Vol. XVIII, N$^{\underline{o}}$ 1, Junio (2010)
Matemáticas: 83–88

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Acotación uniforme de los operadores de Toeplitz que actúan en espacios de Bergman con peso

Ernesto Prieto S.
Universidad Tecnológica de Pereira

Recibido Feb. 19, 2010 Aceptado Abr. 21, 2010

Abstract

In this paper we give conditions for a family T_a of Toeplitz operators with continuous radial symbol on weighted Bergman spaces $A_h^2(\mathbb{C})$ to be uniformly bounded.

Keywords: Bergman space, uniform boundedness, Toeplitz operator

MSC(2000): 47B35,30A31

Resumen

En este artículo damos condiciones para que una familia T_a de operadores de Toeplitz, con símbolo radial continuo, en un espacio de Bergman con peso $A_h^2(\mathbb{C})$, sea uniformemente acotado.

Palabras y frases claves: Espacio de Bergman, acotación uniforme, operador de Toeplitz

1 Introducción

Los operadores de Toeplitz han sido ampliamente estudiados para diversos dominios. En el caso del espacio de Bergman $A^2(\mathbb{D})$ donde $\mathbb{D}$ es el disco unitario N. L.Vasilievski [9] demostró que el operador de Toeplitz con símbolo radial es unitariamente equivalente a un operador de multiplicación. En [10] para el caso de símbolos radiales se estudia el comportamiento de diferentes propiedades (Acotacion, compacidad, propiedades espectrales, etc.) de los operadores de Toeplitz $T_a^{(\lambda)}$ actuando en los espacios de Bergman con peso $A_\lambda^2(\mathbb{D})$ sobre el disco unitario $\mathbb{D}$, en dependencia del parámetro λ y se compara el comportamiento del límite cuando $\lambda \to +\infty$ con las correspondientes propiedades del símbolo inicial a.

Para un estudio en la bola de $\mathbb{C}^n$ se puede ver [8].

En [6] usando el metodo de cuantización de Berezin en la 2-esfera se dan los detalles de la construcción de los campos vectoriales hamiltonianos, los corchetes de Poisson, el operador de Laplace-Beltrami y usando la teoría de Bergman se construye el núcleo de Bergman y se da la forma integral de la proyección de Bergman. Estos conceptos son utilizados en el desarrollo de la teoría de los operadores de Toeplitz y se pueden estudiar en [1].

Nuestro principal objetivo en el presente trabajo es estudiar las condiciones que el símbolo debe satisfacer bajo las cuales la familia de operadores de Toeplitz T_a con símbolo radial actuando en los espacios de Bergman con peso $A_h^2(\mathbb{C})$ sea uniformemente acotada .

2 Acotación uniforme

Nos basaremos en el siguiente teorema cuya demostración se puede ver en [6]

Teorema 1. *Sea $a(r)$ una función del espacio $L_1(\mathbb{R}_+, (1+r^2)^{-\frac{3}{2}}dr)$. Entonces el operador de Toeplítz T_a definido en $A_h^2(\mathbb{C})$ es unitariamente equivalente al operador de multiplicación $\gamma_{a,N} I$ con $\gamma_{a,N} I : l_2(\mathbb{Z}_+) \to l_2(\mathbb{Z}_+)$, y la sucesión $\gamma_{a,N}$ esta dada por*

$$\gamma_{a,N}(n) = 2(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty} a(r) r^{2n} \frac{rdr}{(1+r^2)^{N+2}} \tag{1}$$

para todo $n = 0, 1, 2, .., N$.

Ahora nuestro objetivo es estudiar las condiciones que el símbolo debe satisfacer bajo las cuales la familia de operadores T_a sea uniformemente acotada.

El estudio lo dividimos en los siguientes casos:

1. Cuando el parámetro de peso N tiende a infinito y n es fijo
2. Cuando los parámetros N y n tienden a infinito

Para el primer caso la respuesta esta contenida en el siguiente teorema

Teorema 2. *Si la función $B(s) := \int_0^s a(r)dr$ satisface la desigualdad*

$$|B(s)| \leq const \cdot s, \quad para \quad s \in \mathbb{R}_+ \tag{2}$$

entonces

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const\ n.$$

para todo $n = 0, 1, 2, .., N$.

Demostración. Integrando por partes (2) se tiene

$$\begin{aligned}\gamma_{a,N}(n) \quad &= \quad 2\,(N+1)\tbinom{N}{n}\left(\tfrac{r^{2n+1}}{(1+r^2)^{N+2}} \cdot \int_0^s a\,(r)\,dr\,\Big|_0^{+\infty} - \right.\\ &\left.\int_0^{+\infty} B(s)\left(\tfrac{(2n+1)s^{2n}}{(1+s^2)^{N+2}} - \tfrac{2(N+2)s^{2n+2}}{(1+s^2)^{N+3}}\right) ds\right).\end{aligned}$$

Aquí $B(s) := \int_0^s a(r)dr$, de donde

$$\gamma_{a,N}(n) = 2(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty} B(s)\left(\frac{2(N+2)s^{2n+2}}{(1+s^2)^{N+3}} - \frac{(2n+1)s^{2n}}{(1+s^2)^{N+2}}\right) ds.$$

Para n-fijo y puesto que el promedio del símbolo $a(r)$ satisface la condición (2) tenemos

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const2\,(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2(N+2)s^{2n+3}ds}{(1+s^2)^{N+3}} + \frac{(2n+1)s^{2n+1}}{(1+s^2)^{N+2}}\right) ds.$$

Las anteriores integrales se pueden calcular en forma exacta usando la función Beta. Por lo tanto

$$\begin{aligned}|\gamma_{a,N}(n)| \;\leq\;& const 2(N+1)\tbinom{N}{n}[(N+2)B(n+2,N-n+1)\\ &+\tfrac{1}{2}(2n+1)B(n+1,N-n+1)]\end{aligned}$$

Equivalente

$$\begin{aligned}|\gamma_{a,N}(n)| \;\leq\;& const 2(N+1)\tbinom{N}{n}((N+2)\tfrac{\Gamma(n+2)\Gamma(N-n+1)}{\Gamma(N+3)}\\ &+\tfrac{1}{2}(2n+1)\tfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(N-n+1)}{\Gamma(N+2)}).\end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned}|\gamma_{a,N}(n)| \;\leq\;& const 2(N+1)\tbinom{N}{n}((N+2)\tfrac{(n+1)!(N-n)!}{(N+2)!}\\ &+\tfrac{1}{2}(2n+1)\tfrac{(n)!(N-n)!}{(N+1)!}).\end{aligned}$$

Finalmente

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const[2(n+1)+(2n+1)].$$

□

Para el segundo caso usaremos el método de Laplace.

Teorema 3. *Si la función $B(s) := \int_0^s a(r)dr$ tiene la siguiente forma en una vecindad del punto s_0*

$$B(s) = B(s_0) + O|s-s_0|. \tag{3}$$

Entonces

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const.$$

para todo $n = 0,1,2,..,N$. Donde la constante no depende de n ni de N.

Demostración. De nuevo integrando por partes (2) tenemos

$$\gamma_{a,N}(n) = 2(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty} B(s)\left(\frac{2(N+2)s^{2n+2}}{(1+s^2)^{N+3}} - \frac{(2n+1)s^{2n}}{(1+s^2)^{N+2}}\right)ds.$$

Si la función $B(s) := \int_0^s a(r)dr$ cumple la condición (3) entonces

$$\gamma_{a,N}(n) = 2(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty} B(s_0)\left(\frac{2(N+2)s^{2n+2}}{(1+s^2)^{N+3}} - \frac{(2n+1)s^{2n}}{(1+s^2)^{N+2}}\right)ds$$

$$+4(N+2)(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty}(B(s)-B(s_0))\frac{s^{2n+1}}{(1+s^2)^{N+2}}\left(\frac{s}{1+s^2} - \frac{2n+1}{2s(N+2)}\right)ds.$$

Ahora calculamos la primera integral usando la función Gamma como en el teorema anterior

$$2(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2(N+2)s^{2n+2}}{(1+s^2)^{N+3}} - \frac{(2n+1)s^{2n}}{(1+s^2)^{N+2}}\right)ds =$$

$$= 2(N+1)\binom{N}{n}\left[(N+2)\frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})\Gamma(N-n+\frac{3}{2})}{\Gamma(N+3)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}(2n+1)\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(N-n+\frac{3}{2})}{\Gamma(N+2)}\right]$$

$$= \frac{2\Gamma(N-n+\frac{3}{2})}{(N-n)!n!}\left[\Gamma(n+\frac{3}{2}) - (n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})\right]$$

$$= \frac{2\Gamma(N-n+\frac{3}{2})}{(N-n)!n!}\left[\Gamma(n+\frac{3}{2}) - \Gamma(n+\frac{3}{2})\right] = 0.$$

Por lo tanto

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const(N+2)(N+1)\binom{N}{n}\int_0^{+\infty}\frac{s^{2n+1}}{(1+s^2)^{N+2}}$$

$$\times\left(\frac{s}{1+s^2} - \frac{2n+1}{2s(N+2)}\right)|s-s_0|ds.$$

Haciendo $k = \frac{2n+1}{2(N+2)}$ en la anterior integral (nótese que $0 < k < 1$) y expresando la función $\frac{s^{2n+1}}{(1+s^2)^{N+2}}$ de la siguiente forma

$$\frac{s^{2n+1}}{(1+s^2)^{N+2}} = \exp\log(\frac{s^{2n+1}}{(1+s^2)^{N+2}}) = \exp[(2n+1)\log s - (N+2)\log(1+s^2)]$$

$$= \exp[-2(N+2)(\frac{1}{2}\log(1+s^2) - k\log s)] = \exp[-2(N+2)\varphi(s)].$$

Aquí

$$\varphi(s) := \frac{1}{2}\log(1+s^2) - k\log s.$$

Siguiendo el método de Laplace hay que calcular el mínimo de la función $\varphi(s)$ entonces

$$\varphi'(s) = \frac{s}{1+s^2} - k\frac{1}{s}.$$

Por lo tanto el mínimo esta dado por

$$s_0 = \sqrt{\frac{k}{1-k}}.$$

Ahora tomamos las siguientes aproximaciones en una vecindad del punto s_0

$$\varphi(s) \sim \varphi(s_0) + \frac{\varphi''(s_0)}{2}(s-s_0)^2 \quad y \quad \frac{s}{1+s^2} - k\frac{1}{s} \sim C_1(s-s_0).$$

Entonces

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const(N+1)(N+2)\binom{N}{n}e^{-2(N+2)\varphi(s_0)}$$
$$\times \int_0^{+\infty} e^{-(N+2)\varphi''(s_0)(s-s_0)^2}(s-s_0)^2 ds.$$

Haciendo $U = (N+2)\varphi''(s_0)(s-s_0)^2$ en la anterior integral se tiene

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const\frac{N+1}{\sqrt{N+2}}\binom{N}{n}e^{-2(N+2)\varphi(s_0)}\int_0^{+\infty} e^{-U}U^{\frac{1}{2}}dU.$$

Es decir

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const\frac{N+1}{\sqrt{N+2}}\binom{N}{n}e^{-2(N+2)\varphi(s_0)}\Gamma(\frac{3}{2}).$$

Calculando

$$-2(N+2)\varphi(s_0) = -2(N+2)\log\frac{(1-k)^{\frac{k}{2}}}{(1-k)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{k}{2}}} = \log\frac{(1-k)^{N+2}k^{k(N+2)}}{(1-k)^{k(N+2)}}.$$

De donde

$$e^{-2(N+2)\varphi(s_0)} = \frac{(N-n+\frac{3}{2})^{N-n+\frac{3}{2}}(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{(N+2)^{N+2}}.$$

Por lo tanto

$$|\gamma_{a,N}(n)| \leq const\frac{\Gamma(N+2)}{\sqrt{N+2}\Gamma(N-n+1)\Gamma(n+1)}\frac{(N-n+\frac{3}{2})^{N-n+\frac{3}{2}}(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{(N+2)^{N+2}}.$$

Finalmente usando el comportamiento asintótico de la función Gamma

$$\Gamma(z) \approx z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}$$

para $|z|$ grande, se tiene

$$\begin{aligned}|\gamma_{a,N}(n)| \quad \leq \quad & const\,\frac{(N+2)^{N+\frac{3}{2}}}{\sqrt{N+2}(N-n+1)^{N-n+\frac{1}{2}}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}} \\ & \times\frac{(N-n+\frac{3}{2})^{N-n+\frac{3}{2}}(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}}}{(N+2)^{N+2}} \leq const,\end{aligned}$$

□

Referencias

[1] Berezin, F.A.: Método de la Segunda Cuantización (En Ruso), Nauka, Moscú, 1965

[2] Krantz, S.: Function Theory of Several Complex Variables, Wadsworth & Brooks, California, 1992

[3] Krantz, S. G.: Partial Differential Equations and Complex Analysis, CRC Press, Boca Raton, 1992

[4] Kiseliov, A. I. and Krasnov, M. and Makarenko G.: Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Instituto Politécnico Nacional, México, D.F., 1990.

[5] Lee, J. M.: Introduction to Smooth Manifolds, Springer - Verlag, New York, 2003

[6] Prieto, S.E.: Operadores de Toeplitz en la 2-esfera. Tesis de maestria, CINVESTAV-IPN, Mexico,D.F., 2004

[7] Range, Michael R.: Holomorphic functions and integral representations in several complex variables, Springer-Verlag, New York Inc., 1986

[8] Vasilevski, N. L. and S.Grudsky, A.K.: Toeplitz Operators on the unit ball in $\mathbb{C}^n$,with radial symbols. Reporte interno 292, Departamento de Matematicas, CINVESTAV del I.P.N, Mexico City., 2001

[9] N. L. Vasilevski, Toeplitz.: Operators on the Bergman Spaces: Inside-the-domain Effects, Contemporary Mathematics, 289,2001, 79-146

[10] Vasilevski, N. L. and S.Grudsky, A.K.: Dynamics of Properties of Toeplitz Operators with Radial Symbols:, Reporte Interno 317,Departamento de Matematicas, CINVESTAV del I.P.N, Mexico City., 2002

Dirección del autor

Ernesto Prieto S. — Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira–Colombia

e-mail: `ernespri@utp.edu.co`