Demostración de la desigualdad triangular para ángulos en $\mathbb{R}^3$

Gilberto Arenas

Resumen

Si tomamos tres vectores distintos en $\mathbb{R}^3$ y consideramos los tres ángulos formados entre cada par de vectores, surge la siguiente pregunta ¿será la suma de dos de los ángulos mayor que el ángulo restante? La respuesta a la pregunta es afirmativa y en el artículo se presentan dos demostraciones para esta desigualdad.

1. Introducción y antecedentes

Quizá uno de los resultados de geometría elemental que más se recuerda es la desigualdad triangular: *Dado un triángulo cuyos lados miden a, b y c siempre se tiene la siguiente desigualdad $a \leq b + c$.* Al tomar tres vectores distintos en $\mathbb{R}^3$ y considerar los tres ángulos que estos vectores generan, surge un resultado análogo, pero en el que a, b y c no son longitudes sino ángulos entre vectores.

La motivación de estudiar la anterior analogía nace de un artículo de Bernardo Mayorga y Gilberto Arenas ([4]), donde se presenta un ejemplo de bola no convexa en $\mathbb{R}^2$ con la siguiente métrica (ver [1])

$$\begin{array}{rccl} d_* : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & d_*(x, y) = \left| \|x\| - \|y\| \right| + \theta(x, y), \end{array} \tag{1}$$

donde $\|x\|$ es la norma estándar en $\mathbb{R}^2$ y $\theta(x, y)$ es el ángulo entre x y y. En general, el concepto de ángulo entre dos vectores de un espacio vectorial L con producto interno se define así:

Definición 1. *Dados dos elementos $x, y \in L$, se define el ángulo $\theta(x, y)$ entre ellos mediante la función*

$$\begin{array}{rcl} \theta : L \times L & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \theta(x, y) \equiv \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x = y = \mathbf{0}\,; \\ \pi/2, & \text{si} \quad x = \mathbf{0} \ \veebar \ y = \mathbf{0}\,; \\ \arccos \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}, & \text{si} \quad x \neq \mathbf{0} \ \wedge \ y \neq \mathbf{0}\,. \end{cases} \end{array} \tag{2}$$

Nótese que $\theta(x, y) \in [0, \pi]$, y que $\theta = 0$ si y sólo si $x = \alpha y$ para algún $\alpha > 0$.

Para que d_* sea una métrica debe mostrarse que

$$\theta(x,y) \leq \theta(x,z) + \theta(y,z). \tag{3}$$

La demostración de esta desigualdad ($L = \mathbb{R}^2$) se intuye a partir de la figura 1 que muestra los caso típicos de las posiciones relativas de x, y y z.

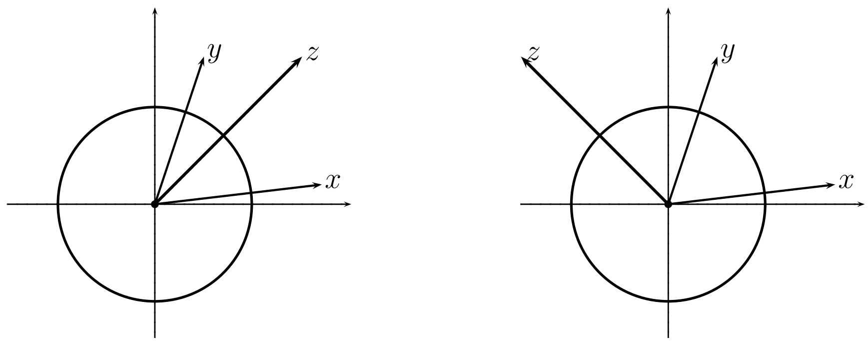

Figura 1: Representación de tres vectores en $\mathbb{R}^2$.

Surge ahora la pregunta: ¿es cierta la desigualdad (3) en cualquier espacio vectorial L con producto interno? En este artículo se responderá afirmativamente esta pregunta si $L = \mathbb{R}^3$. Específicamente mostraremos la *desigualdad triangular para ángulos en* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2. *Sean* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, *entonces*

$$\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leq \theta(\mathbf{x},\mathbf{z}) + \theta(\mathbf{y},\mathbf{z}).$$

Existen demostraciones de este resultado (por ejemplo, ver [3]). En esta nota se darán dos demostraciones que se comparan ventajosamente con las conocidas y que se valen de conceptos elementales.

2. El resultado principal

Primero, obsérvese que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente dependientes, entonces el teorema 2 se sigue de la definición 1. Por consiguiente, para la prueba se consideraran sólo vectores no nulos y además tales que la suma entre cualquier par de ángulos sea menor que π.

Es fácil concluir que $\theta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \theta(x,y)$ donde $x = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, $y = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$. Esto es, encontrar el ángulo entre dos elementos cualesquiera del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$, es equivalente a encontrar el ángulo entre sus vectores unitarios. Denotamos $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\right\}$. Dados $x, y \in S$, con $x \neq \alpha y$, definamos

$$x_y = \frac{y - \langle x,y\rangle x}{\|y - \langle x,y\rangle x\|}.$$

Aquí, x_y se obtiene utilizando el proceso de Gram-Schmidt a $\{x, y\}$. Es de observar que el elemento x_y es unitario, tangente al arco con punto inicial x y punto final y que está contenido en S, y además $\langle x, x_y \rangle = 0$.

Definición 3. *Sean $x, y, z \in S$, definamos los siguientes ángulos*

$$\varphi_x = \theta\left(x_y, x_z\right), \qquad \varphi_y = \theta\left(y_z, y_x\right), \qquad y \qquad \varphi_z = \theta\left(z_x, z_y\right).$$

En lo que sigue denotaremos

$$\alpha = \theta\left(x, y\right), \quad \beta = \theta\left(z, x\right) \quad \text{y} \quad \gamma = \theta\left(z, y\right).$$

Lema 4. *Para cada terna $x, y, z \in S$, se tiene*

$$\cos\alpha = \cos\beta \cdot \cos\gamma + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\varphi_z. \tag{4}$$

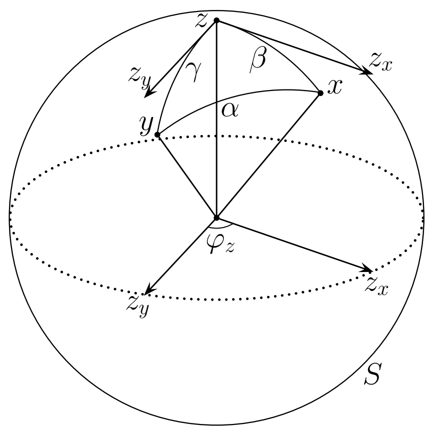

Figura 2: Representación de $x,\ y,\ z \in S$

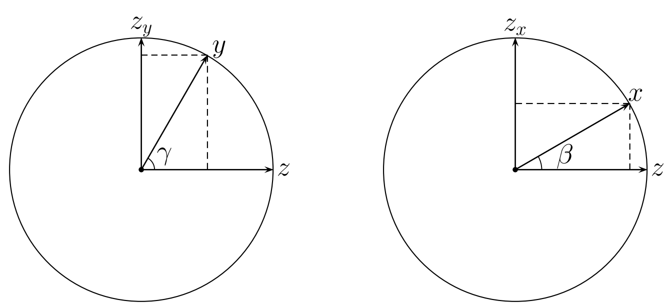

Figura 3: $y = z \cdot \cos\gamma + z_y \cdot \operatorname{sen}\gamma, \qquad x = z \cdot \cos\gamma + z_x \cdot \operatorname{sen}\gamma.$

Demostración. A partir de las figuras 2 y 3 se observa que

$$y = z \cdot \cos\gamma + z_y \cdot \operatorname{sen}\gamma, \qquad x = z \cdot \cos\beta + z_x \cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Por otra parte, tenemos que $\cos\varphi_z = \langle z_y, z_x \rangle$. Sabemos también que $\langle z, z_y \rangle = \langle z, z_x \rangle = 0$. Así, utilizando la definición de α se tiene

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \langle x, y \rangle \\
&= \langle z \cdot \cos\beta + z_x \cdot \operatorname{sen}\beta, z \cdot \cos\gamma + z_y \cdot \operatorname{sen}\gamma \rangle \\
&= \cos\beta \cdot \cos\gamma \cdot \langle z, z \rangle + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \langle z, z_y \rangle \\
&\quad + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\gamma \cdot \langle z_x, z \rangle + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \langle z_x, z_y \rangle \\
&= \cos\beta \cdot \cos\gamma + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \cdot \cos\varphi_z. \qquad \square
\end{aligned}$$

Teorema 5. *Para cada terna $x, y, z \in S$, se tiene la siguiente desigualdad*

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma.$$

Demostración. A partir de la ecuación (4) se tiene que

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma} = \cos\varphi_z.$$

Dado que la imagen de la función coseno está entre -1 y 1, se obtiene

$$\left| \frac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma} \right| < 1,$$

en consecuencia

$$-\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma < \cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma < \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma,$$

equivalentemente

$$\cos\beta \cdot \cos\gamma - \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma < \cos\alpha < \cos\beta \cdot \cos\gamma + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma,$$

es decir,

$$\cos(\beta + \gamma) < \cos\alpha < \cos(\beta - \gamma) = \cos(|\beta - \gamma|).$$

Puesto que la función $\arccos$ es decreciente, se tiene

$$|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma.$$

Completando así la demostración deseada. $\square$

La prueba del teorema 2 es consecuencia directa del teorema anterior y de las consideraciones realizadas al inicio de esta sección.

3. Una demostración alterna

La siguiente demostración utiliza algunas herramientas diferentes a las utilizadas en la demostración anterior.

En concordancia con la notación anterior

$$\cos\alpha = \langle x, y\rangle\,, \qquad \cos\beta = \langle x, z\rangle\,, \quad \text{y} \quad \cos\gamma = \langle y, z\rangle\,.$$

Para $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ sea T la única isometría que satisface

$$z \longmapsto (1,0,0)\,; \qquad y \longmapsto (\cos\gamma, \operatorname{sen}\gamma, 0)\,; \qquad x \longmapsto (\cos\beta, x_2, x_3)\,.$$

Se demostrará que

$$\alpha \leq \beta + \gamma.$$

En efecto, dado que la transformación preserva normas, entonces

$$\|x\| = \|Tx\| = \|(\cos\beta, x_2, x_3)\| = \cos^2\beta + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

y esto a su vez implica que

$$x_2^2 + x_3^2 = \operatorname{sen}^2\beta,$$

y por tanto, $x_2^2 \leq \operatorname{sen}^2\beta$. Dado que $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$, se tiene que $\operatorname{sen}\beta \geq 0$ y en consecuencia

$$-\operatorname{sen}\beta \leq x_2 \leq \operatorname{sen}\beta.$$

En particular, esta desigualdad implica que $x_2 \geq -\operatorname{sen}\beta$.

Además, dado que $\operatorname{sen}\gamma \geq 0$ tenemos que

$$x_2 \cdot \operatorname{sen}\gamma \geq -\operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

sumando $\cos\beta \cdot \cos\gamma$ obtenemos

$$\cos\beta \cdot \cos\gamma + x_2 \cdot \operatorname{sen}\gamma \geq \cos\beta \cdot \cos\gamma - \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\gamma \tag{5}$$

pero dado que

$$\cos\alpha = \langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle = \cos\beta \cdot \cos\gamma + x_2 \cdot \operatorname{sen}\gamma$$

la inecuación (5) se transforma en

$$\cos\alpha \geq \cos\left(\beta + \gamma\right),$$

así, aplicando la función $\arccos t$, la cual es decreciente, y dado que $\alpha,\ \beta + \gamma \in [0, \pi]$, obtenemos que

$$\alpha \leq \beta + \gamma$$

como se quería demostrar. $\square$

Agradecimientos. El autor agradece al profesor Bernardo Mayorga de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander por sus valiosas sugerencias.

Referencias

[1] Barnsley, Michael F. *Fractals Everywhere.* Academic Press, Cambridge, MA, 1989.

[2] Berger, Marcel. *Geometry I – II.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[3] Do Carmo, M. *Riemannian Geometry.* Birkhauser, 1992.

[4] Mayorga, B. y Arenas, G. *Bolas no convexas.* Lecturas Matemáticas, Volumen 24, páginas 39 – 51, Colombia, 2003.