Vol. XIV № 2 Diciembre (2006)
Matemáticas: 71–109

Matemáticas: Enseñanza Universitaria

Integración estocástica con respecto al movimiento browniano

Jorge A. León

Recibido Dic. 7, 2005 Aceptado May. 18, 2006

Abstract

In this paper we study some basic properties and applications of the Itô, Skorohod and forward stochastic integrals with respect to the Brownian motion. The main idea of this article is to give an introduction to the stochastic calculus based on these integrals. Also we analyze the existence of a unique solution to stochastic differential equations driven by the Brownian motion for above interpretations of stochastic integral.

Keywords: Derivative and divergence operators, Brownian motion,filtrations, Itô's formula, stochastic differential equations.

AMSC(2000): 60H05, 60-01, 60H30, 60H07, 60J65

Resumen

En este artículo damos algunos elementos básicos que se utilizan al estudiar las propiedades y las aplicaciones de la integral estocástica con respecto al movimiento browniano cuando esta integral estocástica se considera en los sentidos de Itô, Skorohod y hacia adelante (definida por Russo y Vallois [32]). La idea principal es brindar una presentación para que el lector comience a entender las herramientas del cálculo estocástico basado en estas integrales, así como sus aplicaciones. También, para cada interpretación de integral estocástica, mencionamos algunos resultados de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas gobernadas por el movimiento browniano.

Palabras y frases claves: Ecuaciones diferenciales estocásticas, filtraciones, fórmula de Itô, integral estocástica, movimiento browniano, operador de derivada, operador de divergencia, procesos estocásticos.

1 Introducción

En la actualidad hay un gran interés por el estudio de la teoría de la probabilidad debido en gran parte a sus aplicaciones en las diversas áreas del conocimiento científico, como la física, biología, matemáticas financieras, entre otras.

Hablando burdamente, las funciones X que aparecen en las aplicaciones satisfacen una ecuación integral de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds, \quad t \in [0, T].$$

Las soluciones de estas ecuaciones en general nos dicen como evoluciona un fenómeno en el tiempo. Sin embargo, el análisis de estas ecuaciones requiere que todos los parámetros involucrados sean completamente conocidos (por ejemplo, condiciones iniciales, coeficientes, perturbaciones externas del sistema, etc.). Pero en ocasiones esto es imposible debido a la naturaleza del fenómeno que se está estudiando, por la poca información con la que se cuenta, porque son obtenidos experimentalmente o simplemente por los costos. Así, en general, es necesario hacer una "corrección aleatoria" a la ecuación. Esto es, introducir un parámetro en un conjunto donde está definida una probabilidad y cuyos elementos representan los posibles factores que influyen en el sistema, para que la solución dé las posibles realizaciones del fenómeno en cuestión. La manera de incorporar esta corrección es permitir que los coeficientes sean aleatorios y perturbar la ecuación aditivamente por medio de un "ruido aleatorio". En la literatura, un proceso utilizado para representar esta perturbación es el movimiento browniano o proceso de Wiener B ya que es un proceso gaussiano con incrementos independientes cuya derivada en el sentido generalizado es el ruido blanco gaussiano, el cual aproxima el efecto de la superposición de un número grande de pequeñas perturbaciones aleatorias independientes en tiempos distintos (ver Arnold [3] y Hida [15]). De esto, es importante estudiar la ecuación diferencial estocástica (EDE) de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Intuitivamente (ver Proposición 2.16), el movimiento browniano no puede tener trayectorias de variación acotada ya que éste representa fenómenos que cambian "rápidamente" en el tiempo. Por lo que ahora el problema es definir adecuadamente la integral $\{\int_0^t b(s, X_s)dB_s : t \in [0, T]\}$ en la EDE anterior.

La integral estocástica clásica de Itô [16] está definida para procesos adaptados a la información con respecto a la cual B es un movimiento browniano, y que son cuadrado integrables (ver Sección 3). La idea de la definición de esta integral es similar a la de la integral de una función con respecto a una medida. A saber, primero se define para procesos simples (como si B fuera de variación acotada), y posteriormente se aproxima por integrales de procesos simples. Esta idea se ha generalizado para tener integradores más generales llamados semimartingalas o "buenos integradores" (ver Bojdecki [7], Protter [29] y sus referencias). No obstante, tener sólo integrandos adaptados, aunque es natural, es rectrictivo. En efecto, por ejemplo, los coeficientes de la ecuación (1) pueden depender de toda la información que genera B como sucede en los mercados financieros con información privilegiada (ver, por ejemplo, [20]).

La integral de Skorohod [35] (también llamada operador de divergencia) es una extensión de la integral de Itô que permite procesos no adaptados como integrandos. Esta integral es el adjunto del operador de derivada en el espacio de Wiener (ver Nualart [25]). Por lo que el cálculo de Malliavin o cálculo de variaciones es el camino para definir y estudiar a la integral de Skorohod. Sin embargo, cuando tenemos una información respecto a la cual B es una semimartingala, la integral de Skorohod no coincide con la integral de Itô con respecto a la semimartingala B (ver Sección 4).

La integral hacia adelante en el sentido de Russo y Vallois [32] también es una extensión de la integral de Itô y coincide con la integral estocástica con respecto a B, cuando B se considera como una semimartingala. La integral hacia adelante es un límite en probabilidad y, en consecuencia, es difícil de analizar. Además, bajo ciertas condiciones, esta integral es igual a la integral de Skorohod más un término de traza que depende del operador de derivada. Por lo que se puede emplear el cálculo estocástico basado en la integral de Skorohod y el operador de derivada para obtener las propiedades que tiene la integral hacia adelante.

La organización de este artículo es como sigue. En la Sección 2 fijaremos la notación empleada e introduciremos al movimiento browniano. En la Sección 3 estudiaremos a la integral de Itô. Los elementos básicos de cálculo estocástico anticipante básados en el operador derivada y su adjunto son dados en la Sección 4. Finalmente la integral hacia adelante es analizada en la Sección 5. En cada sección interpretaremos a la ecuación (1) según la integral estocástica en cuestión. A lo largo de este trabajo, supondremos que el lector tiene nociones básicas de la teoría de probabilidad.

2 Preliminares

En esta sección introduciremos la herramienta y la notación que utilizaremos en nuestros resultados.

2.1 Espacios de probabilidad y procesos estocásticos

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, donde Ω es un conjunto no vacío, $\mathfrak{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y P es una medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.

En un experimento aleatorio (i.e., donde hay diferentes resultados), los elementos de Ω representan los posibles resultados. Los elementos de $\mathfrak{F}$ son eventos (conjuntos) que contienen la información del experimento y P es una medida que indica que tan probable es que ocurra un evento en relación a otro.

En general los eventos están determinados por los valores que toma cierto "aparato".

Definición 2.1. *Se dice que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria (v.a.) si $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathfrak{F}$, donde $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 2.2. *Al lanzar dos dados tenemos que*

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 6\}\}.$$

Supongamos que quiero apostar al evento que la suma de los dados sea mayor que 6. Es decir, en este caso tenemos una v.a. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ que está definida *por* $X(i,j) = i + j$*, por lo tanto* $[X > 6]$ *determina el conjunto*

$$\{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$

Por lo que en este caso, la información que interesa está generada por X*.*

Cuando tenemos un experimento que evoluciona en el tiempo, es natural considerar lo siguiente:

Definición 2.3. *Un proceso estocástico es una familia de v.a.* $\{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$*. A un proceso podemos verlo como una colección de funciones* $X_.(\omega) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*,* $\omega \in \Omega$*. Estas funciones se llaman las trayectorias del proceso estocástico* X*.*

Observación 2.4. *También podemos ver a un proceso estocástico* X *como una función* $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$*.*

Cuando estudiamos un fenómeno aleatorio se obtiene información a cada instante del tiempo $t \in \mathbb{R}_+$*. Por lo que es natural considerar el siguiente concepto.*

Definición 2.5. *Una familia de* σ*-álgebras* $\{\mathfrak{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ *se llama filtración si* $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$*,* $t \in \mathbb{R}_+$*, y* $t_1 \le t_2$ *implica que* $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$*.*

Observación 2.6. *Aquí* $\mathfrak{F}_t$ *es la familia de eventos que pueden ocurrir hasta un instante* t *(inclusive).*

Ejemplo 2.7. *Un auto se mueve a lo largo de una recta hacia la derecha con velocidad 1. Al tiempo 1 lanzamos una moneda y si sale "águila" el auto continúa su movimiento, si aparece "sol" regresa.*

Aquí $\Omega = \{a, s\}$ *y* $\mathfrak{F} = 2^\Omega$ *(i.e., la familia de todos los subconjuntos de* Ω*). Sea* X_t *la posición del auto al instante* t*. Entonces*

$$X_t(a) \equiv t, \qquad y \qquad X_t(s) = \begin{cases} t, & t \le 1, \\ 2 - t, & t > 1. \end{cases}$$

En este caso

$$\mathfrak{F}_t = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\}, & t \le 1, \\ 2^\Omega, & t > 1. \end{cases}$$

Definición 2.8. *Sea* $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ *un proceso estocástico.*

a) Se dice que X *es un proceso medible si* $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *es una función medible con respecto a la* σ*-álgebra producto* $\mathfrak{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$*. Esto es* $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$*.*

b) X *es adaptado a la filtración* $\{\mathfrak{F}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$ *si* X_t *es* $\mathfrak{F}_t$*-medible (i.e.,* $X_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathfrak{F}_t$*), para* $t \in \mathbb{R}_+$*.*

c) La filtración definida por $\mathfrak{F}_t^X = \sigma\{X_s : s \le t\}$ se llama la filtración generada por X. Recuerde que $\sigma\{X_s : s \le t\}$ es la σ–álgebra más pequeña que contiene a la familia $\{X_s^{-1}(B) : s \in [0,t]$ y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

Observaciones 2.9.

a) Es fácil ver que 2^Ω y que la intersección de σ-álgebras es también una σ-álgebra. Por lo que $\{\mathfrak{F}_t^X : t \ge 0\}$ está bien definida.

b) $\{\mathfrak{F}_t^X : t \in \mathbb{R}_+\}$ es la filtración más pequeña respecto a la cual X es un proceso adaptado y se puede interpretar como la información generada por el proceso estocástico X.

c) El que un proceso sea medible sólo depende de $\mathfrak{F}$, pero el que sea adaptado depende de la filtración.

d) Adaptado no implica medible: Sea $A \subset \mathbb{R}_+$ un conjunto no Borel medible. Defina $X_t = 1_A(t)$. Por lo tanto X es adaptado (a cualquier filtración), pero no es medible.

Un lector interesado en la teoría de procesos estocásticos puede consultar Bojdecki [7], Gihman y Skorokod [13], Karatzas y Shreve [18], Tudor [37] y las referencias que ahí se encuentran.

2.2 Movimiento browniano

Ahora estudiaremos uno de los procesos más importantes del cálculo estocástico. A saber, el movimiento browniano (**mb**) o proceso de Wiener.

El **mb** primero fue observado por el botánico Robert Brown [8] al estudiar el movimiento de granos de polen en agua. Desde entonces este proceso ha sido usado en diferentes áreas del conocimiento científico (e.g. la física, biología, ingeniería, mecánica cuántica, etc.), debido a que el **mb** ha permitido modelar y analizar sistemas con perturbaciones aleatorias (ver Gorostiza [14]).

La formulación matemática del **mb** fue iniciada por Bachelier [5] y en el campo de la física por Einstein [12], y el tratamiento matemático riguroso fue empezado por Wiener [38].

El lector interesado en estudiar las propiedades del **mb** puede consultar Karatzas y Shreve [18], y Revuz y Yor [30].

Definición 2.10. *El movimiento browniano es un proceso continuo (i.e., con trayectorias continuas) y adaptado $B = \{B_t, \mathfrak{F}_t : 0 \le t < \infty\}$ definido en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ tal que:*

i) $B_0 = 0$ *con probabilidad 1.*

ii) $B_t - B_s$ *es independiente de $\mathfrak{F}_s$, para $s < t$.*

iii) $B_t - B_s$ *es normalmente distribuido con media cero y variancia* $t - s$, *para* $s < t$.

Una pregunta natural es si un tal proceso existe. La respuesta es sí (como muestra el siguiente ejemplo).

Ejemplo 2.11 (Espacio canónico de Wiener)**.** *Aquí* $\Omega = C_0(\mathbb{R}_+)$. *Esto es,* Ω *es el espacio de las funciones continuas* $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *tales que* $\omega(0) = 0$. *En* Ω *consideremos la* σ*-álgebra* $\mathfrak{F}$ *generada por los cilindros medibles de la forma*

$$C_{t_1,\ldots,t_n}(B) = \big\{\omega \in \Omega : (\omega(t_1),\, \ldots, \omega(t_n)) \in B\big\},$$

donde $t_1,\, \ldots,\, t_n \in \mathbb{R}^+$ *(distintos) y* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

La medida de la probabilidad P *en* $(\Omega, \mathfrak{F})$ *se define como*

$$\begin{aligned} P(C_{s_1,\ldots,s_n}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n])) \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p(s_1, 0, y_1)\, p(s_2 - s_1, y_1, y_2) \\ \cdots p(s_n - s_{n-1}, y_{n-1}, y_n)\, dy_n \cdots dy_1, \end{aligned} \tag{2}$$

donde $(x_1,\, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* p *es el kernel gaussiano*

$$p(t, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/2t}.$$

El teorema de Carathéodory y el hecho de que

$$\int_{\mathbb{R}} p(t, x, y)p(s, y, z)dy = p(s + t, x, z)$$

nos permite extender de manera única a la medida P sobre $\mathfrak{F}$.

El proceso $W_t(\omega) = \omega(t)$ es un **mb**. En efecto, (2) implica que si $t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned} &P\Big(\big[W_{t_1} \in (-\infty, x_1], W_{t_2} - W_{t_1} \in (-\infty, x_2]\,\big]\Big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{[y_1 \le x_1, y_2 - y_1 \le x_2]}\, p(t_1, 0, y_1)\, p(t_2 - t_1, y_1, y_2)\, dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p(t_1, 0, y_1) \int_{-\infty}^{x_2 + y_1} \frac{e^{-(y_2 - y_1)^2/2(t_1 - t_2)}}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}}\, dy_2 dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} p(t_1, 0, y_1) \Big(\int_{-\infty}^{x_2} p(t_2 - t_1, 0, v) dv \Big) dy, \\ &= P\big(\big[W_{t_1} \in (-\infty, x_2]\big]\,\big)\, P\big(\big[W_{t_2} - W_{t_1} \in (-\infty, x_2]\big]\,\big). \end{aligned}$$

Así W es un **mb** definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (i.e., satisface las condiciones pedidas en la Definición 2.10).

Observación 2.12. *Para estudiar diferentes construcciones del* **mb**, *el lector puede ver Karatzas y Shreve [18], y Revuz y Yor [30].*

Ahora daremos algunas propiedades del **mb**.

Proposición 2.13. *El* **mb** *es una martingala cuadrado integrable.*

Demostración. La Propiedad *ii)* en la Definición 5 implica

$$E[B_t - B_s|\mathfrak{F}_s] = E[B_t - B_s] = 0.$$

□

El siguiente resultado dice que la *variación cuadrática* de B en un intervalo es la longitud de dicho intervalo.

Proposición 2.14. *Sea* $\{t_i^n\}_{i=1}^n$ *una partición del intervalo* $[s,t]$ *tal que* $\delta_n = \text{máx}_i(t_i^n - t_{i-1}^n) \to 0$ *cuando* $n \to \infty$. *Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n-1}(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 \to (t-s), \qquad \textit{cuando } n \to \infty$$

en $L^2(\Omega)$. *Además, si* $\sum_n \delta_n < \infty$ *la convergencia es casi segura.*

Demostración. Es fácil ver, usando la independencia de los incrementos del **mb**, que existe una constante C tal que

$$\begin{aligned}
E&\Bigg[\bigg(\sum_{i=1}^{n-1}\big\{(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)\big\}\bigg)^2\Bigg] \\
&= E\Bigg[\sum_{i=1}^{n-1}\big\{(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)\big\}^2\Bigg] \\
&+ 2E\sum_{i<j}\big[(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 - (t_{i+1}^n - t_i^n)\big]\big[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)\big] \\
&\le C\sum_{i=1}^{n-1}(t_{i+1}^n - t_i^n)^2 \le C\delta_n(t-s),
\end{aligned}$$

lo que implica el resultado. □

Corolario 2.15. *Las trayectorias del* **mb** *no son de variación acotada.*

Demostración. Observe que si $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ es como en la Proposición 2.14, entonces

$$\sum_i (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i}^n)^2 \le \big(\sup_i |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}|\big)\sum_i |B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i}^n|. \tag{3}$$

Así, la Proposición 2.14 implica que $\sum_i |B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n}| = \infty$ con probabilidad 1, debido a la continuidad del **mb**. □

Proposición 2.16. *(Paley, Wiener y Zygmund [27]) Las trayectorias del* **mb** *son diferenciables en ningún punto.*

Demostración (Una idea). La ley del logaritmo iterado implica que, para casi todas las trayectorias de B, $\epsilon > 0$ y h suficientemente pequeño, tenemos

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \geq (1-\epsilon)\sqrt{\frac{2\log\log(1/h)}{h}} \qquad \text{una infinidad de veces}$$

y

$$\frac{B_{t+h} - B_t}{h} \leq (-1+\epsilon)\sqrt{\frac{2\log\log(1/h)}{h}} \qquad \text{una infinidad de veces.}$$

Como los lados derechos convergen a ∞ y $-\infty$, respectivamente, el resultado se sigue. □

Observación 2.17. *Para otras demostraciones de este resultado ver [18] y [30].*

El siguiente resultado caracteriza al **mb**.

Proposición 2.18. *Sea M una martingala continua y cuadrado integrable. Entonces M es un* **mb** *si y sólo si $(M_t^2 - t)_{t\geq 0}$ es una martingala.*

Demostración. Sólo demostraremos la necesidad. La suficiencia es una consecuencia de la fórmula de Itô (dada en el Teorema 3.13).

Suponga que M es un **mb**. Entonces la independencia de $M_t - M_s$ y $\mathfrak{F}_s$, $s \leq t$ implica

$$\begin{aligned} E[M_t^2 - M_s^2 | \mathfrak{F}_s] &= E\big[(M_t + M_s)(M_t - Ms)\big|\mathfrak{F}_s\big] \\ &= E\big[M_t(M_t - M_s)\big|\mathfrak{F}_s\big] + M_s E\big[M_t - M_s\big|\mathfrak{F}_s\big] \\ &= E\big[M_t(M_t - M_s)\big|\mathfrak{F}_s\big] \\ &= E\big[(M_t - M_s)^2\big|\mathfrak{F}_s\big] = t - s, \end{aligned}$$

lo que implica el resultado. □

3 Integración estocástica en el sentido de Itô

En esta sección daremos las ideas básicas utilizadas para construir la integal estocástica en el sentido de Itô, cuyo dominio está incluido en la familia de procesos adaptados a la filtración con respecto a la cual el integrador es un **mb**. Para una exposición detallada ver Arnold [3], y Karatzas y Shreve [18].

Sea $T > 0$. En lo que sigue supondremos que $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es un espacio de probabilidad donde está definido un **mb** $B = \big\{B_t, \mathfrak{F}_t : t \in [0,T]\big\}$. Sea

g un proceso estocástico con trayectorias continuas. En un primer intento, podríamos definir a la integral estocástica

$$\int_0^T g_s dB_s \tag{4}$$

trayectoria por trayectoria (i.e., ω por ω) como una integral de Lebesgue-Stieltjes. Esto es, para cada $\omega \in \Omega$, consideramos a (4) como el límite de las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(B_{s_i} - B_{s_{i-1}}), \tag{5}$$

con $0 = s_0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n = T$, $t_i = (1-a)s_{i-1} + as_i$ y $0 \leq a \leq 1$. Sin embargo el conjunto de elementos de Ω para los cuales S_n converge (cuando $\text{máx}_i(s_i - s_{i-1}) \to 0$) depende de la medida P. Por lo tanto es natural definir (4) como el límite en probabilidad de S_n. Desafortunadamente el primer problema que aparece es el siguiente.

Proposición 3.1. *Sean $a = 0$ y $\omega \in \Omega$ tal que $S_n(\omega)$ converge para culaquier función continua g. Entonces $t \mapsto B_t(\omega)$ es una función de variación acotada en* $[0, T]$.

Observación 3.2. *El Corolario 2.15 implica que S_n no converge en probabilidad cuando $n \to \infty$ (ver Protter [29]). El problema que se tiene aquí es que g_t depende de eventos que ocurren después de t.*

Demostración. Sea X el espacio de Banach de todas las funciones continuas en $[0, T]$ con la norma del supremo. Defina los operadores lineales $T_n : X \to \mathbb{R}$ dados por

$$T_n(h) = \sum_{i=1}^{n} h(s_i)\big(B_{s_i}(\omega) - B_{s_{i-1}}(\omega)\big).$$

Observe que para cada n, existe $h \in X$ tal que $h(s_i) = \text{signo}\big\{B_{s_i}(\omega) - B_{s_{i-1}}(\omega)\big\}$ y $\|h\|_X = 1$. Por lo tanto tenemos

$$T_n(h) = \sum_{i=1}^{n} \big|B_{s_i}(\omega) - B_{s_{i-1}}(\omega)\big|.$$

Así $\|T_n\|_X = \sum_{i=1}^{n} \big|B_{s_i}(\omega) - B_{s_{i-1}}(\omega)\big|$, lo que implica que

$$\text{var}\big(B.(\omega)\big) \leq \sup_n \|T_n\|_X$$

Finalmente el resultado se sigue del teorema de Banach-Steinhaus, porque en este caso tenemos que $T_n(g)$ converge para cada $g \in X$ lo que da que $\sup_n \|T_n\|_X < \infty$. $\square$

El segundo problema que aparece al definir (4) como el límite en probabilidad de (5) es el siguiente.

Proposición 3.3. *Suponga que $g = B$ en* (5)*, entonces S_n converge en probabilidad a $\frac{B_T^2}{2} + (a - \frac{1}{2})T$.*

Observación 3.4. *Esto implica que el límite de S_n puede depender del punto a.*

Demostración. Proceder como en la demostración de Proposición 2.14. □

Ahora damos la idea que usó Itô [16] para definir la integral estocástica (4).

Si $\mathfrak{F}_t$ representa la información que tenemos hasta el tiempo t, es natural suponer que g_t en (4) es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_t$-medible. Esto es, g es un proceso adaptado a la filtración dada.

Como se hace en la teoría de integración, primero definimos (4) cuando g es un proceso *simple adaptado* de la forma

$$g_s = \sum_{k=0}^{n} g_{t_k} 1_{]t_k, t_{k+1}]}(s), \tag{6}$$

con $0 = t_0 < \cdots < t_{n+1} = T$. Note que en este caso, la v.a. g_{t_k} es $\mathfrak{F}_{t_k}$-medible.

Definición 3.5. *La* integral estocástica de un proceso simple adaptado de la forma (6) con respecto a B *se define como*

$$\int_0^T g_s dB_s := \sum_{k=0}^{n} g_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Observación 3.6. *Esta definición es independiente de la representación de g como proceso simple ya que es dada trayectoria por trayectoria.*

Una propiedad importante de la integral estocástica es la llamada *relación de isometría*. De ésta, en particular, se obtienen versiones del teorema de convergencia dominada para dicha integral.

Proposición 3.7. *Suponga que $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$, donde g es dado por* (6)*. Entonces*

$$E\Big[(\int_0^T g_s dB_s)^2\Big] = E\int_0^T (g_s)^2 ds. \tag{7}$$

Demostración. La definición de la integral estocástica implica

$$\begin{aligned} E\Big[\big(\int_0^T g_s dB_s\big)^2\Big] &= \sum_{k=0}^{n} E\big[(g_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}))^2\big] \\ &\quad + 2\sum_{j<k} E\big[g_{t_k} g_{t_j}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\big] \\ &= E\int_0^T (g_s)^2 ds, \end{aligned}$$

donde usamos que B y $\{B_t^2 - t : t \in [0,T]\}$ son martingalas (ver Proposición 2.18) para demostrar que

$$E\big[(g_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}))^2\big] = E\big[(g_{t_k})^2\big](t_{k+1} - t_k), \qquad k \in \{0,1,\dots,n\}.$$

□

Una consecuencia importante de (7) es la siguiente desigualdad.

Proposición 3.8. *Sea g como en (6). Entonces para $N, c > 0$, se tiene*

$$P\Big[\Big|\int_0^T g_s dB_s\Big| > c\Big] \leq N/c^2 + P\Big[\int_0^T (g_s)^2 ds > N\Big].$$

Observación 3.9. *Aquí no suponemos que $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$.*

Demostración. Defina

$$G_N(s) = \begin{cases} g_s, & \text{si } \displaystyle\int_0^{t_i} \big(g_r\big)^2 dr \leq N, \qquad s \in (t_{i-1}, t_i], \\ 0, & \text{si } \displaystyle\int_0^{t_i} \big(g_r\big)^2 dr > N, \qquad s \in (t_{i-1}, t_i]. \end{cases}$$

Es fácil ver que G_N es un proceso simple adaptado. La Proposición 3.7 implica

$$E\Big[\Big(\int_0^T G_N(s) dB_s\Big)^2\Big] = E\int_0^T \big(G_N(s)\big)^2 ds \leq N.$$

También observe que $G_N(s) \neq g_s$ si y sólo si $\int_0^T |g(r)|^2 dr > N$, entonces

$$\begin{aligned} P\Big[\,\Big|\int_0^T g_s dB_s\,\Big| > c\Big] &\leq P\Big[\Big|\int_0^T G_N(s) dB_s\Big| > c\Big] + P\Big[\Big|\int_0^T \big(g_s - G_N(s)\big) dB_s\Big| > 0\Big] \\ &\leq \frac{E\big[(\int_0^T G_N(s) dB_s)^2\big]}{c^2} + P\Big[\int_0^T \big|g_s\big|^2 ds > N\Big] \\ &\leq N/c^2 + P\Big[\int_0^T \big|g_s\big|^2 ds > N\Big]. \end{aligned}$$

□

El siguiente paso para construir la integral estocástica (4) es ver que los procesos simples adaptados aproximan a los procesos medibles y adaptados en algún sentido.

Proposición 3.10. *Sea g un proceso simple adaptado tal que*

$$\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty \qquad \text{con probabilidad } 1. \tag{8}$$

Entonces existe una sucesión $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$ de procesos simples adaptados tal que

$$\int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds \to 0 \qquad \text{en probabilidad cuando } n \to \infty. \tag{9}$$

Además, si $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$ se puede encontrar una sucesión $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$ de procesos simples adaptados tal que

$$E\int_0^T (g_s^{(n)} - g_s)^2 ds \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty. \tag{10}$$

Demostración. Se puede ver que

$$g^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_s ds \right) 1_{]t_i, t_{i+1}]}$$

es una de las sucesiones que estamos buscando. □

Ahora podemos extender el dominio de la integral.

Definición 3.11. *Sean g un proceso medible y adaptado tal que (8) se cumple y $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$ una sucesión de procesos simples adaptados como en (9). Definimos la integral estocástica de g con respecto a B (denotada $\int_0^T g_s dB_s$) como el límite en probabilidad de la sucesión $\{\int_0^T g_s^{(n)} dB_s : n \geq 1\}$.*

Observaciones 3.12.

i) *Note que (9) y la Proposición 3.8 implican que $\{\int_0^T g_s^{(n)} dB_s : n \geq 1\}$ converge en probabilidad.*

ii) *Si $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$ entonces (10) y Proposición 3.7 dan que la sucesión $\{\int_0^T g_s^{(n)} dB_s : n \geq 1\}$ converge en $L^2(\Omega)$.*

iii) *La definición de $\int_0^T g_s^{(n)} dB_s$ sólo depende de g y no de la sucesión $\{g^{(n)} : n \geq 1\}$.*

iv) *Sea F una variable aleatoria $\mathfrak{F}_s$-medible. Entonces para $s < t \leq T$, $\int_s^t F g_r dB_r = F \int_s^t g_r dB_r$.*

Ahora resumimos algunas de las propiedades de la integral estocástica (4).

Sean $g, g^{(1)}$ y $g^{(2)}$ procesos estocásticos medibles y adaptados como en (8) y $\{h^{(n)} : n \geq 1\}$ una sucesión de procesos simples adaptados y acotados. Entonces se tiene que las siguientes propiedades son válidas:

i) $\int_0^T (ag_s^{(1)} + bg_s^{(2)})dB_s = a\int_0^T g_s^{(1)}dB_s + b\int_0^T g_s^{(2)}dB_s$, $a, b \in \mathbb{R}$.

ii) El proceso $\{\int_0^t g_s dB_s := \int_0^T 1_{[0,t]}(s) g_s dB_s : t \in [0,T]\}$ tiene trayectorias continuas.

iii) Si h es un proceso simple adaptado y acotado tal que

$$\sup_{t,\omega} |h_t^{(n)} - h_t| \to 0, \quad n \to \infty,$$

entonces Proposición 3.8 implica que $\int_0^T h_s^{(n)} dB_s \to \int_0^T h_s dB_s$ en probabilidad cuando $n \to \infty$.

Además si $E\int_0^T (g_s)^2 ds < \infty$, se tiene también lo siguiente:

iv) $E\big(\int_0^T g_s dB_s\big) = 0$ y $E\big(\int_0^T g_s dB_s\big)^2 = E\big(\int_0^T (g_s)^2 ds\big)$.

v) El proceso $\big\{\int_0^t g_s dB_s : t \in [0,T]\big\}$ es una $\mathfrak{F}_t$-martingala.

Note que $\int_0^T \cdot\, dB_s$ merece el nombre de integral ya que es un operador lineal (ver *i)*) y satisface el teorema de convergencia dominado *iii*).

La Propiedad *iii*) ha caracterizado a la familia de "buenos integradores". En efecto, suponga que Z es un proceso con trayectorias continuas a la derecha con límites a la izquierda adaptado a una filtración $\{\mathcal{G}_t : t \in [0,T]\}$ y que g es un proceso simple como en (6) adaptado a esta filtración. Definimos (ver Definición 3.5)

$$\mathcal{I}_T^Z(g) = \sum_{k=0}^{n} g_{t_k}(Z_{t_{k+1}} - Z_{t_k}).$$

Se ha demostrado que la condición mínima para definir una integral estocástica de procesos adaptados a $\{\mathcal{G}_t : t \in [0,T]\}$ con respecto a Z (usando las ideas de Itô) es una versión de *iii*). A saber:

vi) Sean $g, g^{(n)}$, $n \geq 1$, procesos simples adaptados a la filtración $\{\mathcal{G}_t : t \in [0,T]\}$. Entonces

$$\sup_{(s,\omega)} |g_s^{(n)} - g_s| \to 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

implica

$$\mathcal{I}_T^Z(g^{(n)}) \to \mathcal{I}_T^Z(g) \qquad \text{en probabilidad.}$$

Se ha comprobado que si Z es un "buen integrador" (i.e., cumple *vi*)), entonces Z es la suma de una "martingala" con respecto a $\{\mathcal{G}_t : t \in [0,T]\}$ y un proceso con trayectorias de variación acotada. A un tal proceso de Z se le llama $\mathcal{G}_t$-*semimartingala*. El lector interesado en este enfoque puede consultar [29].

Ahora enunciamos un resultado importante de la teoría de integración estocástica. A saber la fórmula de integración por partes para la integral estócastica. Para extensiones de este resultado ver Moret y Nualart [24] y sus referencias, y Protter [29].

Teorema 3.13 (Fórmula de Itô). *Sea $f \in C^2(\mathbb{R})$ (i.e., una función real con segunda derivada continua) y sea*

$$X_t = X_0 + \int_0^t h_s ds + \int_0^t g_s dB_s, \qquad t \in [0,T],$$

donde X_0 es $\mathfrak{F}_0$-medible, h es un proceso medible y adaptado con trayectorias integrables y g es un proceso medible y adaptado que cumple (8). Entonces

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)dX_s dX_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)(h_s ds + g_s dB_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)(g_s)^2 ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Note que $dXdX$ se calcula usando la tabla de multiplicación

$\times$	dB_t	dt
dB_t	dt	0
dt	0	0

Una consecuencia importante de la fórmula de Itô es que $\{f(X_t) : t \in [0,T]\}$ es una $\mathfrak{F}_t$-semimartingala. En la siguiente sección mencionaremos otras aplicaciones importantes de la fórmula de Itô (11).

Dos ingredientes esenciales en la demostración de la fórmula de Itô son la formula de Taylor y el hecho de que

$$\sum_{k=1}^{n} (B_{t_k^{(n)}} - B_{t_{k-1}^{(n)}})^2 \to (t-s) \tag{12}$$

en probabilidad cuando $n \to \infty$ si $s = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t$ es una sucesión de particiones del intervalo $[s,t]$ tal que $\text{máx}_k(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}) \to 0$ cuando $n \to \infty$ (ver Proposición 2.14).

Note que (12) justifica la Tabla anterior.

3.1 Ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Itô

Ahora consideremos la ecuación diferencial estocástica (EDE)

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t, \qquad t \in [0,T], \\ X_0 &= \xi, \end{aligned} \tag{13}$$

donde b y σ son funciones $\mathcal{B}([0,T]) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$–medibles y ξ es una v.a. $\mathcal{F}_0$–medible.

Una solución (fuerte) de la EDE (13) es un proceso X adaptado (a $\{\mathcal{F}_t : t \in [0,T]\}$) con trayectorias continuas tal que:

- $P[X_0 = \xi] = 1$
- $P[\int_0^t \{|b(s,X_s)| + (\sigma(s,X_s))^2\} ds < \infty] = 1$,
- $X_t = \xi + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$ con probabilidad 1 para cada $t \in [0,T]$.

Algunas soluciones de EDEs se pueden obtener por medio de la fórmula de Itô (11). Por ejemplo, $Y_t = \exp(\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma_s)^2 ds)$ es solución de la EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= \sigma_t X_t dB_t, \qquad t \in [0,T], \\ X_0 &= 1. \end{aligned} \tag{14}$$

La fórmula de Itô también ha permitido relacionar a las EDEs con las ecuaciones diferenciales ordinarias [11] y con las ecuaciones diferenciales parciales del tipo parabólico y elíptico [18].

Ahora estudiamos el resultado clásico de existencia y unicidad de soluciones de una EDE con coeficientes de Lipschitz que tienen crecimiento lineal. El lector interesado en resultados más generales puede ver [18] y [29].

En el resto de este capítulo suponemos que b y σ satisfacen las siguientes hipótesis:

(H1) *Condición de Lipschitz:* Existe una constante K tal que

$$\big|b(t,x) - b(t,y)\big| + \big|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\big| \le K\big|x-y\big|,\ x,y \in \mathbb{R} \text{ y } t \in [0,T].$$

(H2) *Crecimiento lineal:* Existe una constante K tal que

$$\big|b(t,x)\big|^2 + \big|\sigma(t,x)\big|^2 \le K\big(1+|x|^2\big), \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ t \in [0,T]. \tag{15}$$

La condición (H1) garantiza que la EDE (13) tiene a lo más una solución en $L^2(\Omega\times[0,T])$. (i.e., cuadrado integrable) si $\xi \in L^2(\Omega)$. En efecto, sean X, Y dos soluciones de (13) en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Entonces, por (H1) y la propiedad *iv*) de la integral estocástica tenemos

$$E\big|X_t - Y_t\big|^2 \le 4(T+1)K^2 \int_0^t E\big|X_s - Y_s\big|^2 ds, \qquad t \in [0,T].$$

Por lo tanto el lema de Gronwall implica que $X = Y$ el $L^2(\Omega \times [0,T])$.

La Hipótesis (H1) puede debilitarse: basta pedir la siguiente (ver [18])

(H1') *Condición de Lipschitz local:* Para cada $N > 0$, existe una constante $K_N > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\big|b(t,x) - b(t,y)\big| + \big|\sigma(t,x) - \sigma(t,y)\big| \\ &\quad \leq \quad K_N|x-y|, \quad t \in [0,T], \quad |x|, |y| \leq N. \end{aligned}$$

Es bien sabido que si no se cumple (H1'), entonces la EDE puede tener más de una solución: sea $\alpha \in (0,1)$ entonces la ecuación

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha ds$$

tiene las soluciones $X \equiv 0$ y $X_t = \beta^{-\beta}(t-s)^\beta 1_{[s,T]}(t)$, donde $\beta = (1-\alpha)^{-1}$ y $0 \leq s < T$.

Por otro lado la Hipotesis (H1) y (H2) implican que la EDE (13) tiene una solución en $L^2(\Omega \times [0,T])$. En efecto, imitando el caso determinista (i.e., $\sigma \equiv 0$ y ξ independiente de $\omega \in \Omega$), definimos inductivamente

$$X^{(0)} \quad \equiv \quad \xi$$

y

$$X_t^{(n+1)} \quad = \quad \xi + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB_s, \quad t \in [0,T].$$

Es fácil ver que la propiedad *iv)*, (H1) y (H2) dan que $\{X^{(n)} : n \geq 0\}$ es una sucesión convergente en $L^2(\Omega \times [0,T])$ cuyo límite es una solución de la EDE (13).

Si omitimos la Hipotesis (H2), la EDE (13) puede no tener una solución global (i.e., definida en todo el intervalo $[0,T]$): la solución de la ecuación

$$X_t = 1 + \int_0^t (X_s)^2 ds$$

es $X_t = (1-t)^{-1}$, la cual "explota" cuando $t \nearrow 1$.

Observación 3.14. *El teorema de existencia y unicidad para las soluciones de la ecuación (13) es aún válido si b y σ son dos campos aleatorios (i.e., procesos parametrizados por $x \in \mathbb{R}$) $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,T])$–medibles, donde $\mathcal{P}$ es la σ-álgebra de los conjuntos predecibles, la cual es generada por todos los procesos adaptados y continuos a la izquierda. Además observe que si b y σ son lineales en $x \in \mathbb{R}$ (i.e., $\sigma_s(x) = \sigma_s \cdot x$ y $b_s(x) = b_s \cdot x$, $s \in [0,T], x \in \mathbb{R}$), no acotados, entonces la Hipotesis (H1) no necesariamente se cumple. Sin embargo, en este último caso, como ya vimos (ver ecuación (14)), la fórmula de Itô implica la existencia de una única solución.*

4 Integración estocástica en el sentido de Skorohod

Observe que la condición que implica que los procesos integrables en el sentido de Itô deben ser adaptados, aunque natural, es restrictiva. Por ejemplo, supongamos que la condición inicial ξ de la EDE (13) es $\mathfrak{F}$-medible (i.e., depende de toda la información que tenemos). En este caso, una solución de (13) no puede ser un proceso adaptado. Por lo que es necesario contar con una extensión de la integral de Itô que nos permita integrar procesos no necesariamente adaptados.

En esta sección estudiaremos la integral de Skorohod [35], la cual es una extensión de la integral de Itô, así como algunos elementos básico del cálculo anticipante y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas. Para mayores detalles ver Nualart [25, 26].

En el resto de esta sección supondremos que $B = \{B_t, \mathfrak{F}_t : t \in [0,T]\}$ es un **mb** y que $\{\mathfrak{F}_t : t \in [0,T]\}$ es la filtración generada por B.

$\mathcal{S}$ es la familia de todos los funcionales suaves F de la forma

$$F = f\left(\int_0^T h_1(s)dB_s, \dots, \int_0^T h_n(s)dB_s\right), \tag{16}$$

donde $h_1, \dots, h_n \in L^2([0,T])$ y $f \in C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ (i.e., f y sus derivadas parciales tienen crecimiento polinomial).

Definición 4.1. *La derivada de un funcional suave F de la forma (16) es el proceso estocástico $DF = \{D_tF : t \in [0,T]\}$ dado por*

$$D_tF = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\int_0^T h_1(s)dB_s, \dots, \int_0^T h_n(s)dB_s\right)h_i(t).$$

El siguiente resultado es una fórmula de integración por partes.

Lema 4.2. *Suponga que $F \in \mathcal{S}$ y $h \in L^2([0,T])$. Entonces*

$$E\int_0^T (D_sF)h(s)ds = E\left(F\int_0^T h(s)dB_s\right).$$

Observación 4.3. *Si uno aplica este resultado a FG, $F, G \in \mathcal{S}$, y usa el hecho de que D es un operador de derivada, entonces verá porque el nombre de fórmula de integración por partes (ver [25]).*

Demostración. Primero observe que sin perdida de generalidad podemos suponer que $\|h\|_{L^2([0,T])} = 1$. Además podemos suponer que

$$F = f\left(\int_0^T e_1(s)dB_s, \dots, \int_0^T e_n(s)dB_s\right),$$

donde $e_1 = h$ y $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un sistema ortonormal de $L^2\big([0,T]\big)$. Sea ϕ la densidad de la distribución normal $N(0,1)$ en $\mathbb{R}^n$. Esto es

$$\phi(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Entonces, la fórmula de integración por partes implica

$$\begin{aligned} E\int_0^T (D_sF)h(s)ds &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\phi(x)x_1 dx \\ &= E\bigg(F\int_0^T h(s)dB_s\bigg). \end{aligned}$$

Así la demostración está terminada. □

Lema 4.4. *D es un operador cerrable de $L^2(\Omega)$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$.*

Demostración. Sea $\{F_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$ una sucesión tal que $F_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$ y $DF_n \to Y$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Queremos ver que $Y = 0$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Para esto sea $h \in L^2([0,T])$ y $G \in \mathcal{S}$. Entonces Lema 4.2 da

$$\begin{aligned} E\bigg(G\int_0^T Y_s h(s)ds\bigg) &= \lim_{n\to\infty} E\bigg(G\int_0^T (D_sF_n)h(s)ds\bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} E\bigg[-F_n\int_0^T (D_sG)h(s)ds) + F_nG\int_0^T h(s)dB_s\bigg] \\ &= 0, \end{aligned}$$

lo que implica que $Y = 0$. □

Definición 4.5. *$\mathbb{D}^{1,2}$ es el dominio de la cerradura de D. Esto es $\mathbb{D}^{1,2}$ es la cerradura de los funcionales suaves $\mathcal{S}$ con respecto a la seminorma*

$$\|F\|_{1,2} = \bigg[E\big(|F|^2\big) + E\int_0^T (D_sF)^2 ds\bigg]^{1/2}.$$

Observaciones 4.6.

i) $D : \mathbb{D}^{1,2} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ *es un operador cerrado no acotado con dominio denso. Así D tiene un operador adjunto, el cual es también un operador cerrado.*

ii) $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ *si y sólo si existe una sucesión $\{F^{(n)} : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$ tal que $F_n \to F$ en $L^2(\Omega)$ y $DF_n \to Y$ en $L^2(\Omega\times[0,T])$. En este caso $DF_n = Y$ en $L^2(\Omega \times [0,T])$.*

Proposición 4.7. *Sea $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ una variable aleatoria $\mathfrak{F}_s$-medible, $s \in [0,T]$. Entonces*

$$D_t F = 0 \qquad \text{para } t \in (s,T].$$

Demostración. Se puede encontrar una sucesión $\{F^{(n)} : n \geq 1\} \subset \mathcal{S}$ de la forma

$$F^{(n)} = f^{(n)}\left(\int_0^s h_1(r)dB_r, \ldots, \int_0^s h_n(r)dB_r \right),$$

tales que $F^{(n)} \to F$ en $L^2(\Omega)$ y $DF^{(n)}$ converge a DF en $L^2(\Omega \times [0,T])$. Entonces la definición de D implica

$$D_t F^{(n)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x_i} \left(\int_0^s h_1(r)dB_r, \ldots, \int_0^s h_m(r)dB_r \right) h(t) 1_{[0,s]}(t) = 0$$

para $t > s$. Así la demostración está terminada. $\square$

Ahora introducimos el operador adjunto de D, el cual, como veremos más adelante, es una extensión de la integral de Itô.

Definición 4.8. *Denotamos por δ al operador adjunto de D. Esto es δ es un operador cerrado en $L^2(\Omega \times [0,T])$ con dominio denso y con valores en $L^2(\Omega)$ tal que:*

i) *El dominio de δ (denotado por $\operatorname{Dom}\delta$) es el conjunto de procesos $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ tales que*

$$\left| E \int_0^T (D_t F) u_t dt \right| \leq c \|F\|_{L^2(\Omega)},$$

para toda $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, donde c es una constante que sólo depende del proceso estocástico u.

ii) *Si $u \in \operatorname{Dom}\delta$, entonces $\delta(u)$ es el único elemento de $L^2(\Omega)$ tal que*

$$E\big(F\delta(u)\big) = E \int_0^T (D_t F) u_t dt, \quad F \in \mathbb{D}^{1,2}. \tag{17}$$

El operador δ es también llamado el operador de divergencia o la integral de Skorohod.

En lo que sigue usaremos la notación

$$\delta(u) = \int_0^T u_s dB_s. \tag{18}$$

Una consecuencia importante de la relación de dualidad (17) es el siguiente resultado.

Proposición 4.9. *Sean* $u \in \operatorname{Dom}\delta$ *y* $F \in \mathbb{D}^{1,2}$*tales que* $E(F^2 \int_0^T (u_t)^2 dt) < \infty$. *Entonces*

$$\int_0^T F u_t dB_t = F \int_0^T u_t dB_t - \int_0^T (D_t F) u_t dt, \tag{19}$$

en el sentido que $(Fu) \in \operatorname{Dom}\delta$ *si y sólo si el lado derecho en* (19) *es una variable aleatoria cuadrado integrable.*

Observación 4.10. *Compare este resultado con la Observación iv) de la Definición 3.11.*

Demostración. Sea $G \in \mathcal{S}$. Entonces la relación de dualidad (17) implica

$$\begin{aligned} E\int_0^T (D_t G) F u_t dt &= E \int_0^T \big(D_t(FG) - G D_t F\big) u_t dt \\ &= E\Bigg[G\bigg(F\delta(u) - \int_0^T (D_t F) u_t dt\bigg)\Bigg]. \end{aligned}$$

□

El siguiente es la relación que hay entre los operadores δ y D.

Proposición 4.11. *Sea* $u \in L^2([0,T]; \mathbb{D}^{1,2})$ *tal que el proceso* $\{D_t u_s : s \in [0,T]\} \in \operatorname{Dom}\delta$ *para casi toda* $t \in [0,T]$. *Entondces* $\delta(u) \in \mathbb{D}^{1,2}$ *y*

$$D_t(\delta(u)) = u_t + \int_0^T (D_t u_s) dB_s.$$

Demostración. La demostración utiliza el enfoque de descomposición en caos, el cual veremos en la siguiente subsección. □

Otra consecuencia de la relación de dualidad (17) es el siguiente resultado.

Proposición 4.12. *Sean* $u, v \in L^2([0,T]; \mathbb{D}^{1,2})$. *Entonces* $u, v \in \operatorname{Dom}\delta$ *y*

$$E\big(\delta(u)\delta(v)\big) = E\bigg(\int_0^T u_s v_s ds\bigg) + E\bigg(\int_0^T \int_0^T (D_s u_t) D_t v_s ds dt\bigg).$$

Observación 4.13. *Si* u *y* v *son además procesos adaptados, entonces Proposición 4.7 implica*

$$E(\delta(u)\delta(v)) = E\int_0 u_s v_s ds.$$

Compare esta igualdad con la Propiedad iv) de la integral estocástica en el sentido de Itô.

Demostración. La relación de dualidad (17) y la Proposición 4.11 implican

$$\begin{aligned} E\big(\delta(u)\delta(v)\big) &= E\int_0^T v_t D_t\big(\delta(u)\big)dt \\ &= E\int_0^T v_t\left[u_t + \int_0^T (D_t u_s)dB_s\right]dt. \end{aligned}$$

Finalmente el resultado se sigue empleando de nuevo la relación de dualidad (17). □

El siguiente resultado muestra que δ es una extensión de la integral de Itô que permite integrar procesos no necesariamente adaptados. Esto justifica la notación (18).

Proposición 4.14. *Sea $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ un proceso adaptado. Entonces $u \in \operatorname{Dom}\delta$ y*

$$\delta(u) = \int_0^T u_s dB_s,$$

donde el lado derecho es la integral de Itô con respecto al **mb** *B.*

Demostración. Primero suponga que u es un proceso simple adaptado de la forma

$$u = \sum_{k=0}^{n} u_{t_k} 1_{]t_k, t_{k+1}]},$$

con $u_{t_k} \in \mathbb{D}^{1,2}$. Entonces la Proposición 4.9 da

$$\delta(u) = \sum_{k=0}^{n} u_{t_k}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}),$$

lo que muestra que el resultado se cumple (ver Definición 3.5) para procesos adaptados simples.

Finalmente un argumento de aproximación, la Observación *ii)* de la Definición 3.11 y el hecho de que δ es un operador cerrado implican que el resultado es válido. □

Observación 4.15. *Aunque el operador δ es una extensión de la integral de Itô, puede pasar que $u \in \operatorname{Dom}\delta$ pero $u1_{[0,t]} \notin \operatorname{Dom}\delta$ para algún $t \in [0,T]$ (ver Nuarat[26], Capítulo 5). También se tiene que, si u es tal que $(u1_{[0,t]}) \in \operatorname{Dom}\delta$ para toda $t \in [0,T]$, el proceso $\{\delta(u1_{[0,t]}) : t \in [0,T]\}$ puede tener trayectoria discontinuas (ver [26], Capítulo 5), compare con las propiedades de la integral de Itô.*

La integral de Skorohod también satisaface una versión de la fómula de integración por partes.

Teorema 4.16 (Fórmula de Itô para δ). *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y el proceso continuo $X_t = \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds$, con $u \in L^4([0,T];\mathbb{D}^{2,4})$ (i.e., u_t tiene dos derivadas en $L^4(\Omega)$), y $v \in L^4([0,T];\mathbb{D}^{1,4})$. Entonces*

$$
\begin{aligned}
f(X_t) = f(0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)(u_s)^2 ds \\
+ \int_0^t f''(X_s)u_s \left\{ \int_0^s (D_s v_r)dr + \int_0^s (D_s u_r)dB_r \right\} ds.
\end{aligned}
$$

Observaciones 4.17.

i) *Si u y v son procesos adaptados, entonces la Proposición 4.7 implica $\int_0^s (D_s v_r)dr + \int_0^s (D_s u_r)dB_r = 0$. Compare con el Teorema 3.13.*

ii) *La razón de que esta fórmula tiene un término extra es que (19) también lo tiene.*

iii) En Alòs y Nualart [1] se encuentra otra versión de este resultado.

4.1 Descomposición en caos

Recordaremos que estamos suponiendo que la filtración $\{\mathfrak{F}_t : t \in [0,T]\}$ es generada por el movimiento browniano B.

Definición 4.18. *Sea $f \in L^2([0,T]^n)$. Se define a la integral múltiple $I_n(f)$ de f con respecto a B de orden n, como la integral iterada (en el sentido de Itô)*

$$
I_n(f) = n! \int_0^T \int_0^{s_n} \cdots \int_0^{s_2} \tilde{f}(s_1, \ldots, s_n) dB_{s_1} \cdots dB_{s_n},
$$

donde $\tilde{f}$ es la simetrización de f, la cual se define como

$$
\tilde{f}(s_1, \ldots, s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f(s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(n)}).
$$

Aquí S_n es la familia de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

Se ha demostrado (ver Itô [17]) que I_n es un operador lineal acotado de $L^2([0,T]^n)$ en $L^2(\Omega)$ tal que

$$
E\big(I_n(f)I_m(g)\big) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad n \neq m, \\ n!\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2([0,T]^n)}, & \text{si} \quad n = m. \end{cases} \tag{20}
$$

También en Itô [17] (ver Nualart [25]) se ha demostrado la siguiente propiedad de las integrales múltiples, conocida como la *descomposición en caos de variables aleatorias cuadrado integrables.*

Proposición 4.19. *Sea $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$. Entonces F tiene una descomposición en caos de la forma*

$$F = (EF) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(f_n). \tag{21}$$

Además, esta descomposición es única si las funciones f_n son simétricas.

Una aplicación importante de la Proposición 4.19 es la caracterización del espacio $\mathbb{D}^{1,2}$ (dominio del operador D).

Proposición 4.20. *Sea $F \in L^2(\Omega, \mathfrak{F}_T, P)$ con la descomposición en caos (21). Entonces $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ si y sólo si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nn! \|\tilde{f}_n\|^2_{L^2([0,T]^n)} < \infty. \tag{22}$$

En este caso

$$D_t F = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(\tilde{f}_n(\cdot, t)).$$

Observaciones 4.21.

i) *Note que (20) da*

$$E \int_0^T (D_t F)^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} nn! \|\tilde{f}_n\|^2_{L^2([0,T]^n)}.$$

ii) *Es importante recordar que el teorema de Fubini implica que*

$$\|\tilde{f}_n\|^2_{L^2([0,T]^n)} \leq \|f_n\|^2_{L^2([0,T]^n)}.$$

Ahora considere $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$. Entonces la Proposición 4.19 nos permite encontrar una familia $\{f_n : n \geq 0\}$ de funciones tales que $f_n \in L^2([0,T]^{n+1})$, f_n es simétrica en las primeras n variables y se cumple la descomposición en caos

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t)), \quad t \in [0,T]. \tag{23}$$

Aquí la convergencia de la serie es en $L^2(\Omega \times [0,T])$ y

$$E \int_0^T (u_s)^2 ds = \sum_{m=0}^{\infty} m! \|f_m\|^2_{L^2([0,T]^{m+1})}.$$

Lo anterior permite caracterizar al $\operatorname{Dom} \delta$ usando la descomposición en caos.

Proposición 4.22. *Sea $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ con descomposición en caos (23). Entonces $u \in \operatorname{Dom}\delta$ si y sólo si*

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)!\|\tilde{f}_m\|^2_{L^2([0,T]^{m+1})} < \infty.$$

En este caso

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}(\tilde{f}_n).$$

Observaciones 4.23.

i) $E(\delta(u)^2) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)!\|\tilde{f}_m\|_{L^2([0,T]^{m+1})}$.

ii) *Como f_m es simétrica en las primeras m variables. Entonces*

$$\tilde{f}_m(s_1,\ldots,s_{m+1}) = \frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m+1} f(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_m,s_i).$$

4.2 Ecuaciones diferenciales estocásticas en el sentido de Skorohod

Sean $b,\sigma : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones medibles y consideremos la EDE en el sentido de Skorohod (i.e., la integral estocástica es el operador de divergencia δ),

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{24}$$

donde ξ es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_T$-medible.

Para construir una solución de la ecuación (24) podríamos copiar el método de iteración descrito en la Sección 3.1. Sin embargo, por la Proposición 4.12, la norma (en $L^2(\Omega)$) de la solución X depende de la norma de DX, y la norma de DX depende de la norma de DDX (ver Proposición 4.11). Esto es, en este caso no tenemos un método cerrado, lo que hace difícil demostrar la existencia y unicidad de las soluciones para esta ecuación.

Existencia y unicidad de soluciones vía la descomposición en caos

Aquí consideramos la ecuación lineal estocástica

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s)X_s ds + \int_0^t \sigma(s)X_s dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{25}$$

donde ξ es una variable aleatoria $\mathfrak{F}_T$-medible y cuadrado integrable, y $b,\sigma : [0,T] \to \mathbb{R}$ son dos funciones medibles.

Para encontrar la única solución de (25), Shiota [34] supone que tenemos las siguientes descomposiciones en caos (ver Proposición 4.19 y (23))

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\eta_n) \quad \text{y} \quad X_t = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n^t),$$

donde $\eta_n, f_n^t \in L^2([0,T]^n)$ son funciones simétricas. Entonces, usando la unicidad de la descomposición en caos (Proposición 4.19) y la caracterización del operador δ (Proposición 4.22), tenemos

$$f_0^t = \eta_0 + \int_0^t b(s) f_0^s ds$$

y

$$\begin{aligned} f_n^t(s_1,\ldots,s_n) = \eta_n(s_1,\ldots,s_n) &+ \int_0^t b(s) f_n^s(s_1,\ldots,s_n) ds \\ &+ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{n-1}^{s_i}(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n) 1_{[0,t]}(s_i). \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de manera inductiva, Shiota [34] demostró que la ecuación (25) tiene una única solución en $L^2(\Omega \times [0,T])$.

En [21], León y Pérez-Abreu estudian el caso donde $b(s) = I_1(a^s)$. Para esto, utilizan la fórmula producto para integrales múltiples, la cual se puede consultar en Nualart [25].

Existencia y unicidad de soluciones a través del teorema de Girsanov

Ahora vamos a utilizar otro método para estudiar la ecuación

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma_s X_s dB_s, \quad t \in [0,1]. \tag{26}$$

Este método es debido a Buckdahn [9, 10].

En esta subsección $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ y B son el espacio y el proceso de Wiener canónicos introducidos en el Ejemplo 2.11. También supondremos que los coeficientes de la ecuación (26) satisfacen la siguientes hipótesis:

i) $\sigma \in L^2([0,1])$.

ii) $\xi \in L^p(\Omega)$, para algún $p > 2$.

iii) $b : [0,1] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible tal que existen $\nu \in L^1([0,1])$, una constante $L > 0$ y un conjunto $N_1 \in \mathfrak{F}_1$ de probabilidad 1 tales que

$$|b(t,x,\omega) - b(t,y,\omega)| \leq \nu_t |x-y|, \quad \int_0^1 \nu_t dt \leq L, \quad |b(t,0,\omega)| \leq L,$$

para $x, y \in \mathbb{R}$ y $\omega \in N_1$.

Para establecer el resultado de existencia y unicidad de la solución de la ecuación (26), damos algunas notaciones.

Consideremos las transformaciones $T_t, A_t : \Omega \to \Omega$, $t \in [0,1]$, dadas por

$$T_t(\omega)_s = \omega_s + \int_0^{t \wedge s} \sigma_u du$$

y

$$A_t(\omega)_s = \omega_s - \int_0^{t \wedge s} \sigma_u du.$$

Note que $T_t A_t$ y $A_t T_t$ coinciden con el operador identidad. Ahora defina

$$\epsilon_t = exp\left(\int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_s)^2 ds \right).$$

Por último, consideremos, para cada $x \in \mathbb{R}$ y $\omega \in \Omega$, la solución de la ecuación

$$Z_t(\omega, x) = x + \int_0^t \epsilon_s^{-1}\big(T_t(\omega)\big) b\big(s, \epsilon_s(T_t(\omega)) Z_s(\omega, x), T_s(\omega)\big) ds,$$

la cual tiene una única solución, definida ω por ω, debido a la hipótesis de esta subsección.

Ahora estamos listos para enunciar el resultado de existencia y unicidad de la ecuación (26).

Teorema 4.24. *Sea* $X = \{\epsilon_t Z_t(A_t, \xi(A_t)) : t \in [0,1]\}$. *Entonces el proceso* X *satisface que* $(1_{[0,t]}\sigma X) \in \operatorname{Dom}\delta$ *para toda* $t \in [0,1]$, $X \in L^2(\Omega \times [0,1])$ *y* X *es la única solución de (26) que cumple estas condiciones.*

La demostración de este resultado es una aplicación del teorema clásico de Girsanov.

Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones de Volterra anticipantes

También se ha estudiado la ecuación de Volterra en el sentido de Skorohod

$$X_t = X_0 + \int_0^t F(t,s,X_s) ds + \int_0^t G(t,s,X_s) dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{27}$$

donde F y G son funciones medibles tales que $F(t,s,x)$ y $G(t,s,x)$ son $\mathfrak{F}_t$-medibles para $s \in [0,T]$ y $x \in \mathbb{R}$ fijos.

Aunque la solución de esta ecuación es adaptada, los integrandos del lado derecho de (27) no lo son, debido a la hipótesis sobre F y G. Así es necesario usar una integral anticipante que permita integrar procesos no necesariamente adaptados para analizar esta ecuación.

La idea para demostrar la existencia de una única solución de la ecuación (27) es aprovechar la hipótesis de medibilidad sobre F y G para encontrar estimaciones de la norma $L^p(\Omega), p \geq 2$, de la integral estocástico involucrada, y en consecuencia poder aplicar el método de iteración de Picard descrito en la Sección 3.1. Para mayor detalle ver Alòs y Nualart [2], Berger y Mizel [6], León y Nualart [22, 23], y Protter y Pardoux [28].

5 Integral estocástica hacia adelante

Como hemos visto en la Sección 4, la integral de Skorohod es una extensión de la integral de Itô que permite integrar (con respecto a B) procesos no necesariamente adaptados. Sin embargo el operador δ no coincide en general con la integral de Itô con respecto a B cuando el **mb** es considerado como una $\mathcal{G}_t$-semimartingala (ver Sección 3), para alguna filtración $\mathcal{G}$. En efecto, no es difícil ver que

$$W_t = B_t - \int_0^{t\wedge 1} \frac{B_1 - B_s}{1-s} ds, \quad t \in [0,T],$$

es un $\mathcal{F}_t \vee \{B_1\}$-**mb** y que debido a la Proposición 4.9, $\delta(B_1)$ es diferente a la integral de B_1 con respecto a la $\mathcal{F}_t \vee \{B_1\}$-semimartingala B. En la literatura existe otro concepto de integral estocástica anticipante que es igual a la última integral de Itô. A saber, la llamada integral estocástica hacia adelante ("*forward integral*" en inglés).

La integral hacia adelante también es una extensión de la integral de Itô y es definida como un límite en probabilidad. Por lo que no es fácil estimar sus momentos, como sucede con las integrales de Itô y de Skorohod (ver Proposiciones 3.7 y 4.12). Afortunadamente, la integral hacia adelante se relaciona con el operador δ, y en consecuencia uno puede usar las técnicas del cálculo de variaciones o cálculo de Malliavin para obtenr sus propiedades.

En esta sección estudiaremos el cálculo anticipante basado en la integral hacia adelante y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales estocásticas.

5.1 Definición y propiedades de la integral hacia adelante

Recuerde que $B = \{B_s, \mathfrak{F}_s : s \geq 0\}$ es un moviento browniano.

Definición 5.1. *Sea u un proceso medible con trayectorias integrables. Decimos que $u \in \operatorname{Dom} \delta^-$ si*

$$\epsilon^{-1} \int_0^T u_s (B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s) ds$$

converge en probabilidad cuando $\epsilon \downarrow 0$. Este límite es denotado por $\int_0^T u_s dB_s^-$ y es llamado la integral hacia adelante de u con respecto a B.

Observación 5.2. *Esta definición de integral estocástica fue dada por Russo y Vallois [32], y ha sido estudiada por Asch y Potthoff [4], Berger y Mizel [6], Kuo y Russek [19], y Russo y Vallois [32, 33].*

La siguiente propiedad de la integral hacia adelante es una consecuencia de su definición.

Proposición 5.3. *Sean $u \in \operatorname{Dom} \delta^-$ y F una variable aleatoria. Entonces $(Fu) \in \operatorname{Dom} \delta^-$ y*

$$\int_0^T (F u_s) dB_s^- = F \int_0^T u_s dB_s^-.$$

Observación 5.4. *Compare este resultado con la Observación iv) de la Definición 3.11 y con la Proposición 4.9.*

Demostración. El resultado es una consecuencia del hecho de que si $\{F_n : n \geq 1\}$ y $\{G_n : n \geq 1\}$ son dos sucesiones que convergen en probabilidad a F y G, respectivamente, entonces $\{F_n G_n : n \geq 1\}$ converge en probabilidad a FG, cuando $n \to \infty$. □

La integral hacia adelante también tiene la propiedad local.

Proposición 5.5. *Sean $u, v \in \operatorname{Dom} \delta^-$ y $A \in \mathfrak{F}$ tales que $u = v$ sobre $A \times [0, T]$ c.s. Entonces*

$$\int_0^T u_s dB_s^- = \int_0^T v_s dB_s^-$$

sobre A con probabilidad 1.

Demostración. La demostración se sigue del teorema de Fubini. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} &\left| 1_A \int_0^T (u_s - v_s)(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s) ds \right| \\ &\qquad \leq \int_0^T 1_A \left| u_s - v_s \right| \left| B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s \right| ds = 0, \end{aligned}$$

con probabilidad 1 □

Ahora tratamos de extender el conjunto $\mathrm{Dom}\,\delta^-$.

Definición 5.6. *Denotemos por* $(\mathrm{Dom}\,\delta^-)_{loc}$ *al conjunto de todos los procesos medibles* u *para los cuales existe una sucesión* $\{(\Omega_n, u^{(n)}) : n \geq 1\} \subset \mathfrak{F} \times (\mathrm{Dom}\,\delta^-)$ *tal que*

i) $\Omega_n \nearrow \Omega$ *c.s.*

ii) $u = u^{(n)}$ *sobre* $\Omega_n \times [0,T]$ *c.s.*

La sucesión $\{(\Omega_n, u^{(n)}) : n \geq 1\}$ *es llamada una sucesión localizante de* u *en* $\mathrm{Dom}\,\delta^-$. *En este caso definimos a la integral hacia adelante* $\int_0^T u_s dB_s^-$ *como la variable aleatoria dada por*

$$\int_0^T u_s dB_s^- = \int_0^T u_s^{(u)} dB_s^- \quad \text{sobre } \Omega_n, \quad n \geq 1.$$

Observación 5.7. *Note que la Proposición 5.5 implica que esta definición de integral estocástica es independiente de la sucesión localizante de* u.

El siguiente resultado muestra que el conjunto Dom δ^- es estable bajo localización.

Proposición 5.8. *Los conjuntos* $\mathrm{Dom}\,\delta^-$ *y* $(\mathrm{Dom}\,\delta^-)_{loc}$ *coinciden.*

Demostración. Es claro que sólo tenemos que ver que $(\mathrm{Dom}\,\delta^-)_{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{Dom}\,\delta^-$.

Sea $u \in (\mathrm{Dom}\,\delta^-)_{\mathrm{loc}}$ con sucesión localizante $\{(\Omega_n, u^{(u)}) : n \geq 1\}$.

Primero veamos que u tiene trayectorias integrables. El teorema de Fubini implica que

$$\begin{aligned}\int_0^T |u_s| ds &\leq \int_0^T |u_s^{(n)}| ds + \int_0^T |u_s^{(n)} - u_s| ds \\ &= \int_0^T |u^{(n)}| ds < \infty \quad \text{sobre } \Omega_n \text{ c.s.}\end{aligned}$$

Así u tiene trayectorias integrables.

Ahora para terminar la demostración, fijemos $\eta > 0$. Entonces existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $P(\Omega \setminus \Omega_m) < \eta$. En consecuencia tenemos, con $\Omega_0 = \emptyset$ y $\tilde{\eta} > 0$,

$$\begin{aligned}&P\Big(\big|\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s) ds - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \int_0^T u_s^{(n)} dB_s^- \big| > \tilde{\eta}\Big) \\ &\leq P\Big(\big|\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s^{(m)}(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s) ds - \int_0^T u_s^{(m)} dB_s^- \big| > \tilde{\eta}, \Omega_m\Big) \\ &\quad + P\big(\Omega \backslash \Omega_m\big) \\ &\leq P\Big(\big|\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s^{(m)}(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s) ds - \int_0^T u_s^{(m)} dB_s^- \big| > \tilde{\eta}\Big) + \eta,\end{aligned}$$

lo que implica

$$\overline{\lim_{\epsilon\downarrow 0}} P\Big(\Big|\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds - \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\Omega_n\setminus\Omega_{n-1}} \int_0^T u_s^{(n)} dB_s^- \Big| > \tilde{\eta}\Big) \leq \eta.$$

Finalmente, como η es arbitrario, tenemos que $u \in \operatorname{Dom}\delta^-$. □

Una consecuencia inmediata de la demostración anterior es el siguiente.

Corolario 5.9. *Sea* $u \in (\operatorname{Dom}\delta^-)_{loc}$ *con sucesión localizante* $\{(\Omega_n, u^{(n)}) : n \geq 1\}$. *Entonces* $u \in \operatorname{Dom}\ \delta^-$ *y*

$$\int_0^T u_s dB_s^- = \int_0^T u_s^{(n)} dB_s^- \quad \textit{sobre } \Omega_n \textit{ c.s., para cada } n \geq 1.$$

El siguiente resultado de Russo y Vallois [32] muestra la relación que hay entre las integrales de Itô y hacia adelante. Para enunciar este resultado recordemos (ver Stein [36]) que dada una función f localmente integrable (con respecto a la medida de Lebesgue), tenemos que para casi toda $t \in [0, T]$,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{t-\epsilon}^t f(r)dr \to f(t) \quad \text{cuando} \quad \epsilon \downarrow 0. \tag{28}$$

Denotemos por $\mathfrak{L}(f)$ al conjunto de los puntos $t \in [0, T]$ tales que (28) se cumple. También tenemos (ver [29]) que si B es una $\mathcal{G}_t$–semimartingala (para alguna filtración $\{\mathcal{G}_t : t \in [0, T]\}$), entonces $B = W + A$, donde W es un $\mathcal{G}_t$–movimiento browniano y A es un proceso con trayectorias de variación acotada. Esta descomposición de B es usada en el siguiente resultado.

Proposición 5.10. *Suponemos que* $B = W + A$ *es una* $\mathcal{G}_t$*–semimartingala. Sea* u *un proceso medible, acotado y adaptado a* $\{\mathcal{G}_t : t \in [0, T]\}$ *tal que*

$$\int_0^T 1_{\mathfrak{L}(u)^c}(s) d|A|_s = 0 \quad \textit{con probabilidad } 1.$$

Entonces $u \in \operatorname{Dom}\delta^-$ *y*

$$\int_0^T u_s dB_s^- = \int_0^T u_s dB_s, \tag{29}$$

donde la integral de la derecha es la integral de Itô de u *con respecto a la* $\mathcal{G}_t$*-semimartingala* B.

Observación 5.11. *La integral estocástica en el segundo miembro de la igualdad (29) es igual a $\int_0^T u_s dW_s + \int_0^T u_s dA_s$, donde $\int_0^T u_s dW_s$ es la integral de Itô de u con respecto al $\mathcal{G}_t$-movimiento browniano W, y $\int_0^T u_s dA_s$ es definida trayectoria por trayectoria.*

Demostración. Observe que cambiando u por $u1_{[0.T]}$ podemos suponer que u esta definido en $\mathbb{R}$, con probabilidad 1. Entonces el teorema de Fubini para la integral de Itô, la Observación iv) de la Definición 3.11 y el teorema de Fubini usual implican

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds \\
&\qquad = \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \int_s^{(s+\epsilon)\wedge T} u_s dW_r ds + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \int_s^{(s+\epsilon)\wedge T} u_s dA_r ds \\
&\qquad\qquad = \int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{r-\epsilon}^{r} u_s ds\right) dW_r + \int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{r-\epsilon}^{r} u_s ds\right) dA_r.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la relación de isometría (7), junto con (28), implica el resultado. □

Ahora damos el recíproco de la Proposición 5.10. Éste también fue establecido por Russo y Vallois [32]. Aquí hay que observar que la filtración en cuestión $\{\mathcal{G}_t : t \in [0, T]\}$ satisface las condiciones usuales. Esto es

i) $\mathcal{G}_0$ contien a los conjuntos de P–medida cero.

ii) Para toda $t \in [0, T]$, $\mathcal{G}_t = \bigcap_{t<s} \mathcal{G}_s$.

Proposición 5.12. *Sea $\{\mathcal{G}_t : t \in [0, T]\}$ una filtración que satisface las condiciones usuales tal que $\mathfrak{F}_t \subset \mathcal{G}_t$, $t \in [0, T]$. Suponga que $\int_0^T u_s dB_s^-$ existe para cada proceso u acotado con trayectorias continuas a la izquierda con límites a la derecha (càglàd) y $\mathcal{G}_t$-adaptado. Entonces B es una $\mathcal{G}_t$-semimartingala.*

Observación 5.13. *Russo y Vallois [32] han demostrado que el último resultado se cumple si sustituimos a B por un proceso continuo a la derecha con límites a la izquierda (càdlàg).*

Demostración. Para demostrar este resultado usaremos la noción de "buen integrador" explicada en la Sección 3.

Consideremos los F-espacios:

i) $\mathcal{X}_1$ es el conjunto de todos los procesos acotados con trayectorias càglàd y que son $\mathcal{G}_t$-adaptados dotado con la métrica $d_1(X, Y) = \sup_{t,\omega} |X_t(\omega) - Y_t(\omega)|$.

ii) $\mathcal{X}_2$ es el conjunto de los procesos $\mathcal{G}_T$-medibles provisto de la convergencia en probabilidad. Esto es $d_2(X,Y) = E(|X-Y| \wedge 1)$.

Ahora defina los operadores lineales $T_\epsilon : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2, \epsilon > 0$, dado por

$$T_\epsilon(Z) = \frac{1}{\epsilon}\int_0^T Z_s(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds.$$

Entonces la desigualdad

$$|T_\epsilon(Z)| \leq (\sup_{s,\omega}|Z_s|)\frac{1}{\epsilon}\int_0^T |B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s|ds$$

implica que T_ϵ es continuuo para toda $\epsilon > 0$. También tenemos, por hipótesis, que $T_\epsilon(Z) \to \int_0^T Z_s dB_s^-$ en probabilidad. Por lo tanto, Rudin [31] (Teorema 2.7) implica que la integral hacia adelante $\int_0^T \cdot dB_s$ es un operador lineal y continuo de $\mathcal{X}_1$ a $\mathcal{X}_2$. Esto es, B es un "buen integrador". □

El siguiente es la fórmula de sustitución para δ^- (para detalles consultar [32]). Aquí denotaremos por $\mathcal{R}$ a los procesos $\sigma = \{\sigma_t(x) : t \in [0,T], x \in \mathbb{R}\}$ parametrizados por $x \in \mathbb{R}$, los cuales son $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$–medibles, donde $\mathcal{P}$ es la σ-álgebra predecible generada por todos los procesos continuos a la izquierda y adaptados.

Teorema 5.14. *Sean $\sigma \in \mathcal{R}, q > 2$ y $a > 1$ tales que*

i) $E(\int_0^T |\sigma_s(0)|^q ds) < \infty$.

ii) Para cada $N > 0$ y $|x|, |y| \leq N$, tenemos

$$E(\int_0^T |\sigma_s(x) - \sigma_s(y)|^q ds) \leq C_N |x-y|^a.$$

Entonces la integral de Itô $\int_0^T \sigma_s(x)dB_s$ tiene una versión continua en x. Además, para toda v.a. $L, \sigma(L) \in \mathrm{Dom}\delta^-$ con

$$\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^- = (\int_0^T \sigma_s(x)dB_s)_{x=L}.$$

En [20] se ha demostrada que el teorema de sustitución es válido si σ pertenece a la famila

$$\mathcal{R}_2 = \{\sigma \in \mathcal{R} : \sigma(0) \in L^2([0,T]),\ \sigma_t(x) \text{ es diferenciable en } x \text{ y } \int_{-n}^n \int_0^T \sigma_t'(x)^2 dt dx < \infty, \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Teorema 5.15. *Sean $\sigma \in \mathcal{R}_2$ y L una v.a. arbitraria. Entonces $\sigma(L) \in$ Domδ^- y*

$$\int_0^T \sigma_s(L)dB_s^- = (\int_0^T \sigma_s(x)dB_s)_{x=L}.$$

La demostración de este resultado usa que

$$\int_0^T \sigma_s(x)dB_s = \int_0^t \sigma_s(0)dB_s + \int_0^x \int_0^T \sigma_s'(y)dB_s dy.$$

Para terminar este apartado, ahora comentamos sobre la fórmula de Itô para la integral hacia adelante.

Dada una función f con límites a la derecha, convenimos

$$f^{t+}(x) = \begin{cases} f(0+), & x \leq 0, \\ f(x), & x \in (0,t], \\ f(t+) & x > t. \end{cases}$$

Definición 5.16. *Sean X, Y dos procesos con trayectorias continuas a la derecha con límites a la izquierda tales que la integral*

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} (X_{s+\varepsilon}^{t+} - X_s^{t+})(Y_{s+\varepsilon}^{t+} - Y_s^{t+})ds$$

converge uniformemente en probabilidad cuando $\varepsilon \downarrow 0$. En este caso, el límite es denotado por $[X,Y] = \{[X,Y]_t : t \geq 0\}$ y se le llama la variaciíon cuadrática conjunta de X y Y. Además diremos que X tiene variaciones cuadrática finita si $[X,X]$ está bien definido.

Observaciones 5.17.

i) *Recuerde que una sucesión $\{X^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ de procesos estocásticos converge uniformemente en probabilidad a X si para cada $\eta > 0$ y $T > 0$, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} P([\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{(n)} - X_t| > \eta]) = 0.$$

ii) *$[\cdot,\cdot]$ es un operador bilineal*

iii) *No siempre existe el proceso $[X,Y]$.*

iv) *Russo y Vallois [33] (Proposition 1.1), junto con Bojdecki [7] o Protter [29], implican que si X y Y son dos semimartingalas o "buenos integradores" (con respecto a la misma filtración), entonces $[X,Y]$ está bien definido.*

v) *Si X tiene variación cuadrática finita, entonces $[X,X]$ es un proceso con trayectorias no decrecientes.*

Ahora estamos listos para enunciar la fórmula de Itô.

Teorema 5.18. *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y X un proceso con trayectorias continuas y con variación cuadrática finita. Entonces para $t \in [0,T]$,*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{]0,t]} f'(X_s)dX_s^- + \frac{1}{2}\int_{]0,t]} f''(X_s)d[X,X]_s, \qquad (30)$$

donde $\int_{]0,\cdot]} f'(X_s)dX_s^-$ es el límite uniforme en probabilidad de la integral

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} f'(X_s^{t+})(X_{s+\varepsilon}^{t+} - X_s^{t+})ds. \qquad (31)$$

Observaciones 5.19.

i) En [33] se demuestra que la integral dada en (31) converge uniformemente en probabilidad cuando $\varepsilon \downarrow 0$.

ii) Suponga que $X_t = X_0 + \int_0^t h_s ds + \int_0^t g_s dB_s$, $t \in [0,T]$, donde h, g son dos procesos adaptados a la filtración con respecto a la cual B es una semimartingala tales que h tiene trayectorias integrables y g tiene trayectorias cuadrado integrables. En este caso (ver [7] o [29]) X tiene variación cuadrática finita y

$$[X,X]_t = \int_0^t (g_s)^2 ds, \quad t \in [0,T].$$

En consecuencia (30) tiene la forma

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\{h_s ds + g_s dB_s\} \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)(g_s)^2 ds, \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

Compare con (11).

iii) Sean $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, $X_\cdot = \delta(1_{[0,\cdot]}U)$ y $Y_\cdot = \delta(1_{[0,\cdot]}V)$ con $U, V \in L^2([0,T]^\cdot, \mathbb{D}^{1,2})$. Entonces (ver [33]),

$$[f(X), g(Y)]_\cdot = \int_0^\cdot f'(X_s)g'(Y_s)U_s V_s ds.$$

En la demostración de (30) se usa la fórmula de Taylor, al igual que en la de (11).

5.2 Relación entre las integrales de Skorohod y hacia adelante

Aquí suponemos que $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^B$. Esto es, la filtración es generada por el movimiento browniano B.

En lo que sigue, $\mathbb{L}_{1-}^{1,2}$ es la familia de procesos $u \in L^2([0,T];\mathbb{D}^{1,2})$ para los cuales existe una versión de Du tal que:

i) $s \mapsto D_t u_s$ es continua de $[0,t]$ en $L^2(\Omega)$, uniformemente con respecto a t;

ii) $\sup_{0\leq s\leq t\leq T} E|D_t u_s|^2 < \infty$.

Note que si $u \in \mathbb{L}_{1-}^{1,2}$, entonces el límite

$$D_t^- u_t := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} D_t u_{t-\varepsilon}$$

existe en $L^2(\Omega)$, uniformemente en t.

Proposición 5.20. *Sea $u \in (\mathbb{L}_{1-}^{1,2})_{loc}$. Entonces $u \in (\mathrm{Dom}\,\delta^-) \cap (\mathrm{Dom}\,\delta)_{loc}$, y en este caso*

$$\int_0^T u_s dB_s^- = \int_0^T u_s dB_s + \int_0^T (D_s^- u_s) ds. \tag{32}$$

Observación 5.21. *La Proposicion 4.7 implica que si u es un proceso adaptado (a la filtración que genera B), entonces $D^- u \equiv 0$. Compare con Proposición 5.10.*

Demostración. Por la Proposicion 5.8, podemos suponer sin perdida de generalidad que $u \in \mathbb{L}_{1-}^{1,2}$.

La Proposición 4.9 y el teorema de Fubini para el operador δ implican

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon}\int_0^T u_s(B_{(s+\epsilon)\wedge T} - B_s)ds \\
&\qquad = \frac{1}{\epsilon}\int_0^T \left(\int_s^{(s+\epsilon)\wedge T} u_s dB_r\right) ds + \int_0^T \int_s^{(s+\epsilon)\wedge T} (D_r u_s) dr ds \\
&\qquad = \int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{(r-\epsilon)\vee 0}^{r} u_s ds\right) dB_r + \int_0^T \left(\frac{1}{\epsilon}\int_{r-\epsilon}^{r} (D_r u_s) ds\right) dr, \qquad (33)
\end{aligned}$$

donde usamos la convención $D_r u_s = 0$ para $s \notin [0,T]$. Consecuentemente, sólo necesitamos ver que el segundo sumando de (33) converge en probabilidad a $\int_0^T (D_s^- u_s) ds$, lo cual no es difícil de hacer. □

Una consecuencia inmediata de esta demostración es el siguiente.

Corolario 5.22. *Sea $u \in \mathbb{L}^{1,2}_{1-}$. Entonces el proceso u pertenece al conjunto* $\mathrm{Dom}\,\delta \cap \mathrm{Dom}\,\delta^-$ *y* $(\int_0^T u_s dB_s^-) \in L^2(\Omega)$, *con*

$$E(\int_0^T u_s dB_s^-) = E\int_0^T (D_s^- u_s) ds.$$

Ejemplo 5.23. *Sean $L \in \mathbb{D}^{1,2}$, $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$ y $0 \leq a < b \leq T$. Considere el proceso $u = \{1_{]a,b]}(s) f(B_{t_1}, \dots, B_{t_{n-1}}, L) : s \in [0,T]\}$, donde $t_1, \dots, t_{n-1} \leq a$. Entonces $u \in \mathbb{L}^{1,2}_{1-}$.*

5.3 Ecuaciones diferenciales estocásticas hacia adelante

La propiedad de sustitución para la integral hacia adelante, enunciada en los Teoremas 5.14 y 5.15, es una herramienta adecuada para el estudio de las ecuaciones diferenciales estocásticas cuando la integral estocástica es el operador δ^-. A saber, considere la ecuación diferential estocástica en el sentido de Itô

$$X_t(x) = \xi + \int_0^t b_s(x) X_s(x) ds + \int_0^t \sigma_s(x) X_s(x) dB_s, \quad t \in [0,T],$$

donde $b, \sigma \in \mathcal{R}$ satisfacen condiciones convenientes. Entonces para una v.a. L, podemos usar el Teorema 5.14 (o Teorema 5.15) para ver que el proceso$\{X_t(L) : t \in [0,T]\}$ es la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$Y_t = \xi + \int_0^t b_s(L) Y_s ds + \int_0^t \sigma_s(L) Y_s dB_s^-, \quad t \in [0,T].$$

Para un exposición detallada de este hecho se pueden consultar [20] y [32].

Agradecimientos. Parcialmente apoyado por el proyecto CONACyT 45684–F

Referencias

[1] Alòs, E. y Nualart, D., An extension of Itô's formula for anticipating processes. J. Theoret. Probab. 11 (2), 493–514, 1998.

[2] Alòs, E. y Nualart, D., Anticipating stochastic Volterra equations. Stochastic Process. Appl. 72(1), 73-95, 1997.

[3] Arnold, L., Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. J. Wiley and Sons, 1974.

[4] Asch, J. y Potthoff, J., Itô's lemma without nonanticipatory conditions. Probab. Theory Related Fields 88(1), 17-46, 1991.

[5] Bachelier, L., Théorie de la spéculation. Ann. Sci. École Norm. Sup. 17, 21-86, 1990.

[6] Berger, M.A. y Mizel, V. J., An extension of the stochastic integral, Ann. Probab. 10(2), 435-450, 1982.

[7] Bojdecki, T., Teoría General de Procesos e Integración Estocástica. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 6, Soc. Mat. Mex., 1995.

[8] Brown, R., A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. Philos. Mag. Ann. of Philos. New Ser. 4, 161-178, 1828.

[9] Buckdahn, R., Quasilinear partial stochastic differential equations without nonanticipating requirement. Preprint 176 Humboldt Universität, Berlin, 1988.

[10] Buckdahn, R., Linear Skorohod stochastic differential equations. Probab. Theory Related Fields 90 (2), 223-240, 1991.

[11] Doss, H., Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires. Ann. Inst. H. Poincaré 13 (2), 99-125, 1977.

[12] Einstein, A., On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat. Ann. Physik 17, 1905.

[13] Gihman, I.I. y Skorohod, A.V., The Theory of Stochastic Processes I, Springer–Verlag, 1980.

[14] Gorostiza, L.G., Análisis de sistemas sometidos a perturbaciones estocásticas. Ciencia 35, 33-43, 1984.

[15] Hida, T., Brownian Motion. Springer-Verlag 1980.

[16] Itô, K., Stochastic integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo* 20, 519-524, 1944.

[17] Itô, K., Multiple Wiener integrals. J. Math. Soc. Japan 3, 157–169, 1951.

[18] Karatzas, I. y Shreve, S.E., Brownian Motion and Stochastic Calculus. Secound Edition Springer–Verlag 1991.

[19] Kuo, H. H. y Russek, A., White noise approach to stochastic integration. J. Multivariate Anal. 24 (2), 218-236, 1988.

[20] León, J.A.; Navarro, R. y Nualart, D., An anticipating calculus approach to the utility maximization of an insider. Math. Finance 13 (1), 171–185, 2003.

[21] León, J.A. y Pérez-Abreu, V., Strong solutions of stochastic bilinear equations with anticipating drift in the first Wiener chaos. In: Stochastic Proceses: A Festschrift in Honour of G. Kallianpur, eds.: S. Cambanis et al. Springer-Verlag, 235-243, 1993.

[22] León, J.A. y Nualart, D., Stochastic evolution equations with random generators. Ann. Probab. 26 (1), 149-186, 1998.

[23] León, J.A. y Nualart, D., Anticipating integral equations. Potential Anal. 13 (3), 249-268, 2000.

[24] Moret, S. y Nualart, D., Generalization of Itô's formula for smooth nondegenerate martingales. Stochastic Process. Appl. 91 (1), 115-149, 2001.

[25] Nualart, D., The Malliavin Calculus and Related Topics. Springer-Verlag, 1995.

[26] Nualart, D., Analysis on Wiener space and anticipating stochastic calculus. In: Lectures on Probability Theory and Statistics, ed: P. Bernard, Lecture Notes in Math. 1690, 123–227, 1998.

[27] Paley, R.E.A.C.; Wiener, N. y Zygmund, A., Notes on random functions. Math. Z. 37 (1), 647-668, 1933.

[28] Pardoux, E. y Protter, P., Stochastic Volterra equations with anticipating coefficients. Ann. Probab. 18(4), 1635-1655, 1990.

[29] Protter, P., Stochastic Integration and Differential Equations. Second Edition. Springer–Verlag, 2004.

[30] Revuz, D. y Yor, M., Continuous Martingales and Brownian Motion. Third Edition. Springer-Verlag 1999.

[31] Rudin, W., Functional Analysis. Second Edition. International Series in Pure and Applied Mathematics, 1991.

[32] Russo, F. y Vallois, P., Forward, backward and symmetric stochastic integration. Probab. Theory Related Fields 97 (3), 403-421, 1993.

[33] Russo, F. y Vallois, P., The generalized covariation process and Itô formula. Stochastic Process. Appl. 59 (1), 81-104, 1995.

[34] Shiota,Y., A linear stochastic integral equation containing the extended Itô integral. Math. Rep. Toyama Univ. 9, 43-65, 1986.

[35] Skorohod, A.V., On a generalization of the stochastic integral. Theory Probab. Appl. 20, 219-233, 1975.

[36] Stein, E.M., Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, 1970.

[37] Tudor, C., Procesos Estocásticos. Aportaciones Matemáticas, Serie Textos 2, Soc. Mat. Mex, 1994.

[38] Wiener, N., Differential space. J. Math. Phys. 2, 131-174, 1923.

Dirección del autor: Jorge A. León, Departamento de Control Automático, Cinvestav-IPN, Apartado Postal 14-740, 07360 México D.F. , jleon@ctrl.cinvestav.mx