Vol. XIII № 2 Diciembre (2005)
Matemáticas: 1–21

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Sobre la integrabilidad de f-estructuras en variedades bandera*

Sofía Pinzón,

Recibido Feb. 24, 2005 Aceptado Oct. 23, 2005

Abstract

In 1963 Ishihara and Yano estudied integrability conditions for the integrability of the distributions determined by a differential structure $\mathcal{F}$ which satisfy $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$; this structures are called **f**-structures. Here we present integrabikity conditions for a U-invariant **f**-structure $\mathcal{F}^\Theta$, defined on a generalized flag manifold $\mathbb{F}_\Theta = U/K$, where U is a connected, compact semisimple Lie group and K is a torus centralizer, using the combinatorial properties coming from its root system associated and in the classical maximal case we will use the combinatorics coming from the digraphs associated to the **f**-structure.

Keywords: flag manifold, **f**-structure, digraphs.

AMSC(2000): Primary:53C55, Secondary: 22F30, 17B45, 05C20.

Resumen

Ishihara y Yano estudiaron la integrabilidad de las distribuciones determinadas, sobre una variedad diferencial cualquiera, por una estructura diferencial $\mathcal{F}$ que satisface $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$; este tipo de estructuras son llamadas **f**-estructuras. Aquí estudiamos específicamente la integrabilidad de las **f**-estructuras U-invariantes $\mathcal{F}^\Theta$ definidas sobre una variedad bandera generalizada $\mathbb{F}_\Theta = U/K$, donde U es un grupo de Lie semisimple compacto conexo y K es el centralizador de un toro (no necesariamente maximal); para esto hacemos uso de la teoría combinatoria que ofrece el sistema de raíces asociado o, como en el caso de la variedad bandera maximal clásica, la combinatoria que proviene de los digrafos asociados con la **f**-estructura.

Palabras y frases claves: Variedades bandera, **f**-estructuras, digrafos.

1 Introducción

Sea G un grupo de Lie semisimple. Una variedad bandera generalizada es un espacio homogéneo reductivo $\mathbb{F}_\Theta = G/S$ donde S es el centralizador de un toro (no necesariamente maximal). La variedad bandera también se puede ver como el espacio homogéneo dado por $\mathbb{F}_\Theta = U/K$, donde U es una forma compacta conexa de G y $K = S \cap U$. Este tipo de variedades y por lo tanto $\mathfrak{q}_\Theta$, su espacio tangente en el origen, tienen una caracterización en términos del sistema de raíces asociado, la cual es presentada en las secciones 2 y 4. Nuestro tema central en este trabajo serán las variedades bandera generales, dotadas de una métrica invariante Λ^Θ presentada en la Sección 5 y una **f**-estructura U-invariante $\mathcal{F}^\Theta$, esto es, una estructura que satisface $(\mathcal{F}^\Theta)^3 + \mathcal{F}^\Theta = 0$ y conmuta con la acción adjunta de U. Abusando un poco, denotamos también por $\mathcal{F}^\Theta$ su complejificación que es diagonizable con valores propios $i, 0, -i$ y determina los espacios propios correspondientes $\mathfrak{q}_\Theta^+, \mathfrak{q}_\Theta^0, \mathfrak{q}_\Theta^-$. En analogía

*Investigación financiado parcialmente por COLCIENCIAS, contrato No. 138–2004.

con las estructuras cuasicomplejas, los vectores propios asociados a 0 serán llamados de tipo $(1,0,0)$, los asociados a $+i$ de tipo $(0,1,0)$ y los asociados a $-i$ de tipo $(0,0,1)$.

Este tipo de estructuras, sus propiedades y las distribuciones que ella determina sobre el espacio tangente $\mathfrak{q}_\Theta$ se estudian en la Sección 7.3. Con esto en mano, y utilizando la combinatoria dada por el sistema de raíces asociado a esta clase de variedades, estudiamos bajo qué condiciones la variedad bandera y las distintas distribuciones determinadas por la $\mathbf{f}$-estructura son integrables. Caracterizamos estas condiciones en términos de grafos, para el caso de la variedad bandera clásica $\mathbb{F}(n)$, y en términos de triplas de raíces, cuya suma es cero, en el caso general. En particular establecemos que la única $\mathbf{f}$-estructura integrable sobre una variedad bandera maximal es la que corresponde a la estructura cuasicompleja integrable, como aparece en el Teorema 24. Se extiende así el Teorema dado por Burstall [3] para estructuras cuasicomplejas invariantes, en el cual él muestra que una estructura cuasicompleja es integrable si y solamente si el torneo asociado es isomorfo al torneo canónico, o sea, no contiene triciclos (triplas de tipo $\{0,3,0\}$).

2 Preliminares

Utilizaremos aquí la teoría clásica sobre la estructura de las álgebras de Lie semisimples finitas (ver por ejemplo [8]).

Definición 1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie compleja.*

1. *La representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es el homomorfismo* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ *dada por* $\mathrm{ad}(X)Y = [X,Y]$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2. *La forma Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ es la forma bilineal simétrica dada por* $B(X,Y) = \langle X,Y\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y), \quad X,Y \in \mathfrak{g}$.

3. *Una álgebra de Lie es llamada semisimple si su forma Cartan-Killing es no degenerada.*

4. *Una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ es una subálgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ que satisface:*

   (a) $\mathfrak{h}$ *es nilpotente.*

   (b) El normalizador de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ coincide con $\mathfrak{h}$, esta condición es equivalente a:

   b') Si $[x,\mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, entonces $x \in \mathfrak{h}$.

Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple sobre $\mathbb{C}$ y $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Sea α un funcional lineal sobre el espacio vectorial complejo $\mathfrak{h}$, y denótese por $\mathfrak{g}_\alpha$ el subespacio lineal de $\mathfrak{g}$ dado por

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \qquad [H,X] = \alpha(H)\,X, \qquad \text{para todo } H \in \mathfrak{h}\}\,.$$

Notése que para $\alpha = 0$, $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$. Si $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$, el funcional lineal α es llamado una raíz (de $\mathfrak{g}$ con respecto a $\mathfrak{h}$). En tal caso $\mathfrak{g}_\alpha$ es llamado un *subespacio raíz.* Denotamos por Π el conjunto de raíces no nulas del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Dado que $\mathfrak{g}$ es semisimple, la forma Cartan-Killing, B, es no degenerada sobre $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$; la restricción de B a $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ es también no degenerada, y así para cada $\alpha \in \Pi$ existe un único $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ tal que $B(H, H_\alpha) = \langle H, H_\alpha \rangle = \alpha(H)$ para todo $H \in \mathfrak{h}$. Tómese $(\alpha, \beta) = B(H_\alpha, H_\beta)$ para toda $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$; se sigue entonces que $(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica no degenerada sobre $\mathfrak{h}^*$.

Teorema 2. *[21] Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

1. *La álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite una descomposición en espacios de raíces:*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

2. *Los espacios raíz $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, son de dimensión compleja uno.*

3. *Si α y β son dos raíces cualesquiera (incluyendo 0) y $\beta \neq -\alpha$, entonces $\mathfrak{g}_\alpha$ y $\mathfrak{g}_\beta$ son ortogonales con relación a B.*

4. *Si α es una raíz no nula, $\Pi \cap \mathbb{Z}\{\alpha\} = \{\alpha, -\alpha\}$.*

5. *Para cada $\alpha \in \Pi$ existe un vector $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ de forma tal que para todo $\alpha, \beta \in \Pi$ tenemos:*

   (a) $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, $[H, X_\alpha] = \alpha(H) X_\alpha$ *(para todo $H \in \mathfrak{h}$);*
   (b) $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ *si* $\alpha + \beta \neq 0$ *y* $\alpha + \beta \notin \Pi$;
   (c) $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$ *si* $\alpha + \beta = 0$ *y* $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$ *en los otros casos;*
   (d) $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, *si* $\alpha + \beta \in \Pi$ *con* $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$, *y*

$$\begin{gathered} m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta} \\ m_{-\alpha,\alpha+\beta} = m_{\alpha+\beta,-\beta} = m_{-\beta,-\alpha}. \end{gathered} \tag{1}$$

Los elementos $\{X_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ que satisfacen el numeral 5 en el anterior teorema serán llamados una *base de Weyl* o *Cartan-Weyl* de $\mathfrak{g}$ módulo $\mathfrak{h}$.

3 Variedad bandera general

Antes de definir lo que es una variedad bandera, recordemos que el grupo S^1 es el único grupo de Lie compacto conexo de dimensión uno, y producto de varias copias de S^1 son los únicos grupos de Lie compactos, conexos y conmutativos. Tal producto es llamado un "Toro".

Definición 3. *En un grupo de Lie G un* toro *es un subgrupo de Lie que es isomorfo al producto $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$. Un toro T es un toro maximal en G si para cualquier toro S en G, con $T \subset S \subset G$, entonces $T = S$.*

En general, en matemática una *bandera* es una sucesión creciente de subespacios, creciente en el sentido de que cada subespacio es subespacio del siguiente. Geométricamente una variedad bandera es un espacio homogéneo reductivo $G/C(S)$, donde G es un grupo de Lie complejo semisimple y $C(S)$ es el centralizador de un toro S (no necesariamente maximal en G). Cuando S es un toro maximal decimos que la variedad bandera es maximal general y la denotamos por $\mathbb{F}$.

Lo anterior, en términos de sistemas de raíces asociadas al grupo G, se puede escribir de la siguiente forma:

Sean $\mathfrak{g}$ una álgebra de Lie semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$; denótese por Π el conjunto de raíces del par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ y fijemos una base de Weyl de $\mathfrak{g}$. Sea $\Pi^+ \subset \Pi$ una escogencia de raíces positivas, y denótese por Σ el sistema simple de raíces correspondiente. Sean además Θ un subconjunto de raíces de Σ, y $\langle\Theta\rangle$ el conjunto de raíces generado por Θ. Sobre $\mathfrak{g}$ tenemos la siguiente descomposición:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\beta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}, \tag{2}$$

donde $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Pi$, es el espacio raíz complejo correspondiente a α.

Sea ahora $\mathfrak{p}_\Theta$ la subálgebra parabólica de $\mathfrak{g}$ determinada por Θ. Entonces,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha \oplus \sum_{\alpha \in \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\beta. \tag{3}$$

Así, la ecuación (2) puede ser reescrita como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_\Theta \oplus \sum_{\beta \in \Pi^+ \setminus \langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\beta}. \tag{4}$$

La variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta$ asociada al par $\{\mathfrak{g}, \Theta\}$ corresponde al espacio homogéneo $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$, donde G es el grupo de Lie complejo cuya álgebra de Lie es $\mathfrak{g}$ y P_Θ es el normalizador de $\mathfrak{p}_\Theta$ en G.

Denótese por $\mathfrak{u}$ la forma real compacta de $\mathfrak{g}$, y por $U \subset G$ el subgrupo conexo asociado a $\mathfrak{u}$. Asumimos $\mathfrak{u}$ como el subespacio real generado por $i\mathfrak{h}_\mathbb{R}, A_\alpha, S_\alpha$, con $\alpha \in \Pi \setminus \Theta$, donde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ y $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Sea $K_\Theta = P_\Theta \cap U$, el cual, por construcción, es el centralizador de un toro. U actúa transitivamente sobre $\mathbb{F}_\Theta$, y así podemos escribir $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$. Si $\Theta = \emptyset$, $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}$ corresponde a la variedad bandera maximal, y en el caso contrario corresponde a una variedad bandera parcial.

La variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta = U/K_\Theta$ es un espacio homogéneo reductivo. De hecho, sea $\mathfrak{u}_\beta = \mathfrak{u} \cap (\mathfrak{g}_\beta \oplus \mathfrak{g}_{-\beta}),\ \beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ y $\mathfrak{q}_\Theta = \sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle} \mathfrak{u}_\beta$. Entonces,

(i) $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}_\Theta \oplus \mathfrak{q}_\Theta,\ \mathfrak{t}_\Theta \cap \mathfrak{q}_\Theta = \emptyset$,

(ii) $Ad(K_\Theta)\mathfrak{q}_\Theta \subset \mathfrak{q}_\Theta$, esto implica $[\mathfrak{t}_\Theta, \mathfrak{q}_\Theta] \subset \mathfrak{q}_\Theta$,

satisfaciendo así las condiciones para que $\mathbb{F}_\Theta$ sea espacio homogéneo reductivo (ver [10]).

4 El espacio tangente de $\mathbb{F}_\Theta$

Denótese por b_0 el origen de $\mathbb{F}_\Theta$, visto como espacio homogéneo de U. Identificamos $\mathfrak{q}_\Theta$ con $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$. Esta identificación es dada por $X \in \mathfrak{q}_\Theta \to X_{b_0} \in T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$, esto es, por evaluación de $X \in \mathfrak{q}_\Theta$ en b_0 como un campo vectorial sobre $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$ (véase [10], pág. 191).

El espacio tangente a $\mathbb{F}_\Theta$ en b_0 se identifica naturalmente con el subespacio $\mathfrak{q}_\Theta = \mathfrak{u} \ominus \mathfrak{t} = \sum_{\beta\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle} \mathfrak{u}_\beta$ generado por $A_\alpha, S_\alpha, \alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$. Análogamente, el espacio tangente complejificado de $\mathbb{F}_\Theta$ es identificado con $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \ominus \mathfrak{h} = \oplus_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}\mathfrak{g}_\alpha$.

Como $\mathfrak{q}_\Theta$ es generado por $A_\alpha, S_\alpha,\ \alpha \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$, citamos a continuación algunas de las propiedades de estos vectores (ver [18] sección 12.2):

$$\begin{array}{cc} [A_\alpha, S_{-\alpha}] = 2iH_\alpha, & \langle iH_\alpha, A_\beta\rangle = \langle iH_\alpha, S_\beta\rangle = \langle A_\alpha, S_\beta\rangle = 0, \\ [iH_\alpha, S_\beta] = -\beta(H_\alpha)A_\beta, & [S_\alpha, S_\beta] = -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta}, \\ [iH_\alpha, A_\beta] = \beta(H_\alpha)S_\beta, & [A_\alpha, A_\beta] = m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta}, \\ \langle A_\alpha, A_\alpha\rangle = \langle S_\alpha, S_\alpha\rangle = -2, & [A_\alpha, S_\beta] = m_{\alpha,\beta}S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}S_{\alpha-\beta}. \end{array} \tag{5}$$

4.1 La variedad bandera clásica o geométrica

El caso clásico, la variedad bandera geométrica, se obtiene considerando G como el grupo especial unitario SU_n y $C(S)$ debe ser conjugado a un subgrupo de la forma $SU_{n_1} \times SU_{n_2} \times ... \times SU_{n_k}$, con $n_1, n_2, ..., n_k$ enteros positivos satisfaciendo $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Si $m_i = n_1 + ... + n_i$, el cociente $SU_n/(SU_{n_1} \times ... \times SU_{n_k})$ puede ser identificado con el conjunto $F(m_1, ..., m_k)$ de "banderas parciales" $\{0\} = E_0 \subset E_{m_1} \subset ... \subset E_{m_k-1} \subset E_{m_k} = \mathbb{C}^n$, donde E_i es un subespacio de $\mathbb{C}^n$ de dimensión i. El caso $n_r = 1$ para todo $1 \leq r \leq k$ será denotado por $\mathbb{F}(n)$ y puede identificarse con el conjunto de las "banderas totales" o maximales $\{0\} = E_0 \subset E_1 \subset ... \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{C}^n$. En particular, el conjunto formado por $E_{jk}, j \neq k$ y $E_{jj} - E_{kk}, j < k$, es una base de Weyl para $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$,y $\mathfrak{h}$ es la subálgebra de las matrices diagonales, $\Theta = \emptyset$, así $\mathfrak{q}$ es generada por las matrices $A_{jk} = E_{jk} - E_{kj}$ y $S_{jk} = i(E_{jk} + E_{kj})$. Donde

$$E_{jk} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} & & & k & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ejemplo 1: Consideremos

$$\mathbb{F}(3) = U(3)/(U(1) \times U(1) \times U(1)) = U(3)/T,$$

$$\mathfrak{q} = T(\mathbb{F}(3))_{(b_0)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -\bar{b} & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix} : a, b, c, \in \mathbb{C} \right\},$$

y por ejemplo,

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : i = \sqrt{-1}.$$

5 Métricas invariantes

Una métrica riemanniana U-invariante ds^2_Λ en $\mathbb{F}_\Theta$ es completamente determinada por sus valores en el origen, esto es, por un producto interno $(\cdot,\cdot)$ en $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$.

Cualquier producto interno en $T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$ U-invariante tiene la forma $(X, Y)_\Lambda = -\langle \Lambda \circ X, Y \rangle$, con $\Lambda : T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta) \to T_{b_0}(\mathbb{F}_\Theta)$ positivamente definida con relación a la forma Cartan-Killing, y $\circ$ es el producto de Hadamard o producto término a término.

Usaremos la misma notación $(\cdot,\cdot)_{\Lambda^\Theta}$ para esta forma, así como para la correspondiente aplicación complejificada Λ^Θ. La invariancia de $(\cdot,\cdot)_{\Lambda^\Theta}$ equivale a afirmar que la base de Weyl es base compleja de autovectores para la acción de Λ^Θ, o sea que en $\mathfrak{q}^{\mathbb{C}}_\Theta$ tenemos

$$\Lambda^\Theta X_\alpha = \lambda^\Theta_\alpha X_\alpha, \tag{6}$$

con $\lambda^\Theta_\alpha = \lambda^\Theta_{-\alpha} > 0$, para $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$. Para el álgebra real $\mathfrak{q}_\Theta$, los elementos de la base canónica, A_α, S_α, con $\alpha \in \Pi \setminus \langle \Theta \rangle$, son autovectores de Λ^Θ para el mismo autovalor λ^Θ_α.

6 La conexión riemanniana en $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$

Ya vimos en la sección 3 que $\mathbb{F}_\Theta$ es un espacio homogéneo reductivo. Por el Teorema 3.3 del capítulo X en [11] podemos definir una aplicación bilineal simétrica $U : \mathfrak{q}_\Theta \times \mathfrak{q}_\Theta \to \mathfrak{q}_\Theta$ por:

$$2\Lambda^\Theta(U(X,Y),Z) = \Lambda^\Theta(X,[Y,Z]_{\mathfrak{q}_\Theta}) + \Lambda^\Theta([Z,X]_{\mathfrak{q}_\Theta},Y)$$

para cualesquiera $X,Y,Z \in \mathfrak{q}_\Theta$; o sea,

$$2\langle \Lambda^\Theta \circ U(X,Y),Z\rangle = \langle \Lambda^\Theta \circ X,[Y,Z]_{\mathfrak{q}_\Theta}\rangle + \langle [Z,X]_{\mathfrak{q}_\Theta},\Lambda^\Theta \circ Y\rangle.$$

Utilizando la invarianza de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, esto es,

$$\langle [X,Y]_{\mathfrak{q}_\Theta},Z\rangle = \langle X,[Y,Z]_{\mathfrak{q}_\Theta}\rangle, \tag{7}$$

tenemos

$$2\langle \Lambda^\Theta \circ U(X,Y),Z\rangle = -\langle [\Lambda^\Theta \circ X,Y]_{\mathfrak{q}_\Theta},Z\rangle + \langle [X,\Lambda^\Theta \circ Y]_{\mathfrak{q}_\Theta},Z\rangle.$$

De aquí, finalmente,

$$2\Lambda^\Theta \circ U(X,Y) = [X,\Lambda^\Theta \circ Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} - [\Lambda^\Theta \circ X,Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}. \tag{8}$$

Como la *conexión riemanniana* ∇ en $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$ es dada por

$$2\nabla_X Y \;=\; [X,Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} \;+\; 2U(X,Y), \tag{9}$$

tenemos entonces

$$2\nabla_X Y = \;[X,Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} \;+\; {\Lambda^\Theta}^{-1} \circ ([X,\Lambda^\Theta Y]_{\mathfrak{q}_\Theta} - [\Lambda^\Theta X,Y]_{\mathfrak{q}_\Theta}), \tag{10}$$

con $X,Y \in \mathfrak{q}_\Theta$ y $(\Lambda^\Theta)^{-1}$ la inversa de Λ^Θ con respecto al producto de Hadamard. Es de notar que los autovalores de $(\Lambda^\Theta)^{-1}$ corresponden a los inversos multiplicativos de los autovalores de Λ^Θ, o sea $(\Lambda^\Theta)^{-1} = \big((\lambda_\alpha^\Theta)^{-1}\big)_{\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$.

La acción concreta de la conexión riemanniana sobre los elementos de la base de Weyl es descrita en la siguiente proposición.

Proposición 4. *Para* $(\mathbb{F}_\Theta, \Lambda^\Theta)$ *sean* $\alpha,\beta,\alpha+\beta \in \Pi\setminus\langle\Theta\rangle$, *y* $X_\alpha, X_\beta, X_{\alpha+\beta} \in \mathfrak{q}_\Theta$, *elementos en la base de Weyl. Entonces*

$$\nabla_{X_\alpha} X_\beta = m_{\alpha,\beta}\frac{\lambda^\Theta_{\alpha+\beta} + \lambda^\Theta_\beta - \lambda^\Theta_\alpha}{2\lambda^\Theta_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}. \tag{11}$$

Proof. De la ecuación (10) mediante cálculo directo, usando el ítem 5 en el Teorema 2 y la ecuación (6), tenemos:

$$\begin{aligned}
2\nabla_{X_\alpha}X_\beta &= [X_\alpha,X_\beta]_{\mathfrak{q}_\Theta} + {\Lambda^\Theta}^{-1} \circ ([X_\alpha,\Lambda^\Theta \circ X_\beta]_{\mathfrak{q}_\Theta} - \\
&\quad [\Lambda^\Theta \circ X_\alpha,X_\beta]_{\mathfrak{q}_\Theta}) \\
&= m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta} + \Lambda^\Theta \circ (m_{\alpha,\beta}\lambda_\beta X_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,\beta}\lambda^\Theta_\alpha X_{\alpha+\beta}) \\
&= m_{\alpha,\beta}\tfrac{\lambda^\Theta_{\alpha+\beta}+\lambda^\Theta_\beta-\lambda^\Theta_\alpha}{\lambda^\Theta_{\alpha+\beta}} X_{\alpha+\beta}.
\end{aligned}$$

□

7 f-estructuras

K. Yano en 1963 [23] introduce la noción de **f**-estructura para una variedad riemanniana cualquiera de la siguiente forma:

Definición 5. *Sea M una variedad riemanniana n-dimensional y $\mathcal{F}$ un campo tensorial de tipo (1,1) tal que $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$. $\mathcal{F}$ es llamado una* **f***-estructura sobre TM.*

Una variedad riemanniana con una **f**-estructura $\mathcal{F}$ será llamada una **f**-*variedad* (véase [16]).

Sea $\mathcal{F} : TM \to TM$ una **f**-estructura. Se definen los operadores lineales $l, p : TM \to TM$ de la siguiente forma:

$$l = -\mathcal{F}^2, \qquad p = \mathcal{F}^2 + 1. \tag{12}$$

De la identidad $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$ tenemos que

$$l + p = 1, \qquad l^2 = l, \qquad p^2 = p, \qquad lp = pl = 0, \tag{13}$$

donde 1 denota el operador identidad. En otras palabras los operadores l y p son operadores de proyección complementarios sobre TM. Así, dada $\mathcal{F}$, una **f**-estructura no nula, para cada punto $x \in M$ existen en T_xM distribuciones complementarias L y P correspondientes a los operadores de proyección l y p, respectivamente. Si el rango de $\mathcal{F}$ es igual a r, entonces L es de dimensión r y P tiene dimensión $n - r$, donde n es la dimensión de M.

Afirmación. [9] Para la **f**-estructura $\mathcal{F}$ sean l, p como antes. Entonces:

$$\mathcal{F}l = l\mathcal{F} = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}p = p\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{F}^2 l = -l,$$

esto es, $\mathcal{F}$ actúa sobre L como una estructura cuasicompleja y sobre P como el operador nulo.

Para demostrar esto, sea $X \in L$; entonces $\mathcal{F}^2(X) = \mathcal{F}^2(lX) = -l(X) = -X$. Ahora, sea $X \in P$; entonces $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(pX) = \mathcal{F}p(X) = (\mathcal{F}^3 + \mathcal{F})(X) = 0$.

Si el rango de $\mathcal{F}$ es n, entonces $\mathcal{F}$ satisface $\mathcal{F}^2 + 1 = 0$, y consecuentemente $\mathcal{F}$ es una estructura cuasicompleja. Cuando el rango de $\mathcal{F}$ es $(n-1)$ ella es llamada estructura cuasicontacto [17].

7.2 Tensor de Nijenhüis

Sea $\Gamma(M)$ el espacio de los campos vectoriales de una variedad diferencial M y A, B campos tensoriales de tipo $(1,1)$ en M.

La aplicación $N : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \to \Gamma(M)$ definida por

$$\begin{aligned} N_{A,B}(X,Y) &= [AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y] \\ &\quad -A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y], \end{aligned}$$

$X, Y \in \Gamma(M)$, es un campo tensorial de tipo $(1,2)$ que satisface $N(X,Y) = -N(Y,X)$. N es llamado el tensor de Nijenhüis asociado con A y B (véase [14]). Luego para una **f**-estructura $\mathcal{F}$ el tensor de Nijenhüis $N(X,Y)$ asociado a $A = B = \mathcal{F}$ estará dado por

$$1/2N(X,Y) = [\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}X,Y] - \mathcal{F}[X,\mathcal{F}Y] - l[X,Y]. \qquad (14)$$

Cuando $\mathcal{F}$ es una estructura cuasicompleja, si el tensor de Nijenhüis es idénticamente nulo entonces $\mathcal{F}$ es integrable o, equivalentemente, la variedad M admite una estructura de variedad compleja.

Lema 6. *El tensor de Nijenhüis, la* **f***-estructura* $\mathcal{F}$ *y las proyecciones asociadas* p, l *satisfacen las siguientes identidades para cualesquiera campos vectoriales* X, Y *:*

(i)

$$N(pX,pY) = lN(pX,pY) = -l[pX,pY]; \qquad (15)$$

(ii)

$$pN(X,Y) = p[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y]; \qquad (16)$$

(iii)

$$pN(lX,lY) = p[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y]; \qquad (17)$$

(iv)

$$pN(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) = p[lX,lY]; \qquad (18)$$

(v)

$$N(lX,lY) = 0 \textit{ si, y solamente si, } N(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) = 0. \qquad (19)$$

Proof. De hecho, usando (13) y (14),

(*i*)

$$\begin{aligned} N(pX,pY) &= [\mathcal{F}pX,\mathcal{F}pY] - \mathcal{F}[\mathcal{F}pX,pY] - \mathcal{F}[pX,\mathcal{F}pY] \\ &\quad -l[pX,pY] \\ &= -l[pX,pY] \qquad \text{y por lo tanto,} \\ lN(pX,pY) &= -l^2[pX,pY] = -l[pX,pY] = N(pX,pY); \end{aligned}$$

(*ii*)

$$\begin{aligned} pN(X,Y) &= p[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}X,Y] - p\mathcal{F}[X,\mathcal{F}Y] \\ &\quad -pl[X,Y] \\ &= p[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y]; \end{aligned}$$

(*iii*)

$$\begin{aligned} pN(lX,lY) &= p[\mathcal{F}lX,\mathcal{F}lY] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}lX,lY] - p\mathcal{F}[lX,\mathcal{F}lY] \\ &\quad -pl[lX,lY] \\ &= p[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y]; \end{aligned}$$

(*iv*)

$$\begin{aligned} pN(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) &= p[\mathcal{F}^2X,\mathcal{F}^2Y] - p\mathcal{F}[\mathcal{F}^2X,\mathcal{F}Y] - \\ &\quad p\mathcal{F}[\mathcal{F}X,\mathcal{F}^2Y] - pl[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] \\ &= p[lX,lY]; \end{aligned}$$

(*v*)

$$\begin{aligned} N(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) &= [\mathcal{F}^2X,\mathcal{F}^2Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}^2X,\mathcal{F}Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}X,\mathcal{F}^2Y] \\ &\quad -l[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] \\ &= [lX,lY] + \mathcal{F}[lX,\mathcal{F}Y] + \mathcal{F}[\mathcal{F}X,lY] \\ &\quad -l[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} N(lX,lY) &= [\mathcal{F}lX,\mathcal{F}lY] - \mathcal{F}[\mathcal{F}lX,lY] - \mathcal{F}[lX,\mathcal{F}lY] \\ &\quad -l[lX,lY] \\ &= [\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] - \mathcal{F}[\mathcal{F}X,lY] - \mathcal{F}[lX,\mathcal{F}Y] \\ &\quad -l[lX,lY]. \end{aligned}$$

Supóngase ahora que $N(lX,lY)=0$; tenemos entonces

$$\mathcal{F}[lX,\mathcal{F}Y] + \mathcal{F}[\mathcal{F}X,lY] = [\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] - l[lX,lY],$$

luego

$$\begin{aligned} N(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) &= [\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] + [lX,lY] - l[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] - l[lX,lY] \\ &= (1-l)[lX,lY] + (1-l)[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] \\ &= p[lX,lY] + p[\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y] = pN(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) + \\ &\quad pN(lX,lY), \\ &= pN(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y), \end{aligned}$$

o sea, $(1-p)N(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) = lN(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) = 0$, y por tanto $N(\mathcal{F}X,\mathcal{F}Y) = 0$. La recíproca se demuestra de manera análoga.

□

Supóngase L integrable y X' un campo vectorial arbitrario, tangente a una variedad integral de L. Se define sobre TM un operador $\mathcal{F}'$ (para más detalles véase [9]) de la siguiente forma: $\mathcal{F}'X' = \mathcal{F}X'$ y $\mathcal{F}'X = \mathcal{F}X$, $X \neq X'$, $X \in TM$. Así, por (13) $\mathcal{F}'$ es una estructura cuasicompleja sobre cada variedad integral de L.

Definición 7. [9] *Decimos que $\mathcal{F}$ es parcialmente integrable si ambos L y $\mathcal{F}'$ son integrables.*

Teorema 8. [9] *Una condición necesaria y suficiente para que una* **f***-estructura $\mathcal{F}$ sea parcialmente integrable es que una de las siguientes condiciones equivalentes,*

$$N(lX, lY) = 0, \;\; o \; N(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y) = 0,$$

sea satisfecha para cualesquiera campos vectoriales X, Y.

Dado que $l + p = 1$, el tensor de Nijenhüis $N(X, Y)$ puede ser escrito equivalentemente como

$$\begin{aligned} N(X,Y) \;\; = \;\; & lN(lX,lY) + pN(lX,lY) + N(lX,pY) + \\ & + N(pX,lY) + N(pX,pY). \end{aligned} \tag{20}$$

Usando el Teorema 8 y la ecuación (20), tenemos el siguiente teorema:

Teorema 9. [9] *Una condición necesaria y suficiente para que la distribución P sea integrable y $\mathcal{F}$ parcialmente integrable, es que*

$$N(X, Y) = N(lX, pY) + N(pX, lY) \tag{21}$$

para cualesquiera campos vectoriales X, Y.

Recordemos (ver por ejemplo [10]) que para $X, Y \in TM$, la derivada en la conexión ∇ de $\mathcal{F}$ es dada por

$$(d^{\nabla}\mathcal{F})(X, Y) = \nabla_X \mathcal{F}(Y) - \nabla_Y \mathcal{F}(X) - \mathcal{F}([X, Y]), \tag{22}$$

y la derivada de Lie $\mathfrak{L}_Y \mathcal{F}$ es dada por

$$(\mathfrak{L}_Y \mathcal{F})X = \mathcal{F}[X, Y] - [\mathcal{F}X, Y]. \tag{23}$$

De (22) y (23) obtenemos:

$$N(lX, pY) = \mathcal{F}(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})lX = \mathcal{F}\{l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})lX\}, \tag{24}$$

por lo cual

$$\mathcal{F}N(lX, pY) = -l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})lX). \tag{25}$$

Ahora, utilizando (24) y (25) tenemos el siguiente teorema:

Teorema 10. [9] *El campo tensorial $l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})l$ es idénticamente nulo para cualquier campo vectorial Y si y solamente si $N(lX, pY) = 0$ para cualesquiera campos vectoriales X, Y.*

Observación. [9] *Cuando L y P son integrables al mismo tiempo, podemos escoger un sistema de coordenadas locales de tal forma que las coordenadas de L son representadas colocando $n - r$ coordenadas locales constantes y las de P colocando otras r coordenadas constantes, donde r es el rango de $\mathcal{F}$. Tal sistema coordenado es llamado* sistema de coordenadas adaptado.

En un sistema de coordenadas adaptado, los operadores de proyección l, p pueden ser asumidos de la siguiente forma:

$$l = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix},$$

donde 1_r y 1_{n-r} son las matrices identidad de orden r y $n-r$ respectivamente. Dado que $\mathcal{F}$ satisface $\mathcal{F}l = l\mathcal{F} = \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}p = p\mathcal{F} = 0$, en un sistema de coordenadas adaptado $\mathcal{F}$ tiene componentes de la forma

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Así, para un campo vectorial pY en P, la derivada de Lie $\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F}$ tiene componentes de la forma

$$\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Luego si suponemos que el campo tensorial $l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})l$ es idénticamente nulo para cualquier campo vectorial Y, tenemos entonces $\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F} = 0$, lo que significa que las componentes de $\mathcal{F}$ son independientes de las coordenadas, las cuales son constantes a lo largo de la variedad integral de la distribución L en un sistema de coordenadas adaptado. Recíprocamente, si las componentes de $\mathcal{F}$ son independientes del sistema de coordenadas, es fácil ver que $l(\mathfrak{L}_{pY}\mathcal{F})l$ es idénticamente nulo para cualquier campo vectorial Y. Por las anteriores observaciones y el Teorema 10, tenemos:

Teorema 11. [9] *Supóngase que L y P son integrables y que un sistema de coordenadas adaptado ha sido escogido. Una condición necesaria y suficiente para que las componentes locales de $\mathcal{F}$ sean funciones independientes de las coordenadas, las cuales son constantes a lo largo de la variedad integral de L, es que $N(lX, pY) = 0$ para cualesquiera campos vectoriales X, Y.*

Definición 12. [9] *Decimos que una $\mathbf{f}$-estructura $\mathcal{F}$ es integrable si satisface las siguientes tres condiciones:*

(i) La $\mathbf{f}$-estructura $\mathcal{F}$ es parcialmente integrable.

(ii) La distribución P es integrable.

(iii) Las componentes de $\mathcal{F}$ son independientes de las coordenadas, las cuales, en un sistema de coordenadas adaptado, son constantes a lo largo de las variedades integrales de L.

Así, para finalizar esta sección tenemos:

Teorema 13. [9] *Una condición necesaria y suficiente para que la $\mathbf{f}$-estructura $\mathcal{F}$ sea integrable es que*

$$N(X,Y)=0$$

para cualquier par de campos vectoriales X, Y.

7.3 f-estruturas invariantes en $\mathbb{F}_\Theta$

En la sección anterior se trató sobre las condiciones de integrabilidad para una $\mathbf{f}$-estructura sobre una variedad cualquiera. Lo que pretendemos en esta sección es aplicar todos estos teoremas al caso particular en que la $\mathbf{f}$-estructura sea invariante y la variedad considerada sea una bandera generalizada. Específicamente, caracterizar en términos combinatoriales (grafos, triplas de raíces), los teoremas y lemas de la Sección 7.2.

Una $\mathbf{f}$-estructura definida en una variedad bandera general $\mathbb{F}_\Theta$ será denotada por $\mathcal{F}^\Theta$. Introducimos ahora la noción de "$\mathbf{f}$-estructura U-invariante" en $\mathbb{F}_\Theta$.

Definición 14. *Una $\mathbf{f}$-estructura $\mathcal{F}^\Theta$ es llamada U-invariante si para cada $x\in\mathbb{F}_\Theta$ el endomorfismo $\mathcal{F}^\Theta_x : T_x\mathbb{F}_\Theta \to T_x\mathbb{F}_\Theta$ satisface $du_x\circ\mathcal{F}^\Theta_x = \mathcal{F}^\Theta_{ux}\circ du_x$ para todo $u\in U$.*

Denotamos también por $\mathcal{F}^\Theta$ su complejificación. El endomorfismo $\mathcal{F}^\Theta : \mathfrak{q}_\Theta^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{q}_\Theta^{\mathbb{C}}$ es diagonalizable con valores propios $i, 0, -i$ y determina los espacios propios correspondientes $\mathfrak{q}_\Theta^+, \mathfrak{q}_\Theta^0, \mathfrak{q}_\Theta^-$. Tenemos entonces $\mathfrak{q}_\Theta^{\mathbb{C}} = \mathfrak{q}_\Theta^+ + \mathfrak{q}_\Theta^0 + \mathfrak{q}_\Theta^-$, con $\overline{\mathfrak{q}_\Theta^+} = \mathfrak{q}_\Theta^-$. La U-invarianza de $\mathcal{F}^\Theta$ garantiza que $\mathcal{F}^\Theta(\mathfrak{g}_\alpha)\subseteq\mathfrak{g}_\alpha$ para todo $\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle$, con la igualdad cuando $\mathcal{F}^\Theta$ es una estructura cuasicompleja invariante (véase [20]). Así, $\mathcal{F}^\Theta$ se determina de manera única por los valores $\varepsilon_\alpha^\Theta\in\{0,\pm1\}$, $\alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle$, definidos por $\mathcal{F}^\Theta(X_\alpha) = i\varepsilon_\alpha^\Theta X_\alpha$. Estos valores satisfacen $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$, por lo tanto $\mathcal{F}^\Theta$ se define por sus valores en $\Pi^+\setminus\langle\Theta\rangle^+$. En lo que sigue abusamos de la notación e identificamos la $\mathbf{f}$-estructura invariante $\mathcal{F}^\Theta$ sobre $\mathbb{F}_\Theta$ con $\varepsilon^\Theta = \{\varepsilon_\alpha^\Theta :\ \alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle\}$.

En analogía con las estructuras cuasicomplejas, los vectores propios asociados a 0 serán llamados de tipo $(1,0,0)$ los asociados a $+i$ de tipo $(0,1,0)$, y los asociados a $-i$ de tipo $(0,0,1)$.

Las $\mathbf{f}$-estructuras invariantes sobre $\mathbb{F}(n)$ están en correspondencia 1:1 con digrafos(grafos orientados no necesariamente completos) de n vértices a través de la matriz de incidencia del digrafo. De hecho, en el caso $\mathbb{F}(n)$ el sistema de raíces Π puede ser identificado con el conjunto $\{(j,k):\ 1 \le j,k \le n, j \ne k\}$, donde pares de raíces opuestas $\{\alpha,-\alpha\}$ corresponden a pares $\{(j,k),(k,j)\}$. Recordemos que una $f-$estructura invariante $\mathcal{F}$ es determinada por sus valores en Π^+. Estos valores son ordenados, formando una matriz $\varepsilon = (\varepsilon_{jk})_{n\times n}$. La matriz ε se puede identificar con la matriz de incidencia de algún digrafo $\mathcal{G} = (V,E)$ con $V = \{1,\cdots,n\}$ de la siguiente manera: si $\mathcal{F}(E_{jk}) = i\varepsilon_{jk}E_{jk}$, entonces $\mathcal{G}(\mathcal{F})$ es tal que para $j<k$ se tiene

$$j \to k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon_{jk} = 1,$$

$$j \leftarrow k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon_{jk} = -1$$

y

$$j \not\leftrightarrow k \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varepsilon_{jk} = 0.$$

(Ver por ejemplo las Figuras 1 y 2, donde se muestran las clases de isomorfismos de $\mathbf{f}$-estructuras para el caso $\mathbb{F}(3)$ y algunas clases de $\mathbb{F}(4)$).

Damos en seguida una definición que nos permitirá distinguir las triplas de raíces de acuerdo con los valores que $\mathcal{F}$ asume en las respectivas distribuciones.

Definición 15. *Sea* $\mathcal{F}^\Theta = \{\ \varepsilon_\alpha^\Theta\}_{\ \alpha\in\Pi\setminus\langle\Theta\rangle}$ *una* $\mathbf{f}$*-estructura invariante. Una tripla de raíces* $\alpha,\beta,\gamma \in \Pi\setminus\langle\Theta\rangle$ *se llama una* (p,q,r)*-tripla* $(p+q+r=3)$ *si*

- *(i)* $\alpha+\beta+\gamma=0$;
- *(ii) El conjunto* $\{\varepsilon_\alpha^\Theta, \varepsilon_\beta^\Theta, \varepsilon_\gamma^\Theta\}$ *contiene* p *ceros,* q *unos y* r *menos unos.*

En la definición anterior, denotaremos por $\{p,q,r\} = (p,q,r)\cup(p,r,q)$. En esta notación las $\{0,3,0\}$-triplas y $\{0,1,2\}$-triplas corresponden respectivamente a las $\{0,3\}$-triplas y $\{1,2\}$-triplas en el caso cuasicomplejo (véase, [19] y [20]). Además de las anteriores aparecen las $\{3,0,0\}$-triplas que corresponden al caso $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta = \varepsilon_\gamma^\Theta = 0$, las $\{2,1,0\}$-triplas cuando $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta = 0$ y $\varepsilon_\gamma^\Theta = +1$ o -1, las $\{1,2,0\}$-triplas y las $\{1,1,1\}$-triplas.

Observación. *Sea* (M,J,g,Ω) *una variedad hermitiana diferenciable, donde* J *es una estructura cuasicompleja y* Ω *es la forma de Kähler asociada a la métrica* g*. Se dice que* M *es cuasi-Kähler si la forma de Kähler* Ω *es cerrada, esto es si* $d\Omega=0$*. Si además* J *es integrable, se dice que* M *es una variedad Kähler. En el contexto de variedades diferenciables generales tenemos también la equivalencia entre el paralelismo de* J*, esto es* $d^\nabla J = 0$*, donde* ∇ *es la conexión Riemanniana asociada a* g*, y al hecho de que* M *sea una variedad Kähler (véase [10]). Por esto, el análogo para la* $\mathbf{f}$*-variedad* $(M,\mathcal{F},g)$ *de la condición Kähler es que la* $\mathcal{F}$ *sea paralela. Notamos que en el caso invariante* $(\mathbb{F}_\Theta, J^\Theta, \Lambda^\Theta)$*, como fue mostrado en* [19] *y* [20]*, la condición cuasi-Kähler implica Kähler. Veamos esto ahora en el contexto de las* $\mathbf{f}$*-estructuras invariantes.*

Definición 16. *Sea $\mathcal{F}^\Theta$ una* **f***-estructura invariante sobre $\mathbb{F}_\Theta$. Decimos que $\mathbb{F}_\Theta$ es una* **f***-variedad Kähler si $\mathcal{F}^\Theta$ es paralela.*

Usando las ecuaciones (6), (11) y (22) llegamos al siguiente resultado.

Proposición 17. *Para cada $X_\alpha, X_\beta \in \mathfrak{q}_\Theta^{\mathbb{C}}$ tenemos:*

$$(d^\nabla \mathcal{F}^\Theta)(X_\alpha, X_\beta) = \\ im_{\alpha,\beta} \frac{\lambda_\alpha^\Theta(\varepsilon_\alpha^\Theta - \varepsilon_\beta^\Theta) + \lambda_\beta^\Theta(\varepsilon_\beta^\Theta - \varepsilon_\alpha^\Theta) + \lambda_{\alpha+\beta}^\Theta(\varepsilon_\alpha^\Theta + \varepsilon_\beta^\Theta - 2\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)}{2\lambda_{\alpha+\beta}^\Theta},$$

con $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$.

De la proposición anterior es fácil ver que si existen triplas de tipo $\{0,3,0\}$, $\{1,2,0\}$ ó $\{2,1,0\}$, la **f**-variedad bandera no puede ser Kähler. Aquí recuperamos la condición de la no existencia de triplas del tipo $\{0,3\}$ en el caso de estructuras cuasicomplejas invariantes. Así, en $\mathbb{F}_\Theta$ tenemos el siguiente resultado.

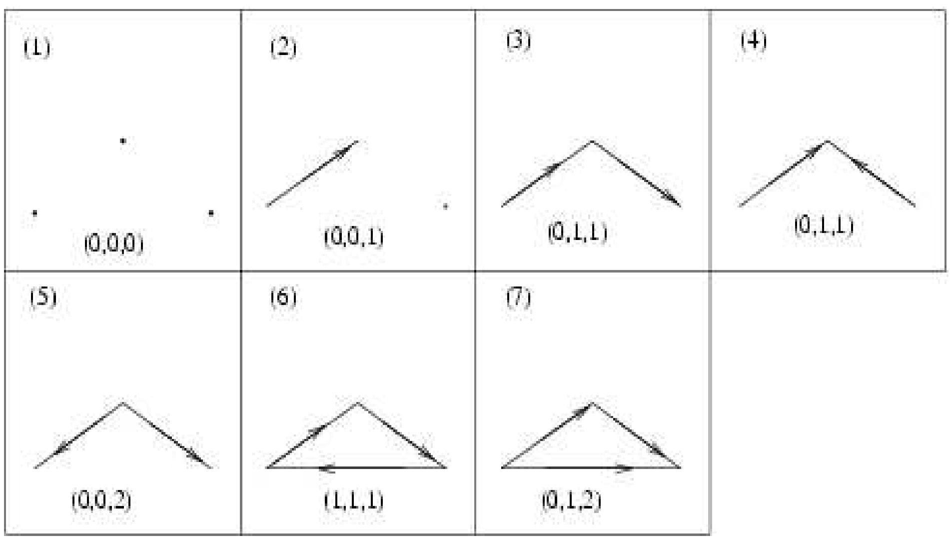

Figure 1: Clases de isomorfismos para n=3.

Lema 18. *Una condición necesaria y suficiente para que $(\mathbb{F}_\Theta, \mathcal{F}^\Theta, \Lambda^\Theta)$ sea una* **f***-variedad Kähler es que en $\mathfrak{q}_\Theta$ no existan triplas de tipo $\{0,3,0\}$, $\{1,2,0\}$ o $\{2,1,0\}$. En particular, para $(\mathbb{F}(n), \mathcal{F}, \Lambda)$ Kähler el digrafo asociado a $\mathcal{F}$ omite las configuraciones (2),(3) y (6) en la Figura 1.*

Notamos que la $f-$variedad $(\mathbb{F}(3), \mathcal{F}, \Lambda)$ es Kähler cuando la $\mathcal{F}$ corresponde a los digrafos (1), (4), (5) y (7) en la Figura 1. En $\mathbb{F}(4)$, corresponde a los digrafos (16), (23), (24), (32), y (36) en la Figura 2.

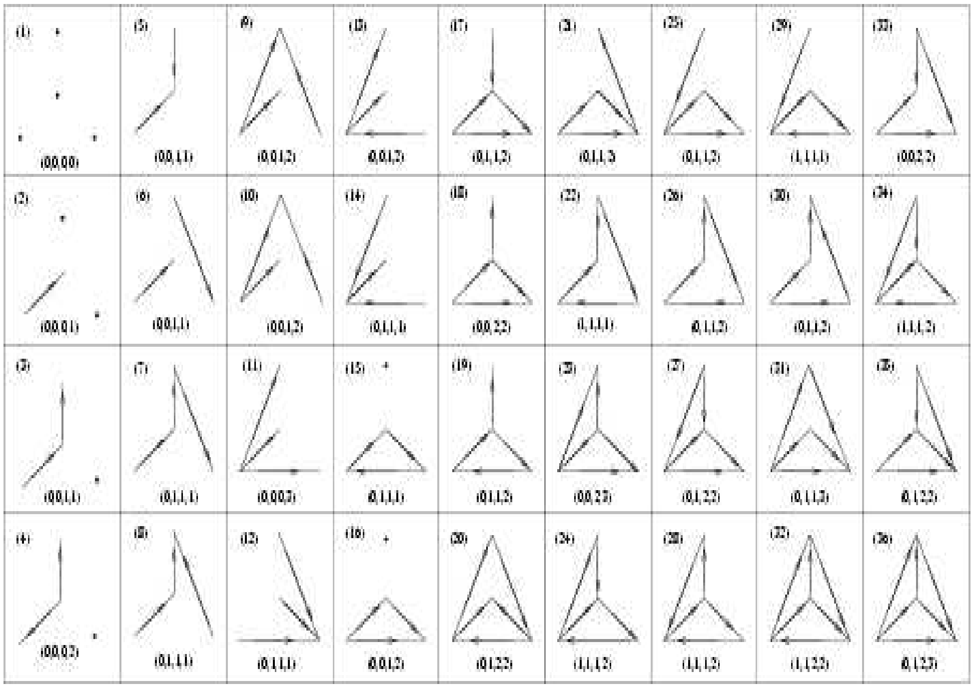

Figure 2: Algunas Clases de isomorfismos para n=4.

Otra clase de $\mathbf{f}$-estructuras muy importantes son las que determinan variedades bandera (1,2)-simplécticas y que fueron estudiadas completamente en [15] y [6].

Definición 19. *(i) Definimos* $(d^{\nabla}\mathcal{F})^{(1,1)}(X,Y)$ *como* $d^{\nabla}\mathcal{F}(X,Y)$ *si* $X \in TN^{+}$ *y* $Y \in TN^{-}$.

(ii) $(N,h,\mathcal{F})$ *es llamada* $\mathbf{f}$*-(1,2)-simpléctica si* $(d^{\nabla}\mathcal{F})^{(1,1)} = 0$.

Diremos que una $\mathbf{f}$-variedad bandera es (1,2)-admisible si existe una métrica invariante Λ^{Θ} tal que $(\mathbb{F}_{\Theta}, \Lambda^{\Theta}, \mathcal{F}^{\Theta})$ es (1,2)-simpléctica. En la Sección 7.1 vimos que una $\mathbf{f}$-estructura $\mathcal{F}$ define sobre el espacio tangente a la variedad dos operadores de proyección complementarios l, p. En el caso de variedad bandera general $\mathbb{F}_{\Theta}$, considérese los operadores l^{Θ} y p^{Θ} definidos sobre $\mathfrak{q}_{\Theta}$ de la misma forma que en (12) y con las propiedades dadas en (13). Estos operadores determinan en $\mathfrak{q}_{\Theta}$ distribuciones complementarias L^{Θ} y P^{Θ}. Nuestro propósito de aquí en adelante consiste en estudiar, en términos de raíces, condiciones de integrabilidad para $\mathcal{F}^{\Theta}$, L^{Θ} y P^{Θ}. Por nuestra notación en las distribuciones L^{Θ} y P^{Θ} tenemos $L^{\Theta} = \{X_{\alpha} \in \mathfrak{q}_{\Theta}, \varepsilon_{\alpha} = \pm 1\}$ y $P^{\Theta} = \{X_{\alpha} \in \mathfrak{q}_{\Theta}, \varepsilon_{\alpha} = 0\}$.

Sabemos que P^{Θ} es integrable si y solamente si P^{Θ} es involutiva (véase por ejemplo [7] y [10]), esto es $l[pX, pY] = 0$ para cualesquiera campos vectoriales X, Y en la variedad. Así, en nuestro caso, $(\mathbb{F}_{\Theta}, \mathcal{F}^{\Theta}, \Lambda^{\Theta})$, fijando una base de Weyl, sean $X_\alpha, X_\beta,\ \alpha,\beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$ elementos básicos y P^Θ y L^Θ las dos distribuciones determinadas por l^Θ, q^Θ en $\mathfrak{q}_\Theta$. Tenemos

$$\begin{aligned} l^\Theta[p^\Theta X_\alpha, p^\Theta X_\beta] &= l^\Theta[((\mathcal{F}^\Theta)^2+1)(X_\alpha), ((\mathcal{F}^\Theta)^2+1)(X_\beta)] \\ &= l^\Theta[-(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 X_\alpha + X_\alpha, -(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 X_\beta + X_\beta] \\ &= ((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - 1) l^\Theta[X_\alpha, X_\beta] \\ &= ((\varepsilon_\alpha^\Theta\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 + 1)(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2[X_\alpha, X_\beta]. \end{aligned}$$

De lo anterior concluimos:

Teorema 20. *Una condición necesaria y suficiente para que la distribución P^Θ sea integrable es que en $\mathfrak{q}_\Theta$ no existan triplas de tipo $\{2,1,0\}$. En el caso $\mathbb{F}(n)$ esta condición dice que el digrafo asociado a $\mathcal{F}$ omite el subdigrafo (2) en la Figura 1.*

Proof. Como vimos antes, P^Θ es integrable si y solamente si

$$l^\Theta[p^\Theta X_\alpha, p^\Theta X_\beta] = ((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 + 1)(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 = 0,$$

así que P^Θ no es integrable en los casos en que $((\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 - (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2 - (\varepsilon_\beta^\Theta)^2 + 1) \neq 0$ y $(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 \neq 0$, o sea, en los casos en que $\varepsilon_\alpha^\Theta = \varepsilon_\beta^\Theta = 0$ y $\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta = \pm 1$. Queda así demostrado el teorema. □

Ahora bien, L^Θ es integrable si y solamente si $p^\Theta[l^\Theta X_\alpha, l^\Theta X_\beta] = 0$ con $\alpha, \beta \in \Pi \setminus \langle\Theta\rangle$; pero

$$\begin{aligned} p^\Theta[l^\Theta X_\alpha, l^\Theta X_\beta] &= ((\mathcal{F}^\Theta)^2+1)[-(\mathcal{F}^\Theta)^2 X_\alpha, -(\mathcal{F}^\Theta)^2 X_\beta] \\ &= (\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2((\mathcal{F}^\Theta)^2+1)[X_\alpha, X_\beta] \\ &= m_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2(1-(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2)X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

De aquí tenemos el siguiente teorema:

Teorema 21. *Una condición necesaria y suficiente para que la distribución L^Θ sea integrable es que en $\mathfrak{q}_\Theta$ no existan triplas de tipo $\{1,2,0\}$, o $\{1,1,1\}$. En el caso $\mathbb{F}(n)$ esta condición es equivalente a que el digrafo asociado a $\mathcal{F}$ omita los subdigrafos (3), (4), (5) en la Figura 1.*

Proof. Vimos que L^Θ es integrable si y solamente si $(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2(1-(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2) = 0$; así, los únicos casos cuando L^Θ no es integrable son cuando $(\varepsilon_\alpha^\Theta)^2(\varepsilon_\beta^\Theta)^2 \neq 0$ y $1-(\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta)^2 \neq 0$. Por esto L^Θ no es integrable si $\varepsilon_\alpha^\Theta = \pm 1$, $\varepsilon_\beta^\Theta = \pm 1$ y $\varepsilon_{\alpha+\beta}^\Theta = 0$, lo que corresponde al tipo de triplas y subdigrafos mencionados en el teorema. □

Teorema 22. *Una condición necesaria y suficiente para que la* **f***-estructura invariante $\mathcal{F}^\Theta$ definida sobre $\mathbb{F}_\Theta$ sea parcialmente integrable es que no existan en $\mathfrak{q}_\Theta$ triplas de tipo $\{0,3,0\}$, {1,2,0} y $\{1,1,1\}$. En $\mathbb{F}(n)$ esta condición equivale a la no existencia de subdigrafos de tipo (3), (4), (5) e (6) en la Figura 1.*

Proof. Usando la definición de tensor de Nijenhuis dada en la Sección 7.2, las propiedades de los operadores $\mathcal{F}^{\Theta}$ y l^{Θ} dadas en (12) y el teorema 8, tenemos para $X_\alpha, X_\beta \in \mathfrak{q}_{\Theta}^{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} N(l^{\Theta}X_\alpha, l^{\Theta}X_\beta) &= [\mathcal{F}^{\Theta}l^{\Theta}X_\alpha, \mathcal{F}^{\Theta}l^{\Theta}X_\beta] - \mathcal{F}^{\Theta}[\mathcal{F}^{\Theta}l^{\Theta}X_\alpha, l^{\Theta}X_\beta] + \\ & \quad -\mathcal{F}^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, \mathcal{F}^{\Theta}l^{\Theta}X_\beta] - l^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, l^{\Theta}X_\beta] \\ &= [\mathcal{F}^{\Theta}X_\alpha, \mathcal{F}^{\Theta}X_\beta] - \mathcal{F}^{\Theta}[\mathcal{F}^{\Theta}X_\alpha, l^{\Theta}X_\beta] \\ & \quad -\mathcal{F}^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, \mathcal{F}^{\Theta}X_\beta] - l^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, l^{\Theta}X_\beta] \\ &= -\varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta] - \mathcal{F}^{\Theta}(i\varepsilon_\alpha^{\Theta}(\varepsilon_\beta^{\Theta})^2[X_\alpha, X_\beta]) - \\ & \quad i(\varepsilon_\alpha^{\Theta})^2\varepsilon_\beta^{\Theta}\mathcal{F}^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta] - i(\varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta})^2 l^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta]. \end{aligned}$$

Luego,

$$N(l^{\Theta}X_\alpha, l^{\Theta}X_\beta) = \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta}(-1 - \varepsilon_\beta^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} - \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} + \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta}(\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta})^2)[X_\alpha, X_\beta].$$

Así, los únicos casos en que $\mathcal{F}^{\Theta}$ no es parcialmente integrable son cuando $\varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta} \neq 0$ y $(-1 + \varepsilon_\beta^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} + \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} - \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta}(\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta})^2) \neq 0$. De lo anterior tenemos que $\varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_\beta^{\Theta} = \pm 1$, y en ambos casos $\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta}$ debe ser cero, produciendo así las triplas y las configuraciones de los digrafos mencionadas. □

Ahora, utilizando las ecuaciones (24) y (25) tenemos el siguiente teorema:

Teorema 23. *Sea $\mathcal{F}^{\Theta}$ una* $\mathbf{f}$*-estructura invariante definida sobre $\mathbb{F}_{\Theta}$, con L^{Θ} y P^{Θ} integrables. Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{F}^{\Theta}$ tenga sus componentes locales independientes de las coordenadas es que no existan en $\mathfrak{q}_{\Theta}$ triplas de tipo $\{2,1,0\}$, $\{1,2,0\}$ y $\{1,1,1\}$. En $\mathbb{F}(n)$ esta condición equivale a la no existencia de subdigrafos de tipo (2), (3), (4) y (5) en la Figura 1.*

Proof. Por el teorema 11, las componentes locales de $\mathcal{F}^{\Theta}$ son independientes de las coordenadas si $N(lX, pY) = 0$ y

$$\begin{aligned} N(l^{\Theta}X_\alpha, p^{\Theta}X_\beta) &= [\mathcal{F}^{\Theta}l^{\Theta}X_\alpha, \mathcal{F}^{\Theta}p^{\Theta}X_\beta] - \mathcal{F}^{\Theta}[\mathcal{F}^{\Theta}l^{\Theta}X_\alpha, p^{\Theta}X_\beta] + \\ & \quad -\mathcal{F}^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, \mathcal{F}^{\Theta}p^{\Theta}X_\beta] - l^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, p^{\Theta}X_\beta] \\ &= -\mathcal{F}^{\Theta}[\mathcal{F}^{\Theta}X_\alpha, p^{\Theta}X_\beta] - l^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, p^{\Theta}X_\beta] \\ &= -\mathcal{F}^{\Theta}[\mathcal{F}^{\Theta}X_\alpha, (\mathcal{F}^{\Theta})^2X_\beta] - \mathcal{F}^{\Theta}[\mathcal{F}^{\Theta}X_\alpha, X_\beta] + \\ & \quad -l^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, (\mathcal{F}^{\Theta})^2X_\beta] - l^{\Theta}[l^{\Theta}X_\alpha, X_\beta] \\ &= -\mathcal{F}^{\Theta}(-i\varepsilon_\alpha^{\Theta}(\varepsilon_\beta^{\Theta})^2[X_\alpha, X_\beta]) - \mathcal{F}^{\Theta}(i\varepsilon_\alpha^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta]) + \\ & \quad (\mathcal{F}^{\Theta})^2((\varepsilon_\alpha^{\Theta})^2(\varepsilon_\beta^{\Theta})^2[X_\alpha, X_\beta]) - l^{\Theta}(\varepsilon_\alpha^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta]) \end{aligned}$$

y así $N(l^{\Theta}X_\alpha, p^{\Theta}X_\beta) = \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta}(1 - (\varepsilon_\beta^{\Theta})^2 + \varepsilon_\alpha^{\Theta}(\varepsilon_\beta^{\Theta})^2\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} - \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta})[X_\alpha, X_\beta]$. Luego las componentes locales dependen del sistema de coordenadas en los casos en que $\varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} \neq 0$ y $1 - (\varepsilon^{\Theta}\beta)^2 + \varepsilon_\alpha^{\Theta}(\varepsilon_\beta^{\Theta})^2\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} - \varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} \neq 0$, esto es, cuando $\varepsilon_\alpha^{\Theta}\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta} = -1$ y $\varepsilon_\beta^{\Theta} = 0$, produciendo las triplas y los digrafos mencionados en el teorema. □

Llegamos, pues, al Teorema 24, que como ya lo dijimos al final de la introducción, extiende el Teorema dado por Burstall [3] para estructuras cuasicomplejas invariantes, en el cual él muestra que una estructura cuasicompleja es integrable si y solamente si el torneo asociado es isomorfo al torneo canónico, o sea, no contiene triciclos (triplas de tipo {0,3,0}).

Teorema 24. *Una* **f***-estructura invariante* $\mathcal{F}^{\Theta}$ *definida sobre* $\mathbb{F}_{\Theta}$ *es integrable si y solamente si no existen en* $\mathfrak{q}_{\Theta}$ *triplas del tipo* $\{0,3,0\}$, $\{2,1,0\}$, $\{1,1,1\}$ *y* $\{1,2,0\}$. *En* $\mathbb{F}(n)$ *esta condición equivale a la no existencia de subdigrafos de tipo (2), (3), (4), (5) y (6) en la figura 1, esto es, el digrafo asociado a* $\mathcal{F}$ *es isomorfo al digrafo nulo o a torneo canónico (ver por ejemplo* [5]*).*

Proof. Inmediata aplicando en la Definición 12 los Teoremas 20, 21, 22 y 23. □

Observamos también que la condición de integrabilidad dada aquí es más fuerte que la condición Kähler. Por ejemplo, para $\mathbb{F}(3)$ las $f-$estructuras invariantes asociadas a los digrafos (4) y (5) son Kähler pero no son integrables. De igual forma, en $\mathbb{F}(4)$ las **f**-estructuras asociadas a los digrafos (23), (28) y (35) son Kähler pero no integrables. Una justificación para la observación anterior es que el paralelismo de $\mathcal{F}^{\Theta}$ garantiza que las distribuciones $\mathfrak{q}_{\Theta}^{+}, \mathfrak{q}_{\Theta}^{-}, q_{\Theta}^{0}$ son integrables pero no garantiza la integrabilidad de $\mathcal{F}^{\Theta}$. De hecho, si $\mathcal{F}^{\Theta}$ es paralela, es decir si $\mathcal{F}^{\Theta}$ satisface

$$\mathcal{F}^{\Theta}[X,Y] = \nabla_X \mathcal{F}^{\Theta} Y - \nabla_Y \mathcal{F}^{\Theta} X, \tag{28}$$

para cualesquiera X, Y, en particular para X_α, X_β en la base de Weyl asociada a $\mathfrak{q}_{\Theta}^{\mathbb{C}}$, tenemos

$$\mathcal{F}^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta] = \nabla_{X_\alpha} \mathcal{F}^{\Theta} X_\beta - \nabla_{X_\beta} \mathcal{F}^{\Theta} X_\alpha.$$

Así, si X_α, X_β están en la misma distribución tenemos $\mathcal{F}^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta] = i\varepsilon_{\alpha}^{\Theta}[X_\alpha, X_\beta]$. Ahora, para que $\mathcal{F}^{\Theta}$ sea integrable se necesita que $N(X,Y) = 0$. Usando las ecuaciones (14) y (28) tenemos

$$1/2N(X_\alpha, X_\beta) = (\varepsilon_{\alpha}^{\Theta})^2 \nabla_{X_\alpha} X_\beta - (\varepsilon_{\beta}^{\Theta})^2 \nabla_{X_\alpha} X_\beta - (\varepsilon_{\alpha+\beta}^{\Theta})^2 [X_\alpha, X_\beta].$$

El lado derecho no es nulo en general. Ahora bien, si $\mathcal{F}^{\Theta}$ es una estructura cuasicompleja, es claro que $N = 0$.

Para finalizar, consideramos dos clases de **f**-estructuras caracterizadas en [2] y [13], las **f**-estructuras horizontales y las **f**-estructuras completamente no transitivas caracterizadas en [15].

Definición 25. [15] *Decimos que una* **f***-estructura invariante* $\mathcal{F}$ *es completamente no transitiva (abreviado CNT) si ella no posee triplas de raíces de tipo* $\{0,1,2\}$.

Lema 26. *Toda* $\mathbf{f}$*-estructura invariante CNT es (1,2)-admisible.*

Definición 27. [2] *Una* $f-$*estructura invariante definida sobre* $\mathbb{F}$ *que satisface* $[\mathfrak{q}^+, \mathfrak{q}^-] \subset \mathfrak{h}$ *será llamada una* $\mathbf{f}$*-estructura horizontal.*

Teorema 28. *Si* $\mathcal{F}$ *es horizontal entonces* $\mathcal{F}$ *es completamente no transitiva (ver* [15]*), y por lo tanto (1,2)-admisible.*

Proof. Es fácil ver de la Definición 27 que en $\mathfrak{q}$ no pueden existir triplas de tipo $\{0, 1, 2\}$, luego $\mathcal{F}$ es completamente no transitiva, y por el Lema 26 (1,2)-admisible. □

Nótese que no toda $\mathbf{f}$-estructura completamente no transitiva es horizontal (véase por ejemplo (5), (8),(25), (29) en la Figura 2).

References

[1] J. F. Adams. *Lectures on Lie Groups.* New York, 1969.

[2] M. Black. "Harmonic Maps into Homogeneous Spaces". *P*itman Research Notes, Math series 255, Longman, Harlow, 1991.

[3] F.E. Burstall and S. Salamon. "Tournaments, flags and harmonic maps". *Math Ann.* **277**:249-265, 1987.

[4] N. Cohen, C.J.C. Negreiros and L.A.B. San Martin. "Characterization of (1,2)–symplectic metrics on flag manifolds". *Contemporary Math.*, **288**:300–304, 2002.

[5] N. Cohen, C.J.C. Negreiros and L. A. B. San Martin. "(1,2)–Symplectic metrics, flag manifolds and tournaments". *Bull. of London Math. Soc.* **34**:641-649, 2002.

[6] N. Cohen, M. Paredes,L. A. B. San Martin, C. J. C. Negreiros, S. Pinzón. "$\mathbf{f}$-Structures on the classical flag manifold which admit (1,2)-symplectic metrics." (Aceptado para publicación en el *Tohoku Math. Journal*).

[7] G. Frobenius, "Uber die Unzerlegbaren diskreten Bewegungs gruppen Sitzungsber". *König. Prenss. Acad. Wiss.* Berlin **29**:654-665, 1911.

[8] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symetric Spaces.* Acad. Press, 1978.

[9] S. Ishihara and K. Yano. "On Integrability Conditions of a structure $\mathbf{f}$ satisfying $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$". *Quart. J. Math. Oxford (2)*, **15**:217-222, 1964.

[10] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry,* Vol. 1. Interscience Publishers, 1963.

[11] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry,* Vol. 2, Interscience Publishers, 1969.

[12] A. Lichnerowicz. “Applications harmoniques et variétés Kähleriennes”. *Symp. Math.* **3** (Bologna), 341-402, 1970.

[13] X. Mo and C.J.C. Negreiros. “Horizontal f-estructures, ϵ-matrices and Equiharmonic moving flags”. Relatorio de Pesquisa, Instituto de Matemática, Estatística e Computaçao Científica, UNICAMP, 1999.

[14] Nijenhuis, A. “X_{n-1}−forming sets of eigenvectors.” *Indag. Math.* **13**: 200-212, 1951.

[15] S. Pinzón. *Variedades Bandeira,* **f**–*Estruturas e Métricas (1,2)–Simpléticas.* Ph. D. tesis, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.

[16] J.H. Rawnsley. “**f**–Structures, **f**–Twistor Spaces and Harmonic Maps”. *L*ec. Notes in Math., **1164**, Springer 1986.

[17] S. Salamon. *Harmonic and holomorphic maps.* Lec. Notes in Math. **1164**, Springer 1986.

[18] L. A. B. San Martin. *Algebras de Lie.* Campinas, S.P. Editora da Unicamp, 1999.

[19] L. A. B. San Martin and C. J. C. Negreiros. “Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds”. *Adv. Math.* **178** (2003), 277–310.

[20] R.C. de Jesus Silva. *Estruturas Quase Hermitianas Invariantes em Espaços Homogêneos de Grupos Semi-simples.* Ph. D. tesis, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003..

[21] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups, I.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

[22] J. A. Wolf and A. Gray. “Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms, II”. *J. Diff. Geom.* **2**:115-159, 1968.

[23] K. Yano. “On a structure defined by a tensor field of type (1,1) satisfying $\mathcal{F}^3 + \mathcal{F} = 0$”. *Tensor* **14**:99-109, 1963.

Dirección del autor: Sofía Pinzón, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, AA 678, Bucaramanga, Santander, Colombia. spinzon@uis.edu.co, http://matematicas.uis.edu.co/∼sofia