



Fecha de presentación del Informe: Día Mes Año

Datos generales del Proyecto

Código del proyecto: 7920			
Título del proyecto: Métricas conformes con curvatura escalar y curvatura media prescritas.			
Facultad o Instituto Académico: Ciencias Naturales y Exactas.			
Departamento o Escuela: Matemáticas.			
Grupo (s) de investigación: Ecuaciones Parciales y Geometría (EDPG).			
Investigadores ¹	Nombre	Tiempo asignado	Tiempo dedicado
Investigador Principal	Gonzalo García Camacho	10 horas semanales	10 horas semanales
Coinvestigadores	Liliana Posada Vera	5 horas semanales	5 horas semanales
Otros participantes			

1. Resumen ejecutivo:

El objetivo general del proyecto fue contribuir a la solución del problema fundamental de geometría conocido como el problema de la deformación conforme de métricas en variedades a una métrica con curvatura escalar prescrita k en el caso de variedades sin frontera, o a una métrica con curvatura escalar prescrita k sobre M y curvatura media prescrita h sobre la frontera de M , en el caso de variedades con frontera. Una métrica \hat{g} es conforme a la métrica g si $\hat{g} = fg$ donde f es una función suave positiva definida en la variedad M .

El problema matemático es equivalente a la existencia de soluciones positivas de una ecuación semilineal elíptica en el caso de variedades sin frontera, o a la existencia de soluciones positivas de un sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales semilineales, la primera elíptica en el interior de la variedad y la segunda del tipo condición de Neumann en la frontera

¹ Todas las personas relacionadas en el informe y que participen en el proyecto deben haber suscrito el acta de propiedad intelectual de acuerdo con los formatos establecidos.



de la misma en el caso de variedades con frontera.

En este proyecto se estudiaron específicamente los siguientes problemas:

- I. Encontrar condiciones suficientes para que una función eje simétrica definida sobre la esfera sea la curvatura media de una métrica plana conforme a la métrica euclidiana sobre la bola unitaria.
- II. Encontrar estimativos a priori sobre las soluciones subcríticas del problema de deformación conforme de la n -esfera estándar, $n \geq 3$, a una métrica con curvatura escalar k , donde k es una función no degenerada.
- III. Hallar el comportamiento asintótico cerca del origen, donde el origen es una singularidad aislada no removible, de las soluciones singulares del problema de deformación conforme de la semibola $B_{+1}(0)$ de \mathbb{R}^{n+1} a una métrica con curvatura escalar prescrita k y curvatura media prescrita h , donde una de las dos funciones es diferente de cero.

Como se trata de una investigación en Matemáticas puras, el método científico se redujo básicamente a los siguientes elementos: Identificación del problema o pregunta a resolver; revisión bibliográfica exhaustiva; estudios de las soluciones de los problemas relacionados e identificación de las dificultades que las técnicas usadas con éxito en esos casos pudieran presentar para el problema investigado; redacción en forma de artículos de los resultados de la investigación; presentación en eventos nacionales e internacionales del área de los mismos resultados; corrección y publicación en revistas especializadas y divulgativas de los resultados obtenidos.

Los principales resultados obtenidos fueron los siguientes:

En el objetivo I, se resolvió el problema subcrítico asociado al problema de deformación conforme, se están llenando los detalles finales del problema geométrico y se está preparando un artículo que se someterá a una revista A2.

El Objetivo II se desarrolló completamente; como fruto se publicaron el artículo "A Priori Estimates of the Prescribed Scalar Curvature on the Sphere", en la Revista de Ciencias (Indexada B), y el artículo " L^q estimates of functions in the kernel of an elliptic operator and applications" en la revista Integración (indexada A2).

En el objetivo III se resolvió el caso $k=0$, h diferente de cero y $n=3$. Como fruto se presentó para evaluación un artículo titulado: "Asymptotic Symmetry of positive solutions of the escalar and mean curvature equation in \mathbb{R}^3_+ " a la revista Integración.

2. Síntesis del proyecto:

El objetivo general del proyecto fue contribuir a la solución del problema fundamental de geometría conocido como el problema de la deformación conforme de métricas en variedades a



una métrica con curvatura escalar prescrita k en el caso de variedades sin frontera, o a una métrica con curvatura escalar prescrita k sobre M y curvatura media prescrita h sobre la frontera de M , en el caso de variedades con frontera. Una métrica \hat{g} es conforme a la métrica g si $\hat{g} = fg$ donde f es una función positiva definida en la variedad M .

Para cumplir con el objetivo general se propusieron los objetivos específicos siguientes:

- I. Encontrar condiciones suficientes para que una función eje simétrica definida sobre la esfera sea la curvatura media de una métrica plana conforme a la métrica euclidiana sobre la bola unitaria.
- II. Encontrar estimativos a priori sobre las soluciones subcríticas del problema de deformación conforme de la n -esfera estándar, $n \geq 3$, a una métrica con curvatura escalar k , donde k es una función no degenerada.
- III. Hallar el comportamiento asintótico cerca del origen, donde el origen es una singularidad aislada no removible, de las soluciones singulares del problema de deformación conforme de la semibola $B^{n+1}(0)$ de R^{n+1} a una métrica con curvatura escalar prescrita k y curvatura media prescrita h , donde una de las dos funciones es diferente de cero.

El método de investigación se redujo básicamente a los siguientes elementos: Identificación del problema o pregunta a resolver; revisión bibliográfica exhaustiva; estudios de las soluciones de los problemas relacionados e identificación de las dificultades que las técnicas usadas con éxito en esos casos pudieran presentar en el problema investigado; presentación en un seminario periódico de los avances de la investigación; presentación de los avances en eventos nacionales e internacionales y corrección y publicación en revistas especializadas y divulgativas de algunos de los resultados.

Los principales resultados obtenidos fueron los siguientes:

En el **objetivo I**, se resolvió el problema subcrítico asociado al problema de deformación conforme:

Sea $n \geq 3$ y sea $h = h(r)$ una función suave sobre ∂B^n simétrica a lo largo del eje x_n . Asuma que h tiene al menos dos máximos positivos locales y satisface la condición de suavidad cerca de cada punto crítico como sigue:

$h(r) = h(\zeta_0) + a |r-r_0|^{\alpha} + k(|r-r_0|)$ con $a \neq 0$ y $n-2 < \alpha < n-1$. Si $h'(r)$ cambia de signo donde $h > 0$, entonces el problema

$$\Delta_g u = 0 \text{ en } B^n;$$

$$\partial u / \partial \eta + (n-2/2)u = (n-2/2)hu^p \text{ en } \partial B^n,$$

donde $1 < p < n/(n-2)$ y $k'(s) = o(s^{\alpha-1})$, tiene una solución positiva suave.

Se están llenando los detalles finales del problema geométrico y se está preparando un artículo que se someterá a una revista A2.



Relacionado con este problema se presentó una ponencia y se dictó un cursillo relacionados con el tema en el **21 encuentro de geometría**; como consecuencia se publicó un artículo divulgativo en conjunto con un colega brasilero que tomó dicho cursillo.

El Objetivo II se desarrolló completamente; La motivación para este trabajo fue el artículo de Schoen y Zhang sobre este tema; en el entendimiento de su artículo encontramos un salto en la prueba de uno de los teoremas centrales. Nos propusimos encontrar estimativos a priori sobre las soluciones suscriticas con el fin de corregir dicha prueba. Para alcanzar este objetivo nosotros necesitamos considerar dos problemas de perturbación. Como fruto se publicó el artículo "A Priori Estimates of the Prescribed Scalar Curvature on the Sphere", en la Revista de Ciencias (Indexada B por Colciencias), y el artículo "L^q estimates of functions in the kernel of an elliptic operator and applications", publicado en la revista Integración (indexada A2 por Colciencias).

En el primer artículo consideramos la función de curvatura escalar prescrita sobre la esfera para $n \geq 3$. Dada una función de curvatura escalar prescrita $K: S^n \rightarrow \mathbb{R}$ y una dilatación centrada definida por $F_y = \Sigma^{-1} \circ D_\beta \circ \Sigma$, $y \in B^{n+1}$, donde Σ es la proyección estereográfica y D_β es una dilatación en \mathbb{R}^n , nosotros estimamos el gradiente de la función K cerca de los puntos críticos de la función $\hat{J}_p(y) = \int_{S^n} K(\zeta) \varphi^{p+1} d\sigma(\zeta)$ donde $\varphi(y) = |(F_y^{-1})|^{(n-2/2)}$. El resultado obtenido es el siguiente: Sea y un punto crítico de la función $\hat{J}_p(y)$ cerca de S^n , entonces: si $n=3$, $|\text{grad}(K)(y)/|y|| \leq C\mu^{1-w}$ y si $n \geq 4$, $|\text{grad}(K)(y)/|y|| \leq C\mu^{2-w}$, donde w es cualquier número positivo menor que 1 y μ tiende a cero cuando p tiende a $n/(n-2)$. Nosotros usamos este estimativo para encontrar estimativos L^p de las primeras dos y -derivadas de la función $K \circ F_y(\zeta)$.

En el segundo artículo encontramos una familia de soluciones pequeñas η_y en el núcleo de un operador definido en la intersección del espacio de Sobolev $H_{2,q}(S^n)$ con el complemento ortogonal en $H_{1,2}(S^n)$ del primer espacio propio del laplaciano sobre S^n , parametrizado con una variable y que pertenece a una bola pequeña contenida en B^{n+1} . Nosotros encontramos estimativos L^q de estas funciones y las usamos para encontrar soluciones subcríticas al problema de curvatura escalar sobre S^n y encontrar una solución:

$u_{y_1} = \alpha(F_{y_1})^{-1}(1+\eta_{y_1}) = |F'_{y_1}|^{n-2/2}(1+\eta_{y_1}) \circ F_{y_1}$ de un problema elíptico no lineal relacionado a dicho problema, donde $F_{y_1}: S^n \rightarrow S^n$ es una dilatación centrada.

En el **objetivo III** se resolvió el caso $h=0$, k diferente de cero y $n=3$. Específicamente, se encontraron condiciones sobre una función positiva Hölder continua K con exponente Hölder $1/2$, de tal forma que toda solución positiva $u(x)$ de clase C^2 de la ecuación de curvatura escalar conforme con condiciones de Neumann:

$$\Delta u(x) + K(x)u^5(x) = 0 \text{ en } B_1^+$$

$$\partial u(x)/\partial \eta = 0 \text{ en } \partial B_1^+ \cap \partial \mathbb{R}^3_+ \setminus \{0\},$$



o tiene una singularidad removible en el origen o satisface
 $u(x) = u_0(|x|)(1 + O(|x|^{1/2}))$ cuando $x \rightarrow 0$, para alguna solución singular positiva $u_0(x)$ de

$$\Delta u_0(x) + K(0)u_0^5(x) = 0 \text{ en } \mathbb{R}^3_+;$$

$$\partial u_0(x)/\partial \eta = 0 \text{ en } \partial \mathbb{R}^3_+ \setminus \{0\}.$$

Los resultados están contenidos en el artículo: "Asymptotic Symmetry of positive solutions of the escalar and mean curvature equation in \mathbb{R}^3_+ " que se sometió a la revista Integración.

3. Productos:

Tabla No. 1. Cantidad y tipo de productos pactados en el *Acta de Trabajo y Compromiso* y productos finalmente presentados

TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS		No. de PRODUCTOS PRESENTADOS	
Productos de nuevos conocimientos				
Artículo completo publicado en revistas A1 o A2	0		2	
Artículo completo publicados en revistas B	2		1	
Artículo completo publicados en revistas C				
Libros de autor que publiquen resultados de investigación				
Capítulos en libros que publican resultados de investigación				
Productos o procesos tecnológicos patentados o registrados				
<input type="checkbox"/> Prototipos y patentes				
<input type="checkbox"/> Software				
Productos o procesos tecnológicos usualmente no patentables o protegidos por secreto industrial				
Normas basadas en resultados de investigación				
Formación de recursos humanos	No. de estudiantes vinculados	No. de tesis	No. De estudiantes Vinculados	No. De tesis
Estudiantes de pregrado	0		1	1
Semillero de Investigación	0		1	1



TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS		No. de PRODUCTOS PRESENTADOS	
	Estudiantes de maestría	1	1	2
Estudiantes de doctorado				
Productos de divulgación				
Publicaciones en revistas no indexadas				
Ponencias presentadas en eventos (congresos, seminarios, coloquios, foros)	No. de ponencias nacionales 1	No. de ponencias internacionales 1	No. de ponencias nacionales 3	No. de ponencias internacionales 1
Propuesta de investigación				
Propuestas presentadas en convocatorias externas para búsqueda de financiación.		1	1	

Tabla No. 2. Detalle de productos.

Para cada uno de los productos obtenidos y relacionados en la tabla anterior, indique la información solicitada para cada uno, anexando copia de las respectivas constancias. Como anexo a esta guía encontrará el instructivo para la revisión de informes finales y productos

Tipo de producto:	Artículo
Nombre General:	Revista de Ciencias.
Nombre Particular:	A priori estimates of the prescribed scalar curvature on the sphere
Ciudad y fechas:	Cali 2016.
Participantes:	Gonzalo García Camacho y Liliana Posada Vera.
Sitio de información:	Biblioteca Álvaro López Toro
Formas organizativas:	Grupo EDPG.



Tipo de producto:	Artículo.
Nombre General:	Revista Integración.
Nombre Particular:	L^q estimates of functions in the kernel of an elliptic operator and applications.
Ciudad y fechas:	Bucaramanga, 2016.
Participantes:	Gonzalo García Camacho y Liliana Posada Vera.
Sitio de información:	Biblioteca Álvaro López Toro
Formas organizativas:	Grupo EDPG:

Tipo de producto:	Artículo(Sometido)
Nombre General:	Revista Integración.
Nombre Particular:	Asymptotic Symmetry of positive solutions of the escalar and mean curvature equation in R^3_+ .
Ciudad y fechas:	Bucaramanga, 2016.
Participantes:	Gonzalo García Camacho y Elkin Darío Cárdenas.
Sitio de información:	Biblioteca Álvaro López Toro
Formas organizativas:	Grupo EDPG:

4. Impactos actual o potencial:

Los resultados obtenidos son importantes en geometría diferencial en el entendimiento del problema de curvatura escalar prescrita en la esfera y de curvatura escalar y media prescritas en la bola. El proyecto se inscribe en el Programa de Ciencias Básicas y su mayor contribución social fue la formación de dos estudiantes de maestría y un estudiante de pregrado; la estudiante de pregrado se presentará al doctorado de la Universidad del Valle y su tesis será dirigida por el profesor Fernando Coda de la Universidad de Princeton, en colaboración con el investigador principal de este proyecto.

Firma del investigador principal

VoBo. Vicedecano de Investigaciones



VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES
División de Proyectos

**FORMATO PARA LA ELABORACIÓN
DE INFORMES FINALES -
PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN**