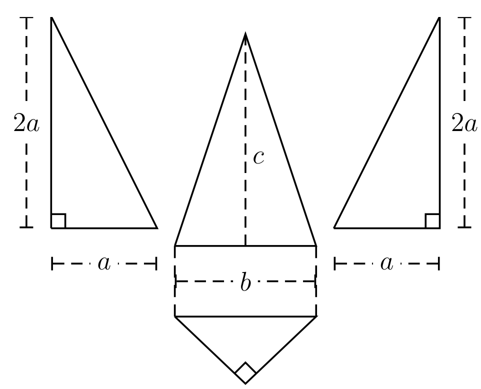
Problemas y Soluciones

En esta sección se publican problemas propuestos por los lectores de la revista. Cuando las soluciones sean conocidas se solicita que sean enviadas junto con los problemas. Las soluciones serán, en su momento, objeto de publicación. Pueden remitir sus problemas a la dirección de la Revista por cualquiera de las vías disponibles o directamente al profesor Yu Takeuchi, editor de la sección a la Carrera 30, No. 39–31, Apto. 203, Bogotá, Colombia.

Problema 10-04

Entre el 11 y el 16 de marzo de 2004 la Facultad de Ciencias de la Universidad del Valle presentó con éxito notable la exposición de ciencia interactiva *La carpa de Melquíades*, bautizada así en honor a ese gitano que exhibe por primera vez el hielo en el Macondo imaginado por García Márquez en la novela *Cien años de soledad*. Con la consigna de que la ciencia es para palpar, decenas de miles de visitantes recorrieron los pabellones y participaron de los experimentos, en ocasiones como sujetos mismos de la experimentación. Felipe Manoccio, uno de nuestros jóvenes visitantes, se inspira en un acertijo de la exhibición de matemáticas para plantear el siguiente problema:

Tres de los triángulos de la siguiente figura son rectángulos y dos son isósceles. Si se eligen a, b y c apropiadamente es posible construir un cuadrado yuxtaponiendo convenientemente los triángulos.



Dado un valor positivo a, muestre que existe una única elección para b y c tal que la yuxtaposición apropiada de los cuatro triángulos produce un cuadrado ¿Qué relación debe existir entre a, b y c?

Problema 11-04 (Propuesto por el profesor Yu Takeuchi, Universidad Nacional, Bogotá).

Demostrar las siguientes desigualdades:

$$\boldsymbol{i}). \quad \begin{cases} a^x + b^x \geq (a+b)^x & \text{si} \quad a > 0,\ b > 0, \quad \text{y} \quad x \in [0,1], \\ a^x + b^x < (a+b)^x & \text{si} \quad a > 0,\ b > 0, \quad \text{y} \quad x > 1. \end{cases}$$

$$\boldsymbol{ii}). \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k)^x \geq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^x & \text{si} \quad a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n),\ x \in [0,1], \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k)^x < \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^x & \text{si} \quad a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n),\ x > 1. \end{cases}$$

Problema 12-04 (Propuesto por el profesor Yu Takeuchi).

Demostrar las siguientes igualdades:

$$\boldsymbol{i}). \qquad \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - a_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}.$$

ii). Si el producto infinito $\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces

$$\frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} a_k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - a_k}{a_1 a_2 \cdots a_k}.$$