Vol. XIII No 2 Diciembre (2005)
Matemáticas: 1–14

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Solución del problema de Dirichlet por medio de la integral de Poisson

Pedro Isaza Jaramillo, Jorge Eliécer Ospino Portillo,

Recibido Mar. 30, 2005 Aceptado Jun. 2, 2005

Abstract

In this paper we study the solution of the Dirichlet problem by means of the Poisson integral, this is, we prove by using classical potential theory tools, that for a bounded regular domain $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ with C^2 boundary $S = \partial\Omega$ having the property that $\Omega' = (\overline{\Omega})^c$ is connected, and $g \in C(S)$, the solution $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, of the problem

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ en } S, \end{cases} \tag{1}$$

is given by

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} G(x,y) g(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

where G is the Green function of operator Δ in Ω and for $x \in \Omega$ and $y \in S$, $\partial_{\nu_y} G(x,y)$ is the normal interior derivative of $G(x,\cdot)$ at the point y, more precisely,

$$\partial_{\nu_y} G(x,y) = \lim_{t \to 0^-} \nabla_y G(x, y + t\nu(y)) \cdot \nu(y),$$

where $\nu(y)$ is the exterior unitary normal vector to the surface S at the point y of S.
In order to solve this problem, we approximate g by means of a sequence $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, such that $g_n \to g$ uniformly in S and we use a generalized version of the second Green identity applied to the Green function and to the solutions u_n of problem (1) with g_n instead of g.

Keywords: Dirichlet problem, Poisson integral, normal interior derivative, normal exterior derivative, Green identities.

AMSC(2000): Primary: 35J05, Secondary: 31A30.

Resumen

En este trabajo se estudia la solución del problema de Dirichlet por medio de la integral de Poisson, esto es, se prueba usando herramientas de la teoría clásica del potencial que para un dominio regular acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ con frontera $S = \partial\Omega$ de clase C^2, que tiene la propiedad de que $\Omega' = (\overline{\Omega})^c$ es conexo y $g \in C(S)$, la solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, del problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ en } S, \end{cases} \tag{3}$$

está dada por

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} G(x,y) g(y) d\sigma(y), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

donde G es la función de Green del operador Δ en Ω y para $x \in \Omega$ y $y \in S$, $\partial_{\nu_y} G(x,y)$ es la derivada normal interior de $G(x,\cdot)$ en el punto y; más precisamente,

$$\partial_{\nu_y} G(x,y) = \lim_{t \to 0^-} \nabla_y G(x, y + t\nu(y)) \cdot \nu(y),$$

donde $\nu(y)$ es el vector normal exterior unitario a la superficie S en el punto y de S.

Para resolver (3), se aproxima g por medio de funciones $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tales que $g_n \to g$ uniformemente en S y se usa una versión generalizada de la segunda identidad de Green aplicada a la función de Green y a las soluciones u_n del problema (3) con g_n en lugar de g.

Palabras y frases claves: Problema de Dirichlet, integral de Poisson, derivada normal interior y exterior, identidades de Green.

1 Introducción

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio regular de clase C^2 con frontera S. El problema de Dirichlet clásico en Ω consiste en hallar una función $u \in C(\overline{\Omega})$ que sea armónica en Ω y que coincida en S con una función dada $g \in C(S)$. Dicho de otra manera, consideraremos el problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0 \quad en \quad \Omega, \\ u = g \quad en \quad S. \end{cases} \tag{5}$$

Usando la teoría clásica del potencial se puede probar que el problema (5) tiene una solución única. Este hecho se demuestra a partir de las propiedades del potencial de capa doble. Pero dicho procedimiento no dilucida cómo expresar la solución u, en términos de la función dato g, por medio de una fórmula explícita, la cual quisiéramos conocer. Si supiéramos que la solución u de (5) no sólo pertenece a $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sino que además pertenece a $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, entonces, dado $x \in \Omega$, es posible utilizar la segunda identidad clásica de Green, la propiedad de valor medio de las funciones armónicas y el potencial newtoniano N para establecer que

$$u(x) = \int\limits_S \partial_{\nu_y} M(x,y) g(y) d\sigma(y) - \int\limits_S M(x,y) \partial_{\nu_y} u(y) d\sigma(y), \tag{6}$$

donde $M(x,y) = N(x-y) = -\frac{\|x-y\|}{(2-n)\omega_n}$, $n \geq 3$, ω_n es la medida $(n-1)$-dimensional de la esfera (N se conoce como el *potencial newtoniano*) y $\partial_{\nu_y} M(x,y)$ y $\partial_{\nu_y} u(y)$ denotan respectivamente las derivadas normales de $M(x,\cdot)$ y de u en el punto y de S.

Sin embargo, la fórmula (6) no sólo depende de la función g, la cual determina unívocamente a u pues la solución de (5) es única, sino que también depende de $\partial_{\nu_y} u(y)$, la cual es desconocida. Además, la existencia de $\partial_{\nu_y} u(y)$ sólo está justificada por el hecho de que hemos supuesto adicionalmente que $u \in C^1(\overline{\Omega})$. De esta manera, la fórmula (6) no es de utilidad para conocer a u a partir de g.

Para desarrollar una expresión de $u(x)$ que no dependa del término $\partial_{\nu_y} u(y)$ puede pensarse en sustituir a M por una función $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ que permita obtener una fórmula similar a (6) (con G en lugar de M) y para la cual

$G(x,y)=0$ para $y\in S$. Así, tendríamos que

$$u(x)=\int_S \partial_{\nu_y} G(x,y)g(y)d\sigma(y), \tag{7}$$

al menos todavía bajo el supuesto de que $u\in C^1(\overline{\Omega})$.

El resultado central de este trabajo, demuestra que la función de Green G es la función adecuada para los propósitos mencionados en el párrafo anterior y que la expresión (7) es válida para la solución u del problema (5), aún sin necesidad de suponer que $u\in C^1(\overline{\Omega})$.

A diferencia del método de *Perron* que utiliza la caracterización de las funciones armónicas como límite uniforme de funciones subarmónicas (sin exigir la conexidad de Ω'), en este trabajo se utiliza la técnica de funciones de Green y se resuelve el problema de Dirichlet en Ω y Ω', éste último suponiendo decaimiento en ∞.

Este artículo está basado en la Tesis de Maestría de Jorge Eliécer Ospino Portillo, realizada en la Universidad del Norte, en convenio con la Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, bajo la dirección del profesor Pedro Isaza Jaramillo.

2 Preliminares

2.1 Potenciales de capa doble y capa simple

Para $f:\Omega\to\mathbb{R}$ definimos el *potencial volumétrico* de f en $x\in\mathbb{R}^n$ por

$$v(x):=\int_\Omega M(x,y)f(y)dy, \tag{8}$$

siempre que dicha integral exista.

Proposición 1. *Sean $f\in C^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ y v el potencial volumétrico asociado a f. Entonces $v\in C^1(\mathbb{R}^n)\cap C^\infty(\Omega')\cap C^2(\Omega)$. $\Delta v=f$ en Ω, $\Delta v=0$ en Ω' y $v(x)\to 0$ si $\|x\|\to\infty$.*

Para la demostración ver [3] teorema 5.3 página 267.

Si Ω es un dominio regular y $\phi\in L^\infty(S)$, el *potencial de capa doble* asociado a ϕ es la función v definida por:

$$v(x):=\int_S \partial_{\nu_y} M(x,y)\phi(y)d\sigma(y),\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{9}$$

donde $\partial_{\nu_y} M(x,y)=\nabla_y M(x,y)\cdot\nu(y)$.

Si $\psi\in L^\infty(S)$, el *potencial de capa simple* para ψ es la función ω definida por:

$$\omega(x):=\int_S M(x,y)\psi(y)d\sigma(y),\quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{10}$$

En la siguiente proposición enunciamos las propiedades más relevantes del potencial de capa doble.

Proposición 2. *Sean $\phi \in L^\infty(S)$ y υ el potencial de capa doble asociado a ϕ. Entonces:*

i) υ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus S$ y $\upsilon(x) \to 0$ cuando $\|x\| \to \infty$.

ii) $\upsilon \in C(S)$.

iii) Si ϕ es continua en $x_0 \in S$, entonces

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \upsilon(x) = \frac{1}{2}\phi(x_0) + \int_S \partial_{\nu_y} M(x_0, y)\phi(y) d\sigma(y), \tag{11}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega}} \upsilon(x) = -\frac{1}{2}\phi(x_0) + \int_S \partial_{\nu_y} M(x_0, y)\phi(y) d\sigma(y). \tag{12}$$

Además, si $\phi \in C(S)$, los anteriores límites son uniformes para $x_0 \in S$.

Para la demostración ver [2] lema 3.20 página 126 y teorema 3.22 página 128, y [3] teorema 1.3 página 289 y teorema 1.4 página 290.

Para enunciar las propiedades principales del potencial de capa simple introducimos las nociones de derivada normal interior y de derivada normal exterior: Si $u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus S)$ decimos que u tiene derivada normal exterior (respectivamente interior) en S si para todo $x_0 \in S$ existe el siguiente límite

$$\partial_{\nu^+} u(x_0) := \lim_{t \to 0^+} \nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0 + t\nu(x_0))$$

(respectivamente $\partial_{\nu^-} u(x_0) := \lim_{t \to 0^-} \nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0 + t\nu(x_0))$) uniformemente en S.

La siguiente proposición recoge las propiedades más importantes del potencial de capa simple.

Proposición 3. *Sean $\psi \in C(S)$ y ω el potencial de capa simple asociado a ψ. Entonces:*

i) ω es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus S$ y $\omega(x) \to 0$ cuando $\|x\| \to \infty$.

ii) $\omega \in C(\mathbb{R}^n)$.

iii) ω tiene derivadas normales interior y exterior en S, dadas por:

$$\frac{\partial \omega(x)}{\partial \nu^-} = -\frac{1}{2}\psi(x) + \int_S \partial_{\nu_x} M(y, x)\psi(y) d\sigma(y), \ x \in S, \tag{13}$$

$$\frac{\partial \omega(x)}{\partial \nu^+} = \frac{1}{2}\psi(x) + \int_S \partial_{\nu_x} M(y, x)\psi(y) d\sigma(y), \ \ x \in S. \tag{14}$$

Para la demostración ver [2] proposición 3.25 página 129 y teorema 3.28 página 131, y [3] teorema 1.1 página 286 y teorema 1.5 página 293.

2.2 Problemas clásicos

Las propiedades del potencial de capa doble expresadas en la proposición 2, muestran que para $g \in C(S)$, el *problema de Dirichlet clásico*

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = 0, \text{ en } \Omega, \\ u = g, \text{ en } S, \end{array} \right. \tag{15}$$

tiene una solución dada por

$$u(x) = \left\{ \begin{array}{c} \int\limits_S \partial_{\nu_y} M(x,y)\phi(y)d\sigma(y), \text{ si } x \in \Omega, \\ \frac{1}{2}\phi(x) + \int_S \partial_{\nu_y} M(x,y)\phi(y)d\sigma(y), \text{ si } x \in S, \end{array} \right. \tag{16}$$

donde $\phi \in C(S)$ es la única solución de la ecuación integral

$$\frac{1}{2}\phi(x) + \int_S \partial_{\nu_y} M(x,y)\phi(y)d\sigma(y) = g(x), \, \forall x \in S.$$

(Ver [3] páginas 294 a 299). Como $g \in C(S)$, el principio del máximo para funciones armónicas (ver [2] página 72) garantiza la unicidad de u.

De modo similar, para $g \in C(S)$ las propiedades del potencial de capa simple, expuestas en la proposición 3, garantizan que el *problema exterior de Neumann*

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega'}), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu^+} = g \text{ en } S, \\ \lim\limits_{\|x\| \to \infty} u(x) = 0, \end{array} \right. \tag{17}$$

tiene una solución, dada en términos del potencial de capa simple por

$$u(x) = \int\limits_S M(x,y)\psi(y)d\sigma(y), \quad \text{para} \quad x \in \overline{\Omega'}, \tag{18}$$

donde $\psi \in C(S)$ es la única solución de la ecuación integral

$$\frac{1}{2}\psi(x) + \int_S \partial_{\nu_x} M(y,x)\psi(y)d\sigma(y) = g(x), \quad x \in S.$$

Si Ω' es conexo, la solución del problema exterior de Neumann (17) es única. La demostración se puede consultar en [6] página 311.

2.3 La función de Green

Para $x \in \Omega$, definimos $g_x(y) := -M(x,y)$, $y \in S$. Existe una única función $H(x,\cdot) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $H(x,\cdot) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$; $\Delta_y H(x,y) = 0$ para todo

$y \in \Omega$ y $H(x,y) = g_x(y)$ para todo $y \in S$. Definamos la *función de Green* en Ω para el operador Δ, como la función

$$G : \big(\Omega \times \overline{\Omega}\big) \setminus \{(x,x) \mid x \in \Omega\} \to \mathbb{R},$$

dada por

$$G(x,y) = M(x,y) + H(x,y), \; x \in \Omega, \; y \in \overline{\Omega}.$$

De la definición de G se desprende que $G(x,y) = 0$ para toda $y \in S$. En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades importantes de la función de Green.

Proposición 4. *Sea Ω un dominio regular con Ω' conexo.*

i) Para $x \in \Omega$, la función $G(x,\cdot)$ tiene derivada normal interior en S.

ii) $G(x,y) = G(y,x)$, para $(x,y) \in \Omega \times \Omega$, $x \neq y$, y por tanto G puede extenderse de manera continua a

$$\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \setminus \big\{(x,x) \;\big|\; x \in \overline{\Omega}\big\}\;,$$

definiendo $G(x,y) = 0$ para $x \in S$.

iii) Si $f \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, entonces el problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ \Delta u = f, \quad en \quad \Omega, \\ u = 0, \quad en \quad S, \end{cases} \tag{19}$$

tiene solución única dada por

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y) f(y) dy, \;\; x \in \overline{\Omega}. \tag{20}$$

La prueba de (i) y (ii) puede consultarse en [6] página 320, la de (iii) se puede ver en [3], cuando $n = 3$ teorema 5.3 página 267 y en [6] página 327.

De (ii) y de la definición de la función de Green se sigue fácilmente que para $y \in \Omega$, $H(\cdot,y)$ es una función armónica en Ω.

2.4 Vecindad tubular

Lema 5. *Sea Ω un dominio regular de clase C^2. Entonces:*

i. Existen una vecindad V de $S = \partial\Omega$ en $\mathbb{R}^n$ y un $\epsilon > 0$ tales que la función $F : S \times (-\epsilon,\epsilon) \to V$ definida por $F(x,t) := x + t\nu(x)$ es un homeomorfismo de clase C^1.

ii. *Para* $t \in (-\epsilon, 0)$ $S_t := \{x + t\nu(x) \,|\, x \in S\}$ *es una superficie de clase* C^1, *y existe* $\delta \in (0, \epsilon)$ *tal que si* $t \in (-\delta, 0)$, S_t *es la frontera de un dominio regular* Ω_t *con* $\overline{\Omega_t} \subset \Omega$.

iii. *Para* $x \in S$ *y* $t \in (-\delta, 0)$, *si* $x' = x + t\nu(x)$, *entonces el vector normal unitario exterior a* S_t *en* x' *es* $\nu(x)$.

La prueba se puede ver en [4] página 8.

2.5 Identidades de Green generalizadas

Teorema 6. *Si* u, $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Δu, $\Delta v \in L^2(\Omega)$ *y* u *y* v *tienen derivada normal interior en* S , *entonces*

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\; dx = \int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu^-} - v\frac{\partial u}{\partial \nu^-} \right) d\sigma. \tag{21}$$

Aquí $\frac{\partial v}{\partial \nu^-}$ *y* $\frac{\partial u}{\partial \nu^-}$ *denotan las derivadas normales interiores en* S *de* v *y* u *respectivamente.*

Demostración. Probamos inicialmente la Primera identidad de *Green* generalizada: Si S es de clase C^2, $u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u \in L^2(\Omega)$, u tiene derivada normal interior en S y $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int_\Omega v\Delta u \, dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int_S v\frac{\partial u}{\partial \nu^-}\, d\sigma, \tag{22}$$

donde la primera integral del lado derecho tiene el sentido de cierta integral impropia que se precisa en la demostración. Para t suficientemente pequeño, sean Ω_t y S_t como en el lema 5. Como las restricciones de u y v a Ω_t satisfacen las hipótesis para aplicar la identidad de Green clásica, se tiene que

$$\int\limits_{\Omega_t} v\Delta u \, dx = -\int\limits_{\Omega_t} \nabla v \cdot \nabla u \, dx + \int\limits_{S_t} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma_t. \tag{23}$$

Por simplicidad efectuamos la demostración para $n = 3$, siendo el caso $n > 3$ similar. Como $v \in C(\overline{\Omega})$, y $\Delta u \in L^2(\Omega)$, entonces $v\Delta u \in L^1(\Omega)$. Como $v\Delta u \chi_{\Omega_t}$ está dominada por la función integrable $v\Delta u$, entonces, por el teorema de la convergencia dominada, se tiene

$$\int\limits_{\Omega_t} v\Delta u \, dx = \int\limits_{\Omega} v\Delta u \chi_{\Omega_t}\, dx \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} \int\limits_{\Omega} v\Delta u \, dx. \tag{24}$$

Sean U' cierta bola abierta de $\mathbb{R}^2$ y $\gamma : U' \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $y = \gamma(x')$ una parametrización local de S de clase C^2, entonces $F_t \circ \gamma : U' \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definida por

$$\overline{y} := (F_t \circ \gamma)\,(x') = \gamma(x') + t\nu(\gamma(x')),$$

es una parametrización local de S_t de clase C^1. Como para t suficientemente pequeño y $y \in S$, el vector normal exterior unitario a S_t en $\overline{y} = y + t\nu(y)$ es $\nu(y)$, entonces

$$\int\limits_{(F_t \circ \gamma)(U')} v(\overline{y}) \frac{\partial u(\overline{y})}{\partial \nu} \, d\sigma_t(\overline{y}) =$$

$$= \int\limits_{U'} v(\gamma(x') + t\nu(\gamma(x'))) \nabla u(\gamma(x') + t\nu(\gamma(x'))) \cdot \nu(\gamma(x')) A \, dx', (*)$$

donde $A = \|\partial_1(F_t \circ \gamma)(x') \times \partial_2(F_t \circ \gamma)(x')\|$. Como

$$\partial_i(F_t \circ \gamma)(x') = \partial_i\gamma(x') + t\partial_i(\nu \circ \gamma)(x');\ i = 1, 2,$$

entonces:

$$\left\|\partial_1(F_t \circ \gamma)(x') \times \partial_2(F_t \circ \gamma)(x')\right\| \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} \left\|\partial_1\gamma(x') \times \partial_2\gamma(x')\right\|$$

uniformemente para $x' \in U'$, ya que $\|\cdot\|$ es continua y la función

$$(t, x') \to \partial_1(F_t \circ \gamma)(x') \times \partial_2(F_t \circ \gamma)(x')$$

es uniformemente continua en $[-\epsilon/2, \epsilon/2] \times U'$. También:

$$\nabla u(\gamma(x') + t\nu(\gamma(x'))) \cdot \nu(\gamma(x')) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} \nabla u(\gamma(x')) \cdot \nu(\gamma(x'))$$

uniformemente en U'; y

$$v(\gamma(x') + t\nu(\gamma(x'))) \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} v(\gamma(x'))$$

uniformemente en U'. Entonces cuando $t \to 0^-$ el lado derecho de $(*)$ converge a

$$\int\limits_{U'} v(\gamma(x')) \frac{\partial u(\gamma(x'))}{\partial \nu^-} \left\|\partial_1\gamma(x') \times \partial_2\gamma(x')\right\| \, dx' = \int\limits_{\gamma(U')} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu^-} \, d\sigma(y).$$

Por tanto

$$\int\limits_{(F_t \circ \gamma)(U')} v(\overline{y}) \frac{\partial u(\overline{y})}{\partial \nu} \, d\sigma_t(\overline{y}) \underset{t \to 0^-}{\to} \int\limits_{\gamma(U')} v(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu^-} \, d\sigma(y), \tag{25}$$

y así, utilizando particiones de la unidad se puede probar a partir de (25), que

$$\int\limits_{S_t} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma_t \underset{t \to 0^-}{\longrightarrow} \int\limits_{S} v \frac{\partial u}{\partial \nu^-} \, d\sigma. \tag{26}$$

De (23), teniendo presentes a (24) y (26), se concluye que existe

$$\lim_{t\to 0^-}\int\limits_{\Omega_t}\nabla v\cdot\nabla u\,dx =: \int\limits_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,dx \quad \text{(integral impropia)},$$

y tiene lugar la igualdad

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u\,dx = -\int\limits_{\Omega}\nabla v\cdot\nabla u\,dx + \int\limits_{S} v\frac{\partial u}{\partial \nu^-}\,d\sigma. \tag{27}$$

De manera análoga, si S es de clase C^2, $v\in C^2(\Omega)$, $\Delta v\in L^2(\Omega)$, v tiene derivada normal interior en S y $u\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, entonces

$$\int\limits_{\Omega} u\Delta v\,dx = -\int\limits_{\Omega}\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial \nu^-}\,d\sigma. \tag{28}$$

Restando (28) y (27) obtenemos (21). □

3 Existencia de derivadas normales interiores

Como el resultado central del trabajo se apoya en el uso de la segunda identidad de *Green* generalizada teorema 6, es necesario establecer la existencia de la derivada normal para las funciones allí involucradas. Ello es posible a partir del estudio efectuado en el teorema 7 y el corolario 8 los cuales se enuncian y prueban a continuación. En esta sección y en la que sigue Ω será un dominio regular de clase C^2 con Ω' conexo.

Teorema 7. *Si $f\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ y*

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y)f(y)\,dy,\ x\in\overline{\Omega},$$

donde G es la función de Green para el operador Δ, entonces u tiene derivada normal interior en S.

Demostración. Si $f\in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ y $u(x) = \int\limits_{\Omega} G(x,y)f(y)\,dy$, $x\in\overline{\Omega}$, sabemos de la proposición 4 que $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ y que $u|_S = 0$, pues $G(x,y)=0,$ para toda $x\in S$.

Como $G(x,y) = M(x,y) + H(x,y)$, se tiene que

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} M(x,y)f(y)\,dy + \int\limits_{\Omega} H(x,y)f(y)\,dy. \tag{29}$$

Definamos el potencial volumétrico mediante

$$v(x) := \int\limits_{\Omega} M(x,y)f(y)\,dy,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Por la proposición 1 $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$, y por tanto v tiene derivada normal interior en S. Por tanto, es suficiente probar que la función $\widetilde{v}$ definida por

$$\widetilde{v}(x) := \int_\Omega H(x,y) f(y)\, dy, \;\; x \in \Omega,$$

tiene derivada normal interior en S. Del comentario que sigue a la proposición 4 se desprende que $\widetilde{v}$ es una función armónica en Ω.

Sea $g(y) := \nabla v(y) \cdot \nu(y), \; y \in S$. Entonces $g \in C(S)$. Consideremos el siguiente problema exterior de Neumann:

$$\begin{cases} w \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega'}), \\ \Delta w = 0 \,\text{en}\; \Omega', \\ \frac{\partial w}{\partial \nu^+} = -g \;\text{en}\; S, \\ w(x) \longrightarrow 0 \;\text{si}\; \|x\| \to \infty. \end{cases} \tag{30}$$

Por la proposición 1, v es armónica en Ω', $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $v(x) \to 0$ si $\|x\| \to \infty$, entonces claramente $-v \in C^2(\Omega') \cap C(\overline{\Omega'})$ es solución del problema anterior.

Sea $\psi \in C(S)$ la solución de la ecuación integral

$$\frac{1}{2}\psi(x) + \int_S \partial_{\nu_x} M(y,x) \psi(y)\, d\sigma(y) = -g(x),$$

para toda $x \in S$; y sea $\widetilde{w}$ el potencial de capa simple asociado a ψ, es decir,

$$\widetilde{w}(x) = \int_S M(x,y) \psi(y)\, d\sigma(y), \;\; x \in \mathbb{R}^n,$$

entonces $\widetilde{w}\big|_{\overline{\Omega'}}$ es solución del problema (30) y por la unicidad de dicho problema $\widetilde{w}(x) = -v(x)$ para toda $x \in \Omega'$.

Tenemos además de la proposición 3 que $\widetilde{w}$ es armónica en Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y $\widetilde{w}(x) = -v(x)$ para toda $x \in S$. Como la función $\widetilde{v}$ tiene exactamente estas propiedades entonces $\widetilde{v}(x) = \widetilde{w}(x)$ para toda $x \in \overline{\Omega}$. Como sabemos que $\widetilde{w}$ tiene derivada normal interior en S (por ser un potencial de capa simple) entonces $\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial \nu^-}$ existe en S. Como además $\frac{\partial v}{\partial \nu^-}$ existe en S, se concluye que u tiene derivada normal interior en S. $\square$

Corolario 8. *Si $g \in C^3(\mathbb{R}^n)$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es la solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \;\; en\; \Omega, \\ u = g \;\; en\; S, \end{cases}$$

entonces $\frac{\partial u}{\partial \nu^-}$ existe en S.

Demostración. Sea $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ la solución del problema de Poisson

$$\begin{cases} \Delta v = \Delta g \text{ en } \Omega, \\ v = 0 \text{ en } S. \end{cases}$$

Como $g \in C^3(\mathbb{R}^n)$, entonces $\Delta g \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces por las propiedades de la función de Green (proposición 4)

$$v(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta g(y)dy, \ x \in \overline{\Omega}$$

y así, por el teorema 7, v tiene derivada normal interior en S, pero $\Delta(g-v) = 0$ en Ω y $g - v = g$ en S, entonces por la unicidad de la solución del problema interior de Dirichlet clásico (sección 2.2), $u = g - v$ y por tanto u tiene derivada normal interior en S. □

4 Resultado

En esta sección demostraremos el resultado central del trabajo; es decir, probaremos que la solución al problema de *Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ en } \Omega, \\ u = g \text{ en } S, \end{cases}$$

en Ω está dado por la integral de *Poisson*

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} G(x,y)g(y)d\sigma(y).$$

La demostración se basa en la construcción de una función de Green para Ω de la forma $G(x,y) = M(x,y) + H(x,y)$, regularizando $g \in C(\partial\Omega)$ por una sucesión de funciones de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n$ y resolviendo

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u_j = g_j \quad \text{en} \quad S. \end{cases}$$

se muestra que u es el límite uniforme de la sucesión u_j en Ω como resultado de que g es el límite uniforme de la sucesión g_j sobre $\partial\Omega$.

Teorema 9. *Sea Ω en $\mathbb{R}^n$ un abierto regular de clase C^2, con frontera S y con Ω' conexo; y sea g en $C(S)$. Entonces la solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ del problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{en} \quad \Omega, \\ u = g \quad \text{en} \quad S, \end{cases} \tag{31}$$

está dada por

$$u(x) = \int_S \partial_{\nu_y} G(x,y)g(y)d\sigma(y), \quad x \in \Omega. \tag{32}$$

Demostración. La solución u del problema de Dirichlet (31) existe y es única por la existencia y unicidad de la solución del problema interior de Dirichlet clásico (sección 2.2), obtenido de las propiedades del potencial de capa doble (sección 2.1). En una primera fase de la demostración procederemos a hallar una sucesión $\{g_j\}_j$ de funciones en $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, que converge uniformemente a g en S. Para conseguir esta sucesión se procede así: Para $g \in C(S)$, hallemos $\widetilde{g} \in C_0(\mathbb{R}^n)$, tal que $g(y) = \widetilde{g}(y)$, $y \in S$. Si V es una vecindad tubular de S (que existe por un lema anterior), dado $x \in V$, existen únicos $y \in S$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, tales que $y + t\nu(y) = x$; en realidad, $(y,t) = F^{-1}(x)$, con F como en el teorema 6.

Definimos $g_1 : V \to \mathbb{R}$ por $g_1(x) := g(y)$. Notemos que g_1 es continua por ser la composición de g con la primera proyección de F^{-1}. Como S es compacto y V abierto, $S \subseteq V$, entonces existe una $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $\varphi(y) = 1,\ \ y \in S,\ \ \operatorname{supp}\varphi \subseteq V;\ \ 0 \le \varphi \le 1$. Sea

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g_1(x)\varphi(x), & x \in V, \\ 0, & x \notin V. \end{cases}$$

Entonces $\widetilde{g} \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y para $y \in S$, $\widetilde{g}(y) = g_1(y)\varphi(y) = g(y)$. Para construir la sucesión $\{g_j\}_j$ utilizamos la función ψ definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}, & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \ge 1, \end{cases}$$

con c escogida de tal manera que $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$. Si para $\epsilon > 0$, se define $\psi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\psi(x/\epsilon)$ entonces, dado $j \in \mathbb{N}$, con ϵ lo suficientemente pequeño se tiene

$$|(\psi_\epsilon * \widetilde{g})(x) - \widetilde{g}(x)| < \frac{1}{j},$$

para toda $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto:

$$\begin{aligned} |(\psi_\epsilon * \widetilde{g})(x) - \widetilde{g}(x)| &= \left| \int_{|t|\le\epsilon} \psi_\epsilon(t)\widetilde{g}(x-t)dt - \widetilde{g}(x) \right| \\ &\le \left| \int_{|t|\le\epsilon} \psi_\epsilon(t)\left[\widetilde{g}(x-t) - \widetilde{g}(x)\right] dt \right| \\ &\le \sup_{|t|\le\epsilon} |\widetilde{g}(x-t) - \widetilde{g}(x)| \int \psi_\epsilon(t)dt \\ &= \sup_{|t|\le\epsilon} |\widetilde{g}(x-t) - \widetilde{g}(x)| \,. \end{aligned}$$

Por la continuidad uniforme de $\widetilde{g}$ se tiene que existe ϵ_j tal que el último término es menor a $\frac{1}{j}$, para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Para $j \in \mathbb{N}$ definimos entonces $g_j := \psi_{\epsilon_j} * \widetilde{g}$ la cual es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^n$. Consideremos ahora para cada j la solución u_j del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_j = 0 & \text{en } \Omega, \\ u_j = g_j & \text{en } S. \end{cases} \tag{33}$$

Como $g_j \in C^3(\mathbb{R}^n)$, entonces por el Corolario 8, u_j tiene derivada normal interior en S. Además, sabemos que para toda $x \in \Omega$, $G(x,\cdot)$ tiene derivada normal interior en S (proposición 4 (i)). Para $x \in \Omega$ tomemos $\epsilon > 0$ con $\overline{B_\epsilon(x)} \subseteq \Omega$ y definamos

$$\Omega_\epsilon := \Omega \setminus B_\epsilon(x)$$

y $S_\epsilon := \partial B_\epsilon(x)$. Entonces aplicando el teorema 6, se tiene que

$$0 = \int\limits_{\Omega_\epsilon} [u_j(y)\Delta_y G(x,y) - \Delta u_j(y) G(x,y)]\, dy,$$

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega_\epsilon} \left[u_j(y)\partial_{\nu_y} G(x,y) - \partial_\nu u_j(y) G(x,y)\right] d\sigma(y).$$

Aplicando la proposición 4, el hecho de que $H(\cdot, y)$ es una función armónica en Ω, u_j es armónica en B_ϵ y que $\partial\Omega_\epsilon = S \cup \partial B_\epsilon$, se obtiene

$$0 = \int\limits_S u_j(y)\partial_{\nu_y} G(x,y) d\sigma(y) - \frac{1}{w_n \epsilon^{n-1}} \int\limits_{S_\epsilon} u_j(y) d\sigma(y).$$

Por la propiedad del valor medio de funciones armónicas el último término es $-u_j(x)$. Así,

$$0 = \int\limits_S u_j(y)\partial_{\nu_y} G(x,y) d\sigma(y) - u_j(x).$$

Como $u_j(y) = g_j(y)$, para $y \in S$, entonces

$$u_j(x) = \int\limits_S g_j(y)\partial_{\nu_y} G(x,y) d\sigma(y). \tag{34}$$

Por el principio del máximo para funciones armónicas

$$\|u_j - u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|g_j - g\|_{L^\infty(S)}$$

y como $g_j \to g$ uniformemente en S, de (34) concluimos finalmente que

$$u(x) = \int\limits_S g(y)\partial_{\nu_y} G(x,y) d\sigma(y), \quad \forall x \in \Omega.$$

Lo que prueba el teorema. $\square$

References

[1] Brezis, H. Analyse fonctionnelle. Masson. 1983.

[2] Folland, G. Introduction to partial differential equations. Princeton University Press. 1995.

[3] Iório, R., Iório, V. Ecuaciones diferenciales parciales. Una introducción. Impa, Projecto Euclides. 1988.

[4] Ospino, P. J. E. Solución del problema de Dirichlet por medio de la integral de Poisson. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. En convenio con la Universidad del Norte. 2003.

[5] Petrovsky, I. G. Lectures on partial differential equations. Dover. 1991.

[6] Vladimirov, V. S. Ecuaciones de la física matemática. Nauka. 1981.

Dirección de los autores: Pedro Isaza Jaramillo, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Cll 65 Cr 64 Autopista Norte pisaza@unalmed.edu.co — Jorge Eliécer Ospino Portillo, Universidad del Norte jospino@uninorte.edu.co