de su interacción y del papel que les es asignado en su forma organizacional, sin olvidar que el entorno en el que se enmarca su funcionamiento puede influir en su desempeño. Por lo anterior, y como lo afirman Hall¹, Johansen², Von Bertalanffy³ y Bunge⁴, un sistema es un conjunto de partes coordinadas con el propósito de alcanzar una serie de objetivos, en el que sus propiedades características interactúan entre sí y con el entorno. Por otra parte, y teniendo en cuenta lo anterior, la identificación resulta ser el proceso que permite que un modelo tenga la capacidad de simular y reproducir parte del conocimiento que se tiene del sistema, que para el caso de una economía serían sus hechos estilizados característicos (salidas) que provienen de las interacciones de los agentes y de ciertas acciones provenientes del entorno que impulsan su movimiento como, por ejemplo, las políticas estatales (entradas).

¹ HALL, N., Exploring Chaos, A guide to the New Science of Disorder. W.W. Norton & Company, 1991.

² JOHANSEN B, Oscar. Introducción a la Teoría General de Sistemas. México: Editorial Limusa S.A., grupo Noriega Editores, 1993, pp.: 13- 71.

³ BERTALANFFY, Ludwig Von. Teoría general de sistemas. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1976, 312p.

⁴ BUNGE, Mario. Problemas filosóficos generales dentro de las Ciencias Sociales. En: Buscar la filosofía en las ciencias sociales. México: Siglo XXI editores, 1999, 337-380 p.

1.2 Trayectoria del concepto moderno de modelación en la disciplina económica

Sobre la cuestión anterior, es Cournot⁵, en primera instancia, quien sugiere la importancia del lenguaje matemático en el análisis económico al admitir la interconexión de las partes del sistema y la reacción potencial de algunos elementos al comportamiento de los demás. Sin embargo, fue León Walras⁶ el primer economista en formular el sistema económico en un lenguaje de aquel tipo, pues privilegió el desarrollo de la Economía pura para alcanzar una representación de su funcionamiento, creando una estructura arquitectónica sobre un conjunto de ecuaciones interdependientes, y presentando su estructura lógica como la articulación de los mecanismos de producción, intercambio, consumo y capitalización⁷, cuya interacción puede permitir alcanzar el máximo bienestar social (en equilibrio) debido al papel optimizador de los agentes económicos en un ambiente de competencia perfecta.

Walras⁸, sin embargo, sólo resuelve un problema de “forma”, ya que presenta una versión ideal del sistema económico, que aunque formulado en términos matemáticos, no resulta ser una herramienta de análisis de problemas concretos o para determinar las soluciones numéricas de un sistema de ecuaciones diferenciales frente a un conjunto de datos disponibles. Por ello, a este respecto, Friedman⁹ defiende su posición positivista al admitir que, aunque no es posible poner en duda la coherencia lógica de la construcción walrasiana, cimentada en la modelación matemática, su utilidad sí resulta susceptible a la crítica, dado que depende de la correspondencia de sus resultados con la evidencia empírica, la cual determina por su desempeño práctico. Esto lo lleva a postular la necesidad de orientar el análisis económico hacia su “contenido” más que hacia su “forma”. Por lo

⁵ COURNOT, Augustin. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. Citado por FRIEDMAN, Milton. Leon Walras and his Economic System. En: The American Economic Review. Vol. 45, No. 5 (Diciembre, 1995); pp.: 900-909.

⁶ WALRAS, León. Elementos de economía política pura: o teoría de la riqueza social. Madrid: Alianza Editorial, 1987, pp.: 139-253.

⁷ Ibíd., pp.: 139-253.

⁸ Idem.

⁹ FRIEDMAN, Milton. Leon Walras and his Economic System. En: The American Economic Review. Vol. 45, No. 5 (Diciembre, 1995); pp.: 900-909.

anterior, Friedman¹⁰ pugna por la construcción de una economía positiva independiente de los elementos ideales de la normativa, en la que un “sistema de generalizaciones puedan usarse para realizar predicciones sobre las consecuencias de un cambio en las circunstancias”¹¹, y con la posibilidad de ofrecer predicciones válidas sobre hechos no observados del sistema, sin olvidar que aquel conjunto de generalizaciones puede ser más significativo en la medida que sus supuestos sean menos realistas¹², pues entre menor sea la presencia de detalles en la formulación teórica, mayor será la posibilidad de hablar de los fenómenos asociados al intercambio.

Por otra parte, Lucas¹³, como precursor de la estructura de análisis económico moderno, no sólo se distancia de la manera en la que Friedman¹⁴ reconcilia la “forma” y el “contenido” en la Economía, sino también en los objetivos de la modelación y en la determinación de la metodología para obtener conocimiento de hechos y fenómenos no observados. Es por esto que admite que la teoría económica -dado que determina los mecanismos que subyacen a los fenómenos sociales de carácter mercantil¹⁵- permite la formación de estructuras formales que guardan la posibilidad de ser confiables para resolver problemas concretos, en la medida en que funcionan como laboratorios de simulación de fenómenos económicos en ambientes que no han tenido lugar, a través de la extrapolación de comportamientos observados en ambientes del sistema que sí lo han hecho¹⁶. Es por esto que Prescott¹⁷, termina por armonizar el análisis teórico y empírico a través de la simulación (reproducción) y experimentación (producción) de fenómenos económicos en economías análogas, que pueden ser representadas por estructuras matemáticas que se fundamentan

¹⁰ FRIEDMAN, Milton. La Metodología de la Economía Positiva: Ensayos sobre Economía Positiva. Madrid: Ed. Gedos S. A. 1962, p.:10.

¹¹ WALRAS, León. Op. Cit., pp.: 139-253.

¹² *Ibíd.*, p.: 19.

¹³ LUCAS, Robert. Jr. Methods and Problems in Business Cycle Theory. En: Journal of Money, Credit and Banking. Vol. 12, No. 4, Part. 2, (Noviembre, 1980); pp.: 696-715.

¹⁴ FRIEDMAN, Milton. Op. Cit., 50 p.

¹⁵ Dentro de lo que se enmarca la estructura de las preferencias de los hogares y la capacidad productiva de los empresarios, cuyas elecciones racionales pueden ser influenciadas por cambios provenientes del entorno.

¹⁶ LUCAS, Robert. Jr. y SARGENT Thomas. Rational Expectations and Econometric Practice. EE.UU: University of Minnesota Press, 1981, pp.: 12-40.

¹⁷ KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. Op. Cit., 1345-1370.

en algunos modelos de crecimiento neoclásico tipo Solow-Swam y RCK, cuya dinámica puede ser controlada, optimizada y afectada por los agentes económicos que lo componen y por cambios en el ambiente (política).

Por lo anterior, es posible afirmar que la construcción de un mundo artificial se sustenta en un proceso de modelación que pretende determinar el funcionamiento de una estructura sistémica, es decir, tal como lo plantea Garrido¹⁸, el proceso por el que ciertas entradas producen ciertas salidas, estableciendo una estructura de interrelaciones, un número de parámetros, y un algoritmo por el cual estos se identifiquen. Además, como lo establece Lucas¹⁹, su construcción puede ser útil para responder a las preguntas que surgen sobre el desempeño del sistema económico real en caso de ser sometido a un cambio del entorno y, en consecuencia, pueda reproducir el fenómeno que se pretende conocer. Por ello, aquellos elementos mencionados permiten un cambio radical en la forma de evaluar la política económica, pues se requiere de la experimentación para conocer con anticipación los efectos macroeconómicos que una variación de un régimen²⁰ o actividad gubernamental puede provocar a través de una alteración en la estructura de decisiones (intertemporales) óptimas de los agentes económicos. Por esto, estos modelos ejemplares permiten la microfundamentación de la macroeconomía y la incorporación del tiempo en las decisiones de los agentes optimizadores, a través de las expectativas racionales²¹, que interactúan en contextos económicos de equilibrio general y de competencia perfecta, los cuales se presentan como aspectos esenciales para su validación y postulación como modelos económicos.

¹⁸GARRIDO, Santiago. Identificación, Estimación y Control de Sistemas No-lineales mediante RGO. Madrid, 1999, 9-171 p. Tesis (Ingeniero de Sistemas y Automática). Universidad Carlos III Madrid. Facultad de Ingenierías, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.

¹⁹ LUCAS, Robert Jr. What Economists do. Manuscrito inédito de la Universidad de Chicago, (diciembre 9, 1988)

²⁰ La determinación de sus variaciones actuales y futuras se vuelve un requisito para que los agentes puedan comportarse como si estuvieran en condiciones de determinar la mejor predicción posible con la información que disponen.

²¹ FEBRERO, Ramón. Lucas y el galardón a las expectativas racionales: una nota. 1995. (En línea) Disponible en < <http://eprints.ucm.es/26507/1/9515.pdf>>

Fueron Kydland y Prescott²² quienes permitieron que la propuesta de Lucas fuera útil, en términos empíricos, al sugerir un proceso metodológico compuesto por cinco pasos para alcanzar su aplicación práctica: en primer lugar, se debe determinar la pregunta problema que delimita el conjunto de teorías que pueden usarse para guiar la construcción del modelo y las dimensiones económicas de mayor pertinencia imitativa. En segundo lugar, se realiza la elección de la mejor teoría que pueda responder la pregunta planteada. En tercer lugar, se realiza la construcción del modelo económico para el experimento computacional y, previo a su aplicación práctica, se emplea el proceso de calibración como algoritmo de identificación. Este último escalón de la estructura metodológica, es el mecanismo por el que es posible colocar el modelo desarrollado en la métrica de la realidad, es decir, el que debe permitir identificar el valor de sus parámetros a través de métodos numéricos u otros mecanismos²³ para lograr la máxima coherencia entre la economía objetivo y la herramienta matemática que se utilizará con el fin de estudiar su funcionamiento, de modo que se puedan alcanzar predicciones confiables.

Por esto último, como lo afirman Kydland y Prescott²⁴, el objetivo de la calibración es permitir el uso de un modelo estructural parametrizado para abordar una pregunta cuantitativa específica sobre el sistema y con ello lograr la generación de conocimiento sobre hechos desconocidos, sin olvidar su capacidad de ajustarse a las regularidades empíricas de la economía real. Por ello, para estos autores²⁵, la calibración es coherente con la concepción que presenta Frisch²⁶ sobre una metodología de análisis empírico, pues promueve estudios que apuntan a la unificación de la teoría

²² KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. Time to build and aggregate fluctuations. En: *Econometrica*, Journal of the Econometric Society, 1982. Vol. 50, pp. 1345-1370.

²³ Bien sea mediante el uso de los valores calculados en estudios microeconómicos anteriores, asumiendo los promedios de largo plazo obtenidos sobre los datos agregados o dándoles valores arbitrarios.

²⁴ KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. Op. cit., pp. 1345-1370.
²⁵Ibíd., pp. 1345-1370.

²⁶ FRISCH, Ragnar. Propagation problems and impulse problems in dynamic economics. Citado por KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. The econometrics of the general equilibrium approach to business cycles, 1990. (En línea) Disponible en < <https://www.minneapolisfed.org/research/sr/sr130.pdf> >

cuantitativa y el enfoque empírico-cuantitativo para enfrentar problemas económicos, en el que las técnicas computacionales y estadísticas funcionan como puente entre la teoría y datos reales.

Lo anterior resulta del desarrollo de la propuesta planteada inicialmente por Lucas²⁷, en la cual postula que el modelo de una economía debe tener la posibilidad de simular parte del conocimiento que se tiene de esta, en las dimensiones concernientes a las preguntas que se le planteen, pues cuanto mayor sea el grado de precisión con la que pueda imitar dichos aspectos, o cuantas más salidas próximas a los resultados del sistema pueda alcanzar tras reproducir ciertas entradas de forma infinitesimalmente aproximada, más confianza puede otorgársele al conocimiento que puede ofrecer sobre hechos que se desconocen. Por esta razón, establece que el mejor modelo no se define por su grado de realismo sino por su capacidad imitativa. Esta característica se fundamenta en un instrumentalismo metodológico, pero no como lo plantean Wong²⁸ y Friedman²⁹, en el que la validez del conocimiento científico es una cualidad ex post del ejercicio empírico y es determinada por el ajuste las predicciones con la realidad observable, sino de acuerdo al poder de imitación que tengan los modelos computacionales de las dimensiones económicas pertinentes en sus condiciones iniciales, es decir, se justifica ex ante a raíz de la confianza que puede generar aquella característica, como lo afirman Kydland y Prescott:

“En general, de algunas cuestiones económicas se han sabido sus respuestas, y el modelo debe dar una respuesta aproximadamente correcta para ellas si queremos tener alguna confianza en la respuesta dada a la pregunta con respuesta desconocida. Así, los datos se utilizan para calibrar el modelo de la economía, de modo que imite el mundo

27 LUCAS, Robert Jr. Econometric policy evaluation: a critique. En: Carnegie-Rochester Serie Conferencia de Política Pública. Vol. 1, (enero, 1976); pp.: 19-46.

28 WONG, Stanley. La “F-Twist” y la Metodología de Paul Samuelson. En: The American Economic Review. Vol. 63, No. 3 (Junio, 1973); pp.: 312 – 325.

29 FRIEDMAN, Milton. Op. Cit., pp.: 9-44.

lo más estrechamente posible a lo largo de un limitado, pero claramente especificado, número de dimensiones”³⁰.

1.3 Fenómenos complejos y caóticos en modelos dinámicos

La confianza que puede atribuírsele a estos modelos guarda una estrecha relación con un atributo de la metodología empírica planteada por Friedman³¹, en la que con pequeños errores de medición es posible alcanzar predicciones aproximadas a los resultados de la realidad, pues involucra una concepción propia del determinismo clásico que considera una correspondencia inevitable entre el carácter determinista y la predecibilidad. Esta concepción puede ejemplificarse en el ejercicio planteado por Laplace³², en el que establecía que si tuviera la posibilidad de estar en posesión de las condiciones iniciales del universo y la ley que determina su evolución, podría predecir las posiciones de los cuerpos celestes hasta el fin de los tiempos. Sin embargo, Poincaré³³ en 1908 desvirtúa el vínculo que aquella concepción estableció entre el determinismo y la predecibilidad, al plantear dos posibles resultados de un ejercicio hipotético como el señalado anteriormente: en primer lugar, es posible predecir si se puede contar con pequeños errores en la medición de las condiciones iniciales y la ley de evolución no incrementa los intervalos de error; y en segundo lugar, puede que pequeños errores en la medición de las condiciones iniciales provoquen que la ley de evolución produzca trayectorias en gran medida divergentes, y en consecuencia, sea imposible predecir adecuadamente en el tiempo.

El segundo resultado posible, planteado por Poincaré³⁴, sugiere la imposibilidad de estudiar o predecir el comportamiento de los sistemas en el largo plazo a partir de determinadas condiciones

³⁰ KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. The Computational Experiment: An Econometric Tool. En: Journal of Economic Perspectives. Vol. 10, No. 1 (1996); p.: 74.

³¹ FRIEDMAN, Milton. Op. Cit., pp.: 9-44.

³² LAPLACE, P.S. Philosophical Essays on Probabilities. Citado por MORALES, Daniel A. Determinismo, indeterminismo y la flecha del tiempo en la ciencia contemporánea. En: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. 11, No. 2 (2004); pp.: 213- 232.

³³ POINCARÉ H. The Value of Science. Citado por BRAUN, Eliezer. Caos, fractales y cosas raras. España: Fondo de Cultura Económica de España, 2003. 156 p.

³⁴ POINCARÉ H. Op. Cit., 156 p.

iniciales, lo cual se debe a la susceptibilidad de separación progresiva que pueden presentar ciertas trayectorias de los sistemas dinámicos ante cambios mínimos en sus estados iniciales. Por ello, este fenómeno puede denominarse como inestabilidad dinámica o efecto mariposa, pues como lo ejemplificó Lorenz³⁵: el pequeño aleteo de una mariposa en Brasil puede evitar (provocar) un huracán en Texas, que (no) tendría lugar si este cambio no se realizara. Además, estas perturbaciones pueden tomar la forma de “errores de medición” que tienen que ser enfrentados por investigaciones empíricas, como lo hace la metodología desarrollada por la Nueva Macroeconomía Clásica (NMC) cuando se trata de compatibilizar el comportamiento de los modelos computacionales con el funcionamiento del sistema económico. Por esto, no se puede descartar la posibilidad de que pequeños errores en la determinación inicial de sus variables principales, tras identificar los parámetros fundamentales, se puedan ampliar de forma considerable en el proceso de iteración en medio de una dependencia sensitiva a la precisión perfecta, pues como lo indicaron Heinsenberg³⁶ y Poincaré³⁷, antecedentes similares pueden conducir a resultados totalmente diferentes.

Este último fenómeno ha sido formulado por la teoría del Caos, que se ha constituido como un cuerpo de conocimiento para la evaluación de los problemas que comprometen tanto el potencial predictivo, como el comportamiento estructural de ciertos modelos dinámicos no lineales; los cuales, como lo afirma Fernández³⁸, bajo ciertas condiciones pueden capturar características propias de un sistema caótico, dado que un comportamiento regular y periódico puede convertirse, de forma inesperada, en turbulento e irregular como resultado de fluctuaciones endógenas. Por esto, el caos determinista, se centra en el estudio de procesos aparentemente aleatorios producidos por leyes

³⁵ LORENZ, Edward. La esencia del caos. Madrid: Editorial Debate S. A., 1995. 248 p.

³⁶ HEINSEMBERG, Werner. Principio de incertidumbre, 1927. Citado por ECHEVERRY, Luis Alfredo. La Teoría del Caos y los sistemas dinámicos. En: Revista Ingenierías, No. 6 (2000); pp.: 109-122.

³⁷ POINCARÉ H. Op. Cit., 156 p.

³⁸ FERNÁNDEZ Díaz, Andrés. Dinámica caótica en economía. Madrid: McGraw-Hill, Interamericana de España. 2002, 264 p.

determinísticas que pueden permitir la emergencia de dos tipos de dinámica: una simple, en la que se presentan fluctuaciones regulares y predecibles, y una compleja, en la que se presentan movimientos irregulares e impredecibles³⁹.

Este carácter determinista de los modelos dinámicos sólo resulta coherente con la impredecibilidad en la medida que se hace inevitable el indeterminismo práctico, el cual restringe su adecuada capacidad predictiva a la precisión con la que se puedan determinar sus condiciones de partida, pues no será posible predecir, para largos periodos de tiempo, en tanto esta no se caracterice por ser perfecta (infinitamente precisa). Por lo anterior, estos modelos se consolidan como asintóticamente deterministas y con esto, como lo afirman Baumol y Benhabib⁴⁰, Barnett⁴¹ y Vlad⁴², se puede poner en cuestión la fiabilidad de los pronósticos que pueden proveer, dado que aquella característica sugiere, no la imposibilidad de predecir sino, una restricción progresiva del tiempo de predicción adecuada, la cual limita su potencialidad de ajuste a cortos periodos de tiempo. Es decir, como lo plantea Escot⁴³, el ajuste de las predicciones es inversamente proporcional al grado de dependencia con respecto a la precisión de las condiciones iniciales, por lo que entre mayor es aquella, la distancia entre los pronósticos y las trayectorias reales tiende a crecer exponencialmente en el tiempo, provocando una desincronización que les lleva a comportamientos radicalmente distintos en el largo plazo⁴⁴, siendo menos sustancial en intervalos de tiempo reducidos.

³⁹ Este tipo de análisis ha sido usado para la identificación de complejidad dinámica en medios de simulación en los que determinadas leyes determinísticas rigen su evolución y movimiento.

⁴⁰ BAUMOL, William y BENHABIB, Jess. Caos: Importancia, el Mecanismo y Aplicaciones Económicas. En: *Journal of Economic Perspectives*. Vol.3, No.1 (1989); pp.: 77–105.

⁴¹ BARNETT, William A., SERLETIS, Apostolos y SERLETIS, Demitre. Nonlinear and complex dynamics in economics. *Macroeconomic Dynamics*, 2003, p. 1-31.

⁴² SORIN, Vlad, PASCU Paul y MORARIU, Nicole. Chaos Models in Economics. En: *Journal of Computing*. Vol. 2, No. 1 (Enero, 2010); pp.: 79-83.

⁴³ ESCOT Mangas, Lorenzo. *Dinámica económica caótica: una aplicación al estudio del ciclo y el crecimiento económico*. Madrid, 2003, 451p. Tesis (Doctorado en Política Económica). Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Economía Aplicada III.

⁴⁴ BOCCALETTI, S., et al. The synchronization of chaotic systems. En: *Physics Reports*. Vol.366 (2002); pp.:1- 101(en línea). Disponible en <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.385.2030&rep=rep1&type=pdf>

Siguiendo este hilo conductor, es posible determinar que aquel fenómeno provoca pérdidas de predictibilidad durante la evolución del sistema, debido al detrimento de la información precisa que se asocia al paradero de su dinámica, que puede ser medida por la brecha creciente de sus trayectorias inicialmente cercanas. Esto hace necesario cuantificar las posibles consecuencias de aquella sensibilidad, lo cual puede ser examinado a través del exponente de Lyapunov, que según Dubeibe⁴⁵, es la tasa promedio de divergencia (expansión) o convergencia (contracción) exponencial de trayectorias inicialmente cercanas en el espacio de fases, cuya magnitud definiría el intervalo de tiempo que se requiere para que la dinámica del sistema se vuelva impredecible, es decir, además de medir la estabilidad a las condiciones de partida, pone en evidencia la aminoración progresiva de la capacidad predictiva del modelo dinámico. En consecuencia, sólo se determina una convergencia de dos estados inicialmente cercanos ($X_1(0) - X_0(0) < \delta$) si tienden a estados próximos en el tiempo $\{U(X_1(t)) - U(X_0(t)) < \vartheta\}$ y la divergencia inicial no termina por amplificarse en el periodo transcurrido ($\vartheta \leq \delta$).

Por otro lado, además del fenómeno mencionado, los sistemas dinámicos pueden presentar inestabilidades de tipo estructural, donde las características cualitativas de los mismos no se mantienen en el largo plazo ante pequeñas variaciones en sus parámetros fundamentales o formas funcionales. Por ello, la determinación de las condiciones para las que se rompe la estabilidad de los sistemas permite el análisis de la bifurcación e indeterminación del equilibrio, lo cual indica un cambio en la estructura de movimiento del sistema y en su comportamiento cualitativo de largo plazo dentro del espacio de fases.

Estos últimos cambios mencionados, provocan la aparición (desaparición) de puntos de equilibrio y modificaciones en la estabilidad de los mismos, donde en algunos casos puede ser posible transitar a

45 DUBEIBE, F. L. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica. En: Revista Colombiana de Física, Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación, Escuela de Pedagogía y Bellas Artes, Universidad de los Llanos. Vol. 45, No.1 (2003), 152 p.

través de algunos equilibrios dinámicos como lo menciona Escot⁴⁶ y Fernández y Ruiz⁴⁷, tales como: de punto fijo, que configura un estado en el que el sistema pierde su dinámica en el largo plazo; ciclos límite, que es el conjunto de n-puntos que el sistema transcurre de forma periódica en intervalos regulares de tiempo; y caóticos, en la medida que el sistema desemboca dentro de un atractor extraño a través de una cuenca de atracción⁴⁸, donde el primero es un conjunto cerrado que se encuentra compuesto por equilibrios de periodicidad infinita, y sus trayectorias se contraen (órbitas convergentes) y se estiran (órbitas divergentes) dentro del mismo conjunto. Es por ello que, en cuanto a este fenómeno complejo, se han analizado los puntos de saturación o valores de bifurcaciones que provocan la emergencia de más de un punto crítico en el comportamiento de los modelos dinámicos, como lo muestran los estudios de Benhabib y Nishimura⁴⁹, Feichtinger y Sorger⁵⁰ y Feichtinger et al.⁵¹; donde los primeros pretenden evidenciar la existencia ciclos límite o centros a través del empleo del teorema de bifurcación de Hopf, mientras los segundos y últimos, pretenden provocar su emergencia por medio algunos métodos numéricos para la obtención de soluciones periódicas.

Por lo anterior, resulta pertinente una contrastación de la confianza que puede atribuírsele a la capacidad predictiva de los modelos DEG, en su carácter determinista, para evidenciar o rechazar la posible emergencia de fenómenos dinámicos complejos que pueden tender a limitarla. Esto implica una renuncia a evaluar la capacidad analítica de los ciclos económicos, al excluir componentes aleatorios, para centrarse en el desempeño predictivo del componente tendencial de

⁴⁶ESCOT, Op. cit., 451p.

⁴⁷ FERNANDEZ, Esther y RUIZ, Jesús. Indeterminación y función de utilidad no separable en consumo público y ocio. En: Documentos de Trabajo de ICAE, Universidad Complutense de Madrid. No. 0108, 2001, pp.: 1-18. (en línea). Disponible en <<http://eprints.ucm.es/6792/1/0108.pdf>>

⁴⁸ Espacio que conduce al sistema hacia una región de atracción, donde se desarrollan sus movimientos de largo plazo de forma aperiódica e irregular, reflejado en una dinámica inestable.

⁴⁹ BENHABIB, J. y NISHIMURA, Kazuo. Indeterminacy and sunspots with constant returns. En: Journal of Economic Theory. Vol. 81 (1998), pp.: 58-96.

⁵⁰ FEICHTINGER, G. y SORGER, G. Optimal oscillations in Control Models: How Can Constant Demand Lead to Cyclical Production? En: Operations Research Letters. Vol.5, pp.: 277-81.

⁵¹ FEICHTINGER, G., et al. Stable resource-employment limit cycles in an optimally regulated fishery. En: Dynamic Economic Models and Optimal Control, (Amsterdam, 1992).

largo plazo del crecimiento económico, pues como afirman Hodrick y Prescott⁵², es reflejado por la parte determinística de los modelos DSGE⁵³. Para esto, se utilizan ciertos instrumentos de la teoría del caos y la complejidad, los cuales se postulan como herramientas epistemológicas formales útiles para establecer los límites del conocimiento confiable que aquellos modelos pueden proveer, a lo largo del tiempo, frente a cambios exógenos provenientes del entorno que alteran su comportamiento. Por esto, este ejercicio cuestiona la certeza de predicción adecuada que se vincula al cientificismo determinista promulgado por Lucas⁵⁴, dado que no todo sistema determinístico ni todo sistema estocástico, con elementos aleatorios bien comportados, resulta predecible en largos periodos de tiempo. Más aun, cuando una de las máximas de la investigación empírica moderna ha sido la aspiración de poseer la capacidad de predecir de forma correcta el comportamiento futuro del sistema económico.

Esto último termina por justificar el análisis de estos modelos a través de su forma no estocástica, pues la teoría que fundamenta su construcción se erige bajo preceptos deterministas, lo cual es reforzado por la inexistencia de una teoría del componente aleatorio y su clasificación como un elemento exógeno. Además, a pesar de que la metodología para la determinación de inestabilidad dinámica se ha realizado tradicionalmente en presencia de atractores caóticos, la esencia de esta investigación es la misma, pues se evalúa el tránsito entre puntos de equilibrio como producto de hechos exógenos que impulsan este movimiento. Cabe aclarar que este ejercicio no puede llevarse a cabo mediante una confrontación con evidencia empírica, dado que aquellos propician el desarrollo de fenómenos económicos en ambientes controlados, donde las variaciones que se les introduce no necesariamente se implementan en la realidad. Por ello, a través de un ejercicio experimental, es necesario evaluar la capacidad predictiva de la dinámica de estos mundos análogos y no la del

⁵² HODRICK, Robert J. y Prescott Edward C. Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation. En: *Journal of Money, Credit and Banking*. Vol. 29, No. 1 (Febrero, 1997), pp.: 1-16.

⁵³ Modelos Dinámicos y Estocásticos de Equilibrio General, con sus siglas en inglés: DSGE.

⁵⁴ LUCAS, Robert Jr. Op. Cit., p. 696-715.

sistema económico real, pues es en los primeros donde es posible demostrar los resultados dado que para la segunda, como diría Lucas⁵⁵, resultaría descaradamente irreal.

2. MODELO DE CRECIMIENTO ÓPTIMO RAMSEY-CASS-KOOPMANS

2.1. Planteamiento

Para llevar a cabo el ejercicio propuesto, puede emplearse en primera instancia el modelo de crecimiento óptimo cuya estructura fue construida por Ramsey⁵⁶ y perfeccionada posteriormente por Cass⁵⁷ y Koopmans⁵⁸, quienes obtuvieron la versión de equilibrio general del modelo agregado de crecimiento económico planteado inicialmente por Solow⁵⁹. Además de lo anterior, este modelo incorpora una tasa de ahorro endógena en las elecciones óptimas de los agentes económicos y permite, con ello, la microfundamentación de su desempeño dinámico. A pesar de esto, esta estructura matemática no cumple a cabalidad con las principales características necesarias para considerarse como una economía análoga desde la perspectiva metodológica moderna pues, tal como lo afirma Prescott⁶⁰ en discurso de premio Nobel, se requiere que los agentes racionales tengan total libertad para optimizar sus decisiones intertemporales y, eludiendo la determinación exógena de las mismas, arbitrar en la elección de sus principales variables de interés de forma continua.

Por ello, el autor afirma que el modelo mencionado, en su contraparte estocástica, sólo resulta útil para explicar la fluctuación tendencial y cíclica de un conjunto de series económicas agregadas, dada la microfundamentación de su desempeño, en la medida que es incorporada la decisión endógena de la oferta de trabajo. A pesar de esto, este modelo puede ser útil como un acercamiento

⁵⁵ LUCAS, Robert Jr. Op. Cit., p. 696-715.

⁵⁶ RAMSEY, F. A Mathematical Theory of Saving. En: The Economic Journal. Vol. 38, No. 152 (Diciembre, 1928), pp.: 543-559.

⁵⁷ CASS, David. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. En: The Review of Economic Studies. Vol. 32, No. 3 (Julio, 1965); pp.: 233-240.

⁵⁸ KOOPMANS, Tjalling C. On the concept of optimal economic growth. 1965, 75 p. (En línea). Disponible en < <https://classes.soe.ucsc.edu/ams290/Fall2008/Koopmans%201965.pdf>>

⁵⁹ SOLOW, Robert M. A contribution to the theory of economic growth. The Quarterly Journal of Economics, 1956, p. 65-94.

⁶⁰ PRESCOTT, Edward, C. La Transformación de la Política y la Investigación Macroeconómica. En: Revista Asturiana de Economía, No.34 (2005), pp.:169-204.

inicial al ejercicio propuesto dado que, como lo afirma Romer⁶¹, puede servir como base natural para la construcción de estructuras matemáticas de mayor complejidad y, por ello, determinante del tipo de comportamiento tendencial (determinístico) de largo plazo de su dinámica evolutiva.

En congruencia con lo anterior, es posible afirmar que el modelo RCK presenta una estructura coherente con un modelo DEG básico al representar una economía artificial en la que interactúan agentes económicos en un contexto de equilibrio general y de competencia perfecta. Pues, en su versión determinista, se compone de una cantidad finita de empresas y familias de consumidores idénticos que pueden agregarse bajo dos tipos de agentes representativos, los cuales planean sus decisiones y elecciones intertemporales de acuerdo al tiempo de vida de referencia que les sea determinado, que puede ser finito o infinito. En un contexto de tiempo infinito, los hogares y las empresas son instituciones separadas que se caracterizan por interactuar en el mercado laboral, de recursos financieros y de bienes finales, donde las familias son propietarias del capital y del factor trabajo, cuyo alquiler es demandado por las empresas para llevar a cabo su actividad productiva. Por esto, los primeros reciben una remuneración salarial y un rendimiento por sus activos financieros a través de la distribución de los beneficios obtenidos en la operación de las firmas, que pueden ser utilizados de forma conjunta para definir sus elecciones de consumo y ahorro para cada momento del tiempo, pues determinan su restricción presupuestaria intertemporal.

Además de lo anterior, la cualidad de los agentes de ser racionales en el tiempo, con capacidad computacional ilimitada, resulta ser un requisito para lograr una asignación óptima de los recursos durante su tiempo de vida, dado que propicia la interacción de su desempeño maximizador en un mercado en el que pueden determinar, con la ayuda de una tasa de ahorro endógena, la senda óptima de la acumulación de capital. Es decir, en un contexto de competencia perfecta y en ausencia de rigideces que obstruyen su ajuste instantáneo, este carácter endógeno de las elecciones racionales de consumo intertemporal es una de sus características más sobresalientes, debido a que permite

⁶¹ ROMER, David. Macroeconomía avanzada (3 Ed.) Estados Unidos: McGraw-Hill, 2006, pp.:600.

garantizar la optimización dinámica de las decisiones de los agentes económicos, las cuales dependen de la estructura de sus preferencias y de los incentivos provenientes del entorno que pueden alterar las restricciones a las que están sujeta sus elecciones.

Estas características mencionadas pueden observarse en la siguiente estructura matemática que formaliza los elementos presentados del modelo RCK, para el cual se puede analizar su desempeño dinámico óptimo a través de la aplicación del Principio del Máximo en un problema de control u optimización dinámica, tal como se presenta en la siguiente sección, basado en el ejercicio planteado por Romer⁶², y con las herramientas de resolución planteadas por Torres⁶³, Zuluaga⁶⁴ y Vialar⁶⁵.

2.2 Formulación

2.2.1 Los Hogares

Los hogares se presentan como una cantidad finita de economías domésticas que mantienen un comportamiento idéntico y un altruismo intergeneracional dentro de un horizonte temporal infinito. Además, se tiene que las familias de esta economía, resuelven el problema de control óptimo mediante la elección intertemporal de la variable de consumo (variable de control) para alcanzar la maximización, a lo largo del tiempo, de una función de utilidad social del siguiente tipo:

$$(1). \quad V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-\rho t} u(C(t)) \frac{L(t)}{H} dt$$

Donde ρ representa la tasa de descuento o preferencia intertemporal que refleja la valoración que los agentes le atribuyen a consumir en el futuro, (pues entre mayor sea ese parámetro, se valora

⁶² ROMER, David. Op. cit., 678 p.

⁶³ TORRES, José. Introducción al Equilibrio General Dinámico Macroeconómico. Departamento de Teoría de Historia Económica. Universidad de Málaga, 2009, 323 p.

⁶⁴ ZULUAGA, Blanca; RAFFO, Leonardo. Optimización Dinámica y Modelos de Crecimiento con Consumo óptimo: Ramsey-Cass-Koopmans. En: Apuntes de Economía. No. 11 (Noviembre, 2008).

⁶⁵ VIALAR, Thierry. Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics: Advances in Economics and Finance, Mathematics and Statistics. 2009, pp.:569-580.

menos el consumo futuro que el presente), $C(t)$ es la elección de consumo individual, $L(t)$ es el total de individuos que conforman la economía y, dado que $\frac{L(t)}{H}$ representa la cantidad de individuos por hogar, se puede decir que $u(C(t))\frac{L(t)}{H}$ representa la utilidad asociada al consumo de un hogar representativo en un instante de tiempo. Además, esta función objetivo puede ser expresada a través de la utilidad con aversión al riesgo constante (ARRC) que es de la forma:

$$(2). \quad u(C(t)) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta > 0$$

El coeficiente de aversión al riesgo constante de esta función de utilidad, en un contexto determinista, permite vislumbrar la postura de los hogares frente a la posibilidad de sustituir el consumo intertemporalmente. Por esto, este parámetro indica la velocidad con la que tiende a disminuir la utilidad marginal del hogar representativo asociada al consumo, pues entre más rápida (lenta) sea y por tanto mayor (menor) sea aquel parámetro, los hogares tendrán menor (mayor) disposición a preferir consumo futuro (presente). Además, independientemente de la forma en la que asignan sus recursos para la adquisición de bienes de consumo en el tiempo, estos hogares deben cumplir la siguiente restricción presupuestaria intertemporal para lograr una optimización dinámica de la utilidad a lo largo de su ciclo vital:

$$(3). \quad \int_{t=0}^{\infty} C(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{K(0)}{H} e^{R(t)} + \int_{t=0}^{\infty} W(t) \frac{L(t)}{H} dt$$

Esta restricción permite garantizar que los rendimientos de los activos y las remuneraciones salariales sean mayores o iguales a los recursos destinados al consumo durante la transición hacia un horizonte temporal infinito, lo que evita una posible insolvencia en el largo plazo para financiar el consumo futuro y la presencia de deuda en el último instante temporal. Por ello, si se tiene en cuenta un parámetro tecnológico $A(t)$ que incide en la fuerza de trabajo $L(t)$, es posible determinar, en términos de trabajo efectivo ($A(t)L(t)$), la condición de transversalidad del ejercicio de

optimización tal como se establece en (4) (ver Anexo 1). Esta restricción puede ser concebida como un índice de calidad del ejercicio que, además de lo mencionado anteriormente, indica que los recursos que dispone el individuo en forma de acumulación de capital deben estar disponibles para realizar actos de consumo en el último margen temporal.

$$(4). \quad \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-R(z)} e^{(n+g)z} k(z) \geq 0$$

Para culminar el planteamiento del ejercicio optimizador de los hogares, se emplea la función de utilidad con aversión al riesgo constante en términos de trabajo efectivo para su desarrollo posterior, por lo que la función objetivo puede quedar determinada como se exhibe en (5). En esta expresión, se debe garantizar que la suma de los parámetros que conforman la tasa de descuento intertemporal del consumo debe ser menor que cero, tal como se muestra a continuación (ver Anexo 2):

$$(5). \quad V = A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H} \int_{t=0}^{\infty} \frac{(e^{-(p-g(1-\theta)-n)t} c(t)^{1-\theta})}{1-\theta} dt, \quad p - g(1 - \theta) - n \geq 0$$

2.2.2 Las Firmas

Las firmas pretenden la optimización de las ganancias que pueden obtener en el ejercicio de su actividad económica, lo cual se hace teniendo en cuenta una restricción lineal de costos productivos y una tecnología que delimita el comportamiento del proceso productivo que, para las firmas idénticas de esta economía, se puede determinar a través de una función de producción tipo Cobb-Douglas, como se muestran a continuación:

$$(6). \quad Y(t) = F(K(t), L(t)) = A(t)K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha}$$

$$(7). \quad G(K(t), L(t)) = W(t)L(t) + Y(t)K(t)$$

Donde $K(t)$ y $L(t)$ definen la magnitud de capital alquilado y de trabajo contratado en un mercado competitivo de factores y donde $W(t)$ y $Y(t)$ representan el costo de arrendamiento de los mismos.

Además, $A(t)$ representa el parámetro tecnológico que incide sobre la productividad marginal de aquellos insumos productivos, cuyo crecimiento se define exógenamente. Estos elementos permiten que aquella tecnología de producción pueda expresarse en su forma per cápita o por unidad efectiva de trabajo, pues detecta los cambios en la productividad del trabajo que es potenciado por la variación temporal del parámetro tecnológico, como se observa en (8):

$$(8). \quad y(t) = f(k(t)) = k(t)^\alpha$$

2.3 Solución

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede establecer que la función a optimizar por parte de las empresas son los beneficios que resultan de la operación productiva de las mismas, por lo que para lograrlo se deben cumplir las siguientes restricciones (ver Anexo 3):

$$(9). \quad f'(k(t)) = \alpha k(t)^{\alpha-1} = r(t)$$

$$(10). \quad (1 - \alpha)k(t)^\alpha = w(t)$$

Tal que (9) y (10) son las condiciones de primer orden que permiten la maximización de los beneficios por periodo de actividad económica, donde el valor de la productividad marginal del capital per cápita debe ser igual a los rendimientos asociados a su alquiler por unidad de trabajo efectivo. Por ello, dado que las empresas sólo arriendan el capital ofertado en el mercado financiero, la acumulación del mismo está determinada por el arbitraje continuo entre el usufructo futuro de los rendimientos que pueden obtenerse por destinar sus recursos a la adquisición de mayor cantidad de activos y la preferencia por el consumo presente. Es decir, es el ahorro, que se traduce en inversión productiva⁶⁶, el que determina la evolución del capital en el tiempo y puede permitir establecer la regla que este debe seguir para alcanzar una dinámica macroeconómica equilibrada, donde el valor de la oferta agregada $Y^O(t)$ resulte igual al de la demanda agregada $Y^d(t)$ a lo largo del tiempo.

⁶⁶Determinada por la diferencia entre la inversión efectiva y la inversión de reposición.

Esta regla puede representarse como lo muestra la ecuación (11), que exhibe la primera ley de movimiento de esta economía artificial (ver Anexo 4):

$$(11). \quad \dot{k}(t) = k(t)^\alpha - c(t) - (n + g)k(t)$$

Por otro lado, el comportamiento maximizador de los hogares está condicionado a la determinación de una trayectoria u órbita de valores secuenciales de consumo que permitan alcanzar la máxima utilidad posible a lo largo de su horizonte temporal de vida, obedeciendo la restricción presupuestal intertemporal definida. Por esto, para llevar a cabo esta optimización intertemporal, puede definirse el siguiente lagrangiano dinámico:

$$(12). \quad L = B \int_{t=0}^{\infty} \frac{e^{-\beta t} c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt + \lambda (k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)+(n+g)t} (w(t) - c(t)) dt)$$

La ejecución de este ejercicio permite obtener la segunda y última ley de movimiento de esta economía artificial, la cual permite evidenciar la dinámica intertemporal de la variable de control del sistema y los incentivos que pueden provocar su crecimiento o decrecimiento futuro, como se muestra en (13), (ver Anexo 5).

$$(13). \quad \frac{c(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - (p - g(1 - \theta) - n) - (n + g)}{\theta} = \frac{f'(k(t)) - p - g}{\theta}$$

Por lo anterior, se consolidan las dos ecuaciones de movimiento del sistema, que indican que entre mayor sea el rendimiento financiero asociado a la renuncia de consumo presente, se dará un mayor crecimiento del consumo en el futuro y una acumulación creciente de activos productivos en el presente, como lo muestran (14) y (15). Además, estas ecuaciones conforman un sistema dinámico autónomo⁶⁷ no-lineal en tiempo continuo:

⁶⁷ Dado que la única variable independiente que contempla el sistema (t) no influye de forma directa en la determinación del consumo ni en la acumulación de capital.

$$(14). \quad \frac{c(\dot{t})}{c(t)} = \frac{\alpha k(t)^{\alpha-1} - p - g\theta}{\theta}$$

$$(15). \quad k(\dot{t}) = k(t)^\alpha - c(t) - (n + g)k(t)$$

2.3.1 Estado Estacionario

La optimización dinámica de un ejercicio como el anterior, lleva a que el sistema de ecuaciones diferenciales resultante presente una dinámica de transición hacia un único estado estacionario, es decir, un punto fijo en el que el sistema se mantendría de forma permanente en ausencia de perturbaciones externas. Este punto, en el que el sistema pierde su dinámica, puede identificarse cuando se elimina el movimiento tanto de la variable de control como la de estado ($c(\dot{t}) = 0$ y $k(\dot{t}) = 0$), tal como lo muestran (14) y (15), dando como resultado una situación en la que $c(t)$ y $k(t)$ adquieren valores constantes determinados por los parámetros fundamentales del modelo (ver Anexo 6):

$$(14). \quad c^* = \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n+g) \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$(15). \quad k^* = \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

2.4 Dinámica de transición

Dado que el comportamiento de un sistema no lineal en una vecindad de su equilibrio de estado estacionario es semejante, en términos cualitativos, a su sistema lineal asociado, se puede determinar que la estabilidad o inestabilidad de las trayectorias del sistema lineal auguran un comportamiento semejante en su contraparte no lineal, tal como lo afirman Romer⁶⁸, Lorenz⁶⁹ y

⁶⁸ ROMER, David. Op. cit., 678 p.

Vílchez⁷⁰, por lo cual es menester llevar a cabo una transformación que permita la relación: $\dot{Y} = JY$. Donde \dot{Y} contiene la evolución temporal de las variables de estado $c(t)$ y $k(t)$ que componen el vector Y de dimensión 2×1 , y J es una matriz jacobiana de dimensión 2×2 que contiene las derivadas parciales de ambas ecuaciones diferenciales en relación a las variables de estado, la cual puede presentarse como en (20), (ver Anexo 7):

$$(20). \quad J = \begin{bmatrix} \frac{(\alpha k(t)^{\alpha-1} - p - g\theta)}{\theta} & \frac{(\alpha(\alpha-1)c(t)k(t)^{\alpha-2})}{\theta} \\ -1 & \alpha k(t)^{\alpha-1} - (n + g) \end{bmatrix}$$

A partir de esta matriz jacobiana, es posible identificar los valores propios del sistema lineal que permiten establecer el comportamiento de su estructura orbital en relación al equilibrio de largo plazo que, como se mencionó, es semejante a su contraparte no lineal en términos cualitativos. Lo anterior indica que los valores propios de esta matriz, además de determinar la clasificación de los tipos de equilibrio dinámico que puede presentar el sistema, permiten hallar las direcciones de las variables de estado sobre las que se presentan sendas de convergencia (estables) y divergencia (inestables) por medio de sus vectores propios asociados.

Teniendo en cuenta lo anterior, al considerar un modelo en su estado estacionario que se ve perturbado por una variación exógena de uno de sus parámetros, como el planteado en (14) y (15), se puede realizar un análisis de las características cuantitativas y cualitativas propias de su dinámica de transición hacia otro estado de equilibrio si se plantean las condiciones previas y posteriores al cambio exógeno. En la Tabla N^o1 se plantean un par de situaciones de forma deliberada y ad hoc, como representaciones de un universo de casos posibles, que permiten llevar a cabo un ejercicio experimental coherente con las restricciones planteadas con anterioridad, el cual presenta el

⁶⁹ LORENZ, Hans W. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. Berlin: Springer, 1993, 219 p.

⁷⁰ VÍLCHEZ L., Luisa, VELASCO M., Francisco y GARCÍA del Hoyo, Juan. Análisis de la estabilidad y de bifurcaciones en un modelo dinámico aplicado a la gestión de una pesquería. En: *Computación y Sistemas*, México. (en línea). Vol.6, No. 4 (Abril – Junio, 2003). Disponible en <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1405-55462003000200004&script=sci_arttext>

comportamiento del sistema cuando un elemento exógeno mengua la preferencia de los hogares por el consumo futuro ($p_f > p_i$).

Tabla N^o1. Condiciones iniciales de los parámetros fundamentales

Parámetros del modelo	p	θ	g	α	n
Valores iniciales	0.4	0.4	0.6	0.3	0.26
Valores finales	0.5	0.4	0.6	0.3	0.26

Fuente: Tabla elaborada por el autor.

En la situación final, las decisiones redefinidas de los agentes optimizadores se desenvuelven en un campo vectorial⁷¹ como el presentado en la Figura N^o1. Esta figura es la expresión cualitativa de la naturaleza del problema económico de modelos a la RCK, en los que los agentes económicos tienen la libertad de arbitrar de forma constante entre consumo y ahorro, lo cual provoca la emergencia de un mar de órbitas inestables en el que se encuentra sumergida la trayectoria de crecimiento estable. Por ello, este modelo presenta un equilibrio de silla de montar ubicado en $(k^*, c^*) = (0,0)$, dado a que los valores propios del jacobiano evaluado en las condiciones finales de la Tabla N^o1 toman valores y signos diferentes, expresados por $\lambda_1 = -1.309$ y $\lambda_2 = 1.089$, que definen un vector de convergencia (0.736646, 0.676279) y uno de divergencia (0.79471, -0.60699) representados por la senda de movimiento roja y verde en la Figura N^o1, respectivamente. Lo anterior indica que para el primer vector: un incremento (reducción) de 0.736646 en la variable de consumo, debe ir acompañado de un aumento (disminución) de 0.676279 en la acumulación de capital para garantizar la convergencia hacia el estado estacionario.

⁷¹ El campo vectorial puede reflejar el movimiento del sistema dinámico desde cualquier punto del espacio de fases, que es la expresión cualitativa de sus flujos (conjunto de soluciones para u órbitas que surgen en diversas condiciones iniciales).

Por lo mencionado anteriormente, es posible identificar la senda de convergencia del modelo en medio de un conjunto de órbitas vecinas tras la variación paramétrica, como lo muestra la Figura N^o 2, sobre la cual este puede tender hacia el punto de equilibrio estable. Por ello, resulta necesario establecer las condiciones iniciales de las variables de estado necesarias para transitar a través de la senda de equilibrio estable, lo cual es posible determinado un valor inicial de la variable de capital ($k_0 = k(0)$) y de la variable de consumo ($c_0 = c(0)$) que permitan lograr este objetivo. Además de lo anterior, es pertinente aclarar que no resulta posible tener en cuenta el equilibrio inicial del modelo no lineal para ejemplificar la redefinición de las decisiones de los agentes debido a que el jacobiano sólo permite analizar el comportamiento del modelo alrededor del nuevo estado estacionario. Sin embargo, su senda de convergencia puede reflejar su dinámica de transición y por ende, es posible asignar un valor inicial a la variable de capital $k(t)$ para determinar el estado inicial de $c(t)$ que permitiría encausar la evolución del modelo sobre la órbita en cuestión.

En desarrollo de lo anterior, es posible utilizar el modelo lineal presentado en el Anexo 7 y la pendiente del campo vectorial asociada al vector propio de convergencia $\psi = \frac{c(t)}{k(t)}$ para obtener la relación $c_0 = k_0 \frac{(\psi a_{22} - a_{12})}{(a_{11} - \psi a_{21})}$ que persigue el ejercicio propuesto (ver Anexo 8), por lo que si k_0 toma el valor de -0.2 ⁷², c_0 tendría que tomar un valor aproximado de -0.218 ⁷³. Este último resultado debería permitir determinar, a través de un proceso iterativo, que la dinámica del sistema entre $t_0 = -10$ y $t_f = 10$ tiende a converger al nuevo equilibrio de largo plazo como lo muestra la Figura N^o 3 (Ver en Anexos). A pesar de esto, las trayectorias del modelo son en apariencia sensibles al número de decimales significativos tomados en los estados iniciales de la transición al punto de equilibrio, como se muestra en la Figura N^o 4, donde las trayectorias verde, roja, púrpura y

⁷²Es negativo en el modelo lineal pues es la desviación de un valor de k_t en el modelo original respecto de su estado estacionario.

⁷³Que con 18 cifras significativas de precisión toma el valor de -0.2178527325950933 .

amarilla representan las órbitas de movimiento del sistema bajo la condición inicial (k_0, c_0) , tal que c_0 se toma con precisión de 18, 5, 4 y 3 cifras decimales, respectivamente⁷⁴.

El resultado anterior es semejante al obtenido por Lorenz⁷⁵ dentro de su ejercicio de modelación meteorológica, que terminaba por arrojar predicciones distintas dependiendo de la precisión con la que se dotara las condiciones iniciales de sus variables funcionales. Por lo cual, este modelo base puede presentar una dependencia sensitiva a las condiciones de las que parte su evolución intertemporal, es decir, puede estar sujeto a una restricción o convergencia condicional asociada a la perfección de la información que se provee al modelo, que es equivalente a la característica de inestabilidad dinámica propia del caos determinista. Lo anterior indica que es posible perpetuar el desempeño del modelo en senderos de desequilibrio a través del mecanismo de arbitraje entre consumo presente y consumo futuro, ello en la medida que los agentes económicos tiendan a aprovechar cambios mínimos en las condiciones de la órbita de convergencia estable.

2.4.1 Inestabilidad dinámica

El exponente de Lyapunov es una de las principales herramientas analíticas para determinar la naturaleza dinámica de un sistema, dado que se considera como una medida de sensibilidad de las trayectorias del sistema a las condiciones iniciales, pues permite identificar procesos de inestabilidad dinámica en sus movimientos orbitales. Por ello, determina la magnitud promedio de la separación o convergencia de trayectorias arbitrariamente cercanas en su estado inicial para cada una de las variables de estado. De acuerdo a esto, en presencia de este fenómeno, un par de orbitas $x_1(t)$ y $x_2(t)$ separadas en su punto de partida por un valor infinitesimal ε , tal que $x_1(0) = x_0$ y $x_2(0) = x_0 + \varepsilon$, tienden a seguir una separación exponencial $\varepsilon e^{\lambda t} = f(x_2(t)) - f(x_1(t))$, como

⁷⁴Puede verse reflejado de igual forma en la Figura 5 (Ver Anexos) que representa la evolución y divergencia de las trayectorias de consumo bajo estas condiciones iniciales.

⁷⁵ LORENZ. Op. Cit., 248 p.

puede inferirse de Mouronte⁷⁶, Dubeibe⁷⁷ y Brieva⁷⁸, donde la tasa de crecimiento de esta brecha en el tiempo puede establecerse como: $\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \left[\left| \frac{f(x_2(t)) - f(x_1(t))}{x_2(0) - x_1(0)} \right| \right]$.

Por lo anterior, es posible establecer que el comportamiento de las trayectorias resultantes de valores próximos al estado inicial de la variable de consumo (c_{01}, c_{02}, c_{03}), como se muestran en la Tabla N^o1.1 (ver Anexos), presentan una brecha creciente respecto a la que resulta del valor preciso de esta variable (c_0), dado el valor de k_0 . Esto puede observarse entre $t = 0$ y $t = 100$, donde este fenómeno presenta dos etapas: en la primera, se evidencia un crecimiento de la tasa de divergencia exponencial promedio entre las trayectorias mencionadas y la órbita precisa, por lo que al transcurrir ocho unidades temporales, $t = 8$, estas tenderán a separarse (en promedio) a una tasa igual a la unidad. Mientras en la segunda, se presenta una desaceleración de la tasa de separación exponencial tendiente a cero en el infinito, alcanzando un valor cercano a 0.2 en $t = 100$, hecho que puede evidenciarse en la Figura N^o 6. Lo anterior implica que siempre existirá una tasa positiva de desincronización exponencial y que la separación de las trayectorias y de los estados del modelo nunca tenderán a acortarse en el tiempo como producto del problema de precisión inicial, lo cual se ve reflejado en los desempeños divergentes de la acumulación de capital en la medida que al valor del consumo inicial c_0 (trayectoria verde) le es restringida su precisión, al tomar el valor de c_{01} (trayectoria naranja) y c_{02} (trayectoria roja), tal como se muestra en la Figura N^o 5.

Por otro lado, cuando se restringe la precisión inicial de la variable de acumulación de capital (k_{01}, k_{02}), como se presenta en la Tabla No 1.2, y su evolución es comparada con la senda de

⁷⁶ MOURONTE L., Mary Luz. Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos No Lineales Mediante el Estudio Del Mapa de Frecuencias y Espacio de Fases. Madrid, 2004, 180 p. Tesis. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos.

⁷⁷ UBEIBE, F. L. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica .En: Revista Colombiana de Física. Vol. 45, No. 1, (2013).

⁷⁸ BRIEVA, Eduardo. Caos en sistemas dinámicos. En: Terceras Jornadas Nacionales de Ingeniería Electromecánica, las tecnologías modernas de productividad [en línea]. (1993). Disponible en < <http://dis.unal.edu.co/~gjhernandezp/sim/lectures/DeterministicModelsAndChaos/CaosenSistemasDinamicos.pdf> >

mayor precisión inicial (k_0), mientras se mantiene el valor inicial preciso de la variable de consumo, es posible observar el mismo comportamiento del exponente de Lyapunov que se evidenció en el ejercicio anterior, como puede verse en la Figura N^o 6.1, por lo que la restricción infinitesimal de la precisión inicial de la variable de estado puede provocar trayectorias divergentes en el largo plazo. Sin embargo, en un periodo de tiempo limitado es posible predecir adecuadamente, entre $t = 0$ y $t = 1.35$, pues la separación de las trayectorias en comparación no supera el grado de imprecisión presente en la situación inicial, lo cual implica una convergencia sustentada en un exponente de Lyapunov negativo en aquel intervalo temporal.

Por lo anterior, la trayectoria de convergencia hacia un nuevo estado estacionario se encuentra restringida a un indeterminismo práctico, en el que pequeños fallos en la determinación del estado inicial de alguna variable del sistema puede provocar una secuencia de estados que terminan por alejarse de forma progresiva del sendero de equilibrio. Este fenómeno limita el grado de precisión con el que es posible determinar la posición del modelo en periodos futuros, pues la sensibilidad a las condiciones iniciales disminuye la posibilidad de capturar toda la información que permite establecer aquel comportamiento posterior. Además de esto y por otra parte, es posible que la inestabilidad dinámica se mantenga en un modelo DEG basado en el modelo de crecimiento óptimo RCK, y puede que la introducción de elementos a la estructura básica de este último, a la vez que se tiende a restringir las elecciones optimizadoras de sus agentes económicos, propicien la aparición de otro tipo de fenómenos complejos como la inestabilidad estructural. Por ello, estos aspectos serán evaluados en el siguiente apartado.

3. FENÓMENOS COMPLEJOS EN UN MODELO DINÁMICO DE EQUILIBRIO GENERAL A LA RCK EN PRESENCIA DE RESTRICCIONES DE CASH-IN-ADVANCE.

En esta sección se pretende evaluar la posible emergencia de fenómenos dinámicos complejos como la inestabilidad dinámica y estructural (indeterminación y bifurcación del equilibrio de previsión perfecta) dentro de un modelo dinámico de equilibrio general a la RCK con restricciones tipo cash-in-advance, lo cual se realiza siguiendo el desarrollo y planteamiento que hace Bosi⁷⁹ del mismo. Por otro lado, dado que en las secciones anteriores se ha hecho referencia a los estudios que analizan el fenómeno de inestabilidad dinámica, se puede partir de algunos de los resultados científicos que se han obtenido sobre la inestabilidad estructural en la disciplina económica

En determinados análisis sobre fenómenos complejos presentes en modelos económicos, como el de Benhabib y Farmer⁸⁰, se pueden identificar algunas de las condiciones que pueden provocar la indeterminación del equilibrio de estado estacionario en modelos de crecimiento endógeno, lo cual puede darse en cuanto se presentan altos rendimientos a escala de la producción agregada y determinadas externalidades inciden sobre el desempeño del modelo. Sin embargo, esta indeterminación en Benhabib y Farmer⁸¹ requiere grados de rendimientos crecientes superiores a los estimados a partir de datos reales, y a pesar que en Benhabib y Farmer⁸², Perli⁸³, y Benhabib y Nishimura⁸⁴ se establecen estructuras de mercado con dos sectores, donde uno de ellos se somete a la presencia de externalidades, y los requerimientos de rendimientos crecientes resultan inferiores y plausibles, la elasticidad de sustitución intertemporal de los agentes es superior a la estimada por los estudios de ciclo real. Por lo anterior, los resultados obtenidos en los ejercicios teóricos de

⁷⁹ BOSI, Stefano, et al. Animal Spirits with Arbitrarily Small Market Imperfection. 2002. (En línea) Disponible en: < <http://t2m.univ-paris1.fr/fr/activites/attach/swp0000.pdf> >

⁸⁰ BENHABIB, J. y FARMER, Roger. Indeterminacy and increasing returns. En: Journal of Economic Theory. Vol. 63 (1994); pp.:19-41.

⁸¹ BENHABIB, J. y FARMER, Roger. Indeterminacy and sector specific externalities. En: Journal of Monetary Economics. Vol. 37 (1996); pp.: 421-443.

⁸² Ibid., pp.: 421-443.

⁸³ PERLI, R. Indeterminacy, home production and the business cycle. En: Journal of Monetary Economics. Vol. 41 (1998); pp.: 105-125.

⁸⁴ BENHABIB, J. y NISHIMURA, K. Op. Cit., pp.: 58-96.

experimentación no logran establecer un riesgo en la aplicación de aquellas estructuras matemáticas debido a la carencia de plausibilidad empírica de las exigencias que se requieren para la aparición de este fenómeno.

3.1 Modelo, características y usos potenciales

Por los resultados anteriores, es menester observar si el modelo a analizar, que se presenta a continuación, puede reproducir inestabilidades estructurales en condiciones empíricamente más factibles, dado que esto permitiría establecer límites a su desempeño predictivo unívoco. Aquel modelo estará definido por la economía artificial planteada por Bosi⁸⁵ que implementa una restricción de liquidez en el gasto de consumo en un modelo dinámico de equilibrio general a la RCK. Esta restricción de liquidez consiste en el mantenimiento o retención de dinero en efectivo, acumulado desde periodos anteriores, que debe estar disponible antes que se produzca la compra de bienes finales de consumo, la cual es conocida como cash-in-advance, que además de ser el efectivo que no es consumido ni utilizado como activo para la generación de rendimientos financieros, ha sido un elemento necesario para tener la posibilidad de analizar fenómenos monetarios dentro de modelos neoclásicos en los que el dinero no tiene un papel fundamental en las interacciones mercantiles.

Siguiendo este hilo conductor, es posible mencionar que entre estos fenómenos monetarios se encuentra la inflación, que puede resultar de los incrementos en la masa monetaria disponible en la economía, por lo que aquella rigidez presente en el modelo puede resultar útil para evaluar los posibles impactos que la incorporación de un cambio en la política monetaria puede provocar en una economía artificial con una estructural a la RCK. Sin embargo, este modelo de equilibrio general planteado por Bosi⁸⁶ será usado principalmente, y como se ha mencionado anteriormente,

⁸⁵ BOSI, Stefano, et al. Op. Cit., pp.: 22 p.

⁸⁶ *Ibíd.*, pp.: 22 p.

para evaluar el posible surgimiento de fenómenos complejos en su dinámica económica y su potencial verosimilitud empírica.

3.2 Planteamiento: formulación y resolución.

3.2.1 Consumidores

En concordancia con Stefano Bosi⁸⁷, se plantea un modelo en tiempo discreto en el que los agentes racionales representativos maximizan una función de utilidad durante un horizonte temporal infinito, como la que se presenta a continuación:

$$(21). \quad W = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} - \frac{L_t^{1+\chi}}{1+\chi} \right)$$

Donde C_t representa el consumo agregado, L_t determina la cantidad de horas que se ofertan para emplearse en una actividad productiva, $\chi > 0$ el inverso de la elasticidad de la oferta de trabajo y $\sigma > 0$ representa la elasticidad de sustitución intertemporal, la cual está sujeta tanto a la restricción presupuestaria intertemporal, como al requisito de mantener dinero en efectivo antes de las transacciones de consumo (cash-in-advance):

$$(22). \quad \mathcal{R}_t \Rightarrow p_t C_t + p_t (K_{t+1} - (1 - \delta)K_t) + M_{t+1} = p_t r_t K_t + p_t w_t L_t + M_t + \tau_t$$

$$(23). \quad \mathcal{Q}_t = q p_t C_t - M_t \leq 0$$

Donde \mathcal{R}_t es la restricción presupuestaria dinámica que delimita la forma en la que los agentes asignan sus recursos a lo largo de su vida, y \mathcal{Q}_t es la restricción de consumo con dinero anticipado. Por ello, en la primera de ellas, donde p_t es el valor monetario de los bienes, r_t es la renta real del capital, w_t es el salario real de los trabajadores y τ_t son las transferencias gubernamentales a tanto alzado⁸⁸, se expresa que las variaciones en el tiempo de los balances monetarios son el resultado de

⁸⁷ Idem.

⁸⁸ Valor que se asignan de forma estimativa y que no está sujeto a fluctuaciones futuras.

los rendimientos de los activos financieros, las remuneraciones salariales y las transferencias gubernamentales, que no son empleadas en la compra de bienes de consumo ni fortalecen la acumulación de capital de los individuos (representada por la inversión efectiva), sino que permanece en efectivo para asumir el gasto de consumo futuro. Lo anterior es consecuente con la segunda restricción, que determina que los balances monetarios para cada momento del tiempo deben ser superiores al valor de la compra de bienes pagados con cash-in-advance, dado que se requiere que parte del mismo se conserve para los siguientes periodos, en los que se hace necesario una cuota ($0 \leq q \leq 1$) que debe pagarse a través de este mecanismo.

Por lo anterior, se plantea el siguiente lagrangiano dinámico para hallar de forma explícita el comportamiento optimizador del consumidor representativo presente en esta economía artificial, de acuerdo a las preferencias asignadas y a las restricciones implementadas a sus elecciones racionales, el cual puede expresarse como en (24):

$$(24). \quad \mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{C_t^{1-\frac{1}{\sigma}}}{1-\frac{1}{\sigma}} - \frac{L_t^{1+\chi}}{1+\chi} \right) - \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t p_t \lambda_t (\mathcal{R}_t^*) - \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v_t (Q_t)$$

Donde $p_t \lambda_t$ y v_t se presentan como multiplicadores no negativos del lagrangiano dinámico, tal que la primera puede representar la utilidad marginal del ingreso y la segunda, la utilidad marginal de la tenencia de balances monetarios reales. Por ello, puede evidenciarse que las condiciones de primer orden del problema de optimización dinámica planteado en (24) están determinadas por las siguientes expresiones que resultan del comportamiento maximizador de los hogares (ver Anexo 9):

$$(25). \quad C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = p_t (\lambda_t + q v_t)$$

$$(26). \quad L_t^{\chi} = \lambda_t p_t w_t$$

$$(27). \quad \lambda_t p_t = \beta (p_{t+1} \lambda_{t+1} R_{t+1}), \quad R_{t+1} = (r_{t+1} + (1 - \delta))$$

$$(28). \quad \lambda_t = \beta(\lambda_{t+1} + v_{t+1})$$

$$(29). \quad \frac{\lambda_t}{R_{t+1}} = \pi_{t+1}\lambda_{t+1}$$

Donde (25) permite determinar que la utilidad marginal del consumo es igual a la adición de la utilidad marginal del ingreso y la utilidad marginal de la tenencia de una cuota requerida de balances monetarios. Además, como lo expresa (26), la utilidad marginal de ingreso salarial determina el movimiento de la oferta de mano de obra endógena. Por otro lado, (27) expresa que la generación de rendimientos futuros que amplíen los recursos presupuestarios, no influyen ni provocan una variación de la utilidad adicional que generan los ingresos reales en cualquier momento del tiempo, por lo que la transferencia intertemporal de recursos no permite incrementar la utilidad total como lo afirma Bosi⁸⁹. Y por último, (28) implica que el valor de la utilidad marginal del ingreso real es igual a su valor futuro más el valor de los dividendos monetarios reales. Estas últimas expresiones permiten determinar la ecuación de Euler no estocástica de movimiento de consumo en (30) (ver Anexo 10), donde (27) permite establecer la expresión (29) (debido a que $\pi_t = \frac{p_{t+1}}{p_t}$). Además, es posible determinar que a partir de (25)-(28) puede obtenerse la relación que indica la oferta de trabajo endógena postulada en (31) en función del rendimiento de capital, salario y consumo, mientras la ecuación (32), obtenida a partir de (26), indica la evolución de aquella variable en el tiempo:

$$(30). \quad \frac{c_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{c_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \beta \frac{(R_t \pi_t q + (1-q))}{(q \pi_{t+1} + (1-q) R_{t+1}^{-1})}$$

$$(31). \quad L_t^X = \frac{w_t c_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{(R_t \pi_t q + (1-q))}$$

⁸⁹ BOSI, Stefano, et al. Op. Cit., pp.: 22 p.

$$(32). \quad \frac{L_{t+1}^X}{L_t^X} = \frac{1}{R_{t+1}} \frac{w_{t+1}}{w_t}$$

Por último, para garantizar el proceso de optimización dinámica, los consumidores deben cumplir la condición de transversalidad que indica que la suma de los recursos de capital y la porción de los balances monetarios que se usan para adquirir bienes de consumo en el último instante temporal debe ser igual a cero. Tal como se expresa en (33):

$$(33). \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (K_{t+1} + \pi_{t+1} \frac{M_{t+1}}{p_{t+1}}) = 0$$

3.2.2 Firmas

En este modelo, las empresas maximizan su función de beneficios para cada momento del tiempo (Π_t) al emplear una tecnología de producción tipo Cobb-Douglas sin crecimiento tecnológico y una restricción de costos lineal, la cual puede expresarse como: $\Pi_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - w_t L_t - r_t K_t$. Este proceso de optimización determina las condiciones de primer orden que permiten lograr aquel objetivo primario para cada instante temporal, donde los rendimientos de la acumulación de capital (r_t) y la remuneración salarial (w_t) pueden expresarse como: $r_t = \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha}$ y $w_t = (1-\alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha}$. Estos resultados permiten hacer coherente las elecciones optimizadoras de las firmas y los hogares a lo largo del tiempo, pues esta última condición permite expresar la evolución de la oferta de trabajo de la ecuación (32) en términos de la demanda de capital y de trabajo que requieren las empresas, consideradas como variables de estado, lo cual permite encontrar una de las ecuaciones de movimiento del modelo dinámico, como se muestra en (34) (ver Anexo 11):

$$(34). \quad K_t^\alpha L_t^{-(\alpha+\chi)} = \frac{K_{t+1}^\alpha L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha})}$$

Por otro lado, es posible determinar la segunda regla de evolución del sistema si se considera (31), dado que la dinámica intertemporal del consumo puede plantearse como lo muestra (36), teniendo

en cuenta que, según Bosi⁹⁰, (35) es una condición para garantizar el equilibrio en el mercado monetario en este ejercicio, la cual indica que la inflación depende directamente de la tasa de crecimiento del dinero de un periodo a otro (μ) e inversamente del crecimiento de los saldos monetarios reales de un periodo a otro ($1/\frac{m_{t+1}}{m_t}$) (ver Anexo 12).

$$(35). \quad \pi_{t+1} = \mu \frac{m_t}{m_{t+1}}, \quad q_t p_t C_t \leq M_t \wedge q_t C_t \leq m_t$$

$$(36). \quad \mu q_t C_t = \left(\frac{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} \left((1-\alpha) K_{t+1}^\alpha L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} \right)^{-(1-\phi)}}{R_{t+1}} \right) C_{t+1}$$

Por último, la ecuación que cierra el sistema es la condición de equilibrio macroeconómico, en donde la producción total de la economía debe ser igual a la magnitud demandada de la misma, tal que $Y_t^o = Y_t^d$, de la cual es posible obtener la ecuación que expresa la acumulación de capital en el tiempo presentada en (37), (ver Anexo 13):

$$(37). \quad K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - C_t + (1 - \delta)K_t = K_{t+1}$$

3.2.3 Estado Estacionario.

Por lo anterior, el sistema dinámico determinístico se encuentra regido por las leyes de movimiento obtenidas en (34), (36) y (37), que presentan la suficiente información para determinar la ubicación del modelo en su dinámica evolutiva. Por ello, estas ecuaciones diferenciales, obtenidas de la optimización de las decisiones de los agentes representativos, pueden tender a alcanzar un equilibrio dinámico de largo plazo deseable (normativo), considerado por Daly⁹¹ como un estado óptimo sostenible de la economía humana, donde el sistema pierde su dinámica y las variables de estado

⁹⁰Ibíd., 22 p.

⁹¹DALY, H. E. Steady-state economics. London Earthscan Publications Ltd. 1992.

toman valores constantes en función de sus parámetros estructurales, tal como se observa entre (38)-(40), (ver Anexo 14):

$$(38). \quad C = \left(\frac{\theta}{\alpha} - \delta\right) K$$

$$(39). \quad L = \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K$$

$$(40). \quad K = \left(\frac{1}{1-\alpha} (1 - q + q \frac{\mu}{\beta}) \left(\frac{\theta}{\alpha} - \delta\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha}}\right)^{\frac{-1}{\chi+\frac{1}{\sigma}}}$$

3.3. Dinámica de transición

Una vez obtenidas las anteriores leyes de movimiento del modelo y los valores para los que el sistema pierde su dinámica en el largo plazo, es pertinente hacer uso del modelo lineal para determinar el comportamiento de su espacio orbital, lo cual puede realizarse agrupando las variables del modelo en los vectores $F(t + 1)$ y $F(t)$ de dimensión 3×1 de acuerdo a su orden temporal. Esto permite que se obtengan dos matrices jacobianas para los respectivos conjuntos de variables para expresar el modelo de la siguiente forma: $C_1 Y(t + 1) = B_1 Y(t)$. Donde C_1 y B_1 son matrices 3×3 que contienen las derivadas parciales de las variables fundamentales respecto de cada una de ellas en $t + 1$ y t , respectivamente; y donde $Y(t + 1)$ y $Y(t)$ son vectores 3×1 que contienen las variables de estado en su tiempo correspondiente. Por lo anterior, el modelo lineal determinista de este ejercicio puede plantearse como en (41), donde $A_j = C_1^{-1} \cdot B_1$ (ver Anexo 15):

$$(41). \quad Y(t + 1) = A_j Y(t)$$

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que este modelo discreto de tres dimensiones incorpora una restricción (q) que limita la asignación de recursos en el tiempo⁹², pues se presenta la necesidad de mantener una cuota determinada de cash-in-advance antes de realizar las transacciones, hecho que obstruye las elecciones óptimas de los agentes que pretenden una transferencia intertemporal y, por ello, termina distorsionando el papel de la elasticidad de consumo intertemporal (σ). Por lo anterior, dado el grado de exigencia del parámetro q frente a la elasticidad de sustitución de consumo intertemporal (σ), no puede descartarse a priori que el equilibrio dinámico de largo plazo pueda verse afectado en términos cuantitativos y cualitativos, pues puede que la interacción de ambos elementos genere problemas de inestabilidad dinámica y estructural en el modelo. Por esto, resulta necesario realizar un análisis exploratorio y experimental para determinar la existencia y las condiciones bajo la cuales esta estructura matemática, a partir de determinadas condiciones, puede generar aquellos fenómenos complejos.

Para realizar el ejercicio postulado, resulta necesario que el modelo esté plenamente identificado, por lo cual se utilizan los parámetros estructurales que Bosi⁹³ obtiene de la calibración de esta estructura matemática con el fin de que resultara útil para reproducir y analizar los ciclos de la economía norteamericana, que se presentan en la Tabla N^o2, los cuales serán empleados en examinar las características cuantitativas y estructurales de la dinámica de transición hacia el equilibrio de largo plazo que caracteriza al modelo dinámico, de forma que, en contraste con el ejercicio del apartado anterior, no se requerirá de un cambio exógeno proveniente del entorno para llevarse a cabo. En este ejercicio se asume que las propiedades complejas que pueden obtenerse con el uso de estos datos, resultan ser representativos de un universo de casos posibles que cumplen las restricciones del modelo.

⁹² sea para hacer usufructo de los rendimientos de la acumulación en el futuro o para la adquisición de consumo en el presente.

⁹³ BOSI, Stefano, et al. Op. Cit., pp.: 22 p.

Tabla N°2. Condiciones iniciales de los parámetros fundamentales.

Parámetros estructurales	β	α	δ	χ	σ	q	u
Condiciones iniciales	0.99	0.3	0.025	0	1	0.1	1.015

Fuente: Tabla elaborada por el autor.

Bajo estas condiciones, el modelo dinámico linealizado puede reflejarse en la Figura N° 7, que expresa su comportamiento en el espacio de fases para tres valores distintos de la variable L . Lo anterior, en cuanto L tomar el valor de 0, permite observar las sendas de convergencia y divergencia alrededor del equilibrio dinámico de largo plazo, que son determinadas por los valores propios $\lambda_1 = -1.5256$, $\lambda_2 = 0.7655$ y $\lambda_3 = -0.0774$ de su matriz jacobiana, los cuales reflejar un equilibrio dinámico de silla de montar, en el primero y el tercero determinan los vectores de convergencia $(0.7812, 0.0910, 0.6175)$ y $(-0.7933, -0.043, 0.6071)$, mientras el segundo expresa el vector de divergencia $(0.3565, -0.1758, -0.9174)$. De modo que para la primera trayectoria, un incremento (disminución) de 0.7812 en la variable de capital, debe ir acompañado de una elevación (reducción) simultánea de 0.0910 y 0.6175 en la oferta laboral y en las elecciones de consumo, de forma respectiva, para transitar a través del sendero de transición estable hacia el equilibrio de largo plazo. Por ello, esta relación permite establecer, a través de un valor inicial de $L(t)$, la condición inicial de $K(t)$ y $C(t)$ para garantizar la conducción del sistema por esta última orbita mencionada. Tal como lo muestran las relaciones expresadas en (41) y (42) respectivamente (ver Anexo 16):

$$(42). \quad \left(a_{i3} - \frac{a_{i1}b_{i1}}{b_{i3}} \right) K_0 = \left(\frac{a_{i1}b_{i2}}{b_{i3}} + a_{i2} \right) L_0$$

$$(43). \quad C_0 = \frac{1}{b_{i3}} b_{i1} K_0 + b_{i2} L_0$$

3.3.1 Inestabilidad dinámica

Al asignarle un valor de 0.01 a L_0 de acuerdo a la condición (42) y (43), a modo de ejercicio experimental, es posible establecer que los valores iniciales del capital y de las elecciones de consumo toman el valor de 0.3512 y a -0.311, respectivamente. Estas condiciones iniciales permiten evaluar la presencia de inestabilidad dinámica tras observar el comportamiento evolutivo de las variables del sistema cuando sus estados iniciales son sometidos a imprecisiones infinitesimales. Pues, al limitar la precisión de $K(0)$ a cuatro cifras significativas, se puede comparar las órbitas o secuencias de estados por los que se encamina el modelo dinámico, bajo un escenario de información perfecta e imperfecta, para establecer su grado de divergencia o convergencia exponencial a lo largo del tiempo.

Una aproximación a este ejercicio puede observarse en las Figuras N^o 8.1, 8.2 y 8.3, en las que se presenta una separación progresiva, en términos absolutos, de las trayectorias con información precisa respecto de aquellas que son producto de la condición inicial de $K(t)$ con precisión limitada, ello para el caso de la acumulación de capital, oferta de trabajo y de las elecciones de consumo. Por esto, el comportamiento del exponente de Lyapunov asociado a la dinámica de la acumulación de capital, presenta un comportamiento como el exhibido en la Figura N^o 9 (tanto con respecto a una precisión de cuatro, como de seis cifras significativas), donde la tasa de crecimiento de la divergencia entre ambos tipos de trayectorias tiende a estabilizarse en el intervalo (0.421, 0.422) entre $t = 150$ y $t = 200$, es decir, los ritmos de crecimiento de la divergencia entre las trayectorias inicialmente cercanas, tienden a reducirse en comparación a la separación explosiva de ambas órbitas en el intervalo $20 < t < 50$.

Por otro lado, como se muestra en la Figura N^o 10, es posible observar que el exponente de Lyapunov para la variable de oferta laboral, cuando su precisión inicial se restringe a cuatro cifras decimales y se mantiene la precisión perfecta de las demás variables, siempre resulta positivo a

pesar que la tasa de separación progresiva entre las órbitas inicialmente cercanas tiende a cero en el tiempo, dado que no puede garantizarse una posible convergencia. Sin embargo, para la situación en la que la imprecisión inicial es menor, no se presenta un decrecimiento en el grado de separación exponencial de las trayectorias analizadas, lo cual permite dilucidar que se requiere, como en el modelo base, una precisión infinita para evitar las pérdidas de predictibilidad del comportamiento futuro de este tipo de economías artificiales y lograr la convergencia al equilibrio dinámico de largo plazo.

Por lo anterior, la validez del trabajo investigativo de quien emplea estas herramientas empíricas se ve comprometida y restringida por la capacidad que tenga el investigador para dotar el modelo con la información más completa y perfecta a la que tenga acceso, de lo contrario, sus resultados tendrían a desviarse progresivamente del sendero de predicción adecuada. Sin embargo, es posible mencionar, que existe un estrecho periodo de tiempo en el que pueden realizarse predicciones adecuadas, cuando se limita la precisión únicamente de $K(0)$, donde se presenta una tasa de decrecimiento de la brecha que separa las trayectorias inicialmente cercanas. Esto permite determinar los estados subsecuentes del modelo dinámico para aquel intervalo de tiempo, por lo menos con el grado de precisión matemática con el que pueden establecerse sus condiciones de partida. Este último resultado indica que en este modelo DEG sólo es posible predecir la convergencia a un estado estacionario si el sistema, en términos temporales, se encuentra en un entorno cercano de este y si se pueden conocer aquellas condiciones con cierto grado de precisión matemática.

3.3.2 Inestabilidad estructural

Teniendo en cuenta el apartado anterior, es posible observar que los valores propios λ_2 y λ_3 de la matriz jacobiana se encuentran dentro del círculo unitario, mientras λ_1 resulta ser, en términos

absolutos, mayor que la unidad. Esto sugiere, según Lorenz⁹⁴ y Bosi⁹⁵, que el modelo dinámico puede ser propenso a desembocar en más de un equilibrio dinámico y por ello presentar una posible indeterminación del equilibrio de estado estacionario, lo cual indica un rompimiento de la estabilidad de su comportamiento cualitativo en el largo plazo. Para contrastar lo anterior, debe llevarse a cabo un análisis experimental de la posible inestabilidad estructural o efecto sobre el desempeño dinámico que puede provocar la interacción de la restricción monetaria de cash-in-advance (q) y la elasticidad de sustitución intertemporal de consumo (σ), pues, como se mencionó anteriormente, la asignación óptima de los recursos intertemporales de los agentes del modelo puede verse afectada y distorsionada en un contexto como este.

Por lo anterior, debe establecerse la región del espacio paramétrico en el que se presentan problemas de indeterminación, es decir, los puntos del tipo (q_i, σ_i) con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, que provocan la aparición de más de un equilibrio dinámico en el largo plazo con las condiciones iniciales establecidas en la Tabla N°2. Lo anterior, delimitando el valor de estos parámetros en los intervalos semi-abiertos $0 \leq q < 0.5$ y $0 < \sigma \leq 7$, con el fin de observar si este fenómeno puede presentarse para pequeños valores de la restricción de liquidez dado un abanico de valores de la elasticidad de sustitución del consumo intertemporal. En este sentido, es necesario establecer los valores de q y σ para los que se cumple la condición de indeterminación mencionada al inicio del apartado, por lo que se debe delimitar el conjunto puntos en los que permiten la presencia de dos raíces del polinomio característico de la matriz jacobiana ($P(\lambda, q, \sigma)$) dentro del círculo unitario y una tercera, en términos absolutos, superior a la unidad, como lo plantea Bosi⁹⁶ y Slobodian⁹⁷. Por esto, (ver Anexo 17), $P(\lambda, q, \sigma)$ debe cumplir las siguientes condiciones de forma simultánea: $P(1, q, \sigma) \cdot P(0, q, \sigma) < 0$, $P(-1, q, \sigma) \cdot P(0, q, \sigma) < 0$ y $P(-1, q, \sigma) \cdot P(1, q, \sigma) > 0$. Esto es debido a que la

⁹⁴ LORENZ, Hans. Op. Cit., 219p.

⁹⁵ BOSI, Stefano, et al. Op. Cit., pp.: 22 p.

⁹⁶ BOSI, Stefano, et al. Op. Cit. Pp.: 1 -21.

⁹⁷ SLOBODYAN, Sergey. Indeterminacy and Stability in a Modified Romer Model: a General Case. En: CERGE-EI Working Paper Series. No. 284. (Enero, 2006).

primera y la segunda restricción aseguran la presencia de un valor propio en el intervalo $(0, 1)$ y $(-1,0)$, respectivamente, mientras la tercera condición permite la obtención de un valor propio con valor absoluto superior a la unidad. Al aplicar aquellas restricciones al diagrama paramétrico (q_i, σ_i) , es posible encontrar una región como la presentada en la Figura N° 11 que ilustra el conjunto de puntos (q, σ) que son coherentes con estas.

Por lo anterior, para ciertos valores de q y σ dentro de la región mencionada, se puede obtener una función del polinomio característico cuyas raíces presentan el comportamiento anunciado, lo cual se puede corroborar en el ejemplo particular de la Figura N° 12, donde el punto $(0.2,1)$ puede alcanzar los valores propios $(-1.971, -0.142, 0.7261)$. Lo anterior indica que el estado estacionario de esta estructura dinámica puede resultar sensible a la variación paramétrica de q para determinados valores que tome la elasticidad de sustitución intertemporal de consumo. Por ello, en la Figura N° 13 se encuentra que en la medida que el parámetro q resulta infinitesimalmente cercano a 0.5, mientras σ toma valores iguales o superiores a 1, el estado estacionario del modelo presenta un proceso de indeterminación en el que existe más de un valor posible de las variables de estado que satisface las condiciones de equilibrio para los valores definidos de los parámetros fundamentales.

En concordancia con lo anterior, la búsqueda de la solución del sistema de ecuaciones lineales, ante distintos valores de los parámetros q y σ , permite identificar que cuando q toma el valor de 0.49 y σ toma por lo menos el valor de 2.4, no resulta posible determinar una solución unívoca, debido a la presencia de una dependencia lineal entre la dinámica evolutiva de las variables de estado, como lo muestra la Figura N° 14, donde la salida del programa rechaza la posibilidad de alcanzar la solución unívoca $(0,0,0)$ y establece las soluciones de la oferta laboral y del consumo con las relaciones: $L(t) = 0.0466503 K(t)$ y $C(t) = -0.857997K(t)$. Esto se traduce en la presencia de cuatro puntos de equilibrio (observables) en la vecindad más cercana del equilibrio de estado estacionario inicial determinado por el vector de ceros de dimensión 3×1 , dentro del intervalo $-1 < C(t) < 1$ y

$-1 < L(t) < 1$, por lo menos cuando la acumulación de capital tiende a perder su dinámica intertemporal (cuando el valor de $K(t)$ se aproxima a cero ($x = 0$)), como se muestra en la Figura N° 15.

Por lo anterior, el principal resultado que puede ofrecer este modelo sin la incorporación de elementos estocásticos, son las leves exigencias para la aparición de equilibrios indeterminados, pues para pequeñas restricciones de liquidez en manos del agente representativo para llevar a cabo el acto de consumo (entre 0 y 0.5), se presentan grandes posibilidades de que el equilibrio de estado estacionario presente aquel fenómeno para una amplia gama de valores de la elasticidad de consumo intertemporal. Resultado que termina por ser más factible que los hallazgos obtenidos por los trabajos pioneros en el área con modelos de crecimiento económico endógeno, donde el grado de imperfección del mercado debe tender a incrementarse para lograr la generación de este tipo de resultados complejos, como lo afirma Bosi⁹⁸. Esto muestra que la indeterminación, lejos de ser un evento atípico, puede ser un evento recurrente en los mundos aislados cuando se someten a pequeñas restricciones, lo que lleva a pensar que la obtención de una senda unívoca de previsión perfecta del futuro puede resultar imposible bajo estas condiciones y por ende, su identificación resulta pertinente para evitar problemas de incontrolabilidad, y para hacer precavida la evaluación de política económica, más aun en un contexto de inestabilidad dinámica, en el que una intervención levemente imprecisa puede desviar al sistema de su rumbo normativo.

⁹⁸Ibíd, pp.: 1-21.

CONCLUSIÓN

El objetivo del trabajo consistió en tratar de establecer límites precisos a los alcances de los modelos económicos de experimentación computacional, en términos de predictibilidad y estabilidad (cuantitativa y cualitativa), a la luz de algunos métodos y herramientas dinámicas que permiten evaluar la posible emergencia de características complejas en sistemas dinámicos no lineales, tales como la dependencia sensitiva a las condiciones de partida y procesos de inestabilidad estructural. Por ello, al llevar a cabo este análisis en un modelo dinámico de equilibrio general con rigideces monetarias y sobre el modelo neoclásico de crecimiento que lo fundamenta, se pudo establecer que, para ambos modelos, trayectorias infinitesimalmente cercanas en sus condiciones iniciales, con idénticos parámetros estructurales, tienden a divergir a ritmos exponenciales en el tiempo. Mientras que, en el modelo DEG, bajo distintos puntos del diagrama paramétrico (q, σ) , trayectorias con una misma condición de partida no se mantienen en espacios de fases cualitativamente equivalentes.

En coherencia con lo mencionado, es posible afirmar que el desempeño evolutivo de los modelos dinámicos no es consistente ante distintos niveles de precisión en sus condiciones de partida, es decir, su forma determinística de ver el mundo, expresada en sus ecuaciones de movimiento, no termina por constituir una teoría determinística, tal como lo plantea Popper⁹⁹ (ver Tabla N^o-3). Esto indica que no resulta posible una predicción aproximadamente exacta del rumbo del sistema para largos periodos de tiempo pues, dada la sensibilidad del desempeño del modelo a la exactitud de sus condiciones iniciales, tal como lo afirma Day¹⁰⁰, errores de redondeo en la determinación de los estados de partida pueden provocar una rápida divergencia de la senda de solución del modelo computado. Lo anterior puede ser evidenciado por el exponente de Lyapunov obtenido en los

⁹⁹ POPPER, K. Citado por LORENZ, H. The open Universe. London: Hutchinson, 1982.

¹⁰⁰ DAY, Richard H. Irregular Growth Cycles. En: The American Economic Review, Vol. 72, No. 3 (Jun., 1982), pp.:406-414.

ejercicios planteados, pues sendas de evolución inicialmente cercanas tienden a divergir a tasas exponenciales en cuanto se restringe la precisión inicial de alguna de sus variables de estado, haciendo que, si se asume una coherencia de los resultados de la estática comparativa y la dinámica de transición, la información veraz que puede conocerse de sus estados futuros se reduzca de forma progresiva.

Lo anterior provoca que el resultado del determinismo científico asociado al sendero de crecimiento equilibrado, que establece la convergencia normativa hacia un estado estacionario unívoco, no sea robusto ante distintos niveles de precisión. Es decir, en términos ideales, el tránsito por la senda de equilibrio resulta inevitable dentro de un ejercicio de optimización, pero la imposibilidad práctica de dotar a los modelos con información completa y perfecta terminaría por exponerlos al surgimiento de propiedades complejas, que en última instancia, desembocan en una pérdida inevitable de predictibilidad. Por lo anterior, se hace difícil aceptar los resultados predictivos para periodos largos tiempo si, durante el uso de estas estructuras en investigaciones empíricas, los agentes involucrados con una capacidad de cálculo infinitamente poderosa catalogan la información que se les provee como perfecta y completa, pues pequeñas limitaciones que presenten los instrumentos utilizados por los investigadores empíricos para ajustar el comportamiento de los modelo a la métrica de la realidad económica, provocarían la identificación de la dinámica evolutiva de una economía distinta a la que se tiene por objetivo.

Esto último permite postular que aquel indeterminismo práctico presente en ambos modelos dinámicos puede ser debido al equilibrio de silla de montar que caracteriza el comportamiento de todas las posibles rutas de movimiento que ambos pueden seguir. Este tipo de espacio de fases no sólo se caracteriza por presentar senderos estables e inestables, tal que las órbitas que se sitúan sobre los primeros (segundos) van a tender a converger (divergir) al (del) equilibrio dinámico, sino que resulta sensible a la variación en la exactitud de las condiciones de partida. Esto último llevó a

Oxley¹⁰¹ a afirmar que, en un modelo con aquella característica, la convergencia resulta no ser robusta en comparación al de los movimientos divergentes, pues la primera no se mantiene ante pequeñas variaciones en los supuestos subyacentes (precisión infinita) y presenta probabilidad cero de ocurrencia en un océano de órbitas inestables, por lo cual insiste que aquel problema sólo puede evitarse en un escenario en el que se establezcan supuestos auxiliares, como la condición de transversalidad, para asegurar el comportamiento robusto. Entre estos supuestos se encuentra la condición de transversalidad que permite establecer el punto de equilibrio óptimo del modelo y la trayectoria de crecimiento equilibrado que permite alcanzarlo, sin embargo, su cuestionada factibilidad empírica, la inestabilidad dinámica y la falta de robustez de la senda de convergencia pueden hacer que el equilibrio dinámico resulte inaccesible en la práctica, tal como se mostró en el documento.

Por otro lado, los problemas de indeterminación del equilibrio dinámico pueden presentarse en el modelo DEG a la RCK que incorpora una restricción de liquidez, dado que aquella limitación obstaculiza la libertad que tienen los agentes para arbitrar entre consumo presente y futuro, permitiendo la aparición de un conjunto de trayectorias y puntos de equilibrio a los que el sistema puede converger bajo una misma condición inicial de oferta de trabajo, y para una región amplia de valores del espacio paramétrico (q, σ) . Por ello, en un contexto de expectativas racionales, en el que las predicciones (medias) de mayor probabilidad a lo largo del tiempo son equivalentes a las mejores predicción en un contexto de total certeza¹⁰², puede que sea posible encontrar múltiples sendas que convergen en distintos estados estacionarios, donde un elemento externo es el único que puede determinar el rumbo de las elecciones óptimas y el equilibrio que se tiende a alcanzar. Lo

¹⁰¹ OXLEY, LES. Economics in the Edge of Chaos: How does economics deal with complexity and the implications for systems management. 2004. (En línea) Disponible en <http://www.iemss.org/iemss2004/pdf/keynotes/Keynote_OXLEY.pdf>

¹⁰² LUCAS, Robert E., Jr. y PRESCOTT, Edward C. Investment Under Uncertainty. En: *Econometrica*, Vol. 39, No. 5 (Sep., 1971), pp.: 659-681.

anterior sugiere, como lo establece Kehoe¹⁰³, una posible incompletitud del modelo para ser autosuficiente en la determinación de su evolución futura y la imposibilidad de realizar ejercicios de estática comparativa. Esto indica que las inestabilidades analizadas, tanto dinámica como estructural, terminan por afectar la posibilidad de predicción adecuada, en términos de precisión y posición, de los modelos dinámicos no lineales que presenten estas características.

Además de lo anterior, puede decirse que lo encontrado puede ser más que un evento atípico si estos modelos pueden representar el funcionamiento del sistema económico en un determinado contexto económico y político, pues no sólo se requieren pequeñas perturbaciones factibles de liquidez a la estructura del modelo DEG para generar aquel tipo de fenómenos dinámicos estructurales mencionados sino que, en coherencia con lo planteado por Carrasquilla¹⁰⁴ en 1999, un mismo valor de una variable instrumental de política económica puede ser coherente con distintos resultados macroeconómicos¹⁰⁵.

Por último, y por lo expuesto anteriormente, es posible afirmar que la ausencia de un análisis epistemológico formal de estos modelos DEG puede resultar peligroso al evaluar mecanismos de control o de política económica, pues la presencia de errores de precisión en su implementación y/o la incertidumbre sobre la respuesta del modelo ante un impulso de control externo, en condiciones de indeterminación del equilibrio de largo plazo, pueden propiciar la aparición de resultados radicalmente distintos a los planeados y esperados en su aplicación práctica. Es decir, se deben analizar sus propiedades inherentes debido a que la característica dinámica en la modelación económica puede no ser coherente a las capacidades limitadas de la estática comparativa, donde se elimina la dinámica de transición entre estados estacionarios y se supone el cambio sin obstáculos

¹⁰³ KEHOE, Timothy J. Modelos Dinámicos de Equilibrio General. En: Cuadernos Económicos de Información Comercial Española. Vol. 3 (1987), pp.: 95-126.

¹⁰⁴ CARRASQUILLA, Alberto y SUESCÚN, Rodrigo. Sobre el objetivo intermedio de la política monetaria en Colombia. Estabilidad y Gradualismo. Tercer Mundo Editores. 1999.

¹⁰⁵ En el texto mencionado se halla que un mismo nivel de la tasa de intervención del Banco de la República es coherente con un conjunto de inflaciones esperadas en la economía colombiana de la década del noventa.

entre uno y otro; pues, como lo permiten observar las herramientas utilizadas de la dinámica compleja y caos determinista, es en aquel tránsito donde se exhiben los procesos de inestabilidad que pueden explicar sus desempeños predictivos en la realidad, tal como lo hacen en los mundos artificiales. Esto hace justificable la atención prestada a la complejidad dentro de la ciencia económica como forma de confrontar el predominante determinismo reduccionista, que además de sucumbir al placer estético de la simplicidad, tiende a omitir el análisis epistemológico de la complejidad dinámica de sus propias herramientas de trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

BARNETT, William A., SERLETIS, Apostolos y SERLETIS, Demitre. Nonlinear and complex dynamics in economics. *Macroeconomic Dynamics*, 2003, p. 1-31.

BAUMOL, William y BENHABIB, Jess. Caos: Importancia, el Mecanismo y Aplicaciones Económicas. En: *El Journal of Economic Perspectives*. Vol.3, No.1 (1989); pp.: 77-105.

BENHABIB, J. y FARMER, Roger. Indeterminacy and increasing returns. En: *Journal of Economic Theory*. Vol. 63 (1994); pp.:19-41.

BENHABIB, J. y FARMER, R. Indeterminacy and sector specific externalities. En: *Journal of Monetary Economics*. Vol. 37 (1996); pp.: 421-443.

BENHABIB, J. y NISHIMURA, KNishimura. Indeterminacy and sunspots with constant returns. En: *Journal of Economic Theory*. Vol. 81 (1998), pp.: 58-96.

BERTALANFFY, Ludwig Von. *Teoría general de sistemas*. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 1976, 312p.

BOCCALETTI, S., et al. The synchronization of chaotic systems. En: *Physics Reports*. Vol.366 (2002); pp.:1- 101(en línea).

BOSI, Stefano, et al. Animal Spirits with Arbitrarily Small Market Imperfection. 2002. (En línea) Disponible en < <http://t2m.univ-paris1.fr/fr/activites/attach/swp0000.pdf> >

BRIEVA, Eduardo. Caos en sistemas dinámicos. En: Terceras Jornadas Nacionales de Ingeniería Electromecánica, las tecnologías modernas de productividad [en línea]. (1993). Disponible en < <http://dis.unal.edu.co/~gjhernandezp/sim/lectures/DeterministicModelsAndChaos/CaosenSistemasDinamicos.pdf> >

BUNGE, Mario. Problemas filosóficos generales dentro de las Ciencias Sociales. En: *Buscar la filosofía en las ciencias sociales*. México: Siglo XXI editores, 1999, 337-380 p.

CARRASQUILLA, Alberto y SUESCÚN, Rodrigo. Sobre el objetivo intermedio de la política monetaria en Colombia. *Estabilidad y Gradualismo*. Tercer Mundo Editores. 1999.

CASS, David. Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation. En: *The Review of Economic Studies*. Vol. 32, No. 3 (Julio, 1965); pp.: 233-240.

COURNOT, Augustin. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. Citado por FRIEDMAN, Milton. Leon Walras and his Economic System. En: *The American Economic Review*. Vol. 45, No. 5 (Dic., 1995); pp.: 900-909.

DALY, H. E. *Steady-state economics*. London EarthscanPublications Ltd. 1992.

DAY, Richard H. Irregular Growth Cycles. En: *The American Economic Review*, Vol. 72, No. 3 (Jun., 1982), pp.:406-414.

DUBEIBE, F. L. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica. En: Revista Colombiana de Física, Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación, Escuela de Pedagogía y Bellas Artes, Universidad de los Llanos. Vol. 45, No.1 (2003), 152 p.

ESCOT Mangas, Lorenzo. *Dinámica económica caótica: una aplicación al estudio del ciclo y el crecimiento económico*. Madrid, 2003, 451p. Tesis (Doctorado en Política Económica). Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Departamento de Economía Aplicada III.

FEBRERO, Ramón. Lucas y el galardón a las expectativas racionales: una nota. 1995. (En línea) Disponible en <<http://eprints.ucm.es/26507/1/9515.pdf>>

FEICHTINGER, G. y SORGER, G. Optimal oscillations in Control Models: How Can Constant Demand Lead to Cyclical Production? En: *Operations Research Letters*. Vol.5, pp.: 277-81.

FEICHTINGER, G., et al. Stable resource-employment limit cycles in an optimally regulated fishery. En: *Dynamic Economic Models and Optimal Control*, (Amsterdam, 1992).

FERNÁNDEZ Díaz, Andrés. *Dinámica caótica en economía*. Madrid: McGraw-Hill, Interamericana de España. 2002, 264 p.

FERNANDEZ, Esther y RUIZ Jesús. Indeterminación y función de utilidad no separable en consumo público y ocio. En: *Documentos de Trabajo de ICAE, Universidad Complutense de Madrid*. No. 0108, 2001, pp.: 1-18. (En línea). Disponible en <<http://eprints.ucm.es/6792/1/0108.pdf>>

FRIEDMAN, Milton. *La Metodología de la Economía Positiva: Ensayos sobre Economía Positiva*. Madrid: Ed. Gedos S. A. 1962, p.:10.

_____. Leon Walras and his Economic System. En: *The American Economic Review*. Vol. 45, No. 5 (Diciembre, 1995); pp.: 900-909.

FRISCH, Ragnar. Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics. Citado por KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. *The econometrics of the general equilibrium approach to business cycles*, 1990. (En línea) Disponible en <<https://www.minneapolisfed.org/research/sr/sr130.pdf>>

GARRIDO, Santiago. *Identificación, Estimación y Control de Sistemas No-lineales mediante RGO*. Madrid, 1999, 9-171 p. Tesis (Ingeniero de Sistemas y Automática). Universidad Carlos III Madrid. Facultad de Ingenierías, Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática.

HALL, N., *Exploring Chaos, A guide to the New Science of Disorder*. W.W. Norton & Company, 1991.

HEISEMBER, Werner. Principio de incertidumbre, 1927. Citado por ECHEVERRY, Luis Alfredo. *La Teoría del Caos y los Sistemas Dinámicos*. En: *Revista Ingenierías*, No. 6 (2000); pp.: 109-122.

HODRICK, Robert J. y Prescott Edward C. Postwar U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation. En: Journal of Money, Credit and Banking. Vol. 29, No. 1 (Febrero, 1997), pp.: 1-16.

JOHANSEN B, Oscar. Introducción a la Teoría General de Sistemas. México: Editorial Limusa S.A., grupo Noriega Editores, 1993, pp.: 13- 71.

KEHOE, Timothy J. Modelos Dinámicos de Equilibrio General. En: Cuadernos Económicos de Información Comercial Española. Vol. 3 (1987), pp.: 95-126.

KOOPMANS, Tjalling C. On the concept of optimal economic growth. 1965, 75 p. (En línea). Disponible en < <https://classes.soe.ucsc.edu/ams290/Fall2008/Koopmans%201965.pdf>>

KYDLAND, F. y PRESCOTT, E. Time to build and aggregate fluctuations. En: Econometrica, Journal of the Econometric Society, 1982. Vol. 50, pp. 1345-1370.

_____. The Computational Experiment: An Econometric Tool. En: Journal of Economic Perspectives. Vol. 10, No. 1 (1996); p.: 74.

LAPLACE, P.S. Philosophical Essays on Probabilities. Citado por MORALES, Daniel A. Determinismo, indeterminismo y la flecha del tiempo en la ciencia contemporánea. En: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. 11, No. 2 (2004); p. 213- 232.

LORENZ, Edward. La esencia del caos. Madrid: Editorial Debate S. A., 1995.

LORENZ, Hans W. Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. Berlin: Springer, 1993, 219 p.

LUCAS, Robert E., Jr. y PRESCOTT, Edward C. Investment Under Uncertainty. En: Econometrica, Vol. 39, No. 5 (Sep., 1971), pp. 659-681.

LUCAS, Robert Jr. Econometric policy evaluation: a critique. En: Carnegie-Rochester Serie Conferencia de Política Pública. Vol. 1, (Enero, 1976); pp.: 19-46.

_____. Methods and problems in business cycle theory. En: Journal of Money, Credit and banking. Vol. 12, No. 4, Part. 2, (Noviembre, 1980); p. 696-715.

LUCAS, Robert. Jr. y SARGENT Thomas. Rational Expectations and Econometric Practice. EE.UU: University of Minnesota Press, 1981, pp: 12-40.

LUCAS, Robert. Jr. What Economists do. Manuscrito inédito de la Universidad de Chicago, (diciembre 9, 1988).

MOURONTE L., Mary Luz. Caracterización y Análisis de Sistemas Dinámicos No Lineales Mediante el Estudio Del Mapa de Frecuencias y Espacio de Fases. Madrid, 2004, 180 p. Tesis. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos.

OXLEY, LES. Economics in the Edge of Chaos: How does economics deal with complexity and the implications for systems management. 2004. (En línea) Disponible en <http://www.iemss.org/iemss2004/pdf/keynotes/Keynote_OXLEY.pdf>

PERLI, R. Indeterminacy, home production and the business cycle. En: Journal of Monetary Economics. Vol. 41 (1998); pp.: 105-125.

POINCARÉ H. The Value of Science. Citado por BRAUN, Eliezer. Caos, fractales y cosas raras. España: Fondo de Cultura Económica de España, 2003. 156 p.

POPPER, K. Citado por LORENZ, H. The open Universe. London: Hutchinson, 1982.

RAMSEY, F. A Mathematical Theory of Saving. En: The Economic Journal. Vol. 38, No. 152 (Diciembre, 1928), pp.: 543-559.

ROMER, David. Macroeconomía avanzada (3 Ed.) Estados Unidos: McGraw-Hill, 2006, pp.:600.

SLOBODYAN, Sergey. Indeterminacy and Stability in a Modified Romer Model: a General Case. En: CERGE-EI Working Paper Series. No. 284. (Enero, 2006).

SOLOW, Robert M. A contribution to the theory of economic growth. The Quarterly Journal of Economics, 1956, p. 65-94.

SORIN, Vlad, PASCU, Paul y MORARIU, Nicole. Chaos Models in Economics. En: Journal of Computing. Vol. 2, No. 1 (Enero, 2010); pp.: 79-83.

TORRES, José. Introducción al Equilibrio General Dinámico Macroeconómico. Departamento de Teoría de Historia Económica. Universidad de Málaga, 2009, 323 p.

UBEIBE, F. L. Cálculo del máximo exponente de Lyapunov con Mathematica .En: Revista Colombiana de Física. Vol. 45, No. 1, (2013).

VIALAR, Thierry. Complex and Chaotic Nonlinear Dynamics: Advances in Economics and Finance, Mathematics and Statistics. 2009, pp.:569-580.

VÍLCHEZ L., Luisa, VELASCO M., Francisco y GARCÍA del Hoyo, Juan. Análisis de la estabilidad y de bifurcaciones en un modelo dinámico aplicado a la gestión de una pesquería. En: Computación y Sistemas, México. (En línea). Vol.6, No. 4 (Abril – Junio, 2003). Disponible en <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1405-55462003000200004&script=sci_arttext>

WALRAS, León. Elementos de economía política pura: o teoría de la riqueza social. Madrid: Alianza Editorial, 1987, pp.: 139-253.

WONG, Stanley. La “F-Twist” y la Metodología de Paul Samuelson. En: The American Economic Review. Vol. 63, No. 3 (Junio, 1973); pp.: 312 – 325.

ZULUAGA, Blanca; RAFFO, Leonardo. Optimización Dinámica y Modelos de Crecimiento con Consumo óptimo: Ramsey-Cass-Koopmans. En: Apuntes de Economía. No. 11 (Noviembre, 2008).

ANEXOS

ECUACIONES

Anexo 1:

$$1.1 \quad \int_{t=0}^{\infty} C(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{K(0)}{H} e^{R(t)} + \int_{t=0}^{\infty} W(t) \frac{L(t)}{H} dt$$

$$1.2 \quad C(t) = A(t)c(t), W(t) = A(t)w(t)$$

$$1.3 \quad \int_{t=0}^{\infty} c(t)A(t) \frac{L(t)}{H} \leq \frac{K(0)}{H} e^{R(t)} + \int_{t=0}^{\infty} w(t) A(t) \frac{L(t)}{H}$$

$$1.4 \quad \int_{t=0}^{\infty} c(t)A(t)L(t) \leq K(0)e^{R(t)} + \int_{t=0}^{\infty} w(t) A(t)L(t)$$

$$1.5 \quad A(t)L(t) = A(0)L(0)e^{(n+g)t}$$

$$1.6 \quad K(0) = k(0)A(0)L(0)$$

$$1.7 \quad \int_{t=0}^{\infty} A(0)L(0)e^{(n+g)t}c(t) \leq k(0)A(0)L(0)e^{R(t)} + \int_{t=0}^{\infty} A(0)L(0)e^{(n+g)t}w(t)$$

$$1.8 \quad \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}e^{(n+g)t}c(t) \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}e^{(n+g)t}w(t)$$

$$1.9 \quad 0 \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}e^{(n+g)t}w(t) - \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}e^{(n+g)t}c(t)$$

$$1.10 \quad 0 \leq k(0) + \int_{t=0}^{\infty} e^{-R(t)}e^{(n+g)t}k(t)$$

$$1.11 \quad \lim_{z \rightarrow \infty} e^{-R(z)}e^{(n+g)z}k(z) \geq 0$$

Anexo 2:

$$2.1 \quad u(C(t)) = \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{(A(t)c(t))^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$2.2 \quad \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{(A(0)e^{gt}c(t))^{1-\theta}}{1-\theta}$$

$$2.3 \quad \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} = \frac{(A(0)^{1-\theta} e^{g(1-\theta)t} c(t)^{1-\theta})}{1-\theta}$$

$$2.4 \quad V = \int_{t=0}^{\infty} e^{-pt} \frac{(A(0)^{1-\theta} e^{g(1-\theta)t} c(t)^{1-\theta})}{1-\theta} \frac{L(0)e^{nt}}{H} dt$$

$$2.5 \quad V = A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H} \int_{t=0}^{\infty} \frac{(e^{-(p-g(1-\theta)-n)t} c(t)^{1-\theta})}{1-\theta} dt, \quad p - g(1 - \theta) - n \geq 0$$

Anexo 3:

$$3.1 \quad \text{Max } \Pi(t): F(K(t), L(t)) - G(K(t), L(t))$$

$$3.2 \quad \frac{d\Pi(t)}{dK(t)} = \alpha A(t) K(t)^{\alpha-1} L(t)^{1-\alpha} - Y(t) = 0$$

$$3.3 \quad \frac{d\Pi(t)}{dL(t)} = (1 - \alpha) A(t) K(t)^{\alpha} L(t)^{-\alpha} - W(t) = 0$$

$$3.4 \quad W(t) = A(t) w(t)$$

$$3.5 \quad Y(t) = A(t) r(t)$$

$$3.6 \quad \frac{d\Pi(t)}{dK(t)} = \alpha k(t)^{\alpha-1} - r(t) = 0$$

$$3.7 \quad \frac{d\Pi(t)}{dL(t)} = (1 - \alpha) k(t)^{\alpha} - w(t) = 0$$

Anexo 4:

$$4.1 \quad Y^O(t) = A(t) K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha}$$

$$4.2 \quad Y^d(t) = C(t) + I(t)$$

$$4.3 \quad I(t) = K\dot{(t)}$$

$$4.4 \quad A(t) K(t)^{\alpha} L(t)^{1-\alpha} = C(t) + K\dot{(t)}, \text{ dada la condición de equilibrio } Y^O(t) = Y^d(t)$$

$$4.5 \quad k(t)^{\alpha} = c(t) + \frac{K\dot{(t)}}{A(t)L(t)}$$

$$4.6 \quad k\dot{(t)} = \frac{d \frac{K(t)}{A(t)L(t)}}{dt} = \frac{K\dot{(t)}A(t)L(t) - (A\dot{(t)}L(t) + A(t)L\dot{(t)})K(t)}{(A(t)L(t))^2}$$

$$4.7 \quad k\dot{(t)} = \frac{K\dot{(t)}}{A(t)L(t)} - \left(\frac{A\dot{(t)}}{A(t)} + \frac{L\dot{(t)}}{L(t)} \right) \frac{K(t)}{A(t)L(t)}$$

$$4.8 \quad \frac{K\dot{(t)}}{A(t)L(t)} = k\dot{(t)} + (n + g)k(t)$$

$$4.9 \quad \dot{k}(t) = k(t)^\alpha - c(t) - (n + g)k(t)$$

Anexo 5:

$$5.1 \quad \frac{dL}{dc(t)} = B e^{-\beta t} c(t)^{-\theta} - \lambda e^{-R(t)+(n+g)t} = 0$$

$$5.2 \quad B e^{-\beta t} c(t)^{-\theta} = \lambda e^{-R(t)+(n+g)t}$$

$$5.3 \quad \ln(B) - \beta t - \theta \ln(c(t)) = \ln(\lambda) + (n + g)t - R(t)$$

$$5.4 \quad dt \rightarrow \ln(B) - \beta t - \theta \ln(c(t)) = \ln(\lambda) + (n + g)t - R(t)$$

$$5.5 \quad -\beta - \theta \frac{c'(t)}{c(t)} = (n + g) - R'(t)$$

$$5.6 \quad R'(t) = r(t) = f'(k(t)), \quad R(t) = \int_0^t r(t) dt$$

$$5.7 \quad \frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \beta - (n+g)}{\theta}$$

Anexo 6:

El consumo en su estado estacionario: $\dot{c}(t) = 0$

$$6.1 \quad c(t) \frac{(\alpha k(t)^{\alpha-1} - p - g\theta)}{\theta} = 0$$

$$6.2 \quad (\alpha k(t)^{\alpha-1} - p - g\theta) = 0$$

$$6.3 \quad k^* = \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

La acumulación de capital en su estado estacionario: $\dot{k}(t) = 0$

$$6.4 \quad c(t) = k(t)^\alpha - (n + g)k(t)$$

En ausencia de movimiento, Estado Estacionario ($\dot{c}(t) = 0, \dot{k}(t) = 0$)

$$6.6 \quad c^* = \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n + g) \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$6.7 \quad k^* = \left(\frac{p+g\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

Anexo 7:

$$7.1 \quad \dot{Y} = JY$$

$$7.2 \quad \begin{bmatrix} \dot{c}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} c(t) \\ k(t) \end{bmatrix}$$

$$7.3 \quad J = \begin{bmatrix} a_{11} = \frac{dc(t)}{dc(t)} & a_{12} = \frac{dc(t)}{dk(t)} \\ a_{21} = \frac{dk(t)}{dc(t)} & a_{22} = \frac{dk(t)}{dk(t)} \end{bmatrix}$$

Anexo 8:

$$8.1 \quad \dot{c}(t) = a_{11}c(t) + a_{12}k(t)$$

$$8.2 \quad \dot{k}(t) = a_{21}c(t) + a_{22}k(t)$$

$$8.3 \quad \dot{c}(t) = \psi \dot{k}(t)$$

$$8.4 \quad c(t) = k(t) \frac{(\psi a_{22} - a_{12})}{(a_{11} - \psi a_{21})}$$

Anexo 9:

$$9.1 \quad \frac{d\mathcal{L}}{dc_t} = \beta^t C_t^{-\frac{1}{\sigma}} - \beta^t (\lambda_t p_t - v_t q p_t) = 0$$

$$9.2 \quad C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = p_t (\lambda_t + q v_t)$$

$$9.3 \quad \frac{d\mathcal{L}}{dL_t} = -\beta^t L_t^\chi + \beta^t \lambda_t p_t w_t = 0$$

$$9.4 \quad L_t^\chi = p_t \lambda_t w_t$$

$$9.5 \quad \frac{d\mathcal{L}}{dK_{t+1}} = -\beta^t \lambda_t p_t + \beta^{t+1} (\lambda_{t+1} (1 - \delta) p_{t+1} + \lambda_{t+1} p_{t+1} r_{t+1}) = 0$$

$$9.6 \quad \lambda_t = \frac{1}{p_t} \beta (p_{t+1} \lambda_{t+1} R_{t+1}), \text{ tal que } R_{t+1} = r_{t+1} + (1 - \delta)$$

$$9.7 \quad \lambda_t = \beta(\pi_{t+1}\lambda_{t+1}R_{t+1}), \text{ tal que } \pi_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t}$$

$$9.8 \quad \frac{d\mathcal{L}}{dM_{t+1}} = -\beta^t\lambda_t + \beta^{t+1}(\lambda_{t+1} + v_{t+1}) = 0$$

$$9.9 \quad \lambda_t = \beta(\lambda_{t+1} + v_{t+1})$$

$$9.10 \quad \frac{1}{\beta}\lambda_t - \lambda_{t+1} = v_{t+1}$$

Anexo 10:

$$10.1 \quad C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = p_t(\lambda_t + qv_t)$$

$$10.2 \quad \frac{1}{p_{t-1}}C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \pi_t(\lambda_t + qv_t)$$

$$10.3 \quad \frac{1}{p_{t-1}}C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \pi_t\left(\frac{q}{\beta}\lambda_{t-1} + \lambda_t(1-q)\right), \text{ dado que } \frac{1}{\beta}\lambda_{t-1} - \lambda_t = v_t$$

$$10.4 \quad \frac{1}{p_{t-1}}C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \pi_t\frac{q}{\beta}\lambda_{t-1} + \pi_t\lambda_t(1-q)$$

$$10.5 \quad \frac{1}{p_{t-1}}C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \pi_t\frac{q}{\beta}\lambda_{t-1} + \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{t-1}}{R_t}(1-q), \text{ dado que } \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{t-1}}{R_t} = (\pi_t\lambda_t)$$

$$10.6 \quad \frac{1}{p_{t-1}}C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\beta}\lambda_{t-1}\left(\pi_t q + \frac{(1-q)}{R_t}\right)$$

$$10.7 \quad \frac{1}{p_{t-1}}C_t^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\beta}\lambda_{t-1}\left(\frac{R_t\pi_t q + (1-q)}{R_t}\right), \forall t$$

$$10.8 \quad \frac{1}{p_t}C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\beta}\lambda_t\left(\frac{R_{t+1}\pi_{t+1}q + (1-q)}{R_{t+1}}\right)$$

$$10.9 \quad \pi_t \frac{C_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\lambda_{t-1}\left(\frac{R_t\pi_t q + (1-q)}{R_t}\right)}{\lambda_t\left(\frac{R_{t+1}\pi_{t+1}q + (1-q)}{R_{t+1}}\right)}$$

$$10.10 \quad \pi_t \frac{C_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\lambda_{t-1} R_{t+1}}{\lambda_t R_t} \frac{(R_t \pi_t q + (1-q))}{(R_{t+1} \pi_{t+1} q + (1-q))}$$

$$10.11 \quad \frac{C_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \frac{1}{\pi_t} \frac{\lambda_{t-1} R_{t+1}}{\lambda_t R_t} \frac{1}{R_{t+1}} \frac{(R_t \pi_t q + (1-q))}{(q \pi_{t+1} + (1-q) R_{t+1}^{-1})}$$

$$10.12 \quad \frac{C_t^{-\frac{1}{\sigma}}}{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}}} = \beta \frac{(R_t \pi_t q + (1-q))}{(q \pi_{t+1} + (1-q) R_{t+1}^{-1})}$$

Anexo 11:

$$11.1 \quad \frac{d\Pi_t}{dK_t} = \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - r_t = 0$$

$$11.2 \quad \frac{d\Pi_t}{dL_t} = (1-\alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha} - w_t = 0$$

$$11.3 \quad \frac{L_{t+1}^X}{L_t^X} = \frac{1}{R_{t+1}} \frac{w_{t+1}}{w_t} \Rightarrow \frac{L_{t+1}^X}{L_t^X} = \frac{1}{R_{t+1}} \frac{(1-\alpha) K_{t+1}^\alpha L_{t+1}^{-\alpha}}{(1-\alpha) K_t^\alpha L_t^{-\alpha}}$$

$$11.4 \quad \frac{K_t^\alpha L_t^{-\alpha}}{L_t^X} = \frac{1}{R_{t+1}} \frac{K_{t+1}^\alpha L_{t+1}^{-\alpha}}{L_{t+1}^X}$$

Anexo 12:

$$12.1 \quad \pi_{t+1} = \mu \frac{m_t}{m_{t+1}}, \quad q p_t C_t \leq M_t \wedge q C_t \leq m_t$$

$$12.2 \quad m_{t+1} \pi_{t+1} = \mu m_t$$

$$12.3 \quad m_{t+1} \pi_{t+1} = \mu q C_t$$

$$12.4 \quad q C_{t+1} \pi_{t+1} = \mu q C_t$$

$$12.5 \quad C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{1}{\beta} p_t \lambda_t \left(\frac{R_{t+1} \pi_{t+1} q + (1-q)}{R_{t+1}} \right)$$

$$12.6 \quad C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} = p_{t+1} \lambda_{t+1} R_{t+1} \left(\frac{R_{t+1} \pi_{t+1} q + (1-q)}{R_{t+1}} \right), \text{ donde } \frac{1}{\beta} p_t \lambda_t = (p_{t+1} \lambda_{t+1} R_{t+1})$$

$$12.7 \quad C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} = \frac{(R_{t+1}\pi_{t+1}q + (1-q))}{w_{t+1}L_{t+1}^{-\chi}}, \text{ donde } L_{t+1}^{\chi} = p_{t+1}\lambda_{t+1}w_{t+1}$$

$$12.8 \quad C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} \left((1-\alpha)K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} \right) = R_{t+1} \frac{\mu q C_t}{C_{t+1}} + (1-q)$$

$$12.9 \quad \mu q C_t = \left(\frac{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} \left((1-\alpha)K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} \right) - (1-q)}{R_{t+1}} \right) C_{t+1}$$

Anexo 13:

$$13.1 \quad Y_t^o = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$$

$$13.2 \quad Y_t^d = C_t + I_t$$

$$13.3 \quad I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t$$

$$13.4 \quad Y_t^o = Y_t^d$$

$$13.5 \quad K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t + (1-\delta)K_t = K_{t+1}$$

Anexo 14:

La ecuación (34) en su estado estacionario:

$$14.1 \quad K^{\alpha} L^{1-\alpha} - C + (1-\delta)K = K$$

$$14.2 \quad K^{\alpha} L^{1-\alpha} - \delta K = C$$

La ecuación (35) en su estado estacionario:

$$14.3 \quad K^{\alpha} L^{-(\alpha+\chi)} = \frac{K^{\alpha} L^{-(\alpha+\chi)}}{\beta((1-\delta) + \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha})}$$

$$14.4 \quad 1 = \beta((1-\delta) + \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha})$$

La ecuación (36) en su estado estacionario:

$$14.5 \quad \mu q \beta^{-1} + (1-q) = C^{-\frac{1}{\sigma}} (1-\alpha) K^{\alpha} L^{-(\alpha+\chi)}$$

$$14.6 \quad \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \beta^{-1} - 1 + \delta, \text{ a partir de 14.4}$$

$$14.7 \quad \frac{\beta^{-1} - 1 + \delta}{\alpha} - \delta = \frac{C}{K}, \text{ a partir de 14.1 y 14.6}$$

$$14.8 \quad \left(\frac{\theta}{\alpha} - \delta\right)K = C$$

$$14.9 \quad \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \theta$$

$$14.10 \quad L = \left(\left(\frac{\theta}{\alpha}\right) K^{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$14.11 \quad L = \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K$$

$$14.12 \quad \mu q \beta^{-1} + (1 - q) = \left(\left(\frac{\theta}{\alpha} - \delta\right) K\right)^{-\frac{1}{\sigma}} (1 - \alpha) K^{\alpha} \left(\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} K\right)^{-(\alpha+\chi)}$$

$$14.13 \quad K = \left(\frac{1}{1-\alpha} (1 - q + q \frac{\mu}{\beta}) \left(\frac{\theta}{\alpha} - \delta\right)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha+\chi}{1-\alpha}}\right)^{\frac{-1}{\chi+\frac{1}{\sigma}}}$$

Anexo 15:

$$15.1 \quad A_1 Y(t+1) = A_2 Y(t)$$

$$15.2 \quad Y_1 \Rightarrow K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - C_t + (1 - \delta)K_t = K_{t+1}$$

$$15.3 \quad Y_2 \rightarrow K_t^{\alpha} L_t^{-(\alpha+\chi)} = \frac{K_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha})}$$

$$15.4 \quad Y_3 \rightarrow \mu q C_t = \left(\frac{C_{t+1}^{-\frac{1}{\sigma}} ((1-\alpha) K_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)})^{-(1-q)}}{R_{t+1}}\right) C_{t+1}$$

$$15.5 \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dY(t+1)_1}{dK} & \frac{dY(t+1)_1}{dL} & \frac{dY(t+1)_1}{dC} \\ \frac{dY(t+1)_2}{dK} & \frac{dY(t+1)_2}{dL} & \frac{dY(t+1)_2}{dC} \\ \frac{dY(t+1)_3}{dK} & \frac{dY(t+1)_3}{dL} & \frac{dY(t+1)_3}{dC} \end{bmatrix}$$

$$15.6 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dK} = \frac{\alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} \beta \left((1-\delta) + \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right) - K_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} \beta \alpha (\alpha-1) L_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-2}}{\beta \left((1-\delta) + \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right)^2}$$

$$15.7 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dK} = \frac{\beta \alpha (1-\delta) K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} + \beta \alpha^2 K_{t+1}^{2(\alpha-1)} L_{t+1}^{-2\alpha-\chi+1} - \beta \alpha (\alpha-1) K_{t+1}^{\alpha} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} L_{t+1}^{1-\alpha} K_{t+1}^{\alpha-2}}{\beta \left((1-\delta) + \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right)^2}$$

$$15.8 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dK} = \frac{\beta \alpha \left((1-\delta) K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} + \alpha K_{t+1}^{2(\alpha-1)} L_{t+1}^{-2\alpha-\chi+1} - (\alpha-1) K_{t+1}^{2(\alpha-1)} L_{t+1}^{-2\alpha-\chi+1} \right)}{\beta \left((1-\delta) + \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right)^2}$$

$$15.9 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dK} = \frac{\beta \alpha \left(K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} - \delta K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)} + \alpha K_{t+1}^{2(\alpha-1)} L_{t+1}^{-2\alpha-\chi+1} - \alpha K_{t+1}^{2(\alpha-1)} L_{t+1}^{-2\alpha-\chi+1} + K_{t+1}^{2(\alpha-1)} L_{t+1}^{-2\alpha-\chi+1} \right)}{\beta \left((1-\delta) + \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} L_{t+1}^{1-\alpha} \right)^2}$$

$$15.10 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dK} = \frac{\beta\alpha(((1-\delta)+L_{t+1}^{1-\alpha}K_{t+1}^{\alpha-1})K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)})}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.11 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dK} = \frac{\alpha((1-\delta)+L_{t+1}^{1-\alpha}K_{t+1}^{\alpha-1})K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.12 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dL} = \frac{-(\alpha+\chi)K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi+1)}\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}-K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)})\beta\alpha(1-\alpha)K_{t+1}^{\alpha-1}(1-\alpha)L_{t+1}^{-\alpha}}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.13 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dL} = \frac{-(\alpha+\chi)\beta(1-\delta)K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi+1)}-\beta\alpha(\alpha+\chi)K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-\alpha}K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi+1)}-\beta\alpha(1-\alpha)K_{t+1}^{\alpha}K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}L_{t+1}^{-\alpha}}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.14 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dL} = \frac{-\beta K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi+1)}((\alpha+\chi)(1-\delta)+\alpha(\alpha+\chi)K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}+\alpha(1-\alpha)K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.15 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dL} = \frac{-\beta K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi+1)}((\alpha+\chi)(1-\delta)+K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-\alpha}((\alpha+\chi)+(1-\alpha)))}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.16 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dL} = \frac{-K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi+1)}((\alpha+\chi)(1-\delta)+K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-\alpha}(1+\chi))}{\beta((1-\delta)+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha})^2}$$

$$15.17 \quad \frac{dY(t+1)_2}{dc} = 0$$

$$15.18 \quad \frac{dY(t+1)_3}{dK} = \frac{\alpha(1-\alpha)C_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}}K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}R_{t+1}-\alpha(1-\alpha)C_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}}K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}K^{\alpha-2}L_{t+1}^{1-\alpha}(\alpha-1)}{(1+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}-\delta)^2}$$

$$15.19 \quad \frac{dY(t+1)_3}{dL} = \frac{-(\alpha+\chi)(1-\alpha)C_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}}K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}R_{t+1}-(1-\alpha)C_{t+1}^{1-\frac{1}{\sigma}}K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}\alpha(1-\alpha)K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{-\alpha}}{(1+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}-\delta)^2}$$

$$15.20 \quad \frac{dY(t+1)_3}{dc} = \frac{(1-\alpha)\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)C_{t+1}^{\frac{1}{\sigma}}K_{t+1}^{\alpha}L_{t+1}^{-(\alpha+\chi)}-(1-q)}{(1+\alpha K_{t+1}^{\alpha-1}L_{t+1}^{1-\alpha}-\delta)}$$

$$15.21 \quad A_1^{-1} = \frac{1}{\alpha_1\alpha_5} \begin{bmatrix} \alpha_2\alpha_5 & 0 & 0 \\ \alpha_1\alpha_5 & \alpha_5 & 0 \\ \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$15.22 \quad A_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & -1 \\ B_3 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dY(t)_1}{dK} & \frac{dY(t)_1}{dL} & \frac{dY(t)_1}{dc} \\ \frac{dY(t)_2}{dK} & \frac{dY(t)_2}{dL} & \frac{dY(t)_2}{dc} \\ \frac{dY(t)_3}{dK} & \frac{dY(t)_3}{dL} & \frac{dY(t)_3}{dc} \end{bmatrix}$$

$$15.23 \quad B_1 = \alpha K_t^{\alpha-1}L_t^{1-\alpha} + (1-\delta)$$

$$15.24 \quad B_2 = (1-\alpha)K_t^{\alpha}L_t^{-\alpha}$$

$$15.25 \quad B_3 = \alpha K_t^{\alpha-1}L_t^{-(\alpha+\chi)}$$

$$15.26 \quad B_4 = -(\alpha + \chi)K_t^\alpha L_t^{-(\alpha+\chi+1)}$$

$$15.27 \quad B_5 = qu$$

$$15.28 \quad Aj = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} & \frac{1}{\alpha_2} & 0 \\ \frac{\alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3}{\alpha_2\alpha_5} & \frac{-\alpha_4}{\alpha_2\alpha_5} & \frac{1}{\alpha_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & -1 \\ B_3 & B_4 & 0 \\ 0 & 0 & B_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aj11 & aj12 & aj13 \\ aj21 & aj22 & aj23 \\ aj31 & aj32 & aj33 \end{bmatrix}$$

$$15.29 \quad Y(t+1) = AjY(t)$$

$$15.30 \quad K(t+1) = aj11K(t) + aj12L(t) + aj13C(t)$$

$$15.31 \quad L(t+1) = aj21K(t) + aj22L(t) + aj23C(t)$$

$$15.32 \quad C(t+1) = aj31K(t) + aj32L(t) + aj33C(t)$$

Anexo 16:

$$16.1 \quad K(t+1) = \alpha_1K(t) + \alpha_2L(t) + \alpha_3C(t)$$

$$16.2 \quad L(t+1) = \beta_1K(t) + \beta_2L(t) + \beta_3C(t)$$

$$16.3 \quad C(t+1) = \varsigma_1K(t) + \varsigma_2L(t) + \varsigma_3C(t)$$

$$16.4 \quad K(t+1)\gamma_0 = L(t+1)$$

$$16.5 \quad (\alpha_1K(t) + \alpha_2L(t) + \alpha_3C(t))\gamma_0 = (\beta_1K(t) + \beta_2L(t) + \beta_3C(t))$$

$$16.6 \quad (\alpha_1\gamma_0 - \beta_1)K(t) + (\alpha_2\gamma_0 - \beta_2)L(t) + (\alpha_3\gamma_0 - \beta_3)C(t) = 0$$

$$16.7 \quad K(0) = \frac{(\alpha_2\gamma_0 - \beta_2)C(0) + (\alpha_3\gamma_0 - \beta_3)L(0)}{(\beta_1 - \alpha_1\gamma_0)} = \frac{a_{i1}C(0) + a_{i2}L(0)}{a_{i3}}$$

$$16.8 \quad (\varsigma_1K(t) + \varsigma_2L(t) + \varsigma_3C(t))\gamma_0 = (\beta_1K(t) + \beta_2L(t) + \beta_3C(t))$$

$$16.9 \quad C(0) = \frac{(\varsigma_1\gamma_0 - \beta_1)K(0) + (\varsigma_3\gamma_0 - \beta_3)L(0)}{(\beta_2 - \varsigma_2\gamma_0)} = \frac{b_{i1}K(0) + b_{i2}L(0)}{b_{i3}}$$

$$16.10 \quad a_{i3}K(0) = \frac{a_{i1}(b_{i1}K(0) + b_{i2}L(0))}{b_{i3}} + a_{i2}L(0)$$

$$16.11 \quad \left(a_{i3} - \frac{a_{i1}b_{i1}}{b_{i3}}\right)K_0 = \left(\frac{a_{i1}b_{i2}}{b_{i3}} + a_{i2}\right)L_0$$

$$16.12 \quad C_0 = \frac{1}{b_{i3}}(b_{i1}K_0 + b_{i2}L_0)$$

Anexo 17:

$$17.1 \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{j11} & a_{j12} & a_{j13} \\ a_{j21} & a_{j22} & a_{j23} \\ a_{j31} & a_{j32} & a_{j33} \end{bmatrix}$$

$$17.2 \quad A_j - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{j11} - \lambda & a_{j12} & a_{j13} \\ a_{j21} & a_{j22} - \lambda & a_{j23} \\ a_{j31} & a_{j32} & a_{j33} - \lambda \end{bmatrix}$$

17.3

$$P(\lambda, p, q) = \det[A_j - \lambda I] =$$

$$(a_{j11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{j22} - \lambda & a_{j23} \\ a_{j32} & a_{j33} - \lambda \end{vmatrix} - a_{j12} \begin{vmatrix} a_{j21} & a_{j23} \\ a_{j31} & a_{j33} - \lambda \end{vmatrix} + \\ a_{j13} \begin{vmatrix} a_{j21} & a_{j22} - \lambda \\ a_{j31} & a_{j32} \end{vmatrix}$$

$$17.3 \quad P(\lambda, p, q) = \det[A_j - \lambda I] = -\lambda^3 + v_1(p, q)\lambda^2 - v_2(p, q)\lambda + v_3(p, q)$$

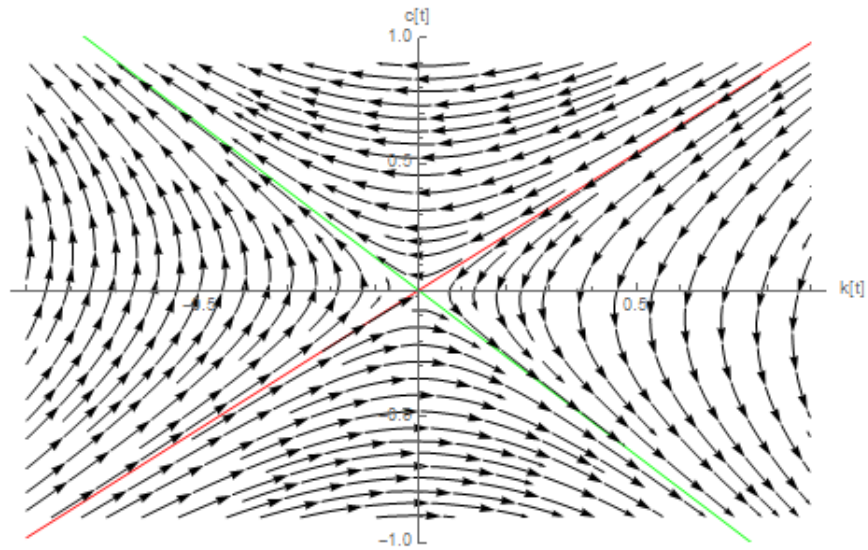
$$17.4 \quad v_1 = (a_{j11} + a_{j33} + a_{j22})$$

$$17.5 \quad v_2 = (a_{j33}a_{j11} + a_{j22}a_{j11} + a_{j22}a_{j33} - a_{j32}a_{j23} - a_{j12}a_{j21} - a_{j13}a_{j31})$$

$$17.6 \quad v_3 = (a_{j11}a_{j22}a_{j33} - a_{j11}a_{j32}a_{j23} - a_{j12}a_{j21}a_{j33} + a_{j12}a_{j31}a_{j23} + \\ a_{j13}a_{j21}a_{j33} - a_{j13}a_{j31}a_{j22})$$

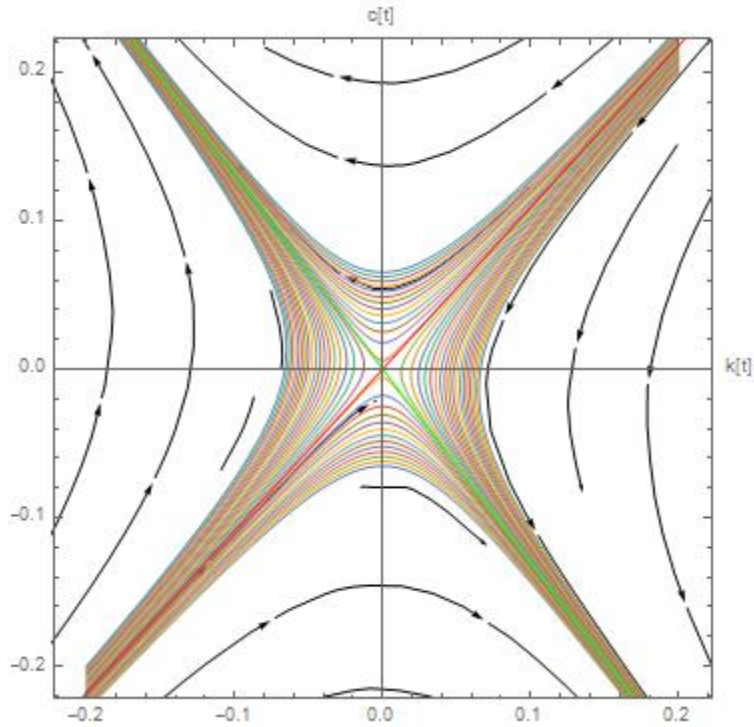
FIGURAS

Figura N^o1. Campo vectorial y trayectorias de convergencia y divergencia



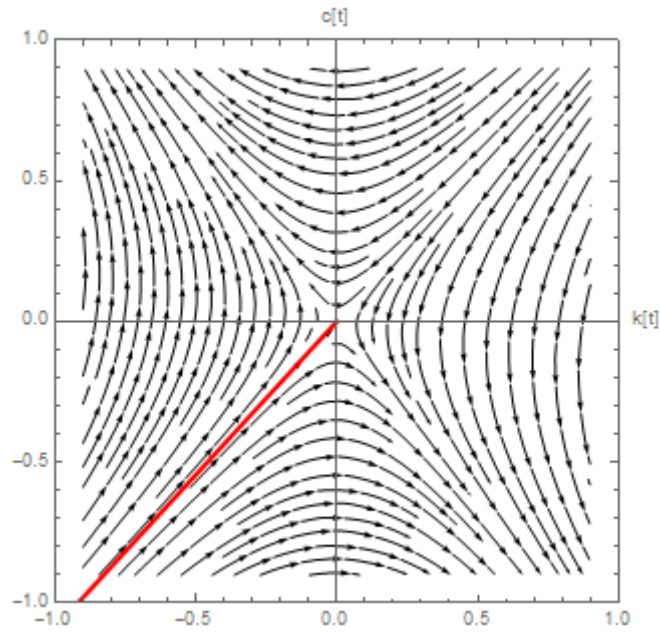
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N^o2. Campo vectorial y dinámica de transición para múltiples condiciones iniciales



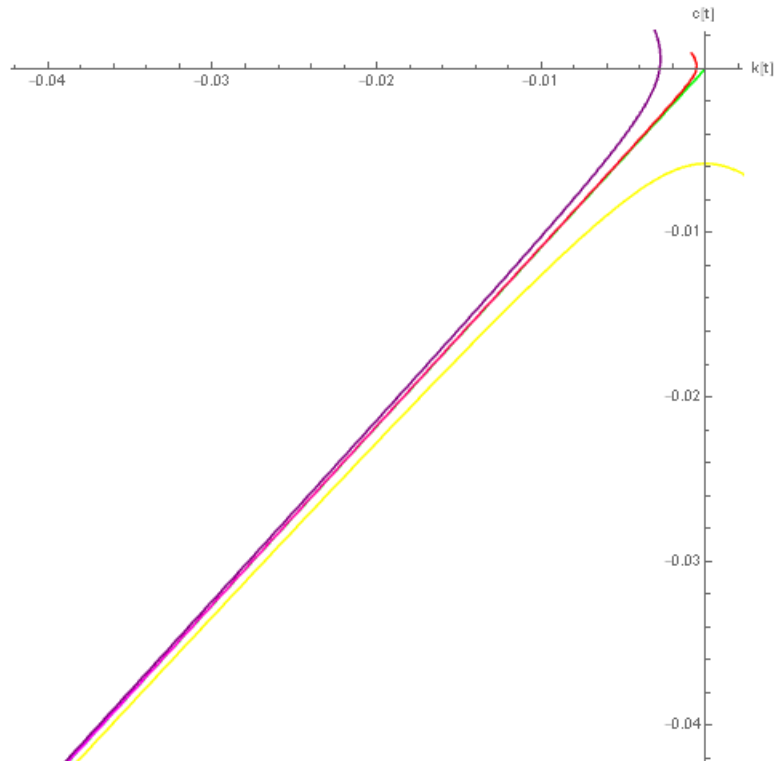
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°3. Senda de convergencia a partir de k_0 y c_0 , entre $t_0 = -10$ y $t_f = 10$



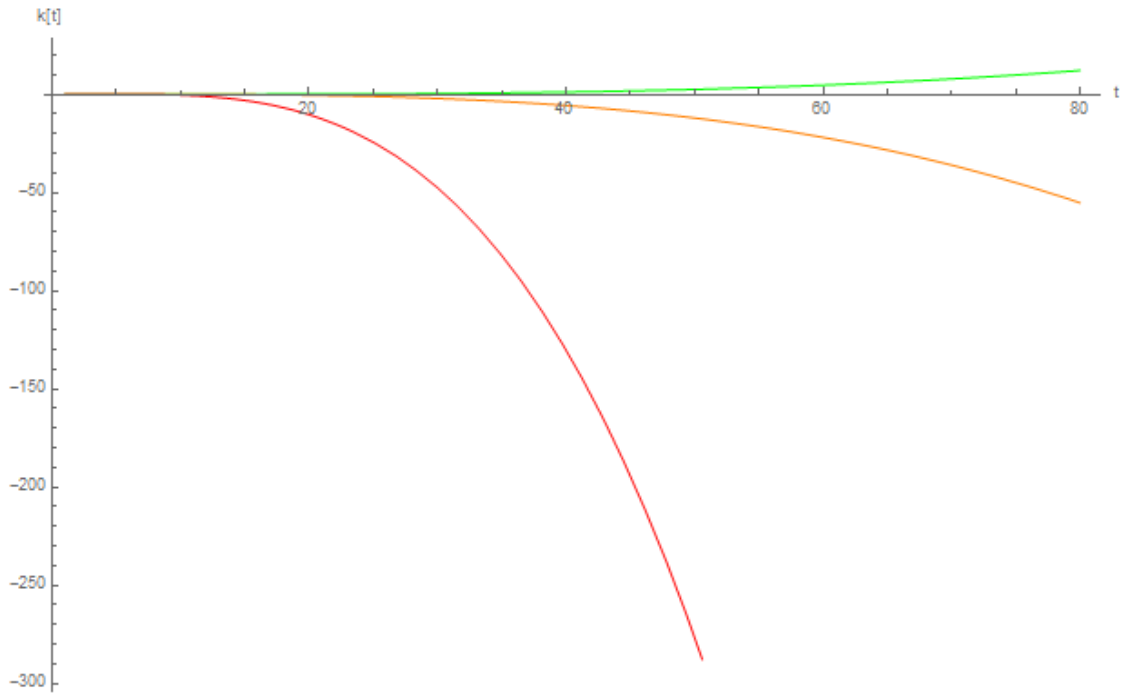
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°4. Dinámica de transición bajo condiciones iniciales con diferentes grados de precisión



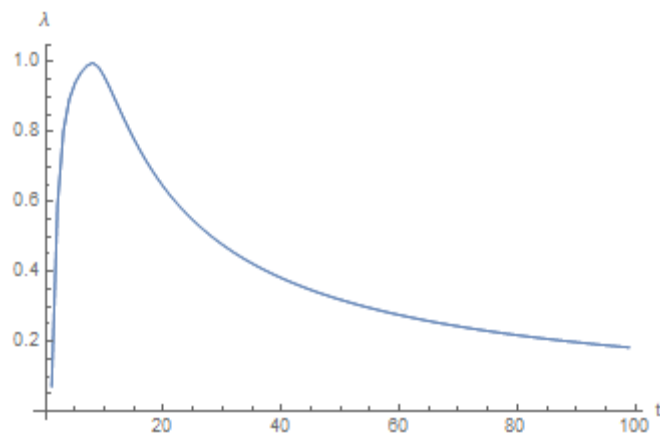
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°5. Separación de las trayectorias de la acumulación de capital bajo distintos grados de precisión de $c(0)$



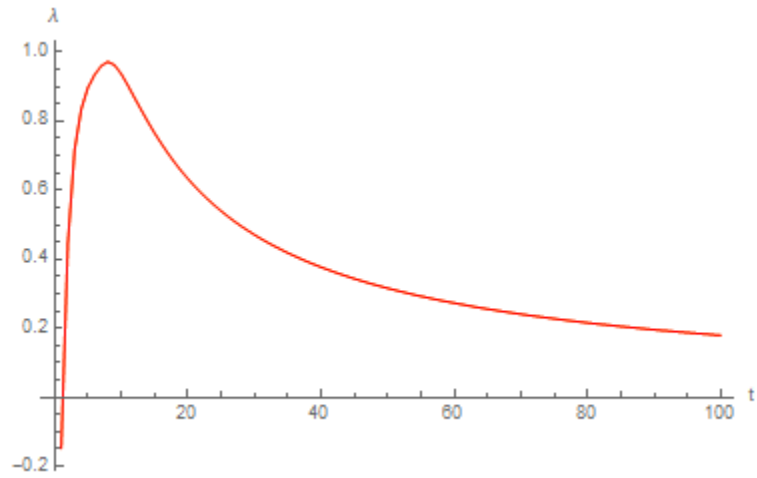
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°6. Comportamiento del exponente de Lyapunov de variable sometida a imprecisión ($c(t)$).

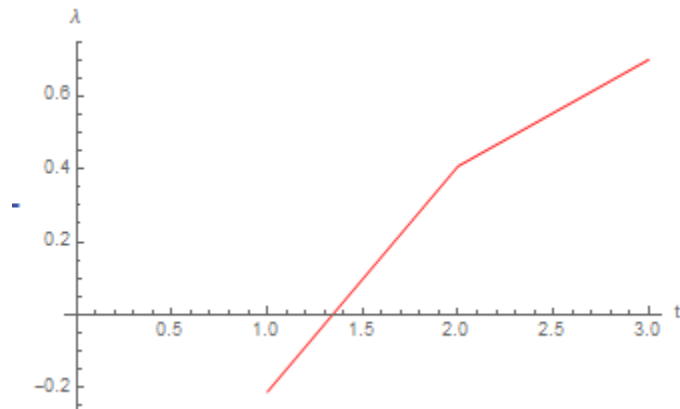


Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°6.1. Comportamiento del exponente de Lyapunov de variable sometida a imprecisión ($k(t)$)

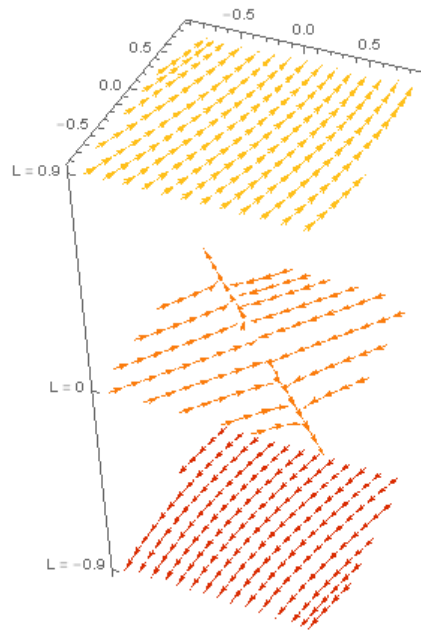


Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.



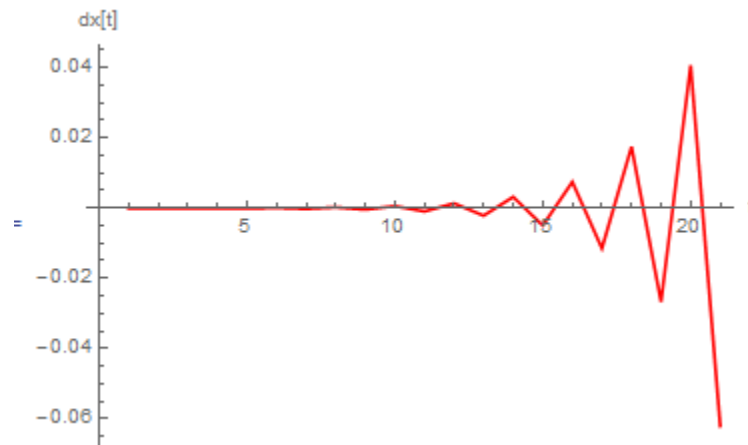
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°7. Campo vectorial bidimensional de la variable de consumo $C(t)$ y de acumulación $K(t)$, para distintos valores constantes de la variable de oferta de trabajo

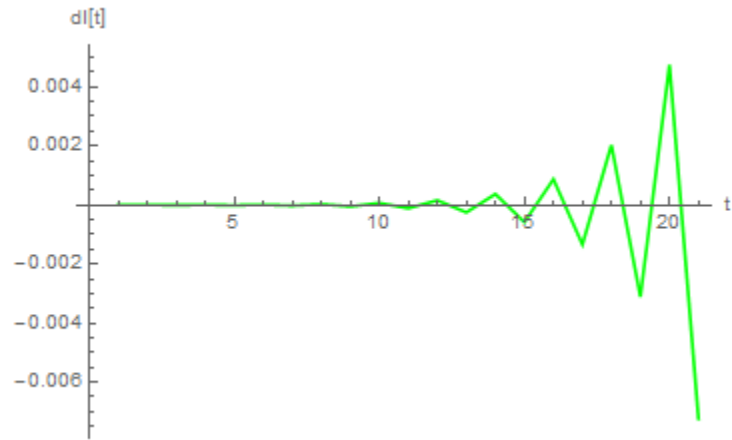


Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

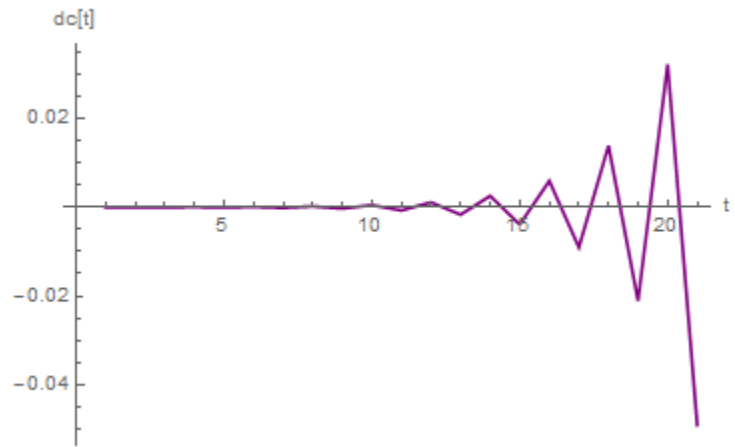
Figura N°8. Separación progresiva de las trayectorias de acumulación de capital $K(t)$, oferta de trabajo $L(t)$, y elecciones de consumo $C(t)$



Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

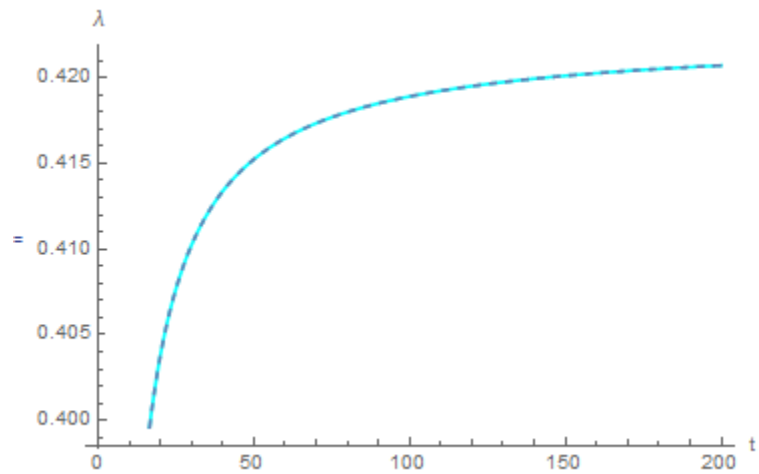


Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.



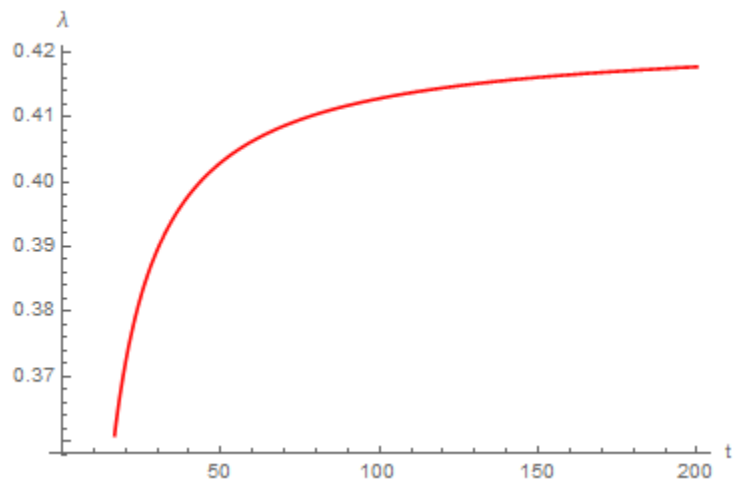
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N^o9. Exponente de Lyapunov asociado a la variable sometida a imprecisión: $K(t)$



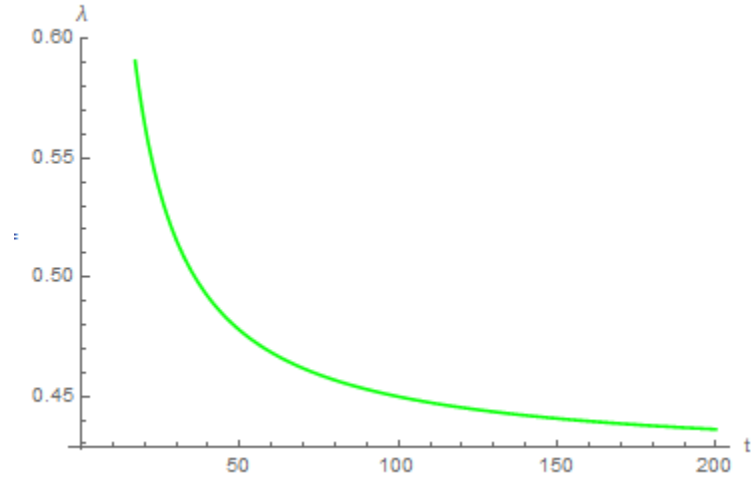
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N^o9.1. Exponente de Lyapunov asociado a la variable sometida a imprecisión: $C(t)$



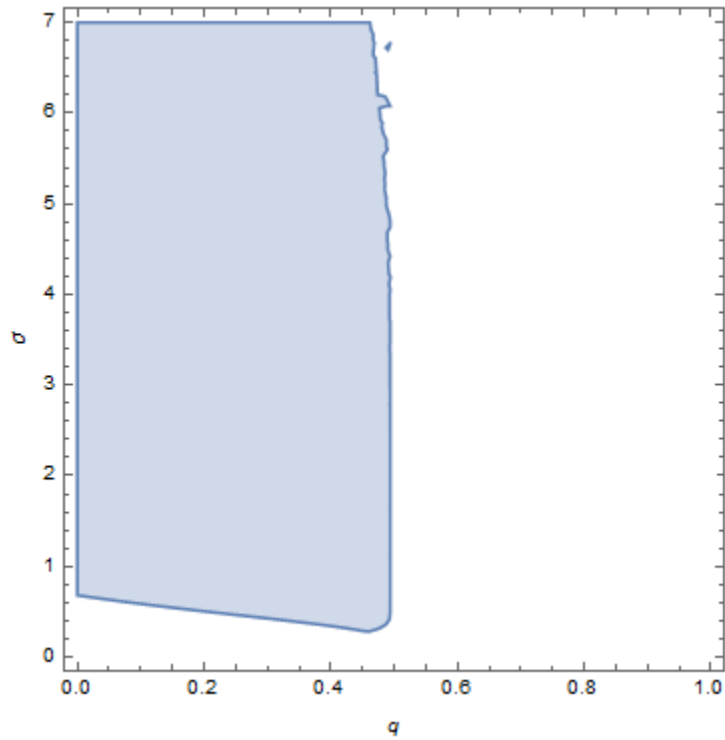
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°10. Exponente de Lyapunov asociado a la variable sometida a imprecisión: $L(t)$



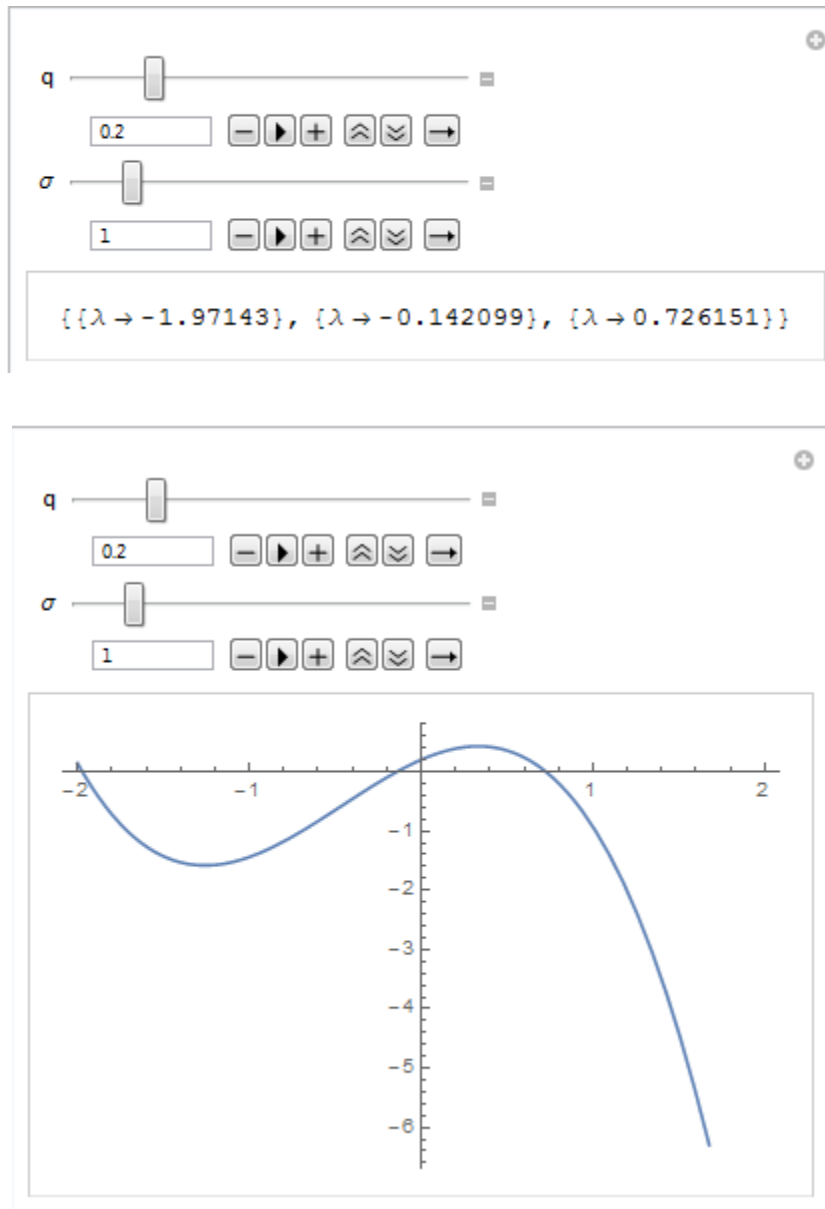
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°11. Región de indeterminación potencial del equilibrio dinámico del modelo



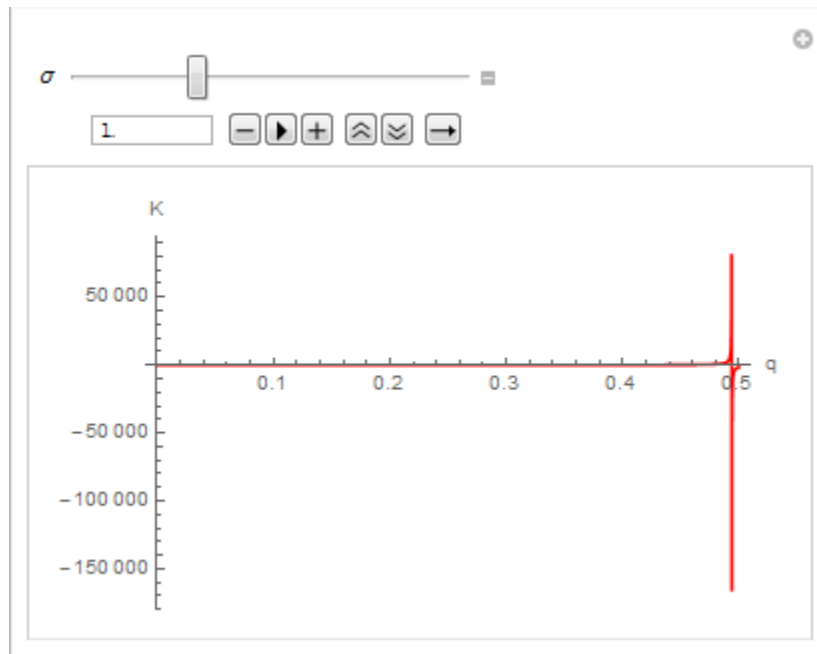
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°12. Valores propios y región de indeterminación potencial del equilibrio dinámico del modelo

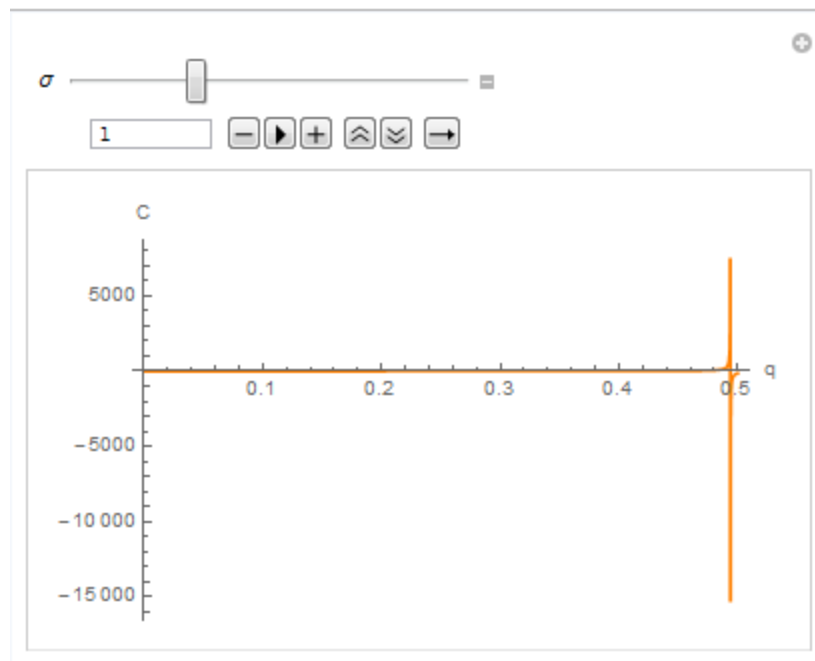


Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

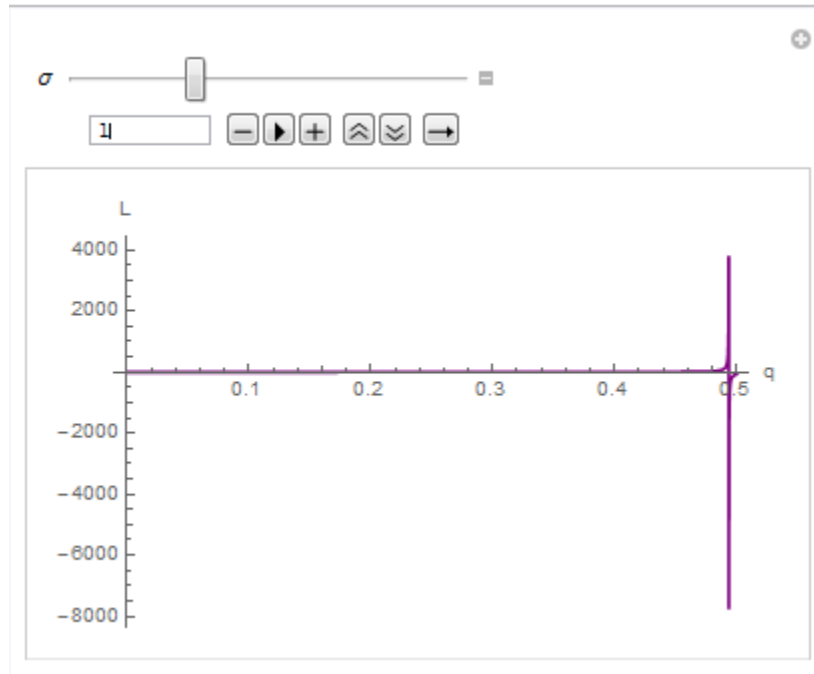
Figura N^o13. Estado estacionario de modelo no-lineal para distintos valores de q



Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

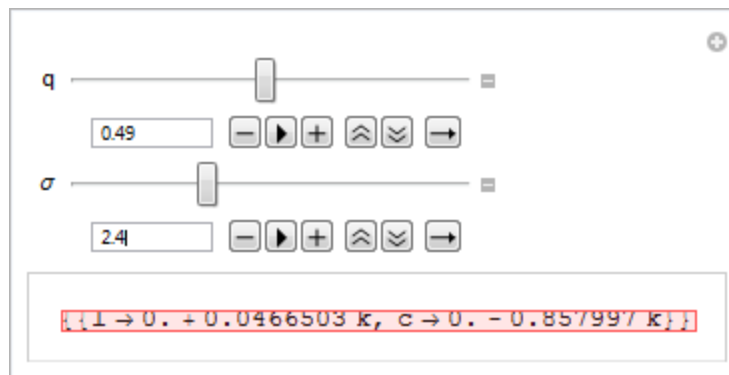


Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.



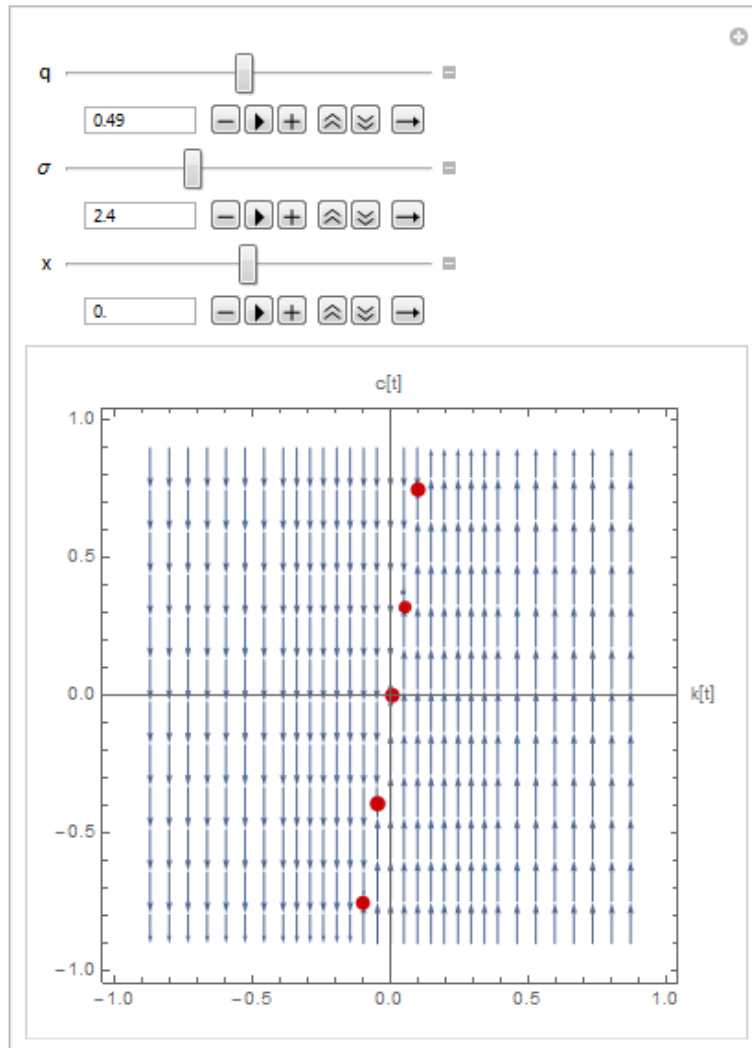
Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N^o14. Solución del modelo lineal para los valores diversos valores de los parámetros q y σ



Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

Figura N°15. Equilibrios posibles cuando la variable de acumulación de capital toma su valor de estado estacionario y se determinan los valores de q y σ



Fuente: Figura realiza por el autor con el programa Wolfram Mathematica 10.

CUADROS

TABLA N°1. CONDICIONES INICIALES DE LOS PARÁMETROS FUNDAMENTALES

Parámetros del modelo	p	θ	g	α	n
Valores iniciales	0.4	0.4	0.6	0.3	0.26
Valores finales	0.5	0.4	0.6	0.3	0.26

Fuente: Tabla realizada por el autor.

Tabla N°1.1. VALORES INICIALES PRÓXIMOS DE LA VARIABLE CONSUMO EN EL MODELO LINEAL

Variable de $c(t)$	Valor
c_0	-0.2178527325950933
c_{01}	-0.21785
c_{02}	-0.2178
c_{03}	-0.2178527326

Fuente: Tabla realizada por el autor.

Tabla N°1.2. VALORES INICIALES PRÓXIMOS DE LA VARIABLE CAPITAL EN EL MODELO LINEAL

Variable de $c(t)$	Valor
k_0	-0.2
k_{01}	-0.199999
k_{02}	-0.1999

Fuente: Tabla realizada por el autor.

Tabla N°2. CONDICIONES INICIALES DE LOS PARÁMETROS FUNDAMENTALES

Parámetros estructurales	β	α	δ	χ	σ	q	u
Condiciones iniciales	0.99	0.3	0.025	0	1	0.1	1.015

Fuente: Tabla realizada por el autor.

Tabla N°3. DETERMINISMO TEÓRICO Y DETERMINISMO CIENTÍFICO

Determinismo científico (forma de ver el mundo)	Teoría determinista
<p>Para cada fenómeno:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Condiciones iniciales con precisión infinita, alcanzan predicciones con precisión infinita. 	<p>Para cada fenómeno matemáticamente describible:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Condiciones iniciales con precisión finita, alcanzan predicciones con precisión finita.

Fuente: LORENZ, H. Citado por POPPER, K. The open Universe. London: Hutchinson, 1982.