Vol. XVIII, Nº 1, Junio (2010)
Matemáticas: 57–69

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Producto de medidas radonianas con valores en espacios de Banach separables

Liliana Posada Vera
Universidad del Valle

Guillermo Restrepo Sierra
Universidad del Valle

Recibido May. 21, 2009 Aceptado Ago. 31, 2009

Abstract

Let S and T be Hausdorff topological spaces and X and Y separable Banach spaces. If μ and ν are Radon measures defined in $bor(S)$ and $bor(T)$ with values in X and Y respectively, we will prove the existence of a unique Radon measure λ in $bor(S \times T)$ with values in the injective tensorial product of X and Y. This measure is such that for any A in $bor(S)$ and B in $bor(T)$, $\lambda(A \times B)$ coincides with tensorial product of $\mu(A)$ and $\nu(B)$. This result generalizes a similar one proved by M. Gómez and G. Restrepo in 2009.

Keywords: Radon measures, product Radon measure, positive Radon measures

MSC(2000): 76M10, 76D03

Resumen

Sean S y T espacios topológicos hausdorfianos y X y Y espacios de Banach separables. Si μ y ν son medidas radonianas definidas en $bor(S)$ y $bor(T)$ con valores en X y Y respectivamente, demostraremos la existencia de una única medida radoniana λ de $bor(S \times T)$ con valores en el producto tensorial inyectivo de X y Y. Esta medida cumple la condición de que para todo A que pertenece a $bor(S)$ y todo B que pertenece a $bor(T)$, $\lambda(A \times B)$ coincide con el producto tensorial de $\mu(A)$ y $\nu(B)$. Este teorema es una generalización de otro similar demostrado por M. Gómez and G. Restrepo en el año 2009.

Palabras y frases claves: Medidas radonianas, producto de medidas radonianas, medidas radonianas positivas

1 Introducción

Sea (T, τ) un espacio topológico hausdorfiano. Denotaremos por $ab(T)$ a la colección de los conjuntos τ-abiertos. La σ- álgebra generada por la colección de los conjuntos abiertos llamada σ- álgebra de los conjuntos borelianos de T se denotará por $bor(T)$. Una *medida boreliana* es cualquier función σ- aditiva definida en la σ-álgebra $bor(T)$ de los conjuntos borelianos y con valores en $[0, \infty]$. Una *medida radoniana* (medida de Radón) es una medida boreliana en T que satisface las siguientes condiciones:

rad 1) La medida de cualquier abierto es el extremo superior de las medidas de los subconjuntos compactos contenidos en él. Es decir si $G \in ab(T)$, entonces

$$\mu(G) = \sup\{\mu(K) : G \supseteq K \text{ compacto}\}$$

(Propiedad de la regularidad interior).

rad 2) La medida de cualquier conjunto boreliano es el extremo inferior de las medidas de los abiertos que lo contienen. Es decir, si $B \in bor(T)$, entonces

$$\mu(B) = \text{ínf}\{\mu(G) : B \subseteq G \ \text{ abierto}\}$$

(Propiedad de la regularidad exterior).

rad 3) μ es localmente finita. Es decir, todo $t \in T$ posee una vecindad V tal que $\mu(V) < \infty$.

La propiedad (rad 3) implica que la medida de todo subconjunto compacto es finita. La propiedad de regularidad interior es válida para todo boreliano de medida finita. Es decir, si $B \in bor(T)$ y $\mu(B) < \infty$, entonces $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq B, \ \ K \text{ compacto}\}$. La definición de medida radoniana que hemos adoptado es la definición R_2 en [8, pag.13]. Para una historia de la teoría de la medida en los espacios topológicos generales, el lector puede consultar [3].

Asumimos la teoría de las funciones σ- aditivas con valores en espacios de Banach desarrollada por Diestel y Uhl en [4]. Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra y X es un espacio de Banach, una función $\mu : \mathcal{A} \to X$ es σ-aditiva si para toda familia disjunta $(A_k)_{k\in N}$ en $\mathcal{A}$ se tiene que

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Nos ocuparemos solamente de las funciones σ- aditivas borelianas. Si $\mu : bor(T) \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) es una función σ- aditiva boreliana, su variación en el conjunto boreliano B denotada por $|\nu|(B)$ es el extremo superior del conjunto de todas las sumas finitas $\sum_{k=1}^{n} |\mu(B_k)|$, donde $\{B_k : 1 \leq k \leq n\}$ es una partición de B. La función $B \to |\mu|(B)$ es una medida finita. Diremos que μ es una *función σ-aditiva radoniana* si su variación $|\mu|$ es una medida radoniana. Si X es un espacio de Banach, una función σ- aditiva $\mu : bor(T) \to X$ es *radoniana* si $x' \circ \mu$ es una medida radoniana con valores en $\mathbb{C}$ para toda forma lineal $x' \in X'$.

Ahora podemos explicar el propósito fundamental de este artículo. En [5], Gómez y Restrepo demostraron que si μ y ν son medidas radonianas en los espacios topológicos hausdorfianos S y T respectivamente, entonces existe una medida radoniana única λ en $bor(S \times T)$ tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y todo $B \in bor(T)$. Llamaremos *medida radoniana producto* a la medida λ y la denotaremos por $\lambda = \mu \otimes \nu$. Este teorema se puede extender a funciones σ- aditivas con valores reales o complejos con la conclusión adicional de que $|\lambda| = |\mu| \otimes |\nu|$. Nuestro objetivo es extender este teorema cuando μ y ν son funciones σ- aditivas con valores en espacios de Banach separables X y Y respectivamente. Concretamente, demostraremos el teorema siguiente en la sección 4:

Teorema 1. *Sean X y Y espacios de Banach separables, $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ-aditivas radonianas, entonces existe una y sólo una* *función σ-aditiva radoniana $\lambda : bor(S \times T) \to X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ (producto tensorial inyectivo de X y Y) tal que $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y $B \in bor(T)$.*

En la demostración de este teorema hemos seguido los lineamientos de J. Kawabe en [6], quien demuestra un teorema similar pero bajo hipótesis diferentes sobre las funciones σ- aditivas μ y ν.

En ambos casos, la integral de Bartle definida en [1] en 1956 juega un papel fundamental. Una breve descripción de esta integral es como sigue. Sean X, Y y Z espacios de Banach y $b : X \times Y \to Z$ una función bilineal y continua. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio de medición y $\nu : \mathcal{A} \to Y$ es una σ- medida vectorial, la (b, ν)-integral de una función simple $f : \Omega \to X$ de la forma $f = \sum_{k=1}^{n} x_k \chi(E_k)$ sobre el conjunto $E \in \mathcal{A}$ es

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \sum_{k=1}^{n} b(x_k, \nu(E \cap E_k)).$$

La función $f \to \int_E b(f(w), d\nu(w))$ es una función lineal del espacio vectorial de las funciones simples de Ω en X. De un modo muy impreciso, una función $f : \Omega \to X$ es (b, ν)- *integrable* si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que converge a f en un sentido que precisaremos después y su integral es

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) \ = \lim_n \int_E b(f_n(w), d\nu(w)).$$

Cuando $Z = X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ y $b(x, y) = x \otimes y$ es la función tensorial, usaremos la notación

$$\int_E f(w) \otimes d\nu(w) = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes \nu(E \cap E_k)$$

si f es una función simple, y en el caso general

$$\int_E f(w) \otimes d\nu(w) = \lim_n \int_E f_n(w) \otimes d\nu(w).$$

La definición de la función σ- aditiva $\lambda : bor(S \times T) \to X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ se puede hacer después de unos preliminares mediante la fórmula

$$\lambda(E) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t)$$

para todo $E \in bor(S \times T)$. Esta función λ es la única función σ- aditiva radoniana que satisface $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y todo $B \in bor(T)$.

En segundo lugar, nos proponemos demostrar un teorema tipo Fubini para funciones σ- aditivas radonianas análogo al teorema 3.4 en [5]. Éste expresa lo siguiente.

Teorema 2. *Si S y T son espacios topológicos hausdorfianos, $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ- aditivas radonianas, X y Y espacios de Banach separables y $f : S \times T \to \mathbb{R}$ una función boreliana y acotada, entonces*

$$\int_{S\times T} f(s,t)d\lambda(s,t) = \int_T \left(\int_S f_t(s)d\mu(s) \right) \otimes d\nu(t).$$

Es parte del teorema demostrar que la función $f_t : S \to \mathbb{R}$ definida por $f_t(s) = f(s,t)$ (t fijo) es μ-integrable y que la función vectorial $t \to \int\limits_S f_t(s)d\mu(s)$ de T en X es $(\otimes, \nu)$-integrable.

2 Preliminares y productos tensoriales

A continuación mostraremos algunos preliminares que son necesarios para el desarrollo de este artículo. El producto tensorial de dos espacios vectoriales X y Y es una pareja (Z, ϕ) donde Z es un espacio vectorial y $\phi : X \times Y \to Z$ bilineal, $\phi(X \times Y)$ genera a Z y X, Y son ϕ- linealmente disjuntos. (Ver [7, pag. 403]). Este producto tensorial se denota $X \otimes Y$ y $\phi(x,y)$ se denota por $x \otimes y$. Si X y Y son espacios de Banach se pueden definir varias normas en $X \otimes Y$ que hacen que $\phi : X \times Y \to X \otimes Y$ bilineal sea continua. Entre estas normas la ϵ-norma es $\|x \otimes y\|_\epsilon = \sup\limits_{\|x'\|\leq 1} \sup\limits_{\|y'\|\leq 1} |x'(x)||y'(y)|$. Cuando dotamos a $X \otimes Y$ con la ϵ-norma escribiremos $X \otimes_\epsilon Y$. El completante de este espacio se denota por $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$.

Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medición y X un espacio de Banach. Diremos que $\nu : \mathcal{A} \to X$ es una función σ- aditiva si para toda sucesión disjunta $(A_k)_{k\in N}$ en $\mathcal{A}$, la sucesión $(\nu(A_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es sumable y

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Si $\nu : \mathcal{A} \to X$ es una función σ- aditiva, definimos la variación de ν como la función

$$E \mapsto |\nu|(E) = \sup\left\{ \sum_{A\in\pi} \|\nu(A)\| : \pi \in \pi(E) \right\}$$

de $\mathcal{A}$ en $[0, \infty]$, donde $\pi(E)$ es el conjunto de todas las particiones finitas de $E \in \mathcal{A}$. Si $|\nu|(\Omega) < \infty$ diremos que ν es una función σ- aditiva de variación acotada. La semivariación de ν es la función

$$E \mapsto \|\nu\|(E) = \sup\{|x' \circ \nu|(E) : x' \in X', \|x'\| \leq 1\}$$

donde $|x' \circ \nu|$ es la variación de la función σ- aditiva de valor complejo $x' \circ \nu$. La variación es una función con valores en $[0, \infty]$; la semivariación es una función monótona y subaditiva con valores en $[0,\infty)$ (ver [4]). Se comprueba fácilmente que $\|\nu(E)\| \leq \|\nu\|(E) \leq |\nu|(E)$ para todo $E \in \mathcal{A}$.

Sean $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio de medición, $\nu : \mathcal{A} \to X$ una función σ- aditiva y $f : \Omega \to X$ una función. Diremos que f es *ν-medible* si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω en X tal que $f_n(w) \to f(w)$ ν-c.t.p, es decir, $f_n(w) \to f(w)$ para todo w en el complemento de un conjunto $E \in \mathcal{A}$, $\|\nu\|$-nulo ($\|\nu\|(E) = 0$).

Diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es *ν-integrable* si existe una sucesión de funciones simples $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω en $\mathbb{R}$ tal que $f_n(w)$ converge a $f(w)$ ν-c.t.p y la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $\lambda_n(E) = \int_E f_n(w)d\nu(w)$ converge en la norma de X para cada $E \in \mathcal{A}$. El límite de esta sucesión de integrales está definido como *la integral de f* con respecto a la medida ν, en simbolos

$$\int_E f(w)d\nu(w) = \lim_n \int_E f_n(w)d\nu(w).$$

Sean X, Y y Z espacios de Banach y $b : X \times Y \to Z$ una función bilineal y continua. Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio de medición y $\nu : \mathcal{A} \to Y$ es una σ- medida vectorial, la b- semivariación de ν es el número

$$\|\nu\|_b(E) = \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} b(x_i, \nu(E_i))\right\|\right\}$$

donde $E \in \mathcal{A}$ y el supremo es tomado sobre todas las familias finitas $\{E_i : 1 \leq i \leq n\}$ de conjuntos disjuntos en $\mathcal{A}$ contenidos en E y todas las familias finitas $\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subseteq X$ con $\|x_i\| \leq 1$. En [1] se postula que la medida ν_b es μ-continua para alguna medida $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$, es decir, $\|\nu\|_b(E) \to 0$ si $\mu(E) \to 0$. Afortunadamente cuando $Z = X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ y $b(x,y) = x \otimes y$ entonces $\|\nu\|_b \leq \|\nu\|$. Diremos que una función $f : \Omega \to X$ es *(b,ν)-medible*, si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples de Ω en X tal que $f_n(w)$ converge a $f(w)$ ν_b-c.t.p, es decir, $f_n(w) \to f(w)$ para todo w en el complemento de un conjunto $E \in \mathcal{A}$, $\|\nu\|_b$-nulo ($\|\nu\|_b(E) = 0$). Como consecuencia del teorema de medibilidad de Pettis (ver [4, II.2, pag. 42]) si X es un espacio de Banach separable, f es (b,ν)-medible si y sólo si $x' \circ f$ es medible para toda $x' \in X'$.

Diremos que f es *(b,ν)- integrable* si existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tal que $f_n(w)$ converge a $f(w)$ ν_b-c.t.p y la sucesión $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $\lambda_n(E) = \int_E b(f_n(w), d\nu(w))$ converge en la norma de Z para cada $E \in \mathcal{A}$. Si $f : \Omega \to X$ es una función (b,ν)- integrable, entonces *la integral de f*, es el vector

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \lim_n \int_E b(f_n(w), d\nu(w)).$$

Esta es la definición dada por R. G. Bartle en [1]. Adicionalmente tenemos que si $f : \Omega \to X$ es una función ν_b- acotada y (b,ν)-medible entonces es f es (b,ν)-

integrable y la función $\lambda : \mathcal{A} \to Z$ dada por

$$\lambda(E) = \int_E b(f(w), d\nu(w))$$

es una función σ-aditiva.

Por último enunciaremos el teorema de la convergencia acotada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones (b, ν)- integrables de Ω en X las cuales convergen ν_b-c.t.p a una función $f : \Omega \to X$. Si existe una constante $M > 0$ tal que $\|f_n\|_{\infty,b} \leq M$ ν_b-c.t.p, $w \in E^c$, entonces f es (b, ν)- integrable y

$$\int_E b(f(w), d\nu(w)) = \lim_{n\to\infty} \int_E b(f_n(w), d\nu(w)).$$

3 Medidas radonianas y producto tensorial

Definición 1. Sean T un espacio topológico hausdorfiano y X un espacio de Banach. Una función σ- aditiva $\nu : bor(T) \to X$ *es radoniana* si $x' \circ \nu$ es una función σ-aditiva radoniana con valores complejos para toda forma lineal $x' \in X'$. Si $\nu : bor(T) \to X$ es una función σ- aditiva radoniana, entonces $|x' \circ \nu|$ es una función σ-aditiva finita con valores reales.

Teorema 3. *Sea T un espacio topológico hausdorfiano. Una función σ- aditiva $\nu : bor(T) \to X$ es radoniana si y sólo si para todo conjunto boreliano B y todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subset B$ tal que $\|\nu\|(B - K) < \epsilon$.*

Demostración. Supongamos que para todo conjunto boreliano B y todo $\epsilon > 0$ existe un compacto $K \subseteq B$ tal que $\|\nu\|(B-K) < \epsilon$. Sea $x' \in X'$ una forma lineal continua tal que $\|x'\| \leq 1$. Entonces

$$|x' \circ \nu|(B - K) < \sup_{\|x'\|\leq 1} |x' \circ \nu|(B - K) = \|\nu\|(B - K) < \epsilon.$$

Por tanto $x' \circ \nu$ es una función σ-aditiva radoniana compleja. Supongamos ahora que ν es una función σ-aditiva radoniana. Sean $B \in bor(T)$ y $\epsilon > 0$. Por el teorema de Rybakov (ver [4, IX.2, pag.268]), existe una forma lineal $x' \in X'$ tal que ν es $|x' \circ \nu|$-continua y por tanto existe un $\delta > 0$ tal que $|x' \circ \nu|(E) < \delta$ implica $\|\nu\|(E) < \epsilon$, si $E \in bor(T)$. Como $|x' \circ \nu|$ es radoniana, existe un compacto $K \subseteq B$ tal que $|x' \circ \nu|(B - K) < \delta$ y por consiguiente $\|\nu\|(B - K) < \epsilon$. $\square$

Si $u : X \widehat{\otimes}_\epsilon Y \to \mathbb{K}$ es una función lineal y continua y $p : X \times Y \to X \otimes Y$ es la función bilineal tensorial, entonces $b = u \circ p$ es una función bilineal continua en $X \times Y$. El problema consiste en caracterizar las funciones bilineales y continuas $b(x, y)$ de la forma $b = u \circ p$.

El espacio $B(X' \times Y')$ de las funciones bilineales de $X' \times Y'$ en $\mathbb{K}$ débilmente continuas es un modelo del producto tensorial $X \otimes Y$: si $z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$, entonces se puede ver a z como la función bilineal

$$z(x', y') = \sum_{i=1}^{n} x'(x_i) y'(y_i).$$

Esto permite identificar de una manera natural a $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ con $\mathcal{C}(U_{X'} \times U_{Y'})$ (espacio de las funciones continuas sobre $U_{X'} \times U_{Y'}$):

$$J : X \otimes Y \to \mathcal{C}(U_{X'} \times U_{Y'}), \qquad J(z) = z|_{U_{X'} \times U_{Y'}}$$

La definición de la ϵ-norma muestra que J es una isometría que se puede extender a $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$. Luego el dual de $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ se identifica con el dual de $\mathcal{C}(U_{X'} \times U_{Y'})$ que es el conjunto de las medidas radonianas en virtud del teorema de Riesz.

Lo anterior se expresa claramente mediante el teorema siguiente.

Teorema 4. *(Grothendieck.) Una función bilineal y continua $b : X \times Y \to \mathbb{K}$ es de la forma $b = u \circ p$, $u \in (X \widehat{\otimes}_\epsilon Y)'$, si y sólo si existe una medida radoniana μ en $U_{X'} \times U_{Y'}$ tal que*

$$u(x \otimes y) = b(x, y) = \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} x'(x) y'(y) d\mu(x', y'). \tag{1}$$

Además $\|b\| = |\mu|(U_{X'} \times U_{Y'}) = \|u\|$

Demostración. Si $b = u \circ p$, podemos ver a u como una forma lineal en $\mathcal{C}(U_{X'} \times U_{Y'})$ y por tanto existe una medida radoniana μ tal que

$$u(x \otimes y) = \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} x'(x) y'(y) d\mu(x', y')$$

y $b = u \circ p$ es de la forma indicada. Es claro que $b(x, y)$ definida en (1) define una función bilineal de la forma $b = u \circ p$. Para demostrar que $|\mu|(U_{X'} \times U_{Y'}) = \|u\|$ observemos que $|b(x, y)| = |u(x \otimes y)| \leq \|u\| \|x \otimes y\| = \|u\| \|x\| \|y\|$. Luego $|\mu|(U_{X'} \times U_{Y'}) \leq \|b\| \leq \|u\|$. Por otro lado

$$|u(x \otimes y)| = \left| \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} x'(x) y'(y) d\mu(x', y') \right| \leq \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} |x'(x)| |y'(y)| d|\mu|(x', y')$$

$$\leq \|x \otimes y\| |\mu|(U_{X'} \times U_{Y'}).$$

Luego $\|u\| \leq |\mu|(U_{X'} \times U_{Y'})$.

Para una demostración completa ver [4; VIII.2.5 ; pag. 231]. $\square$

Si X, Y son espacios de Banach y $(x', y') \in X' \times Y'$, entonces $x' \otimes y'$ es la forma lineal continua $x \otimes y \to x'(x)y'(y)$ definida en $X' \widehat{\otimes}_\epsilon Y'$.

Lema 1. *Sean S y T espacios topológicos hausdorfianos, X y Y espacios de Banach y $\lambda : bor(S \times T) \to X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ una función σ- aditiva. Entonces la función $(x', y') \to |(x' \otimes y') \circ \lambda|(E)$ de $U_{X'} \times U_{Y'}$ en $\mathbb{R}$ es semicontinua inferiormente para cada $E \in bor(S \times T)$ y $|(x' \otimes y') \circ \lambda|(E) \leq \|\lambda\|(E)$.*

Demostración. Sea π una partición de E. Entonces $h_\pi(x', y') = \sum_{F \in \pi} |x' \otimes y') \circ \lambda(F)|$ es una función continua en $U_{X'} \times U_{Y'}$ (con las topologías débiles) y $|(x' \otimes y') \circ \lambda|(E) = \sup_\pi h_\pi(x', y')$ es semicontinua inferiormente. Además,

$$|(x' \otimes y') \circ \lambda|(E) \leq \sup\{|z' \circ \lambda|(E) : z' \in (X \widehat{\otimes}_\epsilon Y)', \|z'\| \leq 1\} = \|\lambda\|(E).$$

□

Teorema 5. *Sea $\lambda : bor(S \times T) \to X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ una función σ- aditiva. Si $(x' \otimes y') \circ \lambda$ es radoniana para cada $x' \in X'$ y cada $y' \in Y'$ entonces λ es radoniana.*

Demostración. Sean $E \in bor(S \times T)$ y π una partición finita de E, si $z' \in (X \widehat{\otimes}_\epsilon Y)'$ entonces por el teorema 4 existe una medida radoniana real μ en $U_{X'} \times U_{Y'}$ que representa a z' y $\mu(U_{X'} \times U_{Y'}) = \|z'\|$. Luego

$$\sum_{F \in \pi} |z' \circ \lambda(F)| = \sum_{F \in \pi} \left| \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} (x' \otimes y') \circ \lambda(F) d\mu(x', y') \right| \leq$$

$$\int_{U_{X'} \times U_{Y'}} \sum_{F \in \pi} |(x' \otimes y') \circ \lambda(F)| d|\mu|(x', y').$$

Como la función $(x', y') \to |(x' \otimes y') \circ \lambda|(E)$ es μ-integrable porque es semicontinua inferiormente y acotada por el lema anterior, entonces

$$|z' \circ \lambda|(E) \leq \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} |(x' \otimes y') \circ \lambda|(E) d|\mu|(x', y').$$

Sean $B \in bor(S \times T)$ y $K \subset B$ compacto. Luego la función

$$(x', y') \to h_K(x', y') = |(x' \otimes y') \circ \lambda|(K)$$

de $U_{X'} \times U_{Y'}$ en los reales es positiva y semicontinua inferiormente. Si $\mathcal{R}$ es la colección de todos los subconjuntos compactos de B entonces $(h_K)_{K \in \mathcal{R}}$ es una red creciente de funciones semicontinuas inferiormente que converge puntualmente a la función $h(x', y') = |(x' \otimes y') \circ \lambda|(B)$ porque $(x' \otimes y') \circ \lambda$ es radoniana por hipótesis. Luego (ver [5; lema 3.2])

$$\int_{U_{X'} \times U_{Y'}} |(x' \otimes y') \circ \lambda|(K) d|\mu|(x', y') \uparrow \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} |(x' \otimes y') \circ \lambda|(B) d|\mu|(x', y').$$

Por tanto

$$\int_{U_{X'}\times U_{Y'}} |(x'\otimes y')\circ\lambda|(B)d|\mu|(x',y') - \int_{U_{X'}\times U_{Y'}} |(x'\otimes y')\circ\lambda|(K)d|\mu|(x',y') =$$

$$\int_{U_{X'}\times U_{Y'}} (|(x'\otimes y')\circ\lambda|(B) - |(x'\otimes y')\circ\lambda|(K))d|\mu|(x',y') =$$

$$\int_{U_{X'}\times U_{Y'}} |(x'\otimes y')\circ\lambda|(B-K)d|\mu|(x',y') \downarrow 0$$

Como

$$0 \leq |z'\circ\lambda|(B-K) \leq \int_{U_{X'}\times U_{Y'}} |(x'\otimes y')\circ\lambda|(B-K)d|\mu|(x',y'),$$

entonces dado $\epsilon > 0$ existe un $K \subset B$ tal que $|z'\circ\lambda|(B-K) < \epsilon$. En suma $|z'\circ\lambda|$ es radoniana para todo $z' \in (X\widehat{\otimes}_\epsilon Y)'$. Es decir, λ es una medida radoniana según la definición 1 □

4 Producto de medidas vectoriales radonianas

Sean $E \in bor(S\times T)$, $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ- aditivas. Para $s \in S$, denotamos al conjunto E^s como $t \in T$ tal que $(s,t) \in E$ y para cada $t \in T$ denotamos por E^t al conjunto $s \in S$ tal que $(s,t) \in E$. Entonces $E^s \in bor(T)$ y $E^t \in bor(S)$. Definimos $f_E : S \to Y$ por $f_E(s) = \nu(E^s)$ y $g_E : T \to X$ por $g_E(t) = \mu(E^t)$.

Teorema 6. *(De las secciones para medidas radonianas vectoriales.) Sean S y T espacios topológicos hausdorfianos, X y Y espacios de Banach, $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ- aditivas radonianas. Si $E \in bor(S\times T)$ entonces las funciones $f_E(s) = \nu(E^s)$ y $g_E(t) = \mu(E^t)$ son funciones débilmente borelianas.*

Demostración. Supongamos que X y Y son espacios topológicos reales. Si $x' \in X'$, entonces $x'\circ\mu$ es una función σ- aditiva compleja que se puede escribir como $x'\circ\mu = \alpha^+ - \alpha^-$. En [5; teo. 3.1; pag. 6] se demuestra que $\alpha^+(E^t)$ y $\alpha^-(E^t)$ son funciones borelianas. Por consiguiente $x'\circ\mu(E^t) = x'\circ g_E(t)$ es una función boreliana. En el caso complejo $x'\circ\mu = \alpha + i\beta$ es una función σ- aditiva compleja y por lo anterior $x'\circ g_E(t)$ es una función boreliana. Una demostración similar es válido para $y'\circ f_E$, $y' \in Y'$. □

Teorema 7. *Sean $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ- aditivas radonianas, X y Y espacios de Banach separables. Entonces existe una sólo una función σ- aditiva radoniana $\lambda : bor(S\times T) \to X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ tal que $\lambda(A\times B) = \mu(A)\otimes\nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y $B \in bor(T)$.*

Demostración. Dado $E \in bor(S \times T)$, definamos $g_E(t) = \mu(E^t)$ para todo $t \in T$. Esta función es débilmente boreliana por 6. y como X es separable entonces g_E es $(\otimes, \nu)$-medible por el teorema de Pettis. Por otro lado g_E es $\otimes_\nu$- acotada puesto que $\|g_E(t)\| = \|\mu(E^t)\| < \infty$ para todo t ya que μ es acotada y por tanto g_E es $(\otimes, \nu)$-integrable.

Gracias a la condición de integrabilidad podemos definir la función

$$\lambda(E) = \int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t)$$

de $bor(S \times T)$ en $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$. Esta función es σ-aditiva por propiedades de la b-integral de Bartle.

i) *Mostremos que* $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$. Si $E = A \times B$, tenemos:

$$\lambda(A \times B) = \int_T \mu((A \times B)^t) \otimes d\nu(t) = \int_T \mu(A)\chi(B) \otimes d\nu(t)$$
$$= \int_B \mu(A) \otimes d\nu(t) = \mu(A) \otimes \nu(B).$$

ii) λ *es radoniana.* Basta demostrar $(x' \otimes y') \circ \lambda$ es radoniana para todo $(x', y') \in X' \times Y'$ por el teorema 5. Sea $E \in bor(S \times T)$ entonces

$$(x' \otimes y') \circ \lambda(E) = (x' \otimes y') \left(\int_T \mu(E^t) \otimes d\nu(t) \right) = \int_T x' \circ \mu(E^t) d(y' \circ \nu)(t).$$

Ahora, $x' \circ \mu$ y $y' \circ \nu$ son funciones σ- aditivas radonianas con valores complejos definidas en $bor(S)$ y $bor(T)$ respectivamente. Luego la función σ-aditiva producto $x' \circ \mu \otimes y' \circ \nu$ existe y es única y por el teorema de Fubini correspondiente demostrado en [5, teo.3.3, pag. 8] para medidas radonianas positivas se concluye que

$$(x' \otimes y') \circ \lambda(E) = \int_T x' \circ \mu(E^t) d(y' \circ \nu)(t) = \int_{S \times T} \chi_E(t) d(x' \circ \mu \otimes y' \circ \nu)(t)$$
$$= (x' \circ \mu \otimes y' \circ \nu)(E).$$

iii) λ *es única.* Sean λ y β dos medidas radonianas definidas en $bor(S \times T)$ y con valores en $X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$ tales que $\lambda(A \times B) = \beta(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y $B \in bor(T)$. Demostremos que $\lambda(E) = \beta(E)$ para todo $E \in bor(S \times T)$. En primer lugar, $(x' \otimes y') \circ \beta(A \times B) = (x' \otimes y') \circ \lambda(A \times B)$. Por la unicidad del caso complejo, $(x' \otimes y') \circ \beta(E) = (x' \otimes y') \circ \lambda(E)$ para todo $E \in bor(S \times T)$. Si $z' \in (X \widehat{\otimes}_\epsilon Y)'$, entonces existe una medida real y positiva r tal que $z'(a) = \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} (x' \otimes y')(a) dr(x', y')$ para todo $a \in X \widehat{\otimes}_\epsilon Y$. Reemplazando a a por $\lambda(E)$ y $\beta(E)$ se obtiene que $z'(\lambda(E)) = z'(\beta(E))$ lo que demuestra que $\beta(E) = \lambda(E)$ para todo $E \in bor(S \times T)$.

Ahora, utilizando el argumento anterior, f_E es $(\otimes, \mu)$-integrable y por tanto existe una única función σ- aditiva radoniana $\rho : bor(S \times T) \to Y\widehat{\otimes}_\epsilon X$ el cual satisface que $\rho(A \times B) = \nu(B) \otimes \mu(A)$ para todo $A \in bor(S)$ y $B \in bor(T)$ y tal que $(y' \otimes x') \circ \rho = x' \circ \mu \otimes y' \circ \nu$ para cada $x' \in X'$ y cada $y' \in Y'$. Sea $k : X\widehat{\otimes}_\epsilon Y \to Y\widehat{\otimes}_\epsilon X$ un isomorfismo isométrico definido por $k(y \otimes x) = x \otimes y$. Es fácil ver que $(x' \otimes y') \circ k = y' \otimes x'$ para todo $x' \in X'$ y todo $y' \in Y'$. Si definimos $\lambda(E) = k(\rho(E))$ para todo $E \in bor(S \times T)$, $\lambda : bor(S \times T) \to X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$ es una función σ- aditiva radoniana única que satisface que $\lambda(A \times B) = \mu(A) \otimes \nu(B)$ para todo $A \in bor(S)$ y $B \in bor(T)$. □

El siguiente teorema muestra propiedades de la función σ- aditiva λ.

Teorema 8. *Sean $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ- aditivas radonianas, X y Y espacios de Banach separables. Si λ es la función σ- aditiva dada anteriormente, entonces ésta tiene las siguientes propiedades:*

i) $|(x' \otimes y') \circ \lambda| = |x' \circ \mu| \otimes |y' \circ \nu|$ *para cada* $x' \in X'$ *y* $y' \in Y'$.

ii) $\|\lambda\|(A \times B) = \|\mu\|(A)\|\nu\|(B)$ *para cada* $A \in bor(S)$ *y* $B \in bor(T)$.

Demostración. Para mostrar i) Sean $x' \in X'$ y $y' \in Y'$. Por el teorema anterior $(x' \otimes y') \circ \lambda = x' \circ \mu \otimes y' \circ \nu$ y $x' \circ \mu$ y $y' \circ \nu$ son funciones σ-aditivas complejas radonianas, luego $|x' \circ \mu \otimes y' \circ \nu| = |x' \circ \mu| \otimes |y' \circ \nu|$ y así se tiene que $|(x' \otimes y') \circ \lambda| = |x' \circ \mu| \otimes |y' \circ \nu|$.

Para probar ii), sean $A \in bor(S)$, $B \in bor(T)$, $x' \in U_{X'}$ y $y' \in U_{Y'}$, entonces $|x' \circ \mu|(A)|y' \circ \nu|(B) = |(x' \otimes y') \circ \lambda|(A \times B) \leq \|\lambda\|(A \times B)$. Así que la desigualdad $\|\mu\|(A)\|\nu\|(B) \leq \|\lambda\|(A \times B)$ se sostiene. Para probar la otra desigualdad, sean $z' \in (X\widehat{\otimes}_\epsilon Y)'$ y r en $U_{X'} \times U_{Y'}$ una medida radoniana tal que $\|z'\| = |r|(U_{X'} \times U_{Y'})$, entonces

$$|z' \circ \lambda|(A \times B) \leq \int_{U_{X'} \times U_{Y'}} |(x' \otimes y') \circ \lambda|(A \times B) dr(x', y').$$

Puesto que $|(x' \otimes y') \circ \lambda|(A \times B) \leq \|\mu\|(A)\|\nu\|(B)$, se sigue que $|z' \circ \lambda|(A \times B) \leq \|\mu\|(A)\|\nu\|(B)\|z'\|$ y como es para cualquier $z' \in (X\widehat{\otimes}_\epsilon Y)'$ se obtiene que $\|\lambda\|(A \times B) \leq \|\mu\|(A)\|\nu\|(B)$. □

5 Teorema de Fubini

Si T es un espacio topológico. Una función $f : T \to \mathbb{R}$ es *boreliana* si la imagen inversa de todo conjunto boreliano es boreliano.

Teorema 9. *Sean S y T espacios topológicos hausdorfianos, X y Y espacios de Banach separables, $\mu : bor(S) \to X$ y $\nu : bor(T) \to Y$ funciones σ- aditivas radonianas. Si $f : S \times T \to \mathbb{R}$ es una función boreliana y acotada, entonces los siguientes enunciados son verdaderos:*

i) $f_t : S \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_t(s) = f(s,t)$ *(t fijo) es* μ*-integrable.*

ii) La función vectorial $t \to \int\limits_S f_t(s)d\mu(s)$ *de* T *en* X *es* $(\otimes,\nu)$*-integrable y*

$$\int\limits_{S\times T} f(s,t)d\lambda(s,t) = \int_T \left(\int_S f_t(s)d\mu(s)\right)\otimes d\nu(t).$$

Un enunciado similar es válido para $f_s : T \to \mathbb{R}$, $f_s(t) = f(s,t)$.

Demostración. (i) La función $\theta_t : S \to S\times T$ definida por $\theta_t(s) = (s,t)$; es continua y por consiguiente $f_t = f\circ\theta_t$ es una función boreliana y acotada, y por tanto μ-integrable.

Demostraremos (ii). Existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples que converge uniformemente a $f(s,t)$ por ser esta función boreliana y acotada. Es inmediato que $(f_{n,t}(s))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $f_t(s)$. Sean

$$M = \sup_{(s,t)}|f(s,t)| \quad \text{y} \quad g_n(t) = \int_S f_{n,t}(s)d\mu(s).$$

Entonces g_n es una función simple de T en X y $\|g_n(t)\| \le M\|\mu\|(S)$ uniformemente en n. Ahora

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t) = g(t) = \int_S f_t(s)d\mu(s).$$

Por el teorema de la convergencia acotada $g(t)$ es $(\otimes,\nu)$-integrable. Mostraremos la segunda parte de $ii)$:

$$\int\limits_{S\times T} f(s,t)d\lambda(s,t) = \int_T \left(\int_S f_t(s)d\mu(s)\right)\otimes d\nu(t) \tag{2}$$

para toda función boreliana y acotada. Si $f = \chi(A\times B)$ donde $A\in bor(S)$ y $B\in bor(T)$, entonces

$$\int\limits_{S\times T} f(s,t)d\lambda(s,t) = \lambda(A\times B) = \mu(A)\otimes\nu(B).$$

Por otro lado

$$\int_T \left(\int_S f_t(s)d\mu(s)\right)\otimes d\nu(t) = \int_T \chi(B)\mu(A)\otimes d\nu(t) = \mu(A)\otimes\nu(B).$$

Observemos que la función $E \to \beta(E) = \int_T \left(\int_S \chi(E^t)d\mu(s)\right)\otimes d\nu(t)$ es una función σ- aditiva de $bor(S\times T)$ en $X\widehat{\otimes}_\epsilon Y$. Las funciones σ- aditivas λ y β son radonianas ya que coinciden en conjuntos de la forma $E = A\times B$. Por el teorema 7, $\lambda = \beta$. Por consiguiente las integrales en (2) son iguales si $f = \chi(E)$ para todo $E\in bor(S\times T)$. Por linealidad, dichas integrales son iguales si f es una función simple. En el caso general, uno considera una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones uniformemente acotadas que converge uniformemente como se hizo al principio de la demostración. Entonces

$$\int_{S\times T} f(s,t)d\lambda(s,t) = \lim_{n\to\infty} \int_{S\times T} f_n(s,t)d\lambda(s,t) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \left(\int_S f_{n,t}(s)d\mu(s) \right) \otimes d\nu(t) = \int_T \left(\int_S f_t(s)d\mu(s) \right) \otimes d\nu(t).$$

□

Referencias

[1] Bartle, R. G.: A general bilinear vector integral, Studia Math 15 (1956), 337-352

[2] Bartle, R. G, Dunford, N. y Schwartz J. T.: Weak Compactness and Vector Measures, Canad. J. Math. 7 (1955), 289-305

[3] Bourbaki, N.: Elementos de la historia de las matemáticas, Alianza universidad, (1976)

[4] Diestel, J. y Uhl, J. J.: Vector Measures, American Mathematical Society Mathematical Surveys No 15 (1977)

[5] Gómez, M. y Restrepo, G.: Producto Tensorial de Medidas Radonianas y el Teorema de Fubini, Matemáticas: Enseñanza Universitaria Vol. XVII, N° 1, Universidad del Valle (2009), 23-34

[6] Kawabe, J.: Borel Injective Tensor Product and Convolution of Vector Measure and Their Weak Convergence. Contemporary Mathematics Volume 321, (2003)

[7] Treves, F.: Topological Vector Spaces Distributions and Kernels, Academic Press Inc.(1970)

[8] Schwartz, L.: Radon measures on arbitrary topological spaces and cylindrical measures, Oxford University Press, (1973)

Dirección de los autores

Liliana Posada Vera — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali–Colombia

e-mail: `lilianapos@yahoo.com.mx`

Guillermo Restrepo Sierra — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali–Colombia

e-mail: `guireste@yahoo.com`