Vol. IX, № 1, 2 Nov. (2001)
Notas: 103–107

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Cultura de Aproximación
Autoliquidación de los impuestos locales

Yu Takeuchi

Hace unos años el alcalde de Bogotá, Jaime Castro, inventó el sistema de la "autoliquidación de los impuestos distritales". En él los contribuyentes tenían que llenar, en cada reglón de los formularios correspondientes, las cifras en unidad de mil pesos con la siguiente aproximación:

> la fracción de mil pesos mayor o igual a \$500 sube a \$1000,
> y la fracción de mil pesos menor a \$500 baja a cero.

Además, las citadas aproximaciones se deben realizar en cada paso (no en el paso final). En el año 1999 se comenzó a aplicar la autoliquidación del impuesto de vehículos en todos los municipios de Cundinamarca utilizando un formulario semejante al usado en Bogotá, en el cual después del cuadro "impuesto total al cargo" aparece un renglón "adicional" así:

Municipio (20%)	Departamento (80%)
\$	\$

En el cuadro de "impuesto total" se debe llenar con una cifra "en multiplo de mil (pesos)" de acuerdo a la aproximación de Jaime Castro, y luego hay que calcular el 20% y el 80% de esa cifra y llenar las cifras "aproximadas" en sus cuadros correspondientes. Por ejemplo, "si el impuesto total a cargo" es \$92000 entonces

$$\begin{array}{llll} 20\% \text{ de} & \$92000 = \$18400 & \text{que debe ser aproximado a} & \$18000, \\ 80\% \text{ de} & \$92000 = \$73600 & \text{que debe ser aproximado a} & \$74000, \end{array}$$

en este caso la suma de \$18000 y \$74000 es \$92000 que concuerda con el "impuesto total a cargo". Me surgió una duda al llenar este formulario.

¿Acaso la suma del recaudo para el municipio y el recaudo para el departamento siempre da el impuesto total? Parece que sí según muchos casos que yo probé. Lo pregunté a muchas personas y todos me contestaron que sí, pues según el método de la aproximación si sube (o baja) para el municipio entonces baja (o sube) para el departamento respectivamente y al calcular la suma da el impuesto total. Pero esta explicación no me convenció. Si la proporción entre el municipio y el departamento fuera 25% y 75%, para el impuesto total de 6000 se tendría :

$$\begin{array}{lll} 25\% \text{ de } \ \$6000 = \$1500 & \text{lo cual sube a} & \$2000, \quad y \\ 75\% \text{ de } \ \$6000 = \$4500 & \text{lo cual sube a} & \$5000. \end{array}$$

La suma de \$2000 y \$5000 daría \$7000, que sería diferente a \$6000 ¿Dé dónde sacaría esta diferencia de \$1000? Así me surgió la siguiente pregunta: ¿ Cuál debe ser la "proporción" en la cual se reparta el impuesto total entre el municpio y el departamento en forma consistente (para que la suma de recaudos sea igual al impuesto total? Para "matematizar" nuestro problema primero hay que definir la aproximación de Jaime Castro en "unidad de mil" como sigue:

Definición. (Aproximación de Castro) *Sea x un número real positivo. Se define la aproximación (de Jaime Castro) de x, denotada por $Apr(x)$, como*

$$Apr(x) = \begin{cases} [x]+1 & \text{si} \quad ((x)) \geq 0.5 \\ [x] & \text{si} \quad ((x)) < 0.5 \end{cases}$$

donde $[x]$ es la parte entera de x y $((x))$ es la parte fraccionaria de x.

Teorema 1. *Sean p, $q > 0$ con $p+q = 1$. Entonces existe $a \in \mathbb{N}$ tal que*

$$a \neq Apr(ap) + Apr(aq) \tag{1}$$

si y sólo si p es un número racional cuyo denominador es par al expresar p en forma del cociente irreducible.

Primero, demostremos el siguiente lema.

Lema. Supongamos que $a \cdot p \notin \mathbb{N}$. Entonces $((ap)) + ((aq)) = 1$.

Demostración del Lema. Como $ap = [ap] + ((ap))$, $aq = [aq] + ((aq))$, entonces

$$a = a \cdot (p+q) = [ap] + [aq] + ((ap)) + ((aq)).$$

Teniendo en cuenta que $a \in \mathbb{N}$, $[ap] \in \mathbb{N}$, $[aq] \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$((ap)) + ((aq)) \in \mathbb{N}.$$

Y como $((ap)) < 1$, y $((aq)) < 1$, entonces $((ap)) + ((aq)) = 0$, ó , 1. $ap \notin \mathbb{N}$ por hipótesis, entonces $((ap)) \neq 0$. Por lo tanto $((ap)) + ((aq)) = 1$.

Demostración del teorema 1. i) Supongamos que $ap \in \mathbb{N}$. Entonces $aq = a - ap \in \mathbb{N}$, luego $((ap)) = ((aq)) = 0$. Por lo tanto

$$a = ap + aq = [ap] + [aq] = Apr(ap) + Apr(aq).$$

ii) Supongamos que $ap \notin \mathbb{N}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} a = ap + aq &= [ap] + [aq] + \quad ((ap)) + ((aq)) \\ &= [ap] + [aq] + \quad 1\ . \end{aligned}$$

Entonces, $a = Apr(ap) + Apr(aq)$ si y sólo si $((ap)) \neq 0.5$. En efecto, si $a = Apr(ap) + Apr(aq)$, entonces

$$\begin{cases} Apr(ap) = & [ap] + 1 \\ Apr(aq) = & [aq] \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} Apr(ap) = & [ap] \\ Apr(aq) = & [aq] + 1\ , \end{cases}$$

ésto es,

$$\begin{cases} ((ap)) \geq & 0.5\ , \\ ((aq)) < & 0.5 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} ((ap)) < & 0.5 \\ ((aq)) \geq & 0.5\ . \end{cases}$$

Por lo tanto $((ap)) \neq 0.5$ (puesto que $((ap)) + ((aq)) = 1$).

Supongamos que $((ap)) = 0.5$, esto es

$$ap = [ap] + \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, p es un número racional, digamos $p = \frac{r}{s}$ (r , $s \in \mathbb{N}$, y no hay divisor común entre r y s).

$$\begin{cases} \text{Si } s \text{ es impar, entonces para cualquier } a \in N \text{ se tiene que} \\ \qquad\qquad ((ap)) = ((\frac{ar}{s})) \neq \frac{1}{2}. \\ \text{Si } s \text{ es par, digamos } s = 2m \text{ entonces para } a = m \text{ se tiene} \end{cases}$$

$$((ap)) = ((\frac{m \cdot r}{2m})) = ((\frac{r}{2})) = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{(nótese que } r \text{ es impar).}$$

Ejemplo. i) Si $p = 0.2$ y $q = 0.8$ entonces $p = \frac{1}{5}$ y 5 es impar. Por lo tanto para cualquier $a \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$a = Apr(\frac{1}{5} \cdot a) + Apr(\frac{4}{5} \cdot a).$$

ii) Si $p = 0.25$ y $q = 0.75$, entonces $p = \frac{1}{4}$ y 4 es par. Entonces tomando $a = 2$ se tiene

$$Apr(2 \cdot \frac{1}{4}) + Apr(2 \cdot 34) = Apr(0.5) + Apr(1.5) = 1 + 2 = 3 \neq 2(= a).$$

Aunque esta situación no se presenta en el caso cotidiano ¿Cómo sería el resultado si dividimos un número real "a" (no necesariamente un número natural) en dos partes como $a = a \cdot p + a \cdot q$?

Teorema 2. *Sean p, $q > 0$ con $p + q = 1$. Entonces existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$Apr(a) \neq Apr(a \cdot p) + Apr(a \cdot q). \tag{2}$$

Demostración. Vamos a encontrar un $a \in \mathbb{R}$ que satisfaga las condiciones

$$((ap)) < 0.5 \quad ; \quad ((aq)) < 0.5 \quad , \quad ((a)) \geq 0.5 \ . \tag{3}$$

De (3) se observa que $((ap)) + ((aq)) < 1$. Por lo tanto se tiene que

$$((a)) = ((ap)) + ((aq)) \quad \text{y} \quad [a] = [ap] + [aq].$$

En consecuencia

$$Apr(a) = [a] + 1 \ , \ Apr(ap) = [ap] \ , \ Apr(aq) = [aq].$$

Luego, $a(\in \mathbb{R})$ satisface la condición (2).

Vamos a suponer que $q < p$ (sin pérdida de generalidad). Sea $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \sigma < \frac{1}{4}(1 - p)$ (nótese que $p < 1$). Por el *Teorema de Aproximación de Dirichlet* existen m, $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$m \cdot \frac{q}{p} - n = \varepsilon \quad \text{con} \quad |\varepsilon| < \frac{\sigma}{2} \ , \tag{4}$$

ó sea:

$$\frac{q}{p} = \frac{n + \varepsilon}{m} \quad \text{con} \quad |\varepsilon| < \frac{\sigma}{2} \ . \tag{4'}$$

Como $0.5 - \sigma > 0.5p + \sigma$, entonces existe Δ tal que

$$0.5 - \sigma < \Delta < 0.5 - \sigma \ . \tag{5}$$

Escójase a real tal que

$$a = \frac{m}{p} + \frac{\varepsilon + \Delta}{p} \tag{6}$$

Entonces

$$a \cdot p = m + \varepsilon + \Delta \ . \tag{6'}$$

De (5) tenemos

$$0 < \sigma - |\varepsilon| < \Delta - |\varepsilon| \leq \varepsilon + \Delta < \Delta + \sigma < 0.5,$$

y por lo tanto se tiene que $((ap)) < 0.5$.

Además, de (4′) y (6′) tenemos

$$aq = ap \cdot \frac{q}{p} = n + \varepsilon + \frac{q}{p} \cdot (\varepsilon + \Delta) \ ,$$
$$\varepsilon + \frac{q}{p} \cdot (\varepsilon + \Delta) < \varepsilon + (\varepsilon + \Delta) < \sigma + \Delta < 0.5 \ .$$

por lo tanto se tiene que $((aq)) < 0.5$.

Por otra parte, tenemos: $a = ap + aq = m + n + \varepsilon + (\varepsilon + \Delta) \cdot < 1 + \frac{q}{p}$ $= (m+n) + \varepsilon + \frac{\varepsilon + \Delta}{p}$, $\varepsilon + \frac{\varepsilon + \Delta}{p} \geq -|\varepsilon| + \frac{\Delta - |\varepsilon|}{p} > \frac{0.5p + \sigma - |\varepsilon|}{p} - |\varepsilon| >$ $0.5 + \frac{\sigma - 2|\varepsilon|}{p} > 0.5$.

Por lo tanto se tiene que $((a)) > 0.5$.

Dirección del autor: Yu Takeuchi Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.