

De lo discreto a lo continuo en el modelamiento de membranas

Andrés M. Rivera

24 de junio de 2004

Resumen

Mediante el paso al continuo del lagrangiano obtenido de un arreglo bidimensional de masas y resortes, se obtienen distintos modelos matemáticos plausibles para la deflexión de una membrana fija en sus bordes debida a una carga vertical. Tales modelos se dan en términos de sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Se demuestran algunas propiedades de la deflexión tales como la no existencia de deflexiones puramente verticales, la existencia de al menos un punto de deflexión vertical y las simetrías de las soluciones del problema de contorno que modela la deflexión.

1. Introducción

Un problema en la matemática aplicada de especial interés práctico es la deformación de los materiales elásticos, por ejemplo una membrana, debido a cargas externas o simplemente debido a su propio peso. El término membrana se refiere usualmente a una película elástica y delgada que se concibe mediante una superficie

$$\mathbf{u} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

en donde Ω denota la configuración inicial de referencia. A finales del siglo XVIII, Laplace y Poisson encararon este problema desarrollando un modelo matemático en el cual se supone que las deformaciones experimentadas por las membranas son de la forma

$$\mathbf{u}(x, y) = (x, y, u_3(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega,$$

en donde u_3 es solución del problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta u_3 \equiv \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} &= -\omega \quad \text{en } \Omega, \\ u_3 &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

con $\omega > 0$ una carga vertical externa directamente proporcional a la fuerza por unidad de área de la membrana. El problema de contorno (1) puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= -\omega \mathbf{k} \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= (x, y, 0) \quad \text{en } \partial\Omega,\end{aligned}$$

donde \mathbf{k} es el vector unitario que actúa en la dirección contraria de la gravedad.

Este modelo es una primera aproximación para la deflexión y en él las deflexiones son puramente verticales lo que es contrario a la evidencia experimental.

El propósito principal de este trabajo es deducir distintos modelos matemáticos plausibles para la deflexión de una membrana fija en sus bordes debida a una carga vertical ω cuyas deflexiones ocurren en tres dimensiones y no son puramente verticales. Dichos modelos se deducen por paso al continuo del lagrangiano de un sistema discreto de partículas de masa m unidas por resortes de longitud a_0 y b_0 y constante de elasticidad k utilizando técnicas del cálculo variacional. Para facilitar el estudio, este trabajo se ha distribuido en dos partes.

En la primera, sección 2, se encuentran distintos modelos matemáticos para la deflexión de una membrana fija en sus bordes por paso al continuo de un sistema discreto de masas y resortes, para diferentes configuraciones de las masas y los resortes. Se generaliza al caso tridimensional de un arreglo de masas y resortes bajo una configuración cúbica.

En la segunda, sección 3, se estudia el problema de contorno que describe la deformación de la membrana fija en sus bordes en el caso estacionario cuando las masas y los resortes están bajo una configuración rectangular, se demuestran algunas propiedades de la deformación tales como: la no existencia de soluciones que modelen deflexiones puramente verticales, la existencia de al menos un punto cuya deflexión es puramente vertical y se hallan las simetrías de las soluciones para el problema de contorno en el caso estacionario.

2. Deducción de los modelos

Sea $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base usual en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . Sea $\Omega = [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$ ($\alpha, \beta > 0$) una región del plano en la dirección de los ejes \mathbf{i}, \mathbf{j} , respectivamente. Consideremos un arreglo rectangular de puntos de masa m unidos por resortes de longitud inicial a_0 y b_0 con constante de elasticidad k que esté fija en los bordes de Ω (ver fig. 1).

Posteriormente se somete el reticulado a la acción de una fuerza externa, de tal manera que el sistema queda tensionado en una nueva posición de equilibrio, donde la longitud de los resortes cambia respectivamente de a_0 a a y de b_0 a b (ver fig. 2).

De acuerdo con la Ley de Hooke la fuerza resultante que actúa sobre la

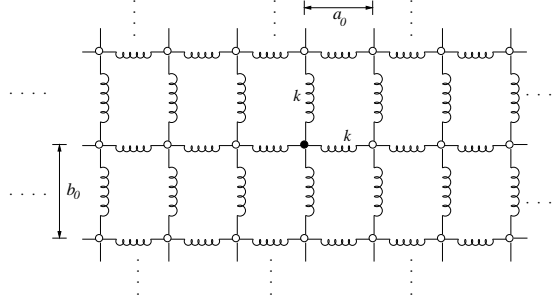


Figura 1: Un sistema discreto de masas iguales conectadas por resortes de longitud a_0 y b_0 con constante de elasticidad k como aproximación de una membrana.

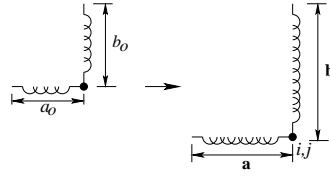


Figura 2: Deformación de los resortes al fijar el reticulado en los bordes del espacio de configuración Ω .

partícula (i, j) debida a la interacción con sus partículas vecinas es

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{i,j} = & k \frac{(\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j})}{\|\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\|} \left(\frac{\|\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0}{b_0} \right) \\
 & + k \frac{(\mathbf{u}_{i-1,j} - \mathbf{u}_{i,j})}{\|\mathbf{u}_{i-1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\|} \left(\frac{\|\mathbf{u}_{i-1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0}{b_0} \right) \\
 & + k \frac{(\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j})}{\|\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}\|} \left(\frac{\|\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0}{a_0} \right) \\
 & + k \frac{(\mathbf{u}_{i,j-1} - \mathbf{u}_{i,j})}{\|\mathbf{u}_{i,j-1} - \mathbf{u}_{i,j}\|} \left(\frac{\|\mathbf{u}_{i,j-1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0}{a_0} \right) - mg \mathbf{k},
 \end{aligned}$$

donde mg es el peso de la partícula (i, j) , y \mathbf{k} es el vector unitario que actúa en dirección contraria a la gravedad. Un cálculo elemental muestra que cada fuerza $\mathbf{F}_{i,j}$ se puede expresar como

$$\mathbf{F}_{i,j} = - \frac{\partial V(\mathbf{u}_{i,j})}{\partial \mathbf{u}_{i,j}},$$

de donde $V(\mathbf{u}_{i,j})$ está dada por:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{u}_{i,j}) &= \frac{-k}{2b_0} \left(\left(\|\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0 \right)^2 + \left(\|\mathbf{u}_{i-1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0 \right)^2 \right) \\ &\quad \frac{-k}{2a_0} \left(\left(\|\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0 \right)^2 + \left(\|\mathbf{u}_{i,j-1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0 \right)^2 \right) \\ &\quad + mg\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{i,j}. \end{aligned}$$

Llamaremos a $V_{i,j} \equiv V(\mathbf{u}_{i,j})$ la energía potencial sobre cada partícula (i, j) . La energía potencial V_l del sistema será la suma de la energía potencial en cada partícula como resultado de la elongación o compresión de los resortes, es decir $V_l = \sum_{i,j} V_{i,j}$.

La energía cinética del sistema es

$$T_l = \sum_{i,j} \frac{m}{2} \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}_{i,j}}{\partial t} \right\| \right)^2.$$

En consecuencia el lagrangiano L_l del sistema discreto es (ver [3])

$$\begin{aligned} L_l &= T_l - V_l = \sum_{i,j} L_{i,j} = \sum_{i,j} \frac{m}{2} (\|\dot{\mathbf{u}}_{i,j}\|)^2 - \sum_{i,j} V_{i,j} \\ &= \sum_{i,j} \left(\frac{m}{2} (\|\dot{\mathbf{u}}_{i,j}\|)^2 + \frac{k}{b_0} \left(\|\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{a_0} \left(\|\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0 \right)^2 - mg\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{i,j} \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left(\frac{m}{ab} (\|\dot{\mathbf{u}}_{i,j}\|)^2 + \frac{2}{ab} \left(\frac{k}{b_0} \left(\|\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0 \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k}{a_0} \left(\|\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0 \right)^2 \right) - 2mg\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{i,j} \right) ab \quad (2) \\ &= \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left(\frac{m}{ab} (\|\dot{\mathbf{u}}_{i,j}\|)^2 + 2 \left(\frac{kb}{ab_0} \left(\frac{\|\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}\| - b_0}{b} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{ka}{a_0b} \left(\frac{\|\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}\| - a_0}{a} \right)^2 \right) - 2 \frac{mg\mathbf{k}}{ab} \cdot \mathbf{u}_{i,j} \right) ab. \end{aligned}$$

La forma como se presenta el lagrangiano del sistema discreto en la última ecuación es justificada en la transición del sistema discreto al sistema continuo haciendo que el número de partículas en la región Ω tienda a infinito, lo que es equivalente a que $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$.

Mediante el paso al límite de los lagrangianos $L_{i,j}$, la cantidad $\frac{m}{ab}$ tiende a la densidad de masa μ y $\frac{mg}{ab}$ tiende al peso por unidad de área ω que supondremos constante ($\omega > 0$). Supondremos, a menos que se diga lo contrario, que el

factor de elasticidad k depende de las longitudes a y b , es decir: $k = k(a, b)$ y que los términos $\frac{k b}{a b_0}$, $\frac{k a}{a_0 b}$ tienden a unas constantes que llamaremos E_1 y E_2 respectivamente cuando $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 0$.

De igual forma en el paso al continuo los índices (i, j) que identifican una masa puntual se convierten en la posición coordenada (x, y) , por lo cual en vez de $\mathbf{u}_{i,j}$ se tiene $\mathbf{u}(x, y; t)$ para algún tiempo t . Más aún, las cantidades

$$\frac{\mathbf{u}_{i+1,j} - \mathbf{u}_{i,j}}{b} = \frac{\mathbf{u}(x+b, y; t) - \mathbf{u}(x, y; t)}{b},$$

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j+1} - \mathbf{u}_{i,j}}{a} = \frac{\mathbf{u}(x, y+a; t) - \mathbf{u}(x, y; t)}{a},$$

presentes en los lagrangianos $L_{i,j}$ tienden a $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}$ y $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}$, respectivamente, haciendo uso de b como un diferencial dx y a como un diferencial dy .

En consecuencia con $\lambda_1 = \frac{b_0}{b}$ y $\lambda_2 = \frac{a_0}{a}$ constantes, ($0 < \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$) el lagrangiano para el sistema continuo está dado por

$$L = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\mu \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right)^2 + \left(E_1 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_1 \right)^2 + E_2 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| - \lambda_2 \right)^2 \right) - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \right) dx dy,$$

de donde obtenemos que la *densidad lagrangiana* del sistema continuo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\mu \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right)^2 + \left(E_1 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_1 \right)^2 + E_2 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| - \lambda_2 \right)^2 \right) - \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \right).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas continuos bidimensionales (ver [2]) dan las ecuaciones de movimiento

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_1 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\|} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(E_2 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| - \lambda_2 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\|} \right) + \omega \mathbf{k},$$

en donde $\mathbf{u}(x, y; t) = (u_1(x, y; t), u_2(x, y; t), u_3(x, y; t))$ es el vector de desplazamiento. Por consiguiente el modelo matemático para la deformación de la membrana fija en sus bordes se puede describir como el siguiente problema de contorno

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= -\mathcal{D}(\mathbf{u}) - \omega \mathbf{k} && \text{en } \Omega, \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, y, 0) &= \mathbf{u}_0(x, y) && \text{en } \Omega, \\
\mathbf{u} &= (x, y, 0) && \text{en } \partial\Omega,
\end{aligned} \tag{3}$$

donde \mathcal{D} es el operador diferencial dado por

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_1 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_2 \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| - \lambda_2 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\|} \right).$$

El caso estacionario del problema de contorno (3) se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathbf{u}) &= -\omega \mathbf{k}, && \text{en } \Omega, \\
\mathbf{u} &= (x, y, 0) && \text{en } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{4}$$

Es de notar que el problema de contorno (4) es un sistema de ecuaciones no lineales en derivadas parciales con tres incógnitas, del cual no se conocen soluciones explícitas.

En este punto vale la pena mencionar que para el caso uni-dimensional correspondiente al modelamiento de una cuerda fija en sus bordes (ver [4]) el operador diferencial que modela la deformación es

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial x} \left(E_c \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_c \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\|} \right)$$

donde la constante E_c se conoce en teoría de resistencia de materiales como módulo de Young. Aunque el objetivo de este trabajo es dar un modelo plausible para la deformación de una membrana con una estructura microscópica semejante a la de un cristal, es natural interpretar de cierta forma las constantes E_1 y E_2 como módulos de Young en las direcciones principales $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, que dependen entre otras cosas del material de la membrana y de las cargas a que sea sometida. El lector interesado en profundizar más sobre ello puede ver ([3]).

De manera análoga para el caso tridimensional de un arreglo de resortes en el caso de una configuración cúbica, el lagrangiano del sistema continuo de partículas está dado por

$$\begin{aligned}
L = \iiint_S \frac{1}{2} &\left(\mu^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right)^2 - \left(E_1^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_1 \right)^2 \right. \right. \\
&+ E_2^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| - \lambda_2 \right)^2 + E_3^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right\| - \lambda_3 \right)^2 \\
&\left. \left. - f^*(x, y, z) \cdot \mathbf{u} \right) dx dy dz,
\end{aligned}$$

donde S es una región del espacio tridimensional \mathbb{R}^3 , μ^* , E^* son constantes apropiadas, f^* es la fuerza externa por unidad de volumen y $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$ es un vector de desplazamiento en \mathbb{R}^3 (ver fig. 3).

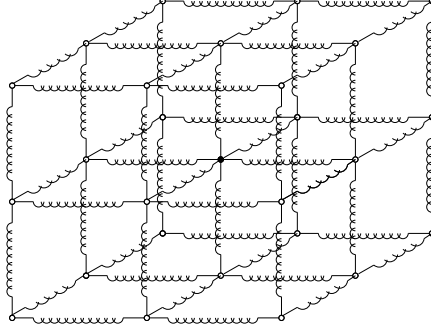


Figura 3: Arreglo tres dimensional de resortes bajo una configuración cúbica.

Haciendo un razonamiento análogo al aplicado en el caso bidimensional el operador diferencial \mathcal{D}_3 para el caso tres dimensional es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3(\mathbf{u}) = & \frac{\partial}{\partial x} \left(E_1^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| - \lambda_1 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\|} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_2^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| - \lambda_2 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\|} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_3^* \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right\| - \lambda_3 \right) \frac{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right\|} \right). \end{aligned}$$

Es de interés estudiar los distintos operadores que se obtienen bajo distintas configuraciones en el arreglo de los resortes, entre los cuales se consideran los hexagonales y los triangulares (ver fig. 4).

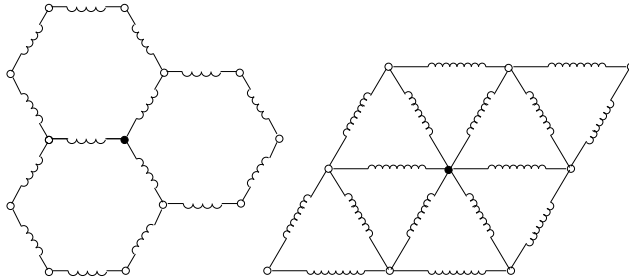


Figura 4: Arreglo de resortes bajo una configuración hexagonal y triangular.

Para una configuración triangular de resortes, el lagrangiano del sistema

continuo es

$$\begin{aligned}
L = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right)^2 \\
& - \left(E_1^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta\| - \lambda_1^* \right)^2 + E_2^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\theta}\| - \lambda_2^* \right)^2 \right. \\
& \left. + E_3^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\theta}\| - \lambda_3^* \right)^2 - f \right) dx dy,
\end{aligned}$$

donde D es el operador de derivación y los vectores unitarios \mathbf{e}_θ , $\mathbf{e}_{2\theta}$ y $\mathbf{e}_{3\theta}$ con $\theta = \frac{\pi}{3}$ están dados según la configuración triangular (ver fig 5).

De manera análoga se encuentra que el operador \mathcal{D}_T para la configuración triangular es

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_T(\mathbf{u}) = & D \left(E_1^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta\| - \lambda_1^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta\|} \right) \cdot \mathbf{e}_\theta \\
& + D \left(E_2^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\theta}\| - \lambda_2^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\theta}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\theta}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{2\theta} \\
& + D \left(E_3^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\theta}\| - \lambda_3^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\theta}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\theta}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{3\theta}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Para una configuración hexagonal de resortes el lagrangiano del sistema continuo es

$$\begin{aligned}
L = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right)^2 \\
& - \left(E_1^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\alpha\| - \lambda_1^* \right)^2 + E_2^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}\| - \lambda_2^* \right)^2 \right. \\
& \left. + E_3^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}\| - \lambda_3^* \right)^2 - f \right) dx dy,
\end{aligned}$$

y el operador diferencial \mathcal{D}_H para la configuración hexagonal es

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_H(\mathbf{u}) = & D \left(E_1^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\alpha\| - \lambda_1^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\alpha}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\alpha\|} \right) \cdot \mathbf{e}_\alpha \\
& + D \left(E_2^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}\| - \lambda_2^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{2\alpha} \\
& + D \left(E_3^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}\| - \lambda_3^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{3\alpha},
\end{aligned} \tag{6}$$

donde los vectores unitarios \mathbf{e}_α , $\mathbf{e}_{2\alpha}$ y $\mathbf{e}_{3\alpha}$ con $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ están dados según la configuración hexagonal (ver fig. 2.).

Para una configuración hexagonal de resortes el lagrangiano del sistema con-

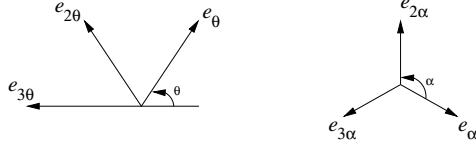


Figura 5: Vectores directores para las configuraciones hexagonales y triangulares.

tinuo es

$$\begin{aligned}
L = & \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \mu \left(\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\| \right)^2 \\
& - \left(E_1^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}\| - \lambda_1^* \right)^2 + E_2^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}\| - \lambda_2^* \right)^2 \right. \\
& \left. + E_3^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}\| - \lambda_3^* \right)^2 - f \right) dx dy,
\end{aligned}$$

y el operador diferencial $\mathcal{D}_{\mathcal{H}}$ para la configuración hexagonal es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(\mathbf{u}) = & D \left(E_1^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}\| - \lambda_1^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{\alpha} \\
& + D \left(E_2^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}\| - \lambda_2^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{2\alpha}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{2\alpha} \\
& + D \left(E_3^* \left(\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}\| - \lambda_3^* \right) \frac{D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}}{\|D\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_{3\alpha}\|} \right) \cdot \mathbf{e}_{3\alpha},
\end{aligned} \tag{7}$$

donde los vectores unitarios \mathbf{e}_{α} , $\mathbf{e}_{2\alpha}$ y $\mathbf{e}_{3\alpha}$ con $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ están dados según la configuración hexagonal (ver fig. 5).

3. Resultados principales

En esta sección se demostrarán ciertas características que presentan las deformaciones de las membranas que se encuentran fijas en sus bordes, siempre bajo el supuesto de la existencia y unicidad de soluciones clásicas con deflexión negativa para el problema de contorno (4). Con el término de solución clásica con deflexión negativa nos referimos a soluciones $\mathbf{u} \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, donde su tercera componente es negativa.

Como sabemos, la función $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y), u_3(x, y))$ indica el desplazamiento de cada punto (x, y) de la membrana del espacio de configuración inicial Ω .

En el estado no deformado, cada punto de la membrana tiene desplazamiento nulo, por otro lado los desplazamientos en las direcciones \mathbf{i} y \mathbf{j} dados por $u_1(x, y)$ y $u_2(x, y)$ respectivamente se pueden representar por

$$u_1(x, y) = x + p_1(x, y), \quad u_2(x, y) = y + p_2(x, y),$$

con $\mathbf{p} \in C(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, $\mathbf{p}(x, y) = (p_1(x, y), p_2(x, y), 0)$.

En un inicio, nuestro análisis se basa en la concepción de un sistema discreto de masas y resortes para modelar la deflexión de una membrana fija en sus bordes. Dicha deformación del sistema discreto que ocurre bajo su propio peso se puede modelar aceptando válida la ley de Hooke, la cual es una buena aproximación para pequeñas deformaciones de los resortes.

Esto nos indica que la variación de los desplazamientos en todas las direcciones deben ser relativamente pequeñas. Es decir, si

$$\left\| \frac{\partial p_1}{\partial x} \right\| \ll 1, \quad \left\| \frac{\partial p_2}{\partial y} \right\| \ll 1,$$

se deduce que

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\| \approx 1, \quad \left\| \frac{\partial u_2}{\partial y} \right\| \approx 1.$$

Teniendo en cuenta los valores $\lambda_1 = \frac{b_0}{b}$, $\lambda_2 = \frac{a_0}{a}$ con $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ se justifica la siguiente hipótesis

Hipótesis (H). Para todo $\omega > 0$ y todo rectángulo $\Omega = [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$, existe una única solución clásica \mathbf{u} de (4) con deflexión negativa. Más aún, \mathbf{u} satisface

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right\| > \lambda_1, \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \right\| > \lambda_2, \quad \text{para } (x, y, t) \in [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta] \times [0, \infty),$$

con $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ constantes.

En adelante todos los resultados obtenidos se harán a la luz de la anterior hipótesis.

Observación. La evidencia experimental indica que las membranas no se deflectan verticalmente. El siguiente teorema muestra que nuestro modelo matemático refleja este hecho experimental.

Teorema 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ una región rectangular. Para todo $(x, y) \in \Omega$, $(x, y) \neq (0, 0)$ no existen soluciones de la forma $\mathbf{u}(x, y) = (x, y, u_3(x, y))$ del problema de contorno (4).

Demostración. Supongamos que bajo una carga $\omega > 0$ la solución de (4) es de la forma $\mathbf{u}(x, y) = (x, y, u_3(x, y))$. Por ser solución, al reemplazarla en (4) se obtiene

$$E_1 \lambda_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0.$$

Se sigue entonces que $\frac{\partial u_3}{\partial x}$ es función sólo de la variable y , digamos que

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = g(y),$$

entonces $u_3(x, y) = g(y)x + h(y)$.

Así mismo, al reemplazar se obtiene

$$E_2 \lambda_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0,$$

y se concluye que $\frac{\partial u_3}{\partial y}$ es sólo función de x . En consecuencia las funciones $\frac{dg}{dy}$ y $\frac{dh}{dy}$ son constantes es decir

$$u_3(x, y) = (\xi_1 + \beta_1 y)x + \xi_2 + \beta_2 y,$$

como $u_3(x, y) \equiv 0$ en $\partial\Omega$ se concluye $\xi_1 = \beta_1 = \xi_2 = \beta_2 = 0$. De la sustitución también se obtiene que u_3 satisface la ecuación

$$E_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \left(1 - \frac{(\lambda_1 + (\frac{\partial u_3}{\partial x})^2)}{\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\|} \right) + E_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \left(1 - \frac{(\lambda_2 + (\frac{\partial u_3}{\partial y})^2)}{\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\|} \right) = -\omega, \quad (8)$$

y dado que $u_3 \equiv 0$ en Ω la ecuación (8) se satisface sólo cuando $\omega = 0$ que es el caso trivial donde no hay deflexión. \square

Observación. Es necesario indicar que existe al menos un punto de la membrana cuya deflexión es puramente vertical y este punto es el baricentro de la región. Esto se demostrará más adelante.

En este punto de la investigación es conveniente definir el concepto de simetría para la solución del problema de contorno (4).

Definición 2. Sea \mathbf{u} una solución de (4) y R la matriz dada por

$$R = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde \mathcal{A} es la matriz de rotación

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Diremos que R es una simetría de \mathbf{u} si $\hat{\mathbf{u}} = R \circ \mathbf{u} \circ \mathcal{A}^{-1}$ es solución de (4) siempre que \mathbf{u} sea solución.

Aquí denotamos por \mathcal{A}^{-1} a la matriz inversa de \mathcal{A} .

Teorema 3. Si la región Ω es un cuadrado con $\lambda_1 = \lambda_2$ y $E_1 = E_2$, entonces

$$\hat{\mathbf{u}}(x, y) = (-u_2(y, -x), u_1(y, -x), u_3(y, -x)). \quad (9)$$

es una solución de (4) siempre que $\mathbf{u}(x, y)$ sea solución de (4).

Demostración. A partir de la definición 1, con $\theta = \frac{\pi}{2}$ se obtiene la función $\hat{\mathbf{u}}$. Se verifica por cálculo directo que $\hat{\mathbf{u}}$ es solución de (4). \square

Teorema 4. Para una región $\Omega = [-\alpha, \alpha] \times [-\beta, \beta]$ cualquier solución \mathbf{u} de (4) es simétrica respecto a los ejes coordenados.

Demostración. Basta con verificar por cálculo directo que las funciones

$$\mathbf{u}_x(x, y) = (u_1(x, -y), -u_2(x, -y), u_3(x, -y)), \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_y(x, y) = (-u_1(-x, y), u_2(-x, y), u_3(-x, y)), \quad (11)$$

son soluciones de (4) donde $\mathbf{u}_y(x, y)$ es la reflexión respecto al eje x , y $\mathbf{u}_x(x, y)$ es la reflexión respecto del eje y . \square

La existencia de un punto cuya deflexión es puramente vertical está dada por la siguiente proposición.

Proposición 5. El baricentro $(0, 0)$ de Ω experimenta una deflexión puramente vertical.

Demostración. Queremos probar que el baricentro experimenta una deformación dada por $\mathbf{u}(0, 0) = (0, 0, u_3(0, 0))$. Aceptando la hipótesis **(H)** sobre la unicidad de soluciones de (4) y de las simetrías de la solución se tiene que

$$u_1(x, y) = -u_1(-x, y), \quad u_2(x, y) = -u_2(x, -y),$$

para todo $(x, y) \in \Omega$. De aquí se deduce sin dificultad que $u_1(0, 0) = 0$ y $u_2(0, 0) = 0$ lo que indica una deflexión puramente vertical del baricentro. \square

Teorema 6. La función $u_3 = u_3(x, y)$ satisface:

$$\left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{(x, y)} = - \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{(-x, y)}, \quad \left. \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|_{(x, y)} = - \left. \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|_{(x, -y)} \quad \text{para } (x, y) \in \Omega. \quad (12)$$

Demostración. Sabemos de las simetrías de la solución \mathbf{u} de (4), que la componente u_3 satisface

$$u_3(x, y) = u_3(-x, y), \quad u_3(x, y) = u_3(x, -y), \quad \text{para } (x, y) \in \Omega. \quad (13)$$

Por definición de $\left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{(x, y)}$ y aplicando (13) tenemos con $s = -h$ que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{(x, y)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_3(x+h, y) - u_3(x, y)}{h} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u_3(-x+s, y) - u_3(-x, y)}{s} \\ &= - \left. \frac{\partial u_3}{\partial x} \right|_{(-x, y)}. \end{aligned}$$

Un análisis similar demuestra que $\left. \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|_{(x, y)} = - \left. \frac{\partial u_3}{\partial y} \right|_{(x, -y)}$. \square

Corolario 7. *El baricentro de la región Ω satisface $\nabla u_3(0,0) = \mathbf{0}$.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia directa del teorema 4. \square

En lo siguiente supondremos que la región Ω es un cuadrado y que $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $E = E_1 = E_2$.

Lema 8. *La función $u_3 = u_3(x, y)$ satisface*

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \Big|_{(y,-x)}, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(y,-x)}. \quad (14)$$

Demostración. Del teorema 3 tenemos que en el caso de un cuadrado

$$\mathbf{u}_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-u_2(y, -x), u_1(y, -x), u_3(y, -x)),$$

es una simetría de la solución \mathbf{u} de (4). Suponiendo válida nuestra hipótesis **H** se tiene que $u_3(x, y) = u_3(y, -x)$, en consecuencia, con $s = -h$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{(x,y)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_3(x+h, y) - u_3(x, y)}{h} \\ &= - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{u_3(y, -x+s) - u_3(y, -x)}{s} \\ &= - \frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_{(y,-x)}. \end{aligned}$$

De manera análoga se concluye que $\frac{\partial u_3}{\partial y} \Big|_{(x,y)} = \frac{\partial u_3}{\partial x} \Big|_{(y,-x)}$.

Ahora bien de lo hecho antes tenemos que

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(x,y)} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \Big|_{(y,-x)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \Big|_{(x,y)} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(y,-x)} \quad \square$$

Teorema 9. *El baricentro $(0,0)$ es un máximo local de la función u_3 .*

Demostración. A partir del lema 1, para el punto $(0,0)$ se tiene que

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)}.$$

Por otro lado de la ecuación (4) tenemos

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\|}\right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} + \left(1 - \frac{\lambda}{\|\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\|}\right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} = -\frac{\omega}{E} < 0. \quad (15)$$

esto implica que $\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} < 0$.

Esto muestra que el baricentro es un máximo local. \square

Como parte final de la investigación en se presenta un cálculo numérico realizado en el programa Mathematica¹. Se ha modelado la deflexión de una membrana discretizada con $n \times n$ partículas masa, bajo una configuración cuadrada de resortes. Debido a la gran cantidad de cálculos numéricos que se generan al aumentar el número n de puntos masa el software utilizado obtuvo valores para un número no mayor de 9 puntos masa. La siguiente gráfica es el modelo discreto dado por el programa.

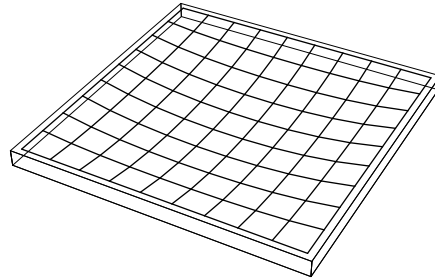


Figura 6: Modelo experimental para la deflexión de la membrana fija en los bordes hecho en el programa Mathematica.

4. Conclusiones

Se obtuvieron algunos modelos para la deflexión de membranas sujetas en los bordes. Estos modelos fueron dados en términos de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Se mostró que dichos modelos reflejan aspectos importantes, como son la no deflexión puramente vertical de los puntos, la existencia de por lo menos un punto cuya deflexión es puramente vertical y que dicho punto es el baricentro de la región, el cual es también un punto máximo para la deflexión vertical de la membrana para el caso en el cual la región de configuración inicial sea un cuadrado. Estos hechos son corroborados por la evidencia experimental.

El trabajo dista de ser completo. Un tema importante que queda pendiente es el de la existencia y unicidad de soluciones de los modelos encontrados. De otro lado, se demuestra en el caso de una región cuadrada la existencia de un punto máximo para la deformación vertical de la membrana, pero no su unicidad. Tampoco se analiza un principio de monotonía (análogo al caso de la cuerda, ver [4]) para las membranas fijas en los bordes.

Parece ser que estas preguntas abiertas se pueden responder si se prueba que el operador diferencial del modelo satisface alguna versión (vectorial) del Principio del Máximo. Estas cuestiones podrían ser tema de futuras investigaciones.

Agradecimientos. Este trabajo hace parte del trabajo de grado del autor, realizado en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle bajo la dirección del profesor Jaime Arango. El autor agradece al profesor Arango

¹Mathematica es una marca registrada de Wolfram Research

su orientación y su apoyo. También agradece a Alexander Gutiérrez la valiosa ayuda que le prestó en la elaboración del programa utilizado para la realización de cálculos numéricos mencionados en la sección 3.

Referencias

- [1] BEBERNES, JERROLD AND EBERLY, DAVID. *Mathematical problems from combustion theory*. Springer-Verlag, vol. 83, 1989.
- [2] EVANS, LAWRENCE. *Partial differential Equations*. American Mathematical Society. vol, 19, 1998.
- [3] GOLDSTEIN, H. *Classical Mechanics*, second edition. Addison-Wesley, 1980.
- [4] IBARGÜEN, E. *Modelo matemático para cuerdas elásticas*. Trabajo de grado, programa de matemáticas, Universidad del Valle, junio de 2000.
- [5] PROTTER, M. AND WEINBERGER, H. *Maximun Principles in Differential Equations*. Prentice-Hall, Inc 1967.
- [6] ROSSING, T. AND FLETCHER, N. *Principles of vibration and sound*. Springer, 1994.
- [7] ARANGO, JAIME. *Deflexión máxima de membranas*, (comunicación privada)