Vol. XII № 2 Dic. (2004)
Matemáticas: 53–68

**Matemáticas:
Enseñanza Universitaria**

Sobre clases de grupos finitos solubles

Jesús Alonso Cabrera   Ismael Gutiérrez García

Recibido Agt. 24, 2004   Aceptado Nov. 24, 2004

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados básicos sobre la teoría de las clases de grupos finitos solubles. Esta parte del álgebra dio origen y fundamentó una completa generalización de los teoremas de Sylow en el universo de los grupos finitos solubles.

Palabras y frases claves: Grupos finitos solubles, clases de Schunck, formaciones localmente definidas, $\mathfrak{F}$-proyectores.

Abstract

This paper presents some basic results of the theory of finite soluble groups classes. This part of algebra laid the foundation to a full generalization of Sylow's theorems in the universe of finite soluble groups.

Keywords: Finite soluble groups, Schunck classes, $\mathfrak{F}$-projectors.

AMSC(2000): Primary: 20D10, Secondary: 20B05

1 Introducción

Supondremos que todos los grupos que se consideran pertenecen a la clase de todos los grupos finitos solubles. Esta clase será denotada con $\mathfrak{S}$. Con la letra $\mathbb{P}$ denotaremos el conjunto de todos los números primos, con π un subconjunto de $\mathbb{P}$ y $\pi' := \mathbb{P} \setminus \pi$. Si G es un grupo finito, escribiremos $\sigma(G)$ para denotar el conjunto de todos los divisores primos del orden $|G|$ de G.

El resultado básico más importante en la teoría de grupos finitos es el teorema de Sylow (1872). En este se destacan tres aspectos fundamentales: La existencia (cada grupo finito G posee p-subgrupos de Sylow), la conjugación (los p-subgrupos de Sylow de G forman una clase de conjugación de G), la dominación (cada p-subgrupos de G está contenido en un p-subgrupo de Sylow de G).

En el contexto soluble Phillip Hall logró extender los resultados de Sylow y aparece la noción de π-subgrupos en lugar de p-subgrupos. Otra extensión a los resultados de Sylow fué presentada en 1961 por Roger Carter en su tesis doctoral, donde demostró que cada grupo finito soluble tiene subgrupos nilpotentes auto-normalizados y estos conforman una clase de conjugación del grupo.

El descubrimiento de Carter despertó un considerable interés por el estudio de los grupos solubles finitos. La señal mas importante en la búsqueda de una generalización mas amplia y la fuente de inspiración para multiples trabajos posteriores fue el seminal artículo de W. Gaschütz "Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen" (1963). Gaschütz introdujo por primera vez los conceptos de formaciones saturadas y $\mathfrak{F}$-proyectores y demostró que estos existen y forman una clase de conjugación en cada grupo finito soluble G, si y sólo si $\mathfrak{F}$ es una clase de Schunk o una formación saturada de grupos finitos solubles.

En este artículo nos ocupamos de presentar una demostración de este resultado. Para ello introducimos inicialmente las clases de Schunck y las las formaciones saturadas. En primer lugar presentamos definiciones básicas como subgrupo conmutador, el subgrupo de Frattini de un grupo G y algunas de sus propiedades. Posteriormente introducimos las clases c-cerradas donde c es una función entre clases o mas especifico un operador clausura.

2 Preliminares

Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos de grupo cociente, isomorfismos de grupos, grupos simples, producto directo de grupos y los teoremas de Sylow.

Definición 1. *Sea G un grupo, A y B subgrupos de G.*

1. *Para g, $h \in G$ definimos $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$ y se llama a $[g, h]$ el conmutador de g con h.*
2. *El subgrupo conmutador de A y B notado con $[A, B]$ se define de la siguiente manera*
$$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$$
3. *Sea $K_1(G) := G$ y para $i \geq 1$ se define los subgrupos $K_{i+1}(G)$ recursivamente así $K_{i+1}(G) = [K_i(G), G]$.*

   La cadena $G = K_1(G) \geq K_2(G) \geq \cdots$ de subgrupos de G es llamada la serie central descendente de G.
4. *Un grupo G se dice es nilpotente de clase $c > 0$ si la serie central descendente de G satisface la condición*
$$K_c(G) \neq \langle 1 \rangle = K_{c+1}(G)$$
   Si $G = \langle 1 \rangle$, entonces se dice que G es nilpotente de clase cero.

Teorema 2. *Sean G y H grupos finitos.*

1. *Sean $U \leq G$ y $N \trianglelefteq G$. Si G es nilpotente, entonces U y G/N son nilpotentes; además $c(U) \leq c(G)$ y $c(G/N) \leq c(G)$.*
2. *Si G y H son nilpotentes, entonces su producto directo $G \times H$ es nilpotente y $c(G \times H) = \max\{c(G), c(H)\}$.*

3. *Sea M, $N \trianglelefteq G$ y supóngase que G/M y G/N son nilpotentes. Entonces $G/(M \cap N)$ es nilpotente, y $c(G/(M \cap N)) = \max\{c(G/M), c(G/N)\}$.*

Demostración. Ver [1], A (8.2) □

Teorema 3. *Sea G un grupo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es nilpotente.*
2. *Si $U < G$, entonces $U < N_G(U)$.*
3. *Todo subgrupo maximal de G es normal.*
4. *G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow.*
5. *Todo factor principal H/K de G es central. Es decir, si H/K es un factor principal de G, entonces $H/K \leq Z(G/K)$.*

Demostración. Ver [1], A (8.3) □

De la parte 4 del teorema anterior se deduce que todo p-grupo es nilpotente, y por 5 el grupo simétrico Sym(3) no es nilpotente, puesto que $M = \{(1), (1,2)\}$ es maximal pero no es normal en Sym(3).

Definición 4. *Sea G un grupo finito no trivial. El subgrupo de Frattini de G, notado por $\Phi(G)$ se define de la siguiente manera:*

$$\Phi(G) = \bigcap\{M \mid M \lessdot G\}.$$

(Utilizamos la notación $M \lessdot G$ para indicar que M es un subgrupo maximal de G.) Si $G = \langle 1 \rangle$, entonces $\Phi(G) : \langle 1 \rangle$.

Si G es un grupo cíclico de orden n, digamos $G = \langle x \rangle$, entonces $\Phi(G) = \langle x^m \rangle$, donde m es el producto de los diferentes primos que dividen a n.

Si G es un grupo no trivial, $N \trianglelefteq G$ y $N \leq \Phi(G)$, entonces $N \leq M$ para todo subgrupo maximal M, luego

$$\Phi(G/N) = \bigcap_{M \lessdot G} (M/N) \Big(\bigcap_{M \lessdot G} M \Big)/N = \Phi(G)/N.$$

Un elemento $a \in G$ se llama un no-generador de G si para todo subconjunto C de G, $\langle a, C \rangle = G$ implica que $\langle C \rangle = G$. El subgrupo $\Phi(G)$ puede ser caracterizado también en términos de los no-generadores de G, como se demuestra en el siguiente lema.

Lema 5. *Sea G un grupo finito. Entonces*

$$\Phi(G) = \{x \in G \mid x \text{ es no generador de } G\}.$$

Demostración. Sean $N = \{x \in G |\ x$ es no generador de $G\}$, $a \in \Phi(G)$ y $G = \langle a, C \rangle$. Supóngase que $\langle C \rangle < G$, luego existe un subgrupo maximal M de G con $\langle C \rangle \leq M$. Dado que $a \in \Phi(G) \leq M$ se tiene $a \in M$, luego $G = \langle a, C \rangle \leq M$, una contradicción, por lo tanto $G = \langle C \rangle$. Así $\Phi(G) \subseteq N$.

Por otra parte, sea $a \in N$ y M cualquier subgrupo maximal de G, dado que $M = \langle M \rangle < G$, entonces $M \leq \langle M, a \rangle < G$ como M es maximal $M = \langle M, a \rangle$ por lo tanto $a \in M$ y así $a \in \Phi(G)$. $\square$

Lema 6. *Sea G un grupo finito. Entonces $\Phi(G)$ es nilpotente.*

Demostración. Sea P un p-subgrupo de Sylow de $\Phi(G)$ para algún primo p. Dado que $\Phi(G) \trianglelefteq G$. El argumento de Frattini nos asegura que $G = \Phi(G)N_G(P)$. Utilizando el lema anterior se tiene que $G = N_G(P)$, esto es, $P \trianglelefteq G$ y en particular $P \trianglelefteq \Phi(G)$. Así todo subgrupo maximal de $\Phi(G)$ es normal, por lo tanto $\Phi(G)$ es nilpotente. $\square$

Lema 7. *Si un número primo $p \mid |\Phi(G)|$, entonces $p \mid |G/\Phi(G)|$.*

Demostración. Supóngase que $p \nmid |G/\Phi(G)|$ y sea P un p-subgrupo de Sylow de $\Phi(G)$, luego $P \trianglelefteq G$ y $(|G/P|, p) = 1$, se sigue del teorema de Zassenhaus que P tiene un complemento M en G (Ver [4], I (18.1)). Así $G = PM \leq \Phi(G)M = M < G$, una contradicción. En consecuencia $p \mid |G/\Phi(G)|$.
$\square$

A continuación se define la clase de grupos finitos de mayor interés en este trabajo, la clase de los grupos finitos solubles

Definición 8. *Se dice que un grupo finito G es soluble si sus factores principales son todos abelianos.*

Del Teorema (3) se tiene que los grupos finitos nilpotentes son solubles. La clase de los grupos solubles toma varias propiedades de clausura como las probadas para grupos nilpotentes como puede verse en el siguiente teorema:

Teorema 9. *Sea G un grupo finito*

1. *Sea $U \leq G$ y $N \trianglelefteq G$. Si G es soluble, entonces U y G/N son también solubles.*

2. *Sea $N \trianglelefteq G$, si N y G/N son solubles, entonces G es soluble.*

3. *Si $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ y G/N_i es soluble para $i = 1, 2$. Entonces $G/(N_1 \cap N_2)$ es también soluble.*

4. *Si N_1 y N_2 son subgrupos normales solubles de G, entonces N_1N_2 es soluble.*

5. *G es soluble si y sólo sí $G/\Phi(G)$ es soluble.*

Demostración. Ver [1], A (10.2) $\square$

Definición 10. *Sea U un subgrupo de un grupo G. Se define el* Core *de U en G así:*

$$\mathrm{Core}_G(U) := \bigcap_{g \in G} U^g$$

Un grupo finito G es llamado primitivo si tiene un subgrupo maximal M tal que $\mathrm{Core}_G(M) = \langle 1 \rangle$. *En esta situación M se llama un estabilizador de G.*

Proposición 11. *Sea G un grupo, $U \leq G$. Entonces* $\mathrm{Core}_G(U)$ *es el mayor subgrupo normal de G contenido en U.*

Demostración. Ver [5], (1.7.18). $\square$

El grupo simétrico de grado 3 (notado con Sym(3)) es primitivo. Sus estabilizadores son sus 2-subgrupos de Sylow. Dado que en un grupo nilpotente todo subgrupo maximal es normal, un grupo nilpotente es primitivo si y sólo sí tiene orden primo, en este caso $\langle 1 \rangle$ es un estabilizador.

Observaciones 12. (a) *Sea G un grupo finito no trivial. Si M es un subgrupo maximal de G, entonces $G/\mathrm{Core}_G(M)$ es primitivo con estabilizador $M/\mathrm{Core}_G(M)$.*
(b) *Si $K \trianglelefteq G$ y G/K es primitivo, con estabilizador M/K, entonces $M \lessdot G$ y* $\mathrm{Core}_G(M) = K$.

Los grupos primitivos juegan un papel importante en el estudio de los grupos solubles, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 13. *Sea G un grupo finito soluble. Si G es primitivo con estabilizador M, entonces G tiene un único subgrupo N normal minimal autocentralizado, esto es, $N = C_G(N)$ y N es complementado por M en G.*

Demostración. Sea G un grupo soluble primitivo con estabilizador M, sea $\langle 1 \rangle \neq K \trianglelefteq G$ y $C = C_G(K) \trianglelefteq G$. Dado que $K \neq M$, se tiene

$$KM = G \tag{1}$$

Además, como $C \cap M \trianglelefteq M$, entonces $M \subset N_G(C \cap M)$ y por otro lado $K \subset C_G(C_G(K) \cap M)$, es decir, $C \cap M$ está normalizado por M y centralizado por K, entonces para $km \in KM$ se tiene:

$$(C \cap M)^{km} = m^{-1}k^{-1}(C \cap M)km = m^{-1}(C \cap M)m = C \cap M$$

Luego $C \cap M \trianglelefteq KM = G$ y por lo tanto

$$C \cap M = \langle 1 \rangle \tag{2}$$

Si $D \trianglelefteq G$ con $\langle 1\rangle \neq D \leq C$, entonces $C = C \cap GC \cap DM = D(C \cap M) = D$. Entonces

$$C = \langle 1\rangle \qquad \text{ó} \qquad C \cdot\!\trianglelefteq G \tag{3}$$

Dado que G es soluble G tiene un subgrupo normal abeliano N. Tómese $K = N$, como $N \leq C = C_G(N)$, se sigue de (3) que $N = C$ y luego N es un subgrupo normal minimal de G.

Si existiera un segundo subgrupo normal minimal L de G, entonces $N \cap L = \langle 1\rangle$, $NL = LN \trianglelefteq G$ y para todo $n \in N$ y todo $l \in L$ se tendría $ln = nl$, así $L < C_G(N)$ contrario a (3). Luego N es el único subgrupo normal minimal de G. De (3) y (2) se tiene que M complementa a N en G. □

El grupo Sym(3) es soluble y es primitivo con único subgrupo normal minimal autocentralizado Alt(3).

Teorema 14. *Sea G un grupo. Si G es primitivo con estabilizadores M_1 y M_2, entonces M_1 y M_2 son conjugados en G.*

Demostración. Si G es un grupo finito soluble primitivo, entonces G tiene un único subgrupo normal minimal N. Si $G = N$, entonces $M_1 = M_2 = \langle 1\rangle$.

En otro caso sea L/N un factor principal de G, entonces $\sigma(N) = p$ y $\sigma(L/N) = q$, p y q primos. Dado que L no es normal minimal $q \neq p$. Como M_1 y M_2 son complementos de N en G se sigue que $(M_i \cap L)N = L$, para $i = 1, 2$. Entonces $M_1 \cap L \in \mathrm{Syl}_q(L)$ y $M_2 \cap L \in \mathrm{Syl}_q(L)$. Por los teoremas de Sylow sea $M_1 \cap L = (M_2 \cap L)^l$ con $l \in L$.

Luego $M_1 \cap L \trianglelefteq M_1$ y $M_1 \cap L = (M_2 \cap L)^l \trianglelefteq M_2^l$. Si $M_1 \neq M_2^l$, entonces $\langle M_1, M_2^l\rangle G$ y $M_1 \cap L$ sería un subgrupo normal no trivial de G contenido en M_1, en contradicción a que $\mathrm{Core}_G(M) = \langle 1\rangle$. Por lo tanto $M_1 = M_2^l$, es decir M_1 y M_2 son conjugados en G. □

3 Clases de grupos y funciones entre clases

Dentro de la teoría de los grupos finitos solubles se han desarrollado en los últimos cuarenta años las clases de grupos y las funciones de clases. En especial se estudia las clases que son cerradas bajo ciertas funciones de clases. Ejemplos de estas clases son las formaciones, las clases saturadas y las clases de Schunck.

Asumiremos que las clases de grupos tiene la propiedad siguiente: si $G \in \mathfrak{X}$ y $H \cong G$, entonces $H \in \mathfrak{X}$. La clase isomorfa de un grupo G (notada (G)) consiste de todos los grupos isomorfos a G. Usaremos el término $\mathfrak{X}$-grupo para describir a un grupo perteneciente a la clase $\mathfrak{X}$. Las clases de grupos más usadas en este trabajo son las siguientes:

$\emptyset$	Denota la clase vacía
$\mathfrak{A}$	Denota la clase de los grupos finitos abelianos
$\mathfrak{N}$	Denota la clase de los grupos finitos nilpotentes
$\mathfrak{S}$	Denota la clase de los grupos finitos solubles
$\mathfrak{P}$	Denota la clase de los grupos finitos primitivos en $\mathfrak{S}$
$\mathfrak{S}_p$	Denota la clase de los p-grupos
$\mathfrak{S}_\pi$	Denota la clase de los π-grupos

Definición 15. *Una función que envía clases de grupos en clases de grupos se denomina función de clases. Una función entre clases* C *es llamada expansiva si para toda clase* $\mathfrak{X}$ *se cumple que* $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{C}(\mathfrak{X})$.

Para una clase de grupos $\mathfrak{X}$ definimos:

1. $\mathsf{S}(\mathfrak{X}) = (G \mid G \leq H$ para algún H en $\mathfrak{X})$
2. $\mathsf{Q}(\mathfrak{X}) = (G \mid \exists H \in \mathfrak{X}$ y $\exists\ \varphi : H \to G,\ \varphi$ un epimorfismo$)$
3. $\mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) = (G \mid \exists N_1, \ldots, N_r \trianglelefteq G$ con $G/N_i \in \mathfrak{X}$ y $\bigcap\limits_{i=1}^{r} N_i = \langle 1 \rangle)$
4. $\mathsf{D}_0(\mathfrak{X}) = (G \mid G = H_1 \times \cdots \times H_r$ con cada $H_i \in \mathfrak{X})$
5. $\mathsf{E}_\Phi(\mathfrak{X}) = (G \mid \exists N \trianglelefteq G$ con $N \leq \Phi(G)$ y $G/N \in \mathfrak{X})$
6. $\mathsf{P}(\mathfrak{X}) = (G \mid \mathsf{Q}((G)) \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{X})$

Así, $\mathsf{P}(\mathfrak{X})$ consiste de todos los grupos $G \in \mathfrak{S}$, cuyos grupos factores primitivos pertenecen todos a $\mathfrak{X}$. Por el Teorema (2) se tiene que $\mathsf{S}(\mathfrak{N}) = (G \mid G \leq H$ para algún H en $\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$.

Lema 16. *Excepto* P *todas las funciones de clases definidas anteriormente son funciones expansivas.*

Demostración.
1. Sea $G \in \mathfrak{X}$. Dado que $G \leq G \in \mathfrak{X}$, se tiene que $G \in \mathsf{S}(\mathfrak{X})$.
2. Por definición $\mathsf{Q}(\mathfrak{X})(G \mid \exists H \in \mathfrak{X}$ y $G = \varphi(H) \cong H/\mathcal{N}(\varphi))$, donde φ es un homomorfismo sobre H. Es decir,
$$\mathsf{Q}(\mathfrak{X}) = (G \mid \exists H \in \mathfrak{X},\ N \trianglelefteq H \text{ y } G \cong H/N)$$
Sea $G \in \mathfrak{X}$. Dado que $G \cong G/\langle 1 \rangle$, se tiene que $G \in \mathsf{Q}(\mathfrak{X})$.
3. Sea $G \in \mathfrak{X}$. Entonces $G/\langle 1 \rangle \cong G \in \mathfrak{X}$. Por lo tanto $G \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X})$.
4. Sea $G \in \mathfrak{X}$. Evidentemente $G \cong G \times \langle 1 \rangle$. Entonces $G \in \mathsf{D}_0(\mathfrak{X})$.

5. Sea $G \in \mathfrak{X}$. Dado que $\langle 1 \rangle \leq \Phi(G)$ y $G/\langle 1 \rangle \cong G \in \mathfrak{X}$, se verifica que $G \in E_{\Phi}(\mathfrak{X})$.
   $\square$

Examinemos que en general no se cumple $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{P}(\mathfrak{X})$. Sea G un grupo no primitivo, por ejemplo sea G el grupo cíclico de orden cuatro. Entonces $\mathsf{P}((G)) = (H \mid \mathsf{Q}((H)) \cap \mathfrak{P} \subseteq (G))\emptyset \not\supseteq (G)$.

Definición 17. *Sea G un grupo. Se dice que G es un producto subdirecto de los grupos $H_1, \cdots, H_n$ si se verifican:*

1. *$G \leq H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$*
2. *Si π_i es la proyección de $H_1 \times \cdots \times H_n$ sobre H_i; entonces $\pi_i(G) = H_i$.*

Lema 18. *Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, entonces*

$$\mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) = (G \mid G \text{ es producto subdirecto de } \mathfrak{X}\text{-grupos})$$

Demostración. Sea $G \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X})$. Entonces existen $N_1, \cdots, N_k \trianglelefteq G$ tales que

$$G/N_i \in \mathfrak{X} \text{ y } \bigcap_{i=1}^{k} N_i = \langle 1 \rangle$$

Definamos

$$\widetilde{G} := \{(gN_1, \ldots, gN_k) \mid g \in G\} \leq (G/N_1) \times \cdots \times (G/N_k)$$

$\widetilde{G}$ es subdirecto en $(G/N_1) \times \cdots \times (G/N_k)$ (ver [1], A(4.17)). En particular la función $\tau : G \to \widetilde{G}$ definida por $\tau(g) = (gN_1, \ldots, gN_k)$ es un isomorfismo. Entonces G es un producto subdirecto de $\mathfrak{X}$-grupos.

Recíprocamente, sea G un producto subdirecto de los $\mathfrak{X}$-grupos $H_1, \ldots, H_k$. Entonces, para $i = 1, \ldots, k$ se tiene que $\pi_i(G) = H_i$. Denotemos la restricción de π_i a G por $\overline{\pi}_i$. Entonces

$$H_i = \mathrm{Im}(\overline{\pi}_i) \cong G/\mathcal{N}(\overline{\pi}_i) \cong G/(\mathcal{N}(\pi_i) \cap G)$$

Sea $N_i = \mathcal{N}(\pi_i) \cap G$. Entonces $G/N_i \cong H_i \in \mathfrak{X}$. Por otro lado se tiene que $\mathcal{N}(\pi_i)H_1 \times \cdots \times H_{i-1} \times \langle 1 \rangle \times H_{i+1} \times \cdots \times H_k$. Esto es, $\cap_{i=1}^{k} N_i = \langle 1 \rangle$. Por lo tanto $G \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X})$. $\square$

Definición 19. *Sea C una función de clases. La clase de grupos $\mathfrak{X}$ se denomina C-cerrada sí y sólo si $\mathfrak{X} = \mathsf{C}(\mathfrak{X})$.*

Ejemplo 1. *La clase de los grupos nilpotentes es Q-cerrada. En efecto, si $G \in \mathsf{Q}(\mathfrak{N})$, entonces existe $L \in \mathfrak{N}$ y $N \trianglelefteq L$ tal que $G \cong L/N$ y por el Teorema (2) se tiene que $G \cong L/N \in \mathfrak{N}$. Luego $\mathsf{Q}(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$. Como Q es expansiva se tiene trivialmente la otra inclusión.*

Teorema 20. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos D_0-cerrada y S-cerrada. Entonces $\mathfrak{X}$ es R_0-cerrada.*

Demostración. Sea $G \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X})$ del lema anterior se tiene que $G \leq H_1 \times \cdots \times H_k \in \mathsf{D}_0(\mathfrak{X})$, pero $\mathsf{D}_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}\mathsf{S}(\mathfrak{X})$, luego $G \in \mathfrak{X}$, es decir $\mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. La otra inclusión se tiene, puesto que, R_0 es expansiva. $\square$

Las clases de grupos que satisfacen ciertas propiedades de cerradura son tema central de este trabajo. A continuación se definen dos de estos tipos especiales de clases.

Definición 21. *Una clase de grupos $\mathfrak{F}$ se llama una formación si es Q-cerrada y R_0-cerrada. Si además $\mathfrak{F}$ es E_Φ-cerrada, se denominará una formación saturada.*

Ejemplo 2. (a) *Por el teorema anterior las clases de grupos que son cerradas bajo S, Q y D_0 son formaciones. Así, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{S}$ son ejemplos de formaciones, mientras que la clase de grupos finitos cíclicos no lo es puesto que no es D_0-cerrada.*
(b) *Para $p \in \mathbb{P}$, denotemos con $\mathfrak{C}_p$ la clase de los p-grupos cíclicos. Entonces $\mathfrak{C}_p$ es una clase saturada: Sea $G/\Phi(G) \in \mathfrak{C}_p$. Entonces $G/\Phi(G) = \langle x\Phi(G) \mid x \in G\rangle$ y $|G : \Phi(G)| = p^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Dado que $\Phi(G/\Phi(G)) = \langle x^p\Phi(G)\rangle = \Phi(G)$, entonces $\Phi(G) = \langle x^p\rangle$ y $|\Phi(G)|p^{k-1}$, por lo tanto $G = \langle x\rangle$ y $|G|p^{2k-1}$. Es decir, $G \in \mathfrak{C}_p$.*
(c) *La formación de los grupos abelianos no es saturada: Sea Q_8, el grupo de los cuaterniones. Entonces $Q_8/\Phi(Q_8) \cong V_4 \in \mathfrak{A}$, donde V_4 el grupo cuatro de Klein. Sin embargo $Q_8 \notin \mathfrak{A}$.*

Proposición 22. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos. Son equivalentes:*

1. $\mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$
2. *Si $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ con $G/N_i \in \mathfrak{X}$ para $i = 1, 2$ y $N_1 \cap N_2 = \langle 1\rangle$, entonces $G \in \mathfrak{X}$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Es una consecuencia de la definición de R_0 y de 1.
(2) $\Rightarrow$ (1). Supóngase que 2. es válido y que $\mathfrak{X} \neq \mathsf{R}_0(\mathfrak{X})$, entonces la clase $\mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) \setminus \mathfrak{X}$ no es vacía. Sea $A \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) \setminus \mathfrak{X}$ con orden minimal. Entonces existen $K_1, \cdots, K_r \trianglelefteq G$ tal que

$$A/K_i \in \mathfrak{X} \text{ para } i = 1, \ldots, r \text{ y } \bigcap_{i=1}^{r} K_i = \langle 1\rangle \tag{4}$$

Suponga que para todo subconjunto $\mathcal{L}$ de $\{K_1, \ldots, K_r\}$ se verifica $\bigcap_{K\in\mathcal{L}} K \neq \langle 1\rangle$. Si $r = 1$, se tendría $K_1 = \langle 1\rangle$ y por lo tanto $A \in \mathfrak{X}$, lo cual es una contradicción. Luego $r > 1$ y los subgrupos $N_1 := \cap_{i=1}^{r-1} K_i$ y $N_2 := \cap_{i=2}^{r} K_i$ son subgrupos normales no triviales de A tal que $(N_1 \cap N_2) \leq \cap_{i=1}^{r} K_i = \langle 1\rangle$. Dado que $(A/N_1)/(K_i/N_1) \cong A/K_i \in \mathfrak{X}$ para $i = 1, \cdots, r-1$ y $\cap_{i=1}^{r-1}(K_i/N_1) = N_1$, se sigue que $A/N_1 \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X})$ y que $A/N_1 \in \mathfrak{X}$ por la elección de A. Similarmente se demuestra que $A/N_2 \in \mathfrak{X}$. Entonces por 2. se tiene $A \in \mathfrak{X}$, lo cual es una contracción. Esto demuestra que $\mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$. □

Observaciones 23. (a) *Usando la proposición anterior, también es frecuente definir una formación como una clase de grupos $\mathfrak{F}$ que satisface las siguientes propiedades:*

(F1) *Si $G \in \mathfrak{F}$ y $N \trianglelefteq G$, entonces $G/N \in \mathfrak{F}$.*

(F2) *Si N_1, $N_2 \trianglelefteq G$ con $N_1 \cap N_2 = \langle 1 \rangle$ y $G/N_i \in \mathfrak{F}$, para $i = 1, 2$, entonces $G \in \mathfrak{F}$.*

(b) *Sea H/K un factor principal de un grupo finito G si el primo p divide el orden de H/K, entonces el factor principal H/K es llamado un p-factor principal de G.*

4 Clases de Schunck

Las formaciones proveen métodos, particularmente en el universo de los grupos finitos solubles, para obtener nuevas clases de grupos de los cuales destacamos las llamadas clases de Schunck.

Como se mostró en la sección 3, la función entre clases P, no es en general expansiva. Sin embargo se tiene la siguiente proposición.

Proposición 24. *Si el dominio de la función clase P son clases Q-cerradas, entonces P es expansiva.*

Demostración. Sea $G \in \mathsf{Q}(\mathfrak{X})$. Entonces $\mathsf{Q}((G)) \subseteq \mathsf{Q}(\mathfrak{X})$ y en particular se tiene que $\mathsf{Q}((G)) \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathsf{Q}(\mathfrak{X})$, así $G \in \mathsf{P}(\mathsf{Q}(\mathfrak{X}))$ y luego $\mathsf{Q}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathsf{P}(\mathsf{Q}(\mathfrak{X}))$ como por hipótesis $\mathsf{Q}(\mathfrak{X})\mathfrak{X}$ se tiene que $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{P}(\mathfrak{X})$. □

Definición 25. *Una clase no vacía $\mathfrak{X}$, la cual es Q-cerrada y P-cerrada se denomina una clase de Schunck.*

Ejemplo 3. (a) *La clase $\mathfrak{N}$ de los grupos finitos nilpotentes es una clase de Schunck. En efecto, del ejemplo (1) se sigue que, $\mathfrak{N}$ es Q-cerrada. Puesto que $\mathfrak{N}$ es Q-cerrada por la proposición anterior se verifica que $\mathfrak{N} \subseteq \mathsf{P}(\mathfrak{N})$.*

Por otro lado, sean G un grupo finito, $M \lessdot G$ y $N\mathrm{Core}_G(M)$. Entonces G/N es primitivo con estabilizador M/N. Si además G/N es nilpotente, entonces $M/N = \langle 1 \rangle$ y $M = N$. Es decir, todo subgrupo maximal de G es normal en G, por lo tanto G es nilpotente. Esto implica que $\mathsf{P}(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$.
(b) *La clase $\mathfrak{A}$ de los grupos finitos abelianos no es una clase de Schunck: Sea G un grupo finito, $M \lessdot G$, $G \notin \mathfrak{N}$. Si $G/N \in \mathfrak{A}$ para todo grupo factor primitivo G/N de G, entonces en particular G/N es nilpotente y primitivo luego $N = M$ y $G \in \mathfrak{N}$ lo cual es una contradicción.*

Teorema 26. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase no vacía. Son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.*
2. *$\mathfrak{X} = \mathsf{P}(\mathfrak{X})$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Es evidente.
2. $\Rightarrow$ 1. Si $\mathfrak{X}\mathsf{P}(\mathfrak{X})$ es suficiente demostrar que $\mathsf{P}(\mathfrak{X})$ es Q-cerrada. Dado que Q es expansiva se tiene $\mathsf{P}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathsf{Q}(\mathsf{P}(\mathfrak{X}))$. Si $G \in \mathsf{Q}(\mathsf{P}(\mathfrak{X}))$, entonces $G \cong L/N$ para algún $L \in \mathsf{P}(\mathfrak{X})$, entonces $\mathsf{Q}((G)) \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathsf{Q}((L)) \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{X}$ luego $G \in \mathsf{P}(\mathfrak{X})$ y se ha demostrado que $\mathsf{Q}(\mathsf{P}(\mathfrak{X})) \subseteq \mathsf{P}(\mathfrak{X})$. Se sigue que $\mathsf{P}(\mathfrak{X})\mathsf{Q}(\mathsf{P}(\mathfrak{X}))$. Dado que por hipótesis $\mathsf{P}(\mathfrak{X})\mathfrak{X}$, se tiene que $\mathfrak{X} = \mathsf{Q}(\mathfrak{X})$ luego $\mathfrak{X}$ es Q-cerrada y por lo tanto es una clase de Schunck. $\square$

El siguiente teorema establece las conexiones entre las formaciones saturadas y las clases de Schunck. Como siempre en el contexto soluble.

Teorema 27. *Sea $\mathfrak{X}$ una formación. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.*
2. *$\mathfrak{X}$ es saturada.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Supóngase que $\mathfrak{X}\mathsf{P}(\mathfrak{X})$ y sea $G \in E_\Phi(\mathfrak{X})$. Entonces existe $K \trianglelefteq G$ tal que $K \leq \Phi(G)$ y $G/K \in \mathfrak{X}$. Sea $G/N \in \mathsf{Q}((G)) \cap \mathfrak{P}$. De (12) 2. se tiene que este subgrupo N es el Core de algún subgrupo maximal de G y por la Proposición (11) se tiene que $\Phi(G) \leq N$. En consecuencia $G/N \cong (G/K)/(N/K) \in \mathsf{Q}((G/K)) \subseteq \mathsf{Q}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$, de esto se sigue que $G \in \mathsf{P}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$. Así $E_\Phi(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$ y por lo tanto $\mathfrak{X}$ es saturada.
2. $\Rightarrow$ 1. Dado que $\mathfrak{X}$ es una formación, se tiene en particular que es Q-cerrada. Entonces $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{P}(\mathfrak{X})$. Demostramos ahora que $\mathsf{P}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. Sea $G \in \mathsf{P}(\mathfrak{X})$. Si $S \lessdot G$, entonces el grupo $G/\mathrm{Core}_G(S)$ es primitivo y por tanto pertenece a $\mathfrak{X}$. Dado que $\Phi(G) \trianglelefteq G$, se tiene

$$\Phi(G) = \bigcap_{g \in G} \Big(\bigcap_{M \lessdot G} M \Big)^g = \bigcap_{M \lessdot G} \mathrm{Core}_G(M) < \mathrm{Core}_G(S).$$

Entonces $(G/\Phi(G))/(\mathrm{Core}_G(S)/\Phi(G)) \cong G/\mathrm{Core}_G(S) \in \mathfrak{X}$ y como

$$\bigcap_{S \lessdot G} (\mathrm{Core}_G(S)/\Phi(G)) = \Phi(G)/\Phi(G) = \langle 1 \rangle$$

se tiene que $G/\Phi(G) \in \mathsf{R}_0(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$ y por lo tanto $G \in E_\Phi(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}$. Esto demuestra que $\mathsf{P}(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{X}$. $\square$

5 $\mathfrak{X}$-proyectores y clases de Schunck

En la presente sección se define el concepto de $\mathfrak{F}$-proyector de un grupo G, donde $\mathfrak{F}$ es una clase de Schunck. Son de especial interés las clases proyectivas y las propiedades de existencia y conjuganción de los $\mathfrak{F}$-proyectores. Veremos que los p-subgrupos de Sylow, los π-subgrupos de Hall y los subgrupos de Carter son casos particulares de estos.

Definición 28. *Sea G un grupo y $\pi \subseteq \mathbb{P}$.*

1. *Diremos que G es un π-grupo si y sólo sí $\sigma(G) \subseteq \pi$.*

2. *Un subgrupo H de G es llamado un π-subgrupo de Hall si los divisores primos de $|H|$ pertenecen a π y los divisores primos de $|G : H|$ pertenecen a π'.*

3. *Un subgrupo H de G es llamado un subgrupo de Hall si es un τ-subgrupo de Hall para algún $\tau \subseteq \mathbb{P}$. Naturalmente H es un subgrupo de Hall de G si y sólo sí $(|G : H|, |H|) = 1$.*

Ejemplo 4. *Sea $G = \mathrm{Alt}(4)$, el grupo alternante de grado 4 y sean*

$$H\{(1), (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}, \quad \pi = \{2, 5\}.$$

Dado que $G/H \cong C_3$, se tiene $(|G : H|, |H|) = 1$, así se tiene que H es un π-subgrupo de Hall de G.

Observaciones 29. (a) *Un π-subgrupo de Hall de un grupo G es un π-subgrupo maximal.*
(b) *El conjunto de los π-subgrupos de Hall de G se denotará con $\mathrm{Hall}_\pi(G)$. Note que si $p \in \mathbb{P}$, entonces $\mathrm{Hall}_{\{p\}}(G) = \mathrm{Syl}_p(G)$.*
(c) *Si $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ y $N \trianglelefteq G$, entonces $HN/N \in \mathrm{Hall}_\pi(G/N)$.*

El teorema de Sylow garantiza la existencia de los p-subgrupos de Sylow de G, para cada primo p. La existencia de π-subgrupos de Hall para G en general no está garantizada; por ejemplo el grupo $\mathrm{Alt}(5)$ no tiene $\{3, 5\}$-subgrupos de Hall. Sin embargo, en el universo solubles, se tiene el siguiente teorema debido a Phillip Hall.

Teorema 30. *Sea G un grupo y $\pi \subseteq \mathbb{P}$. Entonces*

1. *Existen π-subgrupos de Hall de G.*

2. *Estos forman una clase de conjugación en G.*

3. *Cada π-subgrupo de G está contenido en algún π-subgrupo de Hall de G.*

Demostración. Ver [1] I (3,3). $\square$

Este teorema fue la primera generalización de los teoremas de Sylow en el sentido de asegurar la existencia de los subgrupos distinguidos, su conjugación y la dominación. Por otro lado fué la fuente de inspiración para la búsqueda de generalización posteriores como las de Carter y Gaschütz. En esta dirección presentamos la siguiente definición.

Definición 31. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos. Un subgrupo U de un grupo G es llamado $\mathfrak{X}$-maximal en G si se verifican:*

1. $U \in \mathfrak{X}$
2. *Si* $U \leq V \leq G$ *y* $V \in \mathfrak{X}$, *entonces* $U = V$.

Ejemplo 5. *Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_\pi$, entonces los subgrupos $\mathfrak{S}_\pi$-maximales de un grupo soluble G son precisamente sus π-subgrupos de Hall. Más aún si H es un π-subgrupo de Hall de G y $K \trianglelefteq G$, entonces HK/K es un π-subgrupo de Hall de G/K. Así, $H \in \mathrm{Hall}(G)$ es caracterizado por la siguiente propiedad:*

$$HK/K \ \textit{ es } \ \mathfrak{S}_\pi\textit{-maximal en } G/K \textit{ para todo } \ K \trianglelefteq G \tag{5}$$

Esto sugiere la siguiente pregunta: ¿Cuáles clases $\mathfrak{X}$ pueden sustituir a $\mathfrak{S}_\pi$ en la afirmación (5) sin restar los resultados esenciales de existencia, conjugación y dominación de la teoría de los π-grupos de Hall? Buscaremos ahora los elementos que nos permitan dar respuesta a la pregunta anterior.

Definición 32. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos. Un subgrupo U de un grupo G es llamado un $\mathfrak{X}$-proyector de G si.*

$$UK/K \textit{ es } \ \mathfrak{X}\textit{-maximal en } \ G/K \ \textit{ para todo } \ K \trianglelefteq G$$

Usaremos el símbolo $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G)$ para denotar el conjunto (probablemente vacío) de los $\mathfrak{X}$-proyectores de G. Si $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G) \neq \emptyset$ para todo grupo finito soluble G, entonces $\mathfrak{X}$ es llamada proyectiva.

Ejemplo 6. (a) *Sea G un grupo finito soluble. Es inmediato que*

$$\mathrm{Proj}_{\mathfrak{S}_\pi}(G) = \mathrm{Hall}_\pi(G) \neq \emptyset$$

En particular $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{S}_p}(G) = \mathrm{Syl}_p(G)$.
(b) *Sean G un p-grupo no abeliano y $\mathfrak{A}$ la clase de los grupos finitos abelianos. Entonces* $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{A}}(G) = \emptyset$.

Demostración. Si U fuese un $\mathfrak{A}$-proyector de G. Entonces U sería abeliano. Sea $G' = [G,G] \trianglelefteq G$. Dado que G/G' es abeliano, $UG'/G' \cong G/G'$esto es $UG' = G$. Por otro lado si $M \lessdot G$, entonces $M \trianglelefteq G$ y G/M es abeliano, luego para cada $x, y \in G$, $x^{-1}y^{-1}xy \in M$, por lo tanto $G' \leq \Phi(G)$. Supóngase $U < G$, luego existe $S \lessdot G$ tal que $U \leq S$, dado que $G' \leq \Phi(G) \leq S$ se tiene $G = G'U \leq S$, esto es absurdo. Ahora si $U = G$ se contradice la suposición que G es no abeliano. En conclusión $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{A}}(G) = \emptyset$. □

Observaciones 33. (a) *Si U es un $\mathfrak{X}$-proyector de un grupo G y $N \trianglelefteq G$, entonces de la definición de $\mathfrak{X}$-proyector y los teoremas de isomorfía se tiene que UN/N es un $\mathfrak{X}$-proyector de G/N.*
(b) *De la nota anterior se sigue entonces que: $U \in \mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G)$ si y sólo sí U es $\mathfrak{X}$-maximal en G y UN/N es un $\mathfrak{X}$-proyector de G/N para todo $N \cdot \trianglelefteq G$. Esta observación es usada en las pruebas por inducción.*

Teorema 34. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos. Si $\mathfrak{X}$ es proyectiva, entonces $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.*

Demostración. Sea U un $\mathfrak{X}$-proyector de G y $G/N \in \mathfrak{X}$ para todo grupo factor primitivo G/N de G. Entonces $UN/NG/N$ esto es $UN = G$. Si $U < G$, existe $M \lessdot G$ tal que $U \leq M \lessdot G$. Sea $K = \mathrm{Core}_G(M)$, G/K es un grupo factor primitivo de G, luego

$$G = UK \leq UM = M < G$$

Esta contradicción muestra que $U = G \in \mathfrak{X}$. Luego $\mathfrak{X}$ es P-cerrada y por lo tanto una clase de Schunck. □

El recíproco del teorema anterior también se cumple, pero antes se prueba el siguiente lema.

Lema 35. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de Schunck, H un subgrupo normal nilpotente de un grupo G y $G/H \in \mathfrak{X}$. Entonces*

1. *Existe un subgrupo S de G, el cual es $\mathfrak{X}$-maximal en G y además $SH = G$.*

2. *Todos los subgrupos S de 1. son conjugados en H.*

Demostración. 1. Sea T minimal con $T \leq G$ y $TH = G$. Si $T \notin \mathfrak{X}$, entonces existe un grupo factor primitivo T/N tal que $T/N \notin \mathfrak{X}$. Entonces $T \cap H \nleq N$ de lo contrario $G/H = TH/H = T/(T \cap H)$, tendría un grupo factor $(T/(T \cap H))/(N/(T \cap H)) = T/N \notin \mathfrak{X}$. Contradiciendo la hipótesis que $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.

Entonces $N(T \cap H)/N$ sería no trivial, nilpotente y normal en T/N. Dado que T/N es primitivo, se tiene que $N(T \cap H)/N$ es normal minimal. Sea T_0/N un estabilizador de T/N. Entonces por el teorema (13) se verifica que $(T_0/N)(N(T \cap H)/N) = T/N$. Esto es, $T_0N(T \cap H) = T$ y $G = THT_0N(T \cap H)H = T_0H$. Dado que $T_0 < T$, se tiene una contradicción con la minimalidad de T. Entonces $T \in \mathfrak{X}$.

2. Sean S_1 y S_2 $\mathfrak{X}$-maximales en G y $S_1HS_2H = G$. Si $G \in \mathfrak{X}$, entonces $S_1 = S_2 = G$ que prueba la afirmación. Supóngase que $G \notin \mathfrak{X}$, entonces existe un grupo factor primitivo G/N de G tal que $G/N \notin \mathfrak{X}$. $S_iN \neq G$ para $i = 1, 2$, puesto que si $S_iN = G$, entonces

$$G/N = S_iN/N = S_i/(S_i \cap N) \in \mathfrak{X}.$$

Además $G/H \in \mathfrak{X}$, $H \nleq N$ y NH/N es un subgrupo normal nilpotente no trivial de G/N, entonces $NH/N \cdot\trianglelefteq G/N$. Dado que

$$(S_iN/N)(NH/N) = S_iH/N = G/N \tag{6}$$

se tiene por el teorema (13) que S_iN/N para $i = 1, 2$ son estabilizadores de G/N y conjugados en NH/N. Por lo tanto $S_1N = (S_2N)^h = S_2^hN$ para algún $h \in H$. Si definimos $G^* = S_1N$ y $H^* = S_1N \cap H$, entonces $G^*/H^* = S_1N/(S_1N \cap H) = S_1NH/H = G/H \in \mathfrak{X}$ y S_1 y S_2^h son $\mathfrak{X}$-maximal en G^* con $S_1H^* = S_2^hH^* = G^*$ de (6) y por inducción se sigue ahora que S_1 y S_2^h son conjugados bajo H^* y por lo tanto S_1 y S_2 son conjugadas bajo H.
□

A continuación se presenta el recíproco del último teorema, lo cual nos permite obtener una equivalencia entre el concepto de clases de Schunck y el de clases proyectivas.

Teorema 36. *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de Schunck y $G \in \mathfrak{S}$. Entonces*

1. *Existe un $\mathfrak{X}$-proyector de G.*

2. *Todos $\mathfrak{X}$-proyectores de G son conjugados en G.*

Demostración. 1. Demostramos la afirmación por inducción sobre $|G|$. Si $G = \langle 1\rangle$, entonces el teorema se cumple trivialmente. Sean $G \neq \langle 1\rangle$, $\langle 1\rangle \neq L \trianglelefteq G$, L nilpotente y por hipótesis de inducción sea $\overline{S}/L$ un $\mathfrak{X}$-proyector de G/L. Por el lema anterior, sea S $\mathfrak{X}$-maximal en $\overline{S}$ con $SL = \overline{S}$. Demostraremos que S es un $\mathfrak{X}$-proyector de G.

De la observación (33) se sigue que S es un $\mathfrak{X}$-proyector de G si y sólo sí S es $\mathfrak{X}$-maximal en G y SN/N es un $\mathfrak{X}$-proyector de G/N para todo $N \cdot\trianglelefteq G$.

S es $\mathfrak{X}$-maximal en G: Sí $S \leq S^* \leq G$, $S^* \in \mathfrak{X}$, entonces $S^*L/L \cong S^*(S^* \cap L) \in \mathfrak{X}$ ya que $\mathfrak{X}$ es Q-cerrada. Dado que $\overline{S}/L$ es $\mathfrak{X}$-maximal en G/L, $S^*L/L \leq \overline{S}/L$ y $S \leq S^* \leq \overline{S}$, como S es $\mathfrak{X}$-maximal en $\overline{S}$ se tiene $S = S^*$.

SN/N es un $\mathfrak{X}$-proyector de G/N para $N \cdot\trianglelefteq G$. Por inducción, sea $\overline{T}/N$ un $\mathfrak{X}$-proyector de G/N por el lema anterior sea T un subgrupo $\mathfrak{X}$-maximal en $\overline{T}$ con $TN = \overline{T}$. De la misma forma como se procedió para S, se sigue que T es $\mathfrak{X}$-maximal en G y $H = NL$ es nilpotente.

Como los $\mathfrak{X}$-proyectores de un grupo son Q-cerrados y $\overline{S}H/H = SH/H$ y $\overline{T}H/H = TH/H$ son $\mathfrak{X}$-proyectores de G/H, entonces ellos son conjugados en G/H y por lo tanto SH y TH son conjugados en G; es decir $(TH)^k = T^kH = SH$, para algún $k \in G$. Entonces T^k es también $\mathfrak{X}$-maximal en G, y por el lema anterior T^k y S son conjugados en H; esto es $S = T^g$, $g = kh$, $h \in H$. Como $\overline{T}/N$ es un $\mathfrak{X}$-proyector de G/N, se tiene que $(\overline{T}/N)^{gN} = T^gN/N = SN/N$ luego SN/N es $\mathfrak{X}$-proyector de G/N.

2. Si S_1 y S_2 son $\mathfrak{X}$-proyectores de G y $\langle 1\rangle \neq H \trianglelefteq G$ con H nilpotente, entonces de (33) se tiene que S_1H/H y S_2H/H son $\mathfrak{X}$-proyectores de G/H

y por inducción $S_1H/H = (S_2H/H)^{kH} = S_2^k H/H$ con $k \in G$. Dado que $S_iH/H \in \mathfrak{X}$, para $i = 1, 2$ entonces por el lema anterior $S_1 = S_2^{kh} = S_2^g$ con $g = kh \in G$ como se deseaba. □

Ejemplo 7. *Sea G un grupo finito soluble. Dado que $\mathfrak{N}$ es una clase de Schunck, se sigue que*

$$\emptyset \neq \mathrm{Proj}_{\mathfrak{N}}(G) = \{U \leq G \mid U \in \mathfrak{N} \ \ y \ \ N_G(U) = U\}.$$

En efecto, sea $U \leq G$, $U \in \mathfrak{N}$ y $N_G(U) = U$, entonces por el teorema (3) U es $\mathfrak{N}$-maximal en G. Si $G = \langle 1 \rangle$, entonces $U = \langle 1 \rangle$ es un $\mathfrak{N}$-proyector de G. En otro caso sea $N \cdot\trianglelefteq G$, es evidente que $UN/N \in \mathfrak{N}$. Es suficiente mostrar que $N_{G/N}(UN/N) = UN/N$ o equivalentemente que $N_G(UN) = UN$. Entonces por inducción UN/N es un $\mathfrak{N}$-proyector de G/N y por (33) U es un $\mathfrak{N}$-proyector de G. Mostremos que $N_G(UN) = UN$. Sea $g \in N_G(UN)$, esto es $(UN)^g = U^gN = UN$. Entonces por el lema (35), $U = U^{gn}$ para algún $n \in N$ y luego $gn \in N_G(U)$; esto es $g \in N_G(U)N = UN$.

Recíprocamente, sea U un $\mathfrak{N}$-proyector de G. Entonces $U \in \mathfrak{N}$. Sea $U \trianglelefteq H \leq N_G(U)$ y sea H/U nilpotente. De [1], III (3,22) se sigue que U es también un $\mathfrak{N}$-proyector de H, se sigue que $UU/UH/U$; por lo tanto $H = U$ y en particular $N_G(U) = U$.

Estos subgrupos U son llamados subgrupos de Carter de G.

Referencias

[1] Doerk K., Hawkes T., Finite Soluble Groups. W de G. 1992.

[2] Gaschütz W., Zur Theorie der endliche auflösbaren Gruppen. Math. Z. 80,300-305 (1963).

[3] Gutierrez, I., Zur starken Enthaltenseinsrelation für gesättigte Formationen, Preprint-Reihe des Fachbereichs Mathematik. Universität- Mainz, No 10, 2002.

[4] Huppert, B., Endliche Gruppen I. Springer-Verlag. 1963.

[5] Suzuki, M., Group Theory I. Springer-Verlag. 1982

[6] Lubeseder,U., Formationsbildungen in endlichen auflösbaren Gruppen. Dissertation, Universität Kiel, 1963.

[7] Wenbin, Guo., The Theory of Classes of Groups. Sciencie Press Kluwer Academic Publisher. 2000. Beijing.

Dirección de los autores: J. Cabrera, Univ. del Norte, jcabrera@uninorte.edu.co — I. Gutiérrez, Univ. del Norte, isgutier@uninorte.edu.co