Vol. XVII, Nº 2, Diciembre (2009)
Matemáticas: 57–72

**Matemáticas:
Enseñanza Universitaria**

Caracterización de los espacios de Lipschitz a través de las derivadas fraccionarias según Liouville

Francisco Enríquez — Univesidad del Cauca
Alex Montes — Univesidad del Cauca
Jhon Pérez — Univesidad del Cauca

Recibido Ago. 22, 2007 Aceptado Nov. 11, 2008

Abstract

In this paper we prove the existence of fractional derivatives in a weak sense of the Lipschitz-continuous functions. Moreover, we show a characterization of such functions in terms of the fractional derivatives.

Keywords: Lipschitz spaces, fractional derivative, Poisson kernel, Poisson integral.

MSC(2000): Primary: 26A33, Secondary: 26A16.

Resumen

En este artículo se prueba la existencia de derivadas fraccionarias en un sentido débil de las funciones continuas según Lipschitz y se muestra una caracterización de dichas funciones en términos de las mencionadas derivadas.

Palabras y frases claves: Espacios de Lipschitz, derivada fraccionaria, núcleo de Poisson, integral de Poisson.

1 Introducción

La disciplina del análisis matemático denominada *Cálculo fraccionario*, dedicada al estudio de las derivadas e integrales de orden arbitrario real o complejo, posee una rica historia y amplio desarrollo, debido éste en particular a su interconexión y compenetración con distintos problemas de la teoría de funciones, de las ecuaciones diferenciales e integrales, la física matemática y otras disciplinas. Sin exageración puede decirse, que el cálculo fraccionario surgió precisamente por necesidades de determinados problemas prácticos. Por ejemplo, el aparato de la integrodiferenciación fraccionaria (en lo sucesivo “IDF”) tuvo sus primeras aplicaciones en los trabajos de J. Liouville en 1832, para la resolución de problemas de geometría, física y mecánica, entre los cuales se cuentan:

1. Problema de Laplace acerca de la influencia sobre un imán, debida a la acción de un conductor rectilíneo infinito.

2. Problema de Ampere sobre la interacción de dos de tales conductores,

3. Problema de la difusión del calor en una esfera,

4. Problema de Gauss sobre la aproximación por cuadraturas, etc.

(Ver [3]). Al respecto en [5] en el capítulo titulado "*Aplicaciones a los problemas de la difusión*" se presenta copiosa bibliografía sobre las aplicaciones de la IDF a la físico-química, hidrología, procesos estocásticos, elasticidad viscosa, teoría de la gravitación, entre otras.

Es conveniente señalar, que en la actualidad existe gran cantidad de trabajos científicos acerca de la IDF, lo cual se constata en particular por las conferencias dedicadas a esta rama de la matemática: ya en 1974 se llevó a cabo la primera conferencia internacional de IDF (EU, New Haven. Memorias publicadas en "*Fractional calculus and its applications*", Ed. B. Ross, Lect. Notes Math., 1975, v. 457), y en 1984 la segunda (Gran Bretaña, Glasgow. Memorias publicadas en"*Fractional calculus and its applications*", Eds. A.C. McBride and G. F. Roach, Res. Notes Math., 1985, v. 138).

No es casual esta proliferación de resultados interesantes en la IDF. Ella está relacionada con otra de sus singularidades: existe un considerable número de enfoques distintos para la definición de la IDF, los cuales en general no son equivalentes. Sin embargo, en varias situaciones se ha establecido la coincidencia de ciertos enfoques, incluyendo la de sus dominios de definición; lo que representa por sí mismo un resultado fundamental para la teoría de los operadores integrales, propios de la IDF.

Es natural entonces, que la escogencia de la respectiva modalidad de derivada fraccionaria esté supeditada primordialmente a las particularidades del problema que se desee abordar. Así, en el presente trabajo se escogieron las llamadas derivadas fraccionarias según Liouville, ya que ellas preservan propiedades habituales referentes a la integración y diferenciación de integrales dependientes de parámetro, por ejemplo ver [2]. Sin embargo, se debe señalar una falencia fundamental de dicha construcción: No toda función esencialmente acotada posee derivada e integral de Liouville - en este artículo se estudia precisamente cierta clase de funciones acotadas.

El objeto de estudio de este artículo es la clase $\Lambda_\alpha = \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, ampliamente utilizada en la teoría de espacios funcionales y sus aplicaciones al análisis matemático y a las ecuaciones diferenciales. Para el caso $0 < \alpha < 1$, los espacios de Lipschitz constan de funciones $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que para alguna constante $A > 0$, y para todo $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq A\,|t|^\alpha\,,$$

con $|t| := \sqrt{t_1^2 + \cdots + t_n^2}$. En adelante $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Estos espacios son de Banach con la norma

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_\infty + \sup_{|t|>0} \frac{\|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_\infty}{|t|^\alpha}$$

(Ver [4], pág 141) y han sido caracterizados con ayuda de las derivadas parciales de la integral de Poisson de la función f:

$$u(x,y) := (P_y * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_y(x-t)f(t)dt,$$

donde $P_y(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-2\pi\left(i\sum_{k=1}^{n} x_k t_k + y|t|\right)\right) dt,\ y>0,$

es el núcleo de Poisson, que puede escribirse en forma explícita:

$$P_y(x) = c_n y\left(|x|^2+y^2\right)^{-(n+1)/2},\ y>0,$$

con $c_n = \pi^{-(n+1)/2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right);\ \Gamma(\theta) = \int\limits_0^{+\infty} s^{\theta-1}e^{-s}\,ds,\ \theta>0$, es la función Gamma.

Específicamente M. Taibleson demostró el siguiente resultado (ver [4] capítulo V, sección 4.2):

Teorema 1.1. *Supóngase que $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $0<\alpha<1$. Entonces $f\in\Lambda_\alpha$ si y sólo si*

$$\left\|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right\|_\infty \le Ay^{-1+\alpha}.$$

Usando la derivada fraccionaria según Liouville:

$$(D_y^\beta\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dy}\int_y^\infty (t-y)^{-\beta}\varphi(t)\,dt,\ 0<\beta\le 1,$$

F. Enríquez (ver [2], sección 4.2) muestra una generalización del teorema de M. Taibleson. Precisamente:

Teorema 1.2. *Sea $f\in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $0<\alpha<\beta\le 1$. Entonces $f\in\Lambda_\alpha$ si y sólo si*

$$\left\|D_y^\beta u(x,y)\right\|_\infty \le Ay^{-\beta+\alpha},\ y>0.$$

Aquí usaremos indistintamente los términos “derivada fraccionaria” y “derivada de orden no entero”.

En virtud del teorema 1.1 se definen los espacios Λ_α para $\alpha>0$:

$$\Lambda_\alpha := \left\{f\in L_\infty(\mathbb{R}^n)\ :\quad \left\|\frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k}\right\|_\infty \le Ay^{-k+\alpha}\right\},$$

donde k es el menor entero mayor que α. Además es válido el siguiente lema:

Lema 1.3. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$, y k, l enteros mayores que α. Entonces las condiciones*

$$\left\| \frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k} \right\|_\infty \leq A_k y^{-k+\alpha} \quad y \quad \left\| \frac{\partial^l u(x,y)}{\partial y^l} \right\|_\infty \leq A_l y^{-l+\alpha}$$

son equivalentes.

En consecuencia, si $\alpha > 0$, $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y k es cualquier entero mayor que α, se tiene que $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si $\left\| \frac{\partial^k u(x,y)}{\partial y^k} \right\|_\infty \leq A_k y^{-k+\alpha}$.

Mas aún tiene lugar la siguiente descripción de Λ_α, $\alpha > 1$:

Teorema 1.4. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha > 1$. Entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \Lambda_{\alpha-1}$, $j = 1, ..., n$.*

La prueba de estos resultados se presenta por ejemplo en [4], capítulo V, sección 4.3.

En el presente trabajo, que es la continuación lógica del artículo "*Caracterización de los espacios de Lipschitz en términos de las derivadas de orden no entero de las integrales de Poisson*"(ver [1]), se propone una descripción de la clase Λ_α, usando para ello la derivada fraccionaria según Liouville de la integral de Poisson para funciones de dicha clase. Esta descripción contiene como un caso particular el resultado clásico expresado en el teorema 1.4.

Este artículo consta de dos partes: en la sección "Preliminares" se incluyeron, en aras de la completitud las definiciones y propiedades fundamentales de la IDF aplicadas especialmente al núcleo de Poisson. Igualmente se citan los resultados clásicos relacionados con los espacios Λ_α . La segunda parte está dedicada al resultado fundamental (ver teorema 3.2). Adicionalmente se exponen resultados intermedios auxiliares, que revisten por si mismos especial interés y generalizan los respectivos "casos enteros".

2 Preliminares

2.1 Integral de Poisson

El núcleo y la integral de Poisson poseen una serie de propiedades conocidas cuyas demostraciones se encuentran por ejemplo en [1] y [2]. Entre estas propiedades se destacan:

1. $P_y(x) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ y es una función armónica en

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ := \big\{(x,y)/ \ x \in \mathbb{R}^n, \ y > 0\big\}.$$

2. $\forall y_1 > 0, \forall y_2 > 0, \quad P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) = P_{y_1+y_2}(x)$ (propiedad de semigrupo).

3. Para $y > 0$, $j = 1, \ldots, n$ y $k \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ se satisface que

$$\left\| \frac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k} \right\|_1 \ll y^{-k}, \qquad \left\| \frac{\partial^k P_y(x)}{\partial x_j^k} \right\|_1 \ll y^{-k}.$$

La escritura $A \ll B$ significa que existe cierta constante $c > 0$ tal que $A \leq cB$.

Si $f \in L_p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p \leq \infty$, entonces la integral de Poisson de f, $u(x, y)$, satisface:

4. $u(x, y) \in L_p(\mathbb{R}^n)$,

5. $u(x, y)$ es una función armónica en $\mathbb{R}^{n+1}_+ :\ \Delta u = 0$,

6. $\dfrac{\partial^k u(x, y)}{\partial y^k} = \dfrac{\partial^k P_y(x)}{\partial y^k} * f(x)$.

2.2 Derivada fraccionaria según Liouville

Dado un número real β, $[\beta]$ denotará la parte entera de β y $\{\beta\}$ su parte fraccionaria, de modo que $0 \leq \{\beta\} < 1$ y $\beta = [\beta] + \{\beta\}$.

Definición 2.1. *Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, β un real positivo no entero y $m = [\beta] + 1$. Entonces se define la derivada fraccionaria (según Liouville) de orden β de la función f mediante*

$$(D^\beta f)(x) := \frac{(-1)^m}{\Gamma(m - \beta)} \frac{d^m}{dx^m} \int_x^\infty (t - x)^{-\{\beta\}} f(t) dt,$$

si dicha expresión tiene sentido.

Para $\beta \in \mathbb{N}_0$ se define la derivada fraccionaria por

$$(D^\beta f)(x) := (-1)^\beta \frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x),$$

$(D^0 f \equiv f)$.

Ejemplo 2.2. *1. Para* $f(x) = e^{-ax}$, $\quad a > 0,\ 0 < \beta < 1$. *Tenemos:*

$$\begin{aligned}\left(D^{\beta} f\right)(x) = D^{\beta}\left(e^{-ax}\right) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} s^{-\beta} e^{-a(x+s)}\,ds \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\left(e^{-ax}\right) a^{\beta-1}\int_0^{+\infty} v^{-\beta} e^{-v}\,dv \\ &= -\frac{a^{\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\left(-ae^{-ax}\right)\Gamma(1-\beta) = a^{\beta} e^{-ax}.\end{aligned}$$

Es decir, $D^{\beta}\left(e^{-ax}\right) = a^{\beta} e^{-ax}; \quad a > 0, \quad 0 < \beta < 1.$

En particular, para $a = 1, \quad D^{\beta}\left(e^{-x}\right) = e^{-x}.$

2. Para $f(x) = x^{-\mu}$, *donde* $0 < \beta < \mu < 1$, *tenemos:*

$$\begin{aligned}\left(D^{\beta} f\right)(x) = D^{\beta}\left(x^{-\mu}\right) &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} s^{-\beta}(x+s)^{-\mu}\,ds \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\int_0^{+\infty} v^{-\beta}(1+v)^{-\mu}\,dv\right)\frac{d}{dx}x^{-\beta-\mu+1} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+\beta)}{\Gamma(\mu)}x^{-\mu-\beta}, \quad \mu > 1-\beta.\end{aligned}$$

Ejemplos más complejos pueden encontrarse en [3].

Definición 2.3. *Sea* f *una función definida sobre* $\mathbb{R}^n$, β *un real positivo no entero y* $m = [\beta] + 1$. *Entonces se define la derivada parcial fraccionaria de orden* β, *con respecto a la variable* $x_k\,(k = 1, ..., n)$, *de la función* f *por*

$$(D^{\beta}_{x_k} f)(x) := \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)}\frac{\partial^m}{\partial x_k^m}\int_{x_k}^{\infty}(t - x_k)^{-\{\beta\}} f(x + (t - x_k)\overrightarrow{e_k})dt,$$

si dicha expresión tiene sentido. Aquí, $\overrightarrow{e_k} = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$.

Para $\beta \in \mathbb{N}_0$ *se define la derivada parcial fraccionaria por*

$$(D^{\beta}_{x_k} f)(x) := (-1)^{\beta}\frac{\partial^{\beta}}{\partial x_k^{\beta}} f(x).$$

En [1] los autores muestran que $D^{\beta}_y P_y(x)$ y $D^{\beta}_y u(x, y)$ existen para $f \in L_{\infty}(\mathbb{R}^n), \beta > 0$ y se establecen los siguientes resultados, cuyas demostraciones brevemente se describen a continuación.

Teorema 2.4. *Sean $\beta > 0$ y f una función tal que $D_y^\beta f(y)$ existe. Si c es constante y $y = z + c$, entonces*

$$D_z^\beta f(y) = D_y^\beta f(y).$$

Demostración. Como

$$D_z^\beta f(y) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dz^m} \int_z^\infty (t-z)^{-\{\beta\}} f(t+c)dt,$$

donde $m = [\beta] + 1$, entonces haciendo $u = t + c$ se obtiene

$$D_z^\beta f(y) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dy^m} \int_y^\infty (u-y)^{-\{\beta\}} f(u)du = D_y^\beta f(y).$$

□

Teorema 2.5. *Para todo β y λ mayores que cero, se tiene:*

$$D_y^{\beta+\lambda} P_y(x) = D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\lambda P_{\frac{y}{2}}(x).$$

Demostración. (Caso $0 < \beta < 1$, $\lambda \in \mathbb{N}$). Para la prueba se usa inducción matemática. La propiedad $D_y^\beta u = D_y^\beta P_y * f$, $0 < \beta < 1$, $y > 0$, $f \in L_\infty$ se establece fácilmente (ver [1], lema 2.9). Usando este hecho y el teorema 2.4 se justifica la siguiente cadena de igualdades con $y = y_1 + y_2$, y_1, $y_2 > 0$:

$$\begin{aligned} D_y^\beta P_y(x) &= D_y^\beta [P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x)] = D_{y_1}^\beta [P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x)] \\ &= D_{y_1}^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) = D_y^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x); \end{aligned}$$

por consiguiente $D_y^\beta P_y(x) = D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x) * P_{\frac{y}{2}}(x)$ para $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$.

Además,

$$\begin{aligned} D_y^{\lambda+1+\beta} P_y(x) &= -\frac{\partial}{\partial y}[D_y^{\lambda+\beta} P_y(x)] \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}[D_y^\lambda P_{\frac{y}{2}} y(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x)] \\ &= -\frac{\partial}{\partial y}[(-1)^\lambda \frac{\partial^\lambda}{\partial y^\lambda} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x)] \\ &= D_y^{\lambda+1} P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x), \end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado. □

Observación 2.6. *El teorema 2.5 también es válido si β o λ es cero.*

El siguiente teorema generaliza la propiedad 6 de la integral de Poisson.

Teorema 2.7. *Si* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $\beta > 0$ *entonces*

$$D_y^\beta u(x,y) = D_y^\beta P_y(x) * f(x).$$

Demostración. Es suficiente probar, que *para todo* $0 < \beta < 1$, $m \in \mathbb{N}_0$ *y* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *se tiene que*

$$D_y^{m+\beta} u(x,y) = D_y^{m+\beta} P_y(x) * f(x).$$

Sea $y = y_1 + y_2$, entonces

$$\begin{aligned} D_y^{m+\beta} u(x,y) &= D_y^m [D_y^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) * f(x)] \\ &= D_{y_2}^m [D_y^\beta P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) * f(x)] \\ &= D_y^\beta P_{y_1}(x) * D_{y_2}^m P_{y_2}(x) * f(x), \end{aligned}$$

y haciendo $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$ resulta

$$D_y^{m+\beta} u(x,y) = D_y^\beta P_{\frac{y}{2}}(x) * D_{\frac{y}{2}}^m P_{\frac{y}{2}}(x) * f(x) = D_y^{m+\beta} P_y(x) * f(x).$$

□

Teorema 2.8. *Si* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $\beta > 0$ *entonces*

$$D_{x_j}^\beta u(x,y) = D_{x_j}^\beta \left(P_y(x) * f(x)\right) = D_{x_j}^\beta P_y(x) * f(x); \quad j = 1, ..., n.$$

Demostración. En [2] (ver lema 13) se prueba que si $0 < \gamma < 1$ entonces $D_{x_j}^\gamma u(x,y) = D_{x_j}^\gamma P_y(x) * f(x)$; por lo tanto si $[\beta] = m$ y $\{\beta\} = \gamma$ se tiene

$$\begin{aligned} D_{x_j}^\beta u(x,y) &= D_{x_j}^{m+\gamma} u(x,y) = D_{x_j}^m D_{x_j}^\gamma u(x,y) \\ &= (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} \left[D_{x_j}^\gamma P_y(x) * f(x)\right] \\ &= \left[(-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} D_{x_j}^\gamma P_y(x)\right] * f(x) \\ &= D_{x_j}^\beta P_y(x) * f(x) \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema generaliza la propiedad 3 del núcleo de Poisson.

Teorema 2.9. *Para* $\beta > 0$, $y > 0$ *y* $j = 1, ..., n$ *se tiene que*

$$\left\| D_y^\beta P_y(x) \right\|_1 \ll y^{-\beta}, \quad \left\| D_{x_j}^\beta P_y(x) \right\|_1 \ll y^{-\beta}. \tag{1}$$

Demostración. En [2] (ver lema 10) F. Enríquez muestra el resultado para $0 < \beta < 1$. Ahora si $[\beta] = m$ y $\{\beta\} = \gamma$, usando el teorema 2.5 se tiene

$$\begin{aligned} \left\| D_y^\beta P_y(x) \right\|_1 &= \left\| D_y^{m+\gamma} P_y(x) \right\|_1 = \left\| D_y^m P_{\frac{y}{2}}(x) * D_y^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{\partial^m}{\partial y^m} P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_1 \left\| D_{x_j}^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_1 \ll y^{-m} y^{-\gamma} = y^{-\beta}. \end{aligned}$$

Para la otra desigualdad de (1) se procede de manera similar, pero teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} D_{x_j}^\beta P_y(x) &= D_{x_j}^{m+\gamma} \left(P_{\frac{y}{2}}(x) * P_{\frac{y}{2}}(x) \right) \\ &= (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} \left(D_{x_j}^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x) * P_{\frac{y}{2}}(x) \right) \\ &= D_{x_j}^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x) * (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} P_{\frac{y}{2}}(x). \end{aligned}$$

□

Además es de vital importancia el siguiente teorema:

Teorema 2.10. *Sean* $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\alpha > 0$ *y* λ, β *reales mayores que* α. *Entonces las condiciones*

$$\|D_y^\lambda u(x,y)\|_\infty \leq A y^{-\lambda+\alpha} \quad y \quad \|D_y^\beta u(x,y)\|_\infty \leq B y^{-\beta+\alpha}$$

son equivalentes.

Así, para $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n), \alpha > 0$ y γ cualquier real mayor que α, se tiene que

$$f \in \Lambda_\alpha \text{ si y sólo si } \|D_y^\gamma u(x,y)\|_\infty \leq A_\gamma y^{-\gamma+\alpha}.$$

3 Resultado fundamental: Caracterización de $\Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n), \alpha > 0$

Señalemos que si $f \in \Lambda_\alpha$, no necesariamente existe $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en el sentido usual. Por ello se prueba la existencia de $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ en un sentido débil (ver [4], pág 147). Precisamente si $f \in \Lambda_\alpha$ entonces para $j = 1, ..., n$, la familia $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} u(x,y) \right\}$ es de Cauchy en $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ cuando $y \to +0$ y el límite de tal familia lo denotamos por $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ y lo denominaremos derivada débil de f con respecto a x_j. Además es fácil demostrar que si $f \in \Lambda_\alpha$ y $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe en el sentido usual, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe en el sentido débil y ellas coinciden. Por esta razón la notación "$\frac{\partial f}{\partial x_j}$" será clara de acuerdo al contexto.

Destaquemos que, para las derivadas débiles de orden superior, existen dos variantes para su definición. La primera es recursiva: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)_{(1)} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ es decir, la segunda derivada débil se considera como la 1.ª derivada débil de la 1.ª derivada débil. La segunda variante es: $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right)_{(2)} := \lim\limits_{y\to+0} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y),\ u = P_y * f$, o sea, la 2.ª derivada débil es el límite en $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ de la respectiva familia de Cauchy $\left\{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y)\right\}$.

Sin embargo, como se muestra a continuación estas dos derivadas coinciden:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)_{(1)} f(x) &:= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x,y) \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[P_y(x) * \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right] \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\left(P_y(x) * f(x)\right) \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u(x,y) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)_{(2)} f(x).
\end{aligned} \tag{2}$$

La 3ª igualdad en (2) se establece de manera independiente, incluso para las derivadas de orden no entero.

Justamente en la igualdad $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)_{(1)} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)_{(2)}$ se fundamenta la prueba inductiva del siguiente teorema:

Teorema 3.1. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha > m$, $m \in \mathbb{Z}^+$. Entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si $\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f \in \Lambda_{\alpha-m}$, $j = 1, ..., n$.*

Este teorema puede generalizarse para ordenes no enteros de diferenciación, lo que constituye el resultado principal del presente trabajo.

Teorema 3.2. *Sean $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\alpha > \beta > 0$. Entonces $f \in \Lambda_\alpha$ si y sólo si $D_{x_j}^\beta f \in \Lambda_{\alpha-\beta}$, $j = 1, ..., n$.*

Demostración. Si $\beta \in \mathbb{Z}^+$ entonces este teorema coincide con el Teorema 3.1. Sean α y β tales que $\alpha > \beta > 0$ y $f \in \Lambda_\alpha$. Primero probemos que si $\gamma > \alpha$ entonces

$$\left\| D_y^\gamma D_{x_j}^\beta u(x,y) \right\|_\infty \ll y^{-(\gamma+\beta)+\alpha}. \tag{3}$$

Tomando $y = y_1 + y_2$, $y_1, y_2 > 0$ y aplicando el Teorema 2.8, se tiene que

$$D^\beta_{x_j} u(x,y) = D^\beta_{x_j}\Big(P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) * f(x)\Big) = D^\beta_{x_j} P_{y_1}(x) * P_{y_2}(x) * f(x).$$

Ahora por los Teoremas 2.4 y 2.7,

$$\begin{aligned}
D^\gamma_y(D^\beta_{x_j} u(x,y)) &= D^\gamma_{y_2}\Big(P_{y_2}(x) * D^\beta_{x_j} P_{y_1}(x) * f(x)\Big)\\
&= D^\gamma_{y_2} P_{y_2}(x) * D^\beta_{x_j} P_{y_1}(x) * f(x)\\
&= D^\beta_{x_j} P_{y_1}(x) * \Big(D^\gamma_{y_2} P_{y_2}(x) * f(x)\Big)\\
&= D^\beta_{x_j} P_{y_1}(x) * D^\gamma_{y_2} u(x,y_2)\\
&= D^\beta_{x_j} P_{y_1}(x) * D^\gamma_{y} u(x,y_2).
\end{aligned}$$

Por consiguiente $D^\gamma_y(D^\beta_{x_j} u(x,y)) = D^\beta_{x_j} P_{\frac{y}{2}} * D^\gamma_y u(x,\frac{y}{2})$ para $y_1 = y_2 = \frac{y}{2}$. Luego como $f \in \Lambda_\alpha$ y $\gamma > \alpha$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\Big\|D^\gamma_y D^\beta_{x_j} u(x,y)\Big\|_\infty &\leq \Big\|D^\beta_{x_j} P_{\frac{y}{2}}(x)\Big\|_1 \Big\|D^\gamma_y u(x,y/2)\Big\|_\infty\\
&\ll y^{-\beta} y^{-\gamma+\alpha} = y^{-(\beta+\gamma)+\alpha}.
\end{aligned}$$

Para la prueba se consideran varios casos:

CASO I. $0 < \beta < \alpha < 2$ y $\alpha - \beta < 1$. Entonces por (3), se tiene

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2} D^\beta_{x_j} u(x,y)\right\|_\infty \ll y^{-(2+\beta)+\alpha}.$$

Demostremos primero que

$$\left\|\frac{\partial}{\partial y} D^\beta_{x_j} u(x,y)\right\|_\infty \ll y^{-(1+\beta)+\alpha} + \left\|\frac{\partial}{\partial y} D^\beta_{x_j} u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_\infty. \tag{4}$$

Si $0 < y \leq 1$, entonces

$$\int_y^1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^\beta_{x_j} u(x,y')\,dy' = \frac{\partial}{\partial y} D^\beta_{x_j} u(x,y)\Big|_{y=1} - \frac{\partial}{\partial y} D^\beta_{x_j} u(x,y),$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial y} D^\beta_{x_j} u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} D^\beta_{x_j} u(x,y)\Big|_{y=1} - \int_y^1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} D^\beta_{x_j} u(x,y')\,dy'.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\right\|_{\infty} &\leq \left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}+\left\|\int_y^1\frac{\partial^2}{\partial y^2}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')dy'\right\|_{\infty}\\
&\leq \left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}+\int_y^1\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')\right\|_{\infty}dy'\\
&\ll \left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}+\int_y^1 y'^{-(2+\beta)+\alpha}dy'\\
&= \left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}+\frac{1}{-(1+\beta)+\alpha}\left[y'^{-(1+\beta)+\alpha}\right]_y^1\\
&= \left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}+\frac{1}{-(1+\beta)+\alpha}\left[1-y^{-(1+\beta)+\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Como $\alpha-\beta<1$ entonces $-1-\beta+\alpha<0$ y por tanto obtenemos (4).

Demostremos ahora que $\left\{D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\right\}$ es una familia de Cauchy en $L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Como

$$D^{\beta}_{x_j}u(x,y)=D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}-\int_y^1\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')\,dy',$$

entonces

$$D^{\beta}_{x_j}u(x,y_2)-D^{\beta}_{x_j}u(x,y_1)=\int_{y_1}^1\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')\,dy'-\int_{y_2}^1\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')\,dy'.$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer $y_1<y_2$. Entonces

$$D^{\beta}_{x_j}u(x,y_2)-D^{\beta}_{x_j}u(x,y_1)=\int_{y_1}^{y_2}\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')\,dy'.$$

Por tanto usando (4)

$$\begin{aligned}
\left\|D^{\beta}_{x_j}u(x,y_2)-D^{\beta}_{x_j}u(x,y_1)\right\|_{\infty} &\leq \int_{y_1}^{y_2}\left\|\frac{\partial}{\partial y}D^{\beta}_{x_j}u(x,y')\right\|_{\infty}dy'\\
&\ll \int_{y_1}^{y_2}\left(\left\|\frac{\partial}{\partial y}\,D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}+y'^{-(1+\beta)+\alpha}\right)dy'\\
&\ll \left\|\frac{\partial}{\partial y}\,D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big|_{y=1}\right\|_{\infty}(y_2-y_1)+\frac{1}{-\beta+\alpha}\left(y_2^{-\beta+\alpha}-y_1^{-\beta+\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Obtenemos que $\left\|D^{\beta}_{x_j}u(x,y_2)-D^{\beta}_{x_j}u(x,y_1)\right\|_{\infty}\to 0$ cuando $y_1,y_2\to 0$. De donde $\left\{D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\right\}$ es una familia de Cauchy en $L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con respecto a y; por tanto $\left\{D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\right\}$ converge en $L_{\infty}(\mathbb{R}^n)$ cuando $y\to 0^+$. Este límite lo denotaremos por $D^{\beta}_{x_j}f(x)$, lo llamaremos derivada débil de f de orden β con respecto a x_j. Es fácil ver que $D^{\beta+\gamma}_{x_j}f = D^{\beta}_{x_j}D^{\gamma}_{x_j}f$.

Demostremos que $D^{\beta}_{x_j}f \in \Lambda_{\alpha-\beta}$. Como $\alpha-\beta<1$, entonces en virtud del Teorema 2.10 basta probar que

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}f(x)\Big)\right\|_{\infty} \ll y^{-(2+\beta)+\alpha}.$$

Ahora observemos que

$$\begin{aligned}
&\left\|P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}f(x) - D^{\beta}_{x_j}\left(P_y(x) * f(x) * P_y(x)\right)\right\|_{\infty} = \\
&\quad = \left\|P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}f(x) - P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}\left(P_y(x) * f(x)\right)\right\|_{\infty} \\
&\quad = \left\|P_y(x) * \Big(D^{\beta}_{x_j}f(x) - D^{\beta}_{x_j}\left(P_y(x) * f(x)\right)\Big)\right\|_{\infty} \\
&\quad = \left\|P_y(x) * \Big(D^{\beta}_{x_j}f(x) - D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\Big)\right\|_{\infty} \\
&\quad \leq \left\|P_y(x)\right\|_1 \left\|D^{\beta}_{x_j}f(x) - D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\right\|_{\infty}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Como $\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x)dx = 1$ (ver [4]). Entonces
$\left\|P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}f(x) - D^{\beta}_{x_j}\left(P_y(x) * f(x) * P_y(x)\right)\right\|_{\infty} \to 0$ cuando $y \to 0$.

O sea que

$$D^{\beta}_{x_j}\left(P_y(x) * f(x)\right) = P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}f(x).$$

luego por (3) tenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big(P_y(x) * D^{\beta}_{x_j}f(x)\Big)\right\|_{\infty} &= \left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}D^{\beta}_{x_j}(P_y(x) * f(x))\right\|_{\infty} \\
&= \left\|\frac{\partial^2}{\partial y^2}D^{\beta}_{x_j}u(x,y)\right\|_{\infty} \ll y^{-(2+\beta)+\alpha}.
\end{aligned}$$

CASO II. $0<\beta<\alpha<2$ y $\alpha-\beta>1$. Entonces $0<\beta<1<\alpha<2$ y $1<\beta+1<\alpha$. Ahora sea $\beta'=\beta+1$, entonces $1<\beta'<\alpha<2$, luego $\alpha-\beta'<1$. Si $f\in\Lambda_\alpha$, aplicando el caso I se obtiene $D^{\beta'}_{x_j}f \in \Lambda_{\alpha-\beta'}$ y como $D^{\beta'}_{x_j}f = \frac{\partial}{\partial x_j}D^{\beta}_{x_j}f \in \Lambda_{\alpha-\beta-1}$. Luego por el teorema 1.4 se tiene que $D^{\beta}_{x_j}f \in \Lambda_{\alpha-\beta}$.

CASO III. $0<\beta<\alpha<2$ y $\alpha-\beta=1$. Para esto se usa el reciproco de este teorema que se demuestra mas adelante en forma general. Sea γ tal que $\beta<\gamma<\beta+1$, entonces $0<\beta<\gamma<1+\beta=\alpha<2$ y $1+\beta-\gamma<1$. Si $f\in\Lambda_\alpha$, entonces aplicando el caso I se tiene que $D^{\gamma}_{x_j}f \in \Lambda_{1+\beta-\gamma}$. Esto es equivalente a $D^{\gamma-\beta}_{x_j}D^{\beta}_{x_j}f \in \Lambda_{1-(\gamma-\beta)}$; ahora aplicando el reciproco para $\gamma-\beta<1$, se tiene que $D^{\beta}_{x_j}f \in \Lambda_1$.

CASO IV. $\alpha \geq 2$ con $\beta < \alpha$ tal que $\alpha - \beta \leq 1$. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m - 1 < \beta < \alpha < m + 1$, y $\beta = m - 1 + \{\beta\}$. Supongamos que $f \in \Lambda_\alpha$, entonces por el teorema 3.1, tenemos $\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_j^{m-1}} f \in \Lambda_{\alpha - m + 1}$, ahora como $0 < \{\beta\} = \beta - (m-1) < \alpha - (m-1) < 2$, aplicando el caso I o III, tendremos que $D_{x_j}^{\{\beta\}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial x_j^{m-1}} f \in \Lambda_{\alpha - m + 1 - \{\beta\}}$. Es decir $D_{x_j}^{\beta} f \in \Lambda_{\alpha - \beta}$.

CASO V. $\alpha \geq 2$ con $\beta < \alpha$ tal que $\alpha - \beta > 1$. Sea $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m < \alpha - \beta \leq m + 1$, entonces $0 < \alpha - m - \beta \leq 1$. Sea $\alpha' = \alpha - m$, entonces $0 < \alpha' - \beta \leq 1$. Supongamos $f \in \Lambda_\alpha$ y como $m < \alpha$, entonces por el teorema 3.1, se tiene $\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f \in \Lambda_{\alpha - m}$, es decir $\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f \in \Lambda_{\alpha'}$, como $\beta < \alpha'$ y $\alpha' - \beta \leq 1$, entonces aplicando I, III o IV, tenemos que $D_{x_j}^{\beta} \left(\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f \right) \in \Lambda_{\alpha' - \beta}$ lo cual es equivalente a $\frac{\partial^m}{\partial x_j^m} \left(D_{x_j}^{\beta} f \right) \in \Lambda_{\alpha - \beta - m}$. Nuevamente aplicando el Teorema 3.1, tenemos que $D_{x_j}^{\beta} f \in \Lambda_{\alpha - \beta}$.

Ahora demostremos que $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ y $D_{x_j}^{\beta} f \in \Lambda_{\alpha - \beta}(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, ..., n$ con $\beta < \alpha$ implica que $f \in \Lambda_\alpha(\mathbb{R}^n)$.

Primero supongamos $\beta < 2$. Si $D_{x_j}^{\beta} f \in \Lambda_{\alpha - \beta}$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| D_y^\alpha D_{x_j}^\beta u(x,y) \right\|_\infty &= \left\| D_y^\alpha D_{x_j}^\beta \left(P_y(x) * f(x) \right) \right\|_\infty \\ &= \left\| D_y^\alpha \left(P_y(x) * D_{x_j}^\beta f(x) \right) \right\|_\infty \ll y^{-\alpha + (\alpha - \beta)} = y^{-\beta} \end{aligned}$$

y para todo $\gamma > 0$ se tiene entonces

$$\begin{aligned} \left\| D_y^\alpha D_{x_j}^{\beta+\gamma} u(x,y) \right\|_\infty &= \left\| D_y^\alpha D_{x_j}^{\beta+\gamma} \left(P_{\frac{y}{2}}(x) * u(x, y/2) \right) \right\|_\infty \\ &= \left\| D_y^\alpha D_{x_j}^\beta u(x, y/2) * D_{x_j}^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_\infty \\ &\leq \left\| D_y^\alpha D_{x_j}^\beta u(x, y/2) \right\|_\infty \left\| D_{x_j}^\gamma P_{\frac{y}{2}}(x) \right\|_1 \ll y^{-\beta-\gamma}. \end{aligned}$$

Para demostrar que $f \in \Lambda_\alpha$ es suficiente mostrar que

$$\left\| D_y^{\alpha+\beta+2} u(x,y) \right\|_\infty \ll y^{-\beta-2}.$$

$$D_y^{\alpha+\beta+2} u(x,y) = D_y^{\alpha+\beta+2} (P_y(x) * f(x)) = D_y^{\alpha+2} \left(D_y^\beta P_y(x) * f(x) \right)$$

Sea $U(x,y) = D_y^\beta P_y(x) * f(x)$. Como U es ármonica, entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x,y) = - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} U(x,y)$$

luego

$$\begin{aligned}
D_y^{\alpha+2}U(x,y) &= D_y^{\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x,y)\right) = D_y^{\alpha}\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U(x,y)\right)\\
&= -\sum_{j=1}^{n} D_y^{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U(x,y).
\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}U(x,y) &= D_{x_j}^{\beta+(2-\beta)}\left(D_y^{\beta}P_y(x)*f(x)\right)\\
&= D_{x_j}^{2-\beta}\left(D_y^{\beta}P_y(x)*D_{x_j}^{\beta}f(x)\right).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
D_y^{\alpha+2}U(x,y) &= -\sum_{j=1}^{n} D_y^{\alpha}D_{x_j}^{2-\beta}\left(P_{\frac{y}{2}}(x)*D_y^{\beta}P_{\frac{y}{2}}(x)*D_{x_j}^{\beta}f(x)\right)\\
&= -D_y^{\beta}P_{\frac{y}{2}}(x)*\left(\sum_{j=1}^{n} D_y^{\alpha}D_{x_j}^{2-\beta}\left(P_{\frac{y}{2}}(x)*D_{x_j}^{\beta}f(x)\right)\right)\\
&= -D_y^{\beta}P_{\frac{y}{2}}(x)*\left(\sum_{j=1}^{n} D_y^{\alpha}D_{x_j}^{\beta+(2-\beta)}u(x,y/2)\right).
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\left\|D_y^{\alpha+\beta+2}u(x,y)\right\|_\infty &\le \left\|D_y^{\beta}P_{\frac{y}{2}}(x)\right\|_1\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|D_y^{\alpha}D_{x_j}^{\beta+(2-\beta)}u(x,y/2)\right\|_\infty\right)\\
&\ll y^{-\beta-2}.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos $\beta \ge 2$. $\beta = m + \{\beta\}$ para algún $m \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\alpha-\beta = \alpha - m - \{\beta\}$. Como

$$D_{x_j}^{\beta}f \in \Lambda_{\alpha-\beta} \Leftrightarrow \frac{\partial^m}{\partial_{x_j}^m}D_{x_j}^{\{\beta\}}f \in \Lambda_{\alpha-\{\beta\}-m},$$

entonces aplicando el recíproco del Teorema 3.1, tenemos que $D_{x_j}^{\{\beta\}}f \in \Lambda_{\alpha-\{\beta\}}$. $\square$

Agradecimientos Los autores expresan su agradecimiento a la Universidad del Cauca, por el apoyo al grupo de Espacios Funcionales mediante el proyecto 1402.

Referencias

[1] Bobadilla, M.; Enríquez, F.; Montes, A.; Tobar, J. Caracterización de los espacios de Lipschitz en términos de las derivadas de orden no entero de las integrales de Poisson. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Vol. XV, No 1, Junio (2007). pp. 67-76.

[2] Enríquez, F. E. Caracterización de espacios con orden no entero de diferenciación en términos de prolongaciones armónicas. Manuscrito Tésis de Maestría, Universidad de Rusia de la amistad de los pueblos, Moscú, 1995.

[3] Samko, S. G.; Kilvas, A. A. y Marichev, O. I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Gordon and Breach, Yverdon, 1993.

[4] Stein, E. M. Singular integrals and differentiability properties of functions. Princenton University Press, New Jersey, 1970.

[5] Oldham, K.B.; Spanier, J. Fractional Calculus and its aplicationes. Bull. Inst. Politehn. IASI, Sec. 1, 24 no 3-4 (1976), 29-34.

Dirección de los autores
Francisco Enríquez — Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: `enriquezfrancisc@hotmail.com`
Alex Montes — Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: `amontes@unicauca.edu.co`
Jhon Pérez — Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia
e-mail: `jjperez@unicauca.edu.co`