

Validación de la formulación numérica de la catenaria elástica con Ansys

Myriam Rocío Pallares Muñoz
Universidad Santo Tomás

Wilson Rodríguez Calderón
Pontificia Universidad Javeriana

Recibido Mar. 31, 2006

Aceptado Mar. 21, 2007

Abstract

The weight of a cable subjects it to a load evenly distributed in all its longitude. The form assumed by the cable is called *catenarie*, and the tension varies in all its longitude. With the present work, the structural answer of a cable subject to its own weight and suspended between two fixed supports located at different level, is characterized. With the developed formulation, the problem consists of the resolution of a non linear system of two equations with two variables in terms of the vertical and horizontal reactions in one of the supports. It is possible to formulate Newton-Raphson method easily, for this specific problem, since the linear system obtained in the formulation of the method is 2×2 , that which allows approaching the solution in an explicit way. With the purpose of demonstrating the validity and importance of the numerical formulation, a comparison with the analytic formulation of cables with supports located at same level, is made, for this, it is appealed some of the results found in the numerical exercise, like they are, the tension in the lowest point (H) and the horizontal coordinate ($x(s)$) in this point, since these, are beginning parameters of the analytic formulation. Also, an identical model is made with an educational version of the commercial program of finite elements, Ansys. Finally, some graphs that present the geometry of the cable and the values of tension in each one of the equally spaced points are schematized for the three formulations.

Keywords: catenarie, tension, Newton-Raphson.

MSC(2000): 00A72, 74G15

Resumen

El peso de un cable lo somete a una carga uniformemente distribuida en toda su longitud. La forma asumida por el cable se denomina *catenaria* y la tensión varía en toda su longitud. Con este trabajo se caracteriza la respuesta estructural de un cable sometido al efecto de su peso propio y suspendido entre dos apoyos fijos situados a distinto nivel. Con la formulación desarrollada, el problema se reduce a la resolución de un sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas en términos de las reacciones vertical y horizontal en uno de los apoyos. Es posible formular fácilmente el método de Newton-Raphson para este problema específico, dado que el sistema lineal obtenido en el planteamiento es 2×2 , lo cual permite abordar la solución de manera explícita. Con el fin de demostrar la validez y la importancia de la formulación numérica, se efectúa una comparación con la formulación analítica de cables con soportes localizados a igual nivel, para lo cual, se recurre a algunos de los resultados encontrados en el ejercicio numérico, como son, la tensión en el punto más bajo del cable (H) y la coordenada horizontal ($x(s)$) en este punto, ya que estos, son parámetros de partida de la formulación analítica. También, se realiza un modelo de idénticas características con una versión educativa del programa comercial de elementos finitos Ansys. Finalmente, se esquematizan unas gráficas donde se presentan la geometría del cable y los valores de tensión en cada uno de los puntos equiespaciados, para las tres formulaciones.

Palabras y frases claves: catenaria, tensión, Newton-Raphson.

1 Descripción del problema físico

Desde el punto de vista del análisis estructural, los cables son elementos con una dimensión sensiblemente mayor que las otras dos (su longitud), incapaces de resistir esfuerzos de flexión y/o de compresión, pero que, en cambio, presentan una gran resistencia a la tracción. Bajo una determinada ley de cargas, inclinadas respecto al eje longitudinal del cable, éste se deforma de modo que los esfuerzos de tracción generados resistan la carga aplicada. Según Merritt (1992), la eficiencia estructural del cable se debe a la uniformidad de estos esfuerzos de tracción (denominados habitualmente *esfuerzos de tensión*) en la sección transversal del cable y a que su variación a lo largo del eje longitudinal de éste es pequeña. Dado que la magnitud de estos esfuerzos depende en gran medida de la deformación experimentada por el cable y puesto que estas deformaciones no suelen ser despreciables, las ecuaciones que describen el comportamiento estructural del cable acostumbran a ser no lineales. A modo ilustrativo, en este trabajo se plantea la resolución de un problema clásico de la teoría de cables, conocido como *problema de la catenaria elástica*¹. El enfoque utilizado es el propuesto por Irvine (1992).

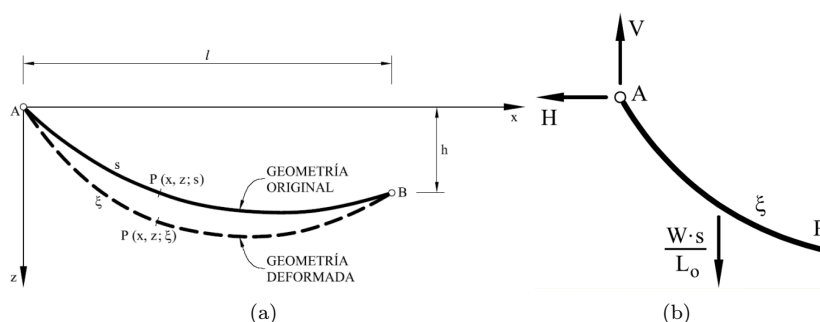


Figura 1: Catenaria elástica con soportes situados a distinto nivel: (a) Geometría y definición del problema; (b) equilibrio estático de un segmento deformado de cable.

En referencia a la figura 1a, se considera un cable de longitud inicial L_0 , suspendido entre dos apoyos fijos A y B situados a distinto nivel. La distancia horizontal entre ambos apoyos es l , mientras que su diferencia de nivel es h . La curva descrita originalmente por el cable en ausencia de cargas (es decir, cuando el cable no se ha deformado), puede parametrizarse en coordenadas cartesianas por una coordenada lagrangiana s . Para un punto P sobre el cable no deformado, esta coordenada s se define como la longitud del segmento de cable comprendido entre el apoyo A (origen de coordenadas) y el punto P en cuestión.

Bajo los efectos del peso propio, el cable se deforma y el punto P pasa a ocupar una nueva posición. La curva deformada puede parametrizarse en coordenadas cartesianas por una nueva coordenada ξ . Para el punto P , esta coordenada se

¹La palabra *catenaria* (en latín, cadena) se debe a que los primeros problemas de la teoría de cables se ocupaban de la forma que debía adoptar una cadena bajo el efecto de su peso propio.

define como la longitud del tramo de cable deformado comprendido entre el apoyo A y el punto sobre la geometría deformada que correspondería al punto P en la geometría original. Esta definición introduce una primera ecuación, ya que ha de satisfacerse la relación geométrica,

$$\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = 1 \quad (1)$$

que equivale a exigir que la coordenada ξ sea parámetro arco de la geometría deformada.

Por otra parte, con base en la figura 1b, el equilibrio estático del segmento de cable deformado comprendido entre el apoyo A y un punto genérico de coordenada ξ , proporciona las ecuaciones,

$$T(\xi) \frac{dx}{d\xi} = H \quad (2)$$

$$T(\xi) \frac{dz}{d\xi} = V - \frac{Ws(\xi)}{Lo} \quad (3)$$

para $0 < \xi < L$, donde $T(\xi)$ es la tensión del cable (descrita según la coordenada ξ), V es la reacción vertical en el apoyo A , H es la correspondiente reacción horizontal, que además coincide con la componente horizontal (constante) de la tensión $T(\xi)$ del cable², W es el peso total del cable y, por último, L es la longitud total del cable deformado. La ecuación (2) corresponde al equilibrio horizontal de fuerzas, mientras que la ecuación (3) está asociada al equilibrio vertical e incorpora además, la condición de conservación de masa del cable. En cuanto a la ecuación de equilibrio de momentos, según Irvine (1992), puede demostrarse que es redundante, ya que las ecuaciones (2) y (3) garantizan que dicha ecuación se satisface automáticamente.

De acuerdo con la práctica habitual en análisis estructural, se admite la hipótesis de elasticidad lineal para el material del cable. La correspondiente ecuación constitutiva (*ley de Hooke*) puede expresarse como:

$$T(s) = EAo \left(\frac{d\xi}{ds} - 1 \right) \quad (4)$$

donde E es el módulo de Young del cable y Ao es el área (supuesta constante) de su sección transversal en la geometría no deformada. Se hace observar que la relación (4) caracteriza la tensión del cable en términos de la coordenada material s y no según la coordenada ξ .

En principio, las ecuaciones de equilibrio (2) y (3), combinadas con la ecuación constitutiva (4) y sujetas a la relación geométrica (1) y a unas condiciones de

²El hecho de que la componente horizontal de la tensión del cable sea constante es consecuencia directa de la ausencia de cargas horizontales.

contorno apropiadas, pueden integrarse, obteniendo la tensión $T(\xi)$ en el cable, las reacciones vertical V y horizontal H en el apoyo A , y la parametrización en coordenadas cartesianas de la geometría deformada. Las condiciones de contorno en cuestión son:

$$x = 0, \quad z = 0, \quad \text{para } s = 0, \quad \xi = 0 \quad (5)$$

$$x = l, \quad z = h, \quad \text{para } s = Lo, \quad \xi = L \quad (6)$$

que equivalen a exigir que los dos apoyos A y B del cable son fijos.

En realidad, a efectos prácticos, no interesa obtener las variables del problema parametrizadas por la coordenada ξ , sino que conviene expresarlas según la coordenada material s , mucho más intuitiva. Para ello, se elevan al cuadrado las ecuaciones de equilibrio (2) y (3) y se substituyen en la relación geométrica (1), obteniendo la siguiente expresión para la tensión del cable:

$$T(s) = \left[H^2 + \left(V - \frac{Ws}{Lo} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

para $0 < s < Lo$. Por otra parte, para determinar la parametrización en coordenadas cartesianas del cable sin deformar (según la coordenada s), es preciso aplicar la regla de la cadena, que permite relacionar las derivadas respecto a la coordenada ξ con las derivadas respecto a la coordenada s ; es decir,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \quad (8)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{ds} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que la derivada de ξ respecto a s viene dada como función de la tensión $T(s)$ del cable por la ley de Hooke (4) y substituyendo $T(s)$ por su expresión según (7), las ecuaciones de equilibrio (2) y (3) se pueden reescribir como:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{EAo} + H \left[H^2 + \left(V - \frac{Ws}{Lo} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{EAo} \left(V - \frac{Ws}{Lo} \right) + \left(V - \frac{Ws}{Lo} \right) \left[H^2 + \left(V - \frac{Ws}{Lo} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (11)$$

es decir, dos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, del tipo variables separadas, que pueden integrarse analíticamente junto con las dos condiciones de contorno correspondientes al apoyo A , dadas por (5). El resultado es:

$$x(s) = \frac{Hs}{EAo} + \frac{HLo}{W} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} - \frac{Ws}{HLo} \right) \right] \quad (12)$$

$$z(s) = \frac{Ws}{EAo} \left(\frac{V}{W} - \frac{s}{2Lo} \right) + \frac{HLo}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V}{H} - \frac{Ws}{HLo} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (13)$$

para $0 < s < Lo$.

La solución del problema no está todavía completa, ya que tanto en la expresión (7) para la tensión del cable, como en las expresiones (12) y (13) que definen la geometría no deformada, aparecen las reacciones vertical V y horizontal H en el apoyo A , que son incógnitas adicionales del análisis. Sin embargo, en el desarrollo de las expresiones anteriores no han intervenido las condiciones de contorno correspondientes al apoyo B , dadas por (6). Si se exige ahora que las expresiones (12) y (13) satisfagan además esas condiciones de contorno, se obtiene un sistema no lineal de ecuaciones definido por una ecuación trascendente y una algebraica en términos de las reacciones H y V . Este sistema es de la forma:

$$l = f(H, V) \quad (14)$$

$$h = g(H, V) \quad (15)$$

con

$$f(H, V) = \frac{HLo}{EAo} + \frac{HLo}{W} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V-W}{H} \right) \right] \quad (16)$$

$$g(H, V) = \frac{WLo}{EAo} \left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2} \right) + \frac{HLo}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \quad (17)$$

Una vez resueltas las ecuaciones no lineales (14) y (15), los valores H y V obtenidos pueden substituirse en las expresiones (7), (12) y (13), de modo que la respuesta estructural del cable queda completamente caracterizada.

2 Problema numérico

Se trata entonces de determinar, la tensión $T(s)$ del cable y representarla gráficamente junto con la geometría no deformada del mismo, definida por las coordenadas cartesianas $x(s)$ y $z(s)$. Los datos relevantes del problema se proporcionan en el cuadro 1.

Cuadro 1: Datos del problema

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
1	20 m	Ao	$2 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
h	8.5 m	E	$1.5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$
Lo	28 m	w	0.85 kN/m

1. La matriz jacobiana $\mathbf{J}(H, V)$ del sistema no lineal de ecuaciones definido por (14) y (15), puede calcularse analíticamente (Irvine, 1992) así:

$$\mathbf{J}(H, V) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial H} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial g}{\partial H} & \frac{\partial g}{\partial V} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial H} = & \frac{Lo}{EAo} + \frac{Lo}{W} \left[\sinh^{-1} \left(\frac{V}{H} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{V-W}{H} \right) \right] \\ & - \frac{LoV}{WH} \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ & - \frac{(V-W)}{H} \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{Lo}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} - \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial H} = & \frac{Lo}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{1/2} - \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \\ & - \frac{Lo}{W} \left\{ \left(\frac{V}{H} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \\ & - \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial V} = & \frac{Lo}{EAo} + \frac{Lo}{W} \left\{ \left(\frac{V}{H} \right) \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \\ & - \frac{Lo}{W} \left\{ \left(\frac{V-W}{H} \right) \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

2. Muchas de las operaciones que intervienen en las expresiones (19) a (22) son repetitivas. Este hecho se tiene en cuenta en la implementación, de cara a minimizar el costo computacional.
3. A efectos de cálculo, para evaluar la función $\sinh^{-1}(x)$, para $x \geq 0$, se utiliza su expresión logarítmica (Abramowitz y Stegun, 1972; Press et al., 1992),

$$\sinh^{-1}(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \quad (23)$$

mientras que para $x < 0$, por cuestiones de error de redondeo, es preferible utilizar la propiedad,

$$\sinh^{-1}(-x) = -\sinh^{-1}(x) \quad (24)$$

4. Una idea muy simple que sirve para escoger las aproximaciones iniciales consiste en suponer que el cable es rígido (es decir, inextensible y por tanto, E es muy grande) y que los apoyos están situados al mismo nivel (es decir, $h = 0$). En ese caso, el problema se reduce a la versión clásica del problema de la catenaria (Irvine, 1992) y se obtiene que la reacción vertical en el apoyo A es exactamente $V = W/2$, mientras que la reacción horizontal H debe satisfacer la ecuación trascendente:

$$\sinh \left(\frac{Wl}{2HL_o} \right) = \frac{W}{2H} \quad (25)$$

Considerando únicamente los primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la función $\sinh(x)$, es decir,

$$\sinh(x) \approx x + \frac{x^3}{6} \quad (26)$$

y teniendo en cuenta que $H > 0$, el valor de H puede estimarse mediante la expresión:

$$H \approx \frac{W}{2\sqrt{6}} \frac{l}{Lo} \sqrt{\frac{l}{Lo-l}} \quad (27)$$

3 Planteamiento de la solución numérica

El desarrollo de la solución se presenta en tres fases, inicialmente se hace el planteamiento del método de Newton – Raphson, adaptado al problema de la catenaria del cable, después se describe la solución explícita del sistema lineal de ecuaciones encontrado en la formulación del método iterativo, y finalmente se establecen los criterios de convergencia necesarios para determinar el fin de este proceso.

3.4 Planteamiento del método de Newton-Raphson, adaptado al problema de la catenaria

El primer paso consiste en definir el vector de incógnitas x ,

$$\bar{x} = \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Como se puede observar en (14 y 15) el sistema de ecuaciones no lineal, es de dos incógnitas ($H =$ Reacción Horizontal en A y $V =$ Reacción Vertical en A), con obviamente, dos ecuaciones. Por tanto, no es un sistema robusto, lo que mas adelante da ventajas para la solución explícita del sistema de ecuaciones lineal asociado al Método de Newton-Raphson.

Seguidamente se toman valores de inicio de acuerdo a la versión del problema de catenaria planteada por Irvine en 1992. Esta versión propone como valores iniciales los siguientes:

$$\bar{x}^0 = \begin{Bmatrix} \frac{W}{2\sqrt{6}} & \frac{l}{Lo} & \sqrt{\frac{l}{Lo-l}} \\ & \left(\frac{W}{2}\right) & \end{Bmatrix} = \begin{matrix} x_1 = H \\ x_2 = V \end{matrix} \quad (29)$$

la matriz Jacobiana está definida por:

$$J(\bar{x}^k) = J\left(\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix}^k\right) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial H} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial g}{\partial H} & \frac{\partial g}{\partial V} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

y el vector de funciones no lineales,

$$\bar{f}(\bar{x}^k) = \begin{Bmatrix} f(H, V) - l \\ g(H, V) - h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

A partir del sistema de ecuaciones lineales clásico del método de Newton Raphson, puede obtenerse el vector de correcciones Δx^{k+1} , utilizando la ecuación,

$$J(x^k) \Delta \bar{x}^{k+1} = \bar{f}(\bar{x}^k) \quad (32)$$

El sistema de ecuaciones lineales descrito por (32) es 2×2 , por tanto la solución explícita es totalmente viable y así se resuelve más adelante en el apartado 4.2.

El vector de correcciones Δx^{k+1} , tiene la forma,

$$\Delta \bar{x}^{k+1} = \begin{Bmatrix} \Delta H \\ \Delta V \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (33)$$

Tomando (30), (31) y (33), y reemplazando en (32), el sistema de ecuaciones lineal queda planteado de la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial H} & \frac{\partial f}{\partial V} \\ \frac{\partial g}{\partial H} & \frac{\partial g}{\partial V} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta H \\ \Delta V \end{Bmatrix}^{k+1} = - \begin{Bmatrix} f(H, V) - l \\ g(H, V) - h \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Del sistema (34) se obtiene el vector de correcciones Δx^{k+1} , pudiéndose plantear la función vectorial de iteraciones, como sigue:

$$\begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix}^{k+1} = \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix}^k + \begin{Bmatrix} \Delta H \\ \Delta V \end{Bmatrix}^{k+1} \quad (35)$$

Por supuesto la ecuación (35) requiere de criterios de convergencia que permitan finalizar satisfactoriamente el proceso iterativo. Estos criterios se describen en el apartado 4.3.

3.5 Solución explícita del sistema de ecuaciones lineales del algoritmo de Newton-Raphson

Desarrollando la ecuación (34), se encuentra:

$$\frac{\partial f}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V = -f(H, V) + l \quad (36)$$

$$\frac{\partial g}{\partial H} \Delta H + \frac{\partial g}{\partial V} \Delta V = -g(H, V) + h \quad (37)$$

Despejando ΔH de la ecuación (36) se obtiene:

$$\Delta H = \frac{-f(H, V) + l - \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V}{\frac{\partial f}{\partial H}} \quad (\text{primera formulación}) \quad (38)$$

Reemplazando (38) en (37), se encuentra:

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial H}}{\frac{\partial f}{\partial H}} \left(-f(H, V) + l - \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V \right) + \frac{\partial g}{\partial V} \Delta V = -g(H, V) + h \quad (39)$$

Tomando la ecuación (39), y multiplicándola por df/dH , se tiene que:

$$-\frac{\partial g}{\partial H} f(H, V) + \frac{\partial g}{\partial H} l - \frac{\partial f}{\partial V} \frac{\partial g}{\partial H} \Delta V + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{\partial f}{\partial H} \Delta V = -\frac{\partial f}{\partial H} g(H, V) + \frac{\partial f}{\partial H} h \quad (40)$$

Despejando de (40) se halla la siguiente expresión para ΔV :

$$\Delta V = \frac{\frac{\partial g}{\partial H} f(H, V) - \frac{\partial g}{\partial H} l - \frac{\partial f}{\partial H} g(H, V) + \frac{\partial f}{\partial H} h}{-\frac{\partial f}{\partial V} \frac{\partial g}{\partial H} + \frac{\partial g}{\partial V} \frac{\partial f}{\partial H}} \quad (\text{primera formulación}) \quad (41)$$

Si se realiza el proceso de sustitución de manera inversa, es decir, despejando ΔH de la ecuación (37) y reemplazando su expresión en (36), se obtiene la misma expresión para ΔV , con un cambio de signos en el numerador y en el denominador que no alteran su resultado, sin embargo, la expresión para ΔH es diferente y presenta un problema numérico si tenemos en cuenta que el denominador es dg/dH , y este se anula para el valor $V = W/2$, escogido como valor de prueba inicial. Este inconveniente puede solucionarse si se escoge un factor arbitrario, por ejemplo 0.4, aplicado a $W/2$, así:

$$\bar{x}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{W}{2\sqrt{6}} \quad \frac{l}{Lo} \quad \sqrt{\frac{l}{Lo-l}} \right) = x_1 = H \\ 0,4 \quad \left(\frac{W}{2} \right) = x_2 = V \end{array} \right. \quad (42)$$

Es importante tener en cuenta que en un problema con apoyos situados al mismo nivel, esta formulación definitivamente fallará, dado que la solución para V es exactamente $W/2$.

A continuación, se presenta el desarrollo para las expresiones de ΔH y ΔV siguiendo el procedimiento planteado anteriormente.

Despejando ΔH de la ecuación (37) se obtiene:

$$\Delta H = \frac{-g(H, V) + h - \frac{\partial g}{\partial V} \Delta V}{\frac{\partial g}{\partial H}} \quad (\text{segunda formulación}) \quad (43)$$

Reemplazando (42) en (36), se encuentra:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial H}}{\frac{\partial g}{\partial H}} \left(-g(H, V) + h - \frac{\partial g}{\partial V} \Delta V \right) + \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V = -f(H, V) + l \quad (44)$$

Tomando la ecuación (44), y multiplicándola por dg/dH , se tiene que:

$$-\frac{\partial f}{\partial H} g(H, V) + \frac{\partial f}{\partial H} h - \frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial g}{\partial V} \Delta V + \frac{\partial g}{\partial H} \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V = -\frac{\partial g}{\partial H} f(H, V) + l \quad (45)$$

Despejando de (45) se halla la siguiente expresión para ΔV :

$$\Delta V = \frac{\frac{\partial f}{\partial H} g(H, V) - \frac{\partial f}{\partial H} h - \frac{\partial g}{\partial H} f(H, V) + \frac{\partial g}{\partial H} l}{-\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial g}{\partial V} + \frac{\partial g}{\partial H} \frac{\partial f}{\partial V}} \quad (\text{segunda formulación}) \quad (46)$$

3.6 Criterios de convergencia de la solución

Se establecen dos criterios de convergencia, aplicando la norma euclídea a los vectores obtenidos. Como los vectores son sólo de dos términos, la norma euclídea puede implementarse explícitamente.

La norma euclídea se determina como:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 x_i^2 \right)} \quad (47)$$

La formulación del primer criterio sobre el error relativo del vector solución es,

$$r^K = \frac{\|\bar{x}^K - \bar{x}^{K+1}\|}{\|\bar{x}^{K+1}\|} \leq \text{tol } x \quad (48)$$

donde, la tolerancia $\text{tol } x$ debe escogerse adecuadamente dependiendo de la precisión de la máquina y de las variables.

El segundo criterio de convergencia se aplica a la función de ecuaciones no lineales, así:

$$\|\bar{f}(\bar{x}^K)\| \leq \text{tol } f \quad (49)$$

Donde, la tolerancia $\text{tol } f$ debe escogerse con el mismo criterio mencionado para $\text{tol } x$.

4 Planteamiento de la solución analítica

Si se supone que sobre el cable actúa una carga distribuida que somete cada elemento ds de su longitud a una fuerza wds , donde w es constante, es posible considerar el diagrama de cuerpo libre de la figura 2.

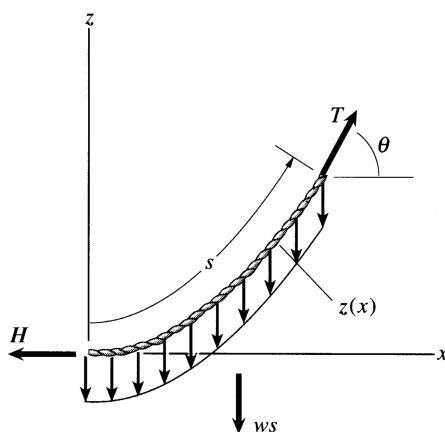


Figura 2: Diagrama de cuerpo libre. Equilibrio estático de un segmento de cable deformado por su propio peso.

El diagrama de cuerpo libre de la figura 2, se obtiene al cortar el cable en su punto más bajo y en un punto a una distancia s . H y T son las tensiones en el punto más bajo y en s , respectivamente. La carga distribuida ejerce una fuerza ws hacia abajo. El origen del sistema de coordenadas se halla en el punto más bajo. Si $z(x)$ es la función de la curva descrita por el cable en el plano $x - z$, el objetivo es determinar $z(x)$ y T .

Del diagrama de cuerpo libre de la figura 2, se obtienen las ecuaciones de equilibrio,

$$T \operatorname{sen} \theta = ws \quad \text{y} \quad T \operatorname{cos} \theta = H \quad (50)$$

De la división de estas dos expresiones,

$$\tan \theta = \frac{w}{H} s = as, \quad (51)$$

donde, la constante $a = \frac{w}{H}$ y la pendiente del cable $\frac{dz}{dx} = \tan \theta$, por lo que,

$$\frac{dz}{dx} = as. \quad (52)$$

La derivada de la ecuación (52) con respecto a x es,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dx} \right) = a \frac{ds}{dx}, \quad (53)$$

y por la relación, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, es posible escribir la derivada de s con respecto a x como,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \sigma^2}, \quad (54)$$

donde σ se define como la pendiente. Con la ecuación (54) es posible escribir la ecuación (52) como,

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} = a dx, \quad (55)$$

La pendiente es $\sigma = 0$ en $x = 0$. Si se integra la expresión (55),

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} = \int_0^x a dx, \quad (56)$$

se determina la pendiente en función de x ,

$$\sigma = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (e^{ax} - e^{-ax}) = \sinh ax. \quad (57)$$

Integrando la ecuación (57) con respecto a x , se obtiene la curva descrita por el cable (*catenaria*),

$$z = \frac{1}{2a} (e^{ax} + e^{-ax} - 2) = \frac{1}{a} (\cosh ax - 1). \quad (58)$$

Con base en la ecuación (50) y la relación $dx = \cos\theta ds$, se obtiene la tensión en el cable,

$$T = \frac{H}{\cos\theta} = H \frac{ds}{dx}. \quad (59)$$

Sustituyendo la ecuación (54) en la expresión (59) y utilizando la ecuación (57), se obtiene la tensión en el cable en función de x ,

$$T = H \sqrt{1 + \frac{1}{4} (e^{ax} - e^{-ax})^2} = H \cosh ax. \quad (60)$$

De la ecuación (51) la longitud del cable (s) es,

$$s = \frac{1}{a} \tan\theta = \frac{\sigma}{a}, \quad (61)$$

y sustituyendo la ecuación (57) en la ecuación (61), se obtiene una expresión para la longitud s del cable en el intervalo horizontal desde su punto más bajo hasta x ,

$$s = \frac{1}{2a} (e^{ax} - e^{-ax}) = \frac{\sinh ax}{a}. \quad (62)$$

5 Formulación de la solución con Ansys³

En este apartado se presentan algunas definiciones básicas de la formulación matricial del elemento finito con el que se modela el problema.

5.1 Elemento LINK10: sólo tensión o compresión

Es un elemento tridimensional en el que la matriz de rigidez es bilineal, lo que resulta en un elemento de sólo tensión uniaxial (o sólo compresión). Con la opción de sólo tensión, la rigidez es removida del elemento si el elemento entra a compresión (simulación de la condición de cable suspendido). El elemento es no lineal y requiere una solución iterativa.

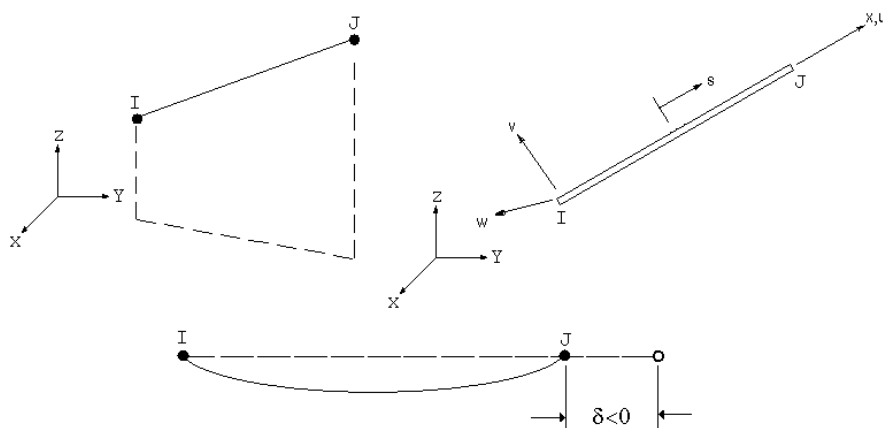


Figura 3: Elemento finito LINK10. Figura tomada del manual de elementos del programa

5.2 Datos de entrada y salida del elemento

La geometría, localización de los nodos y sistema de coordenadas se presentan en la figura 3. El elemento se define por medio de dos nodos (I, J), el área de la sección transversal (A), una deformación inicial (ε^{in}), y las propiedades isotrópicas del material (módulo de elasticidad, E , y densidad, ρ). El eje X se orienta a lo largo del elemento desde el nodo I hacia el J . En el cuadro 2 se presenta un resumen de los datos de entrada del elemento.

La deformación inicial en el elemento (ε^{in}), está dada por δ/L , donde δ es la diferencia entre la longitud del elemento, 1, y la longitud de deformación cero, L_0 (ver datos en el cuadro 1). La deformación inicial es negativa e indica la condición de suspensión en el cable. En la formulación numérica del elemento se tiene en

³Para la implementación del modelo de elementos finitos se utilizó la versión educativa del programa.

Cuadro 2: Datos de entrada del elemento

Nombre del elemento	LINK10
Nodos	I,J
Grados de libertad	UX, UY, UZ
Propiedades del material	Módulo de elasticidad, Densidad

cuenta una rigidez muy pequeña ($AE \times 10^{-6}/L$) con el fin de prevenir porciones no restringidas o de “libre flotación” cuando el cable está suspendido.

Los datos de salida del elemento son:

- desplazamientos nodales
- fuerza axial, esfuerzos y deformaciones

5.3 Funciones de forma

Las funciones de forma empleadas para la interpolación de la variable principal (desplazamiento) son,

$$u = \frac{1}{2} (u_I (1 - s) + u_J (1 + s)) \quad (63)$$

$$v = \frac{1}{2} (v_I (1 - s) + v_J (1 + s)) \quad (64)$$

$$w = \frac{1}{2} (w_I (1 - s) + w_J (1 + s)) \quad (65)$$

donde, u, v, w = componentes de desplazamiento en cualquier punto del elemento y, s = coordenada natural en dirección axial.

5.4 Definición de las matrices de rigidez, masa, rigidez al esfuerzo y vector de carga

Las matrices y los vectores de carga se generan en el sistema de coordenadas del elemento y se convierten después al sistema de coordenadas globales.

La matriz de rigidez del elemento es,

$$[K_l] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde,

A = área de la sección transversal del elemento
 E = módulo de elasticidad
 L = longitud del elemento

$C_1 =$ coeficiente de rigidez = $\begin{cases} 1,0 \text{ en tensión} \\ 1,0 \times 10^{-6} \text{ en compresión} \end{cases}$

La matriz de masa del elemento condensada se define por,

$$[M_l] = \frac{\rho AL (1 - \varepsilon^{in})}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde,

ρ = densidad
 ε^{in} = deformación inicial

La matriz de rigidez al esfuerzo del elemento es,

$$[S_l] = \frac{F}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

donde: $F = \begin{cases} \text{para la primera iteración: } AE\varepsilon^{in} \\ \text{siguientes iteraciones: la fuerza axial en el elemento} \end{cases}$

$C_2 =$ coeficiente de rigidez al esfuerzo = $\begin{cases} 1,0 \text{ en tensión} \\ \frac{AE}{F10^6} \text{ en compresión} \end{cases}$

La deformación inicial se usa en el cálculo de la matriz de rigidez al esfuerzo para la primera iteración. La rigidez al esfuerzo proporciona estabilidad numérica en este tipo de problemas.

El vector de carga aplicado al elemento es,

$$\{F_l\} = AE\varepsilon^{in} [-C_1 \quad 0 \quad 0 \quad C_1 \quad 0 \quad 0]^T$$

6 Resultados obtenidos de la formulación numérica

En la figura 4 se observa la geometría del cable y los puntos de menor y mayor tensión, los cuales corresponden al nodo más bajo y más alto de la geometría,

respectivamente. El apoyo de mayor tensión es el superior, dado que este asume en mayor proporción el peso.

Cuadro 3: Resultados de la formulación numérica

s [m]	x(s) [m]	z(s) [m]	Tensión [kN/m]
0	0	0	17.172
2	0.765	1.86	15.6
4	1.61	3.683	14.058
6	2.552	5.457	12.557
8	3.61	7.163	11.112
10	4.811	8.77	9.751
12	6.184	10.231	8.513
14	7.754	11.475	7.459
16	9.529	12.397	6.676
18	11.469	12.878	6.268
18.8*	12.269*	12.925*	6.229 *
20	13.467	12.831	6.308
22	15.384	12.266	6.788
24	17.125	11.279	7.625
26	18.66	9.991	8.716
28	20	8.5	9.98

* Resultados del punto más bajo
(punto de tensión mínima)
 $s^* = 18.820$ m
 $x^* = 12.269$ m
 $z^* = 12.925$ m
 $T^* = 6.229$ KN

$H = 6.299$ KN
 $V = 16.003$ KN

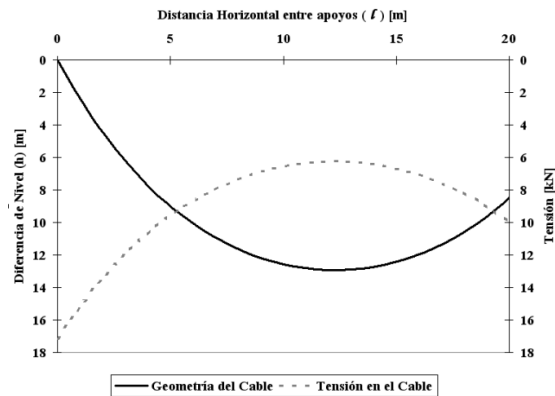


Figura 4: Solución numérica con soportes situados a distinto nivel. Resultados de tensión y geometría deformada del cable.

7 Resultados obtenidos de la formulación analítica

Es posible realizar una comparación de los resultados obtenidos del planteamiento numérico, empleando la formulación del problema de cargas uniformemente distribuidas en cables referenciado en el apartado (4). No obstante, se hace necesario recurrir a algunos de los resultados encontrados en el ejercicio numérico, como son, la tensión en el punto más bajo del cable (H) y la coordenada horizontal ($x(s)$) en este punto, ya que estos, son parámetros de entrada de la formulación analítica. Los resultados de geometría y tensión en el cable se ilustran en la figura

5.

Cuadro 4: Resultados de la formulación numérica $a = \frac{w}{H} = 0,136458501$

s [m]	x(s) [m]	z(s) [m]	Tensión [kN/m]
0	12.269	12.905	17.198
2	11.504	11.043	15.616
4	10.659	9.219	14.065
6	9.717	7.443	12.556
8	8.659	5.739	11.107
10	7.458	4.134	9.743
12	6.085	2.675	8.503
14	4.515	1.435	7.449
16	2.740	0.518	6.669
18	0.800	0.044	6.266
18.8*	0.000*	0.000*	6.229*
20	1.198	0.098	6.312
22	3.115	0.672	6.800
24	4.856	1.669	7.647
26	6.391	2.968	8.752
28	7.731	4.470	10.029

Porción de cable (1)

Porción de cable (2)

* Origen de coordenadas, para el planteamiento analítico.

$x(s)$ analítico = $x * -x(s)_i$
(hacia adelante y hacia atrás de x^*)

Nota: las coordenadas x se diferencian analítica y numéricamente, dado que el origen del sistema de referencia no es el mismo (ver figuras 1 y 2).

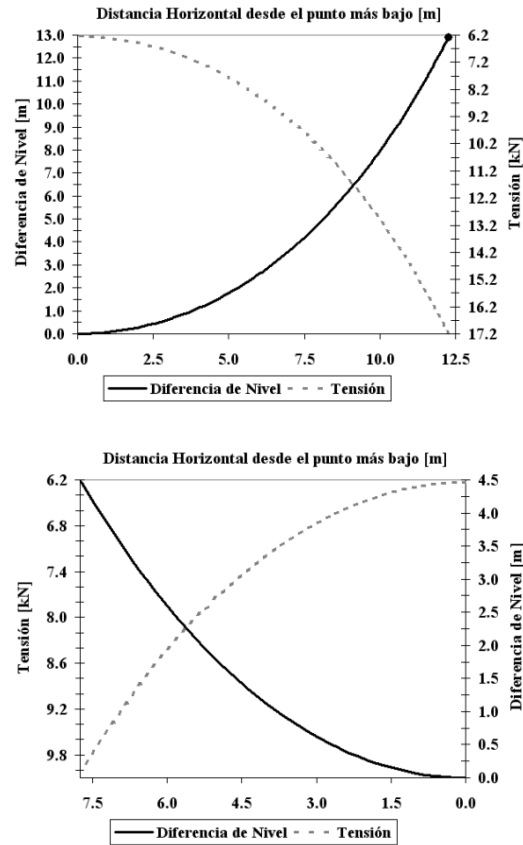


Figura 5: Solución analítica con soportes situados al mismo nivel. Resultados de tensión y geometría deformada de la primera y segunda porción del cable.

8 Resultados obtenidos de la formulación con Ansys

En la figura 6 se presenta el desplazamiento del cable en dirección X . Los resultados de la geometría deformada en esta dirección equivalen a la suma algebraica entre las coordenadas iniciales de los puntos y el desplazamiento respectivo. Estos resultados se presentan en el cuadro 5 y se observa que coinciden de manera importante con los valores obtenidos de la formulación numérica de Irvine presentados en el cuadro 3. Los desplazamientos mínimo y máximo del cable se señalan

en la figura 6 con la siglas MN y MX, respectivamente.

Cuadro 5: Resultados de desplazamiento horizontal (Ansys)

Coord. x [m]	Ux [m]	x(s) [m]
0	0	0
1.429	-0.663	0.765
2.857	-1.247	1.611
4.286	-1.733	2.552
5.714	-2.103	3.611
7.143	-2.331	4.812
8.571	-2.387	6.184
10	-2.246	7.754
11.429	-1.901	9.528
12.857	-1.391	11.467
13.429*	-1.163*	12.267*
14.289	-0.823	13.463
15.715	-0.334	15.381
17.143	-0.021	17.122
18.571	0.087	18.658
20	0	20

* Punto más bajo del cable
 $x^* = 12,266m$

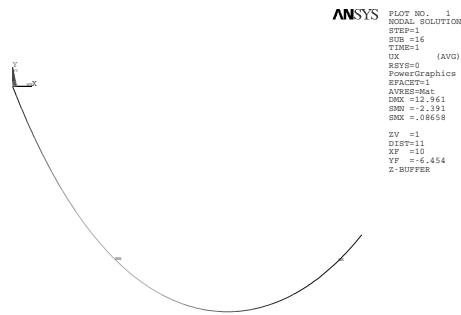


Figura 6: Desplazamiento en dirección X (Ansys)

Los resultados de la geometría deformada en dirección Y (coordenadas verticales) y Tensión en el cable, se presentan en los cuadros 6 y 7. Se observa que estos, coinciden significativamente con los valores obtenidos de la formulación numérica de Irvine presentados en el cuadro 3. Las pequeñas variaciones en los resultados corresponden a la diferencia entre los dos algoritmos.

9 Comparación de resultados

En el cuadro 8 se reúnen los resultados obtenidos de las formulaciones numérica y de Ansys, con el fin de realizar una comparación y establecer la validación del algoritmo numérico que resuelve el problema de la catenaria elástica para soportes localizados a distinta altura.

Cuadro 6:
Resultados
de desplazamiento vertical
(Ansys)

s [m]	z(s) [m]
0	0.000
2	1.856
4	3.676
6	5.448
8	7.150
10	8.755
12	10.214
14	11.456
16	12.378
18	12.860
18.8*	12.907*
20	12.816
22	12.254
24	11.271
26	9.987
28	8.500

* Punto más
bajo del
cable
 $z^* =$
12,907m

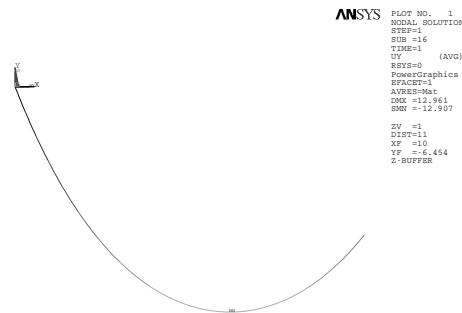


Figura 7: Gráfica Desplazamiento en dirección Y (Ansys)

10 Conclusiones

- El sistema no lineal del problema de la catenaria es realmente pequeño, ya que cuenta solo con dos incógnitas (H y V). Factor determinante para la formulación explícita del sistema lineal del Método Newton-Raphson y de la norma euclídea de los vectores.
- La solución del problema numérico es iterativa, por lo que se requieren de criterios de convergencia aplicados a través del cálculo del error relativo de la solución y la evaluación de la función no lineal vectorial evaluada en el vector solución en cada iteración. Dado que el vector solución consta tan sólo de dos términos, la norma euclídea se plantea explícitamente.

Cuadro 7:
Resultados de
Tensión (Ansys)

s [m]	T [kN]
0	17.106
2	15.536
4	13.996
6	12.497
8	11.058
10	9.702
12	8.472
14	7.430
16	6.664
18	6.2759
18.8*	6.245*
20	6.310
22	6.766
24	7.584
26	8.663
28	9.917

* Punto más
bajo del
cable
z* =
12,907m

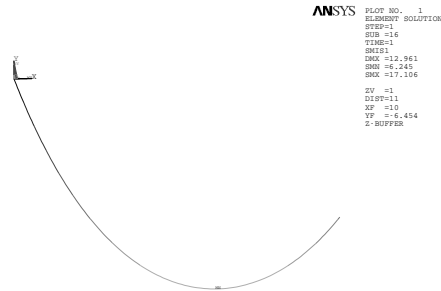


Figura 8: Gráfica de Tensión en el cable (Ansys)

- La solución explícita del sistema lineal de Newton – Raphson, se lleva a cabo por sustitución. Dicha sustitución puede efectuarse de dos maneras (expresiones 38, 41, 43 y 46 del apartado 3.2). No obstante, una de ellas genera una expresión para ΔH que se indetermina, si se tiene en cuenta que el término del denominador (dg/dH) se anula para $V = W/2$. Esta particularidad, lleva a que la formulación falle numéricamente para problemas de catenaria donde los apoyos se encuentran localizados al mismo nivel, dado que la solución para V es exactamente $W/2$. Por este motivo, se recomienda utilizar la primera formulación explícita obtenida para la solución del sistema lineal de Newton-Raphson (expresiones 38 y 41), ya que, esta se constituye en una forma generalizada que funciona para apoyos localizados a igual y a diferente nivel.
- La utilización de la segunda formulación (expresiones 43 y 46), requiere de un factor multiplicador para $W/2$ (por ejemplo 0.4). Esto permite inicializar V sin indeterminar la expresión para ΔH . Esta formulación sólo funciona

Cuadro 8: Comparación de resultados de las dos formulaciones

z(s) Num. [m]	z(s) Ansys [m]	T Num. [kN]	T Ansys [kN]
0.000	0.000	17.172	17.106
1.860	1.856	15.600	15.536
3.683	3.676	14.058	13.996
5.457	5.448	12.557	12.497
7.163	7.150	11.112	11.058
8.770	8.755	9.751	9.702
10.231	10.214	8.513	8.472
11.475	11.456	7.459	7.430
12.397	12.378	6.676	6.664
12.878	12.860	6.268	6.276
12.925*	12.907*	6.229*	6.245*
12.831	12.816	6.308	6.310
12.266	12.254	6.788	6.766
11.279	11.271	7.625	7.584
9.991	9.987	8.716	8.663
8.500	8.500	9.980	9.917

para apoyos con distinto nivel, no obstante, si se emplea para apoyos de igual nivel, es necesario introducir condicionales que bifurquen el algoritmo y solucionen los inconvenientes creados por la indeterminación. En este caso, la formulación analítica para apoyos a igual nivel es más apropiada.

- De acuerdo con los resultados de la formulación numérica presentados en la gráfica 3, se confirma que el punto de menor tensión en el cable corresponde al nodo mas bajo (sólo actúa la componente horizontal de la tensión, H), y que el apoyo donde se presenta la mayor tensión es el punto más alto, ya que este asume en mayor proporción el peso.
- La formulación analítica para cables situados al mismo nivel, permite validar la formulación numérica generalizada del problema de catenaria elástica cuando los apoyos se encuentran localizados a diferente nivel. No obstante, para implementar la solución analítica, es necesario hacer uso de algunos de los resultados encontrados en el ejercicio numérico, como son, la tensión en el punto más bajo del cable (H) y la coordenada horizontal ($x(s)$) en este punto.
- Los resultados obtenidos del modelo de elementos finitos realizado con el programa Ansys coinciden de manera importante con los obtenidos de la formulación de Irvine. Esto, demuestra una vez más la importancia de los métodos numéricos cuando son llevados al computador.

Referencias

- [1] Abramowitz, M. y Stegun, I.A.: Handbook of mathematical functions. Dover Publications. New York, 1972.
- [2] Bedford, A. y Fowler, W. L.: Engineering Mechanics: Statics. Addison Wesley & Publishing Company. Massachusetts, 1998.
- [3] Burden, R. L. y Faires, J. D.: Análisis Numérico. International Thomson. México D.F., 2002.
- [4] Chapra, S. C. y Canale, R. P.: Numerical methods for engineers. McGraw-Hill. New York, 1985.
- [5] Cheney, W. y Kincaid, D.: Análisis numérico. Las matemáticas del cálculo científico. Addison-Wesley Iberoamericana, 1994.
- [6] Dennis, J. E. y Schnabel, R. B.: Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Prentice-Hall Series in Computational Mathematics. New Jersey, 1983.
- [7] Ferziger, J. H.: Numerical Methods for Engineering Application. Wiley. New York, 1981.
- [8] Irvine, M.: Statics of suspended cables, Journal of the Engineering Mechanic Division, ASCE. Vol. 101, No. EM3: 187-205, 1975.
- [9] Irvine, M.: Cable structures. Dover Publications. New York, 1992.
- [10] Press, W. H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. y Flannery, B.P.: Numerical recipes in FORTRAN. Cambridge University Press. New York, 1992.
- [11] Shoichiro, N.: Análisis numérico y visualización gráfica con Matlab. Prentice Hall Hispanoamericana. México D.F., 1997.

Dirección de los autores

Myriam Rocío Pallares Muñoz — Universidad Santo Tomás, Facultad de Ingeniería Civil. Bogotá D.C.

e-mail: myriampallares@correo.usta.edu.co

Wilson Rodríguez Calderón — Pontificia Universidad Javeriana, Facultad de Ingeniería, Departamento de Ciencias Naturales y Matemáticas. Santiago de Cali

e-mail: wrodriguez@puj.edu.co