

Diseño e implementación de una secuencia de actividades, mediada por Geogebra para el aprendizaje de la transformación de simetría axial en estudiantes de grado séptimo de educación básica en Colombia

Presentado por:
Juan Manuel Orozco Arce
Cód.: 0333747-3469

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Santiago de Cali
2018

Diseño e implementación de una secuencia de actividades, mediada por Geogebra para el aprendizaje de la transformación de simetría axial en estudiantes de grado séptimo de educación básica en Colombia

Presentado por:
Juan Manuel Orozco Arce
Cód.: 0333747-3469

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Directora: Ángela María Gómez Vela

Universidad Del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Santiago de Cali
2018

Resumen

El presente trabajo de grado estuvo enfocado en el diseño e implementación de una secuencia de actividades, mediada por Geogebra, para el aprendizaje de la transformación de simetría axial en estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de carácter privado, ubicado en el municipio de Jamundí, Valle del Cauca, Colombia. Para lo anterior, se integraron factores matemáticos, curriculares y didácticos alrededor de la simetría axial con el micromundo Geogebra, al proceso de diseño de una secuencia de actividades que favorecieron el aprendizaje del concepto de simetría axial. Para ello, se tomaron como fases: el diseño, el análisis preliminar, la recolección y procesamiento de información y el análisis de los registros previos y posteriores a la implementación, con lo que se identificaron a través de la implementación de la secuencia de actividades, elementos conceptuales y procedimentales de los avances y dificultades en el manejo del concepto matemático trabajado.

Palabras Clave: Simetría Axial, Micromundo, Geogebra, Transformaciones isométricas

Abstract

The present project of degree was focused in the design and implementation of a sequence of activities, mediated by Geogebra, for the learning of the transformation of axial symmetry in seventh grade students of a private educational institution located in the municipality of Jamundí, Valle of the Cauca, Colombia. For the above, mathematical, curricular and didactic factors were integrated around the axial symmetry with the micro world Geogebra, to the design process of a sequence of activities that favored the learning of the concept of axial symmetry. To this end, the design, preliminary analysis, collection and processing of information and the analysis of the pre and post-implementation records were taken as phases, with which they were identified through the implementation of the sequence of activities, conceptual elements and procedural of the advances and difficulties in the management of the concept worked.

Keywords: Axial Symmetry, Micro world, Geogebra, Isometric Transformations

Contenido

Introducción.....	11
1. Planteamiento del problema.....	13
1.1 Descripción del problema.....	13
1.2 Formulación del problema.....	18
1.3 Justificación.....	18
1.4 Objetivos.....	22
1.4.1 Objetivo general.....	22
1.4.2 Objetivos específicos.....	22
2. Marco de referencia.....	23
2.1 Antecedentes.....	23
2.1.1 Aspectos curriculares y didácticos.....	26
2.2 Marco teórico.....	29
2.2.1 Proceso enseñanza – aprendizaje.....	30
2.2.2 Educación básica.....	32
2.2.3 Secuencia de enseñanza aprendizaje.....	33
2.2.4 Ambiente de aprendizaje.....	35
2.2.5 Génesis instrumental.....	39
2.2.6 Geometría dinámica.....	42
2.2.6.1 Uso de tecnología en matemáticas.....	44
2.2.6.2 Micromundos.....	45
2.2.6.2.1 Micromundo Geogebra.....	48
2.2.6.3 Ambiente de geometría dinámica.....	49
2.2.7 Transformaciones isométricas.....	52

2.2.7.1 Simetría.....	53
2.2.7.2 Simetría axial.....	53
2.2.7.3 Simetría central.....	54
2.2.8 Obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las transformaciones isométricas.....	58
2.2.8.1 Sobre la visualización.....	60
2.2.8.2 Representaciones.....	63
3. Diseño metodológico.....	65
3.1 Tipo y enfoque de estudio.....	66
3.1.1 Enfoque cuantitativo y cualitativo.....	66
3.1.2 Tipo de investigación.....	66
3.2 Población y muestra.....	67
3.3 Metodología de investigación desde la didáctica de las matemáticas.....	67
3.4 Actividades desarrolladas.....	71
4. Análisis.....	76
4.1 Sujetos.....	76
4.2 Diseño.....	76
4.3 Características de las hojas de trabajo.....	77
4.4 Condiciones de aplicación de hojas de trabajo.....	77
4.5 Recolección de información.....	78
4.6 Análisis de resultados.....	79
4.6.1 Análisis cualitativo.....	79
5. conclusiones.....	100
Referencias bibliográficas.....	103

Lista de figuras

Figura.1 Explicación de génesis instrumental.....	40
Figura 2. Simetría axial.....	54
Figura 3. Simetría central.....	55
Figura 4. Simetría axial.....	55
Figura 5. Eje de simetría.....	56
Figura 6. Eje de simetría en las abscisas.....	57
Figura 7. Composición de dos simetrías con ejes paralelos.....	57
Figura 8. Composición de dos simetrías con ejes perpendiculares.....	58
Figura 9. Representación grafica de la actividad 1.....	72
Figura 10. Representación grafica de la actividad 2.....	73
Figura 11. Representación grafica de Geogebra para la actividad.....	80
Figura 12. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta a de la actividad.....	82
Figura 13. Respuesta de pareja de estudiantes.....	82
Figura 14. Respuesta de pareja de estudiantes.....	83
Figura 15. Respuesta de pareja de estudiantes.....	83
Figura 16. Respuesta de pareja de estudiantes.....	84
Figura 17. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta b de la actividad 1.....	85

Figura 18. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta c de la actividad 1.....	87
Figura 19. Respuesta de pareja de estudiantes.....	88
Figura 20. Representación gráfica de Geogebra para la actividad 2	89
Figura 21. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta a de la actividad 2.....	90
Figura 22. Respuesta de pareja de estudiantes.....	91
Figura 23. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta b de la actividad 2.....	92
Figura 24. Respuesta de pareja de estudiantes.....	93
Figura 25. Fotografía respuesta pareja de estudiantes.....	93
Figura 26. Respuesta de pareja de estudiantes.....	94
Figura 27. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta c de la actividad 2.....	95
Figura 28. Respuesta de pareja de estudiantes.....	96
Figura 29. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta d de la actividad 2.....	97
Figura 30. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la pregunta e de la actividad 2.....	98

Lista de tablas

<i>Tabla 1.</i> Organización de la actividad 1.....	80
<i>Tabla 2.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 1 de la actividad 1.....	81
<i>Tabla 3.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 2 de la actividad 1.....	85
<i>Tabla 4.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 3 de la actividad 1.....	86
<i>Tabla 5.</i> Organización de la actividad 2.....	88
<i>Tabla 6.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 1 de la actividad 2.....	90
<i>Tabla 7.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 2 de la actividad 2.....	91
<i>Tabla 8.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 3 de la actividad 2.....	94
<i>Tabla 9.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 4 de la actividad 2.....	96
<i>Tabla 10.</i> Respuestas dadas por las parejas a la pregunta 5 de la actividad 2.....	98

Glosario

AGD: Ambiente de Geometría Dinámica

MEN: Ministerio de Educación Nacional

Introducción

La educación en el área de matemáticas pretende en sí, construir explicaciones teóricas, globales y coherentes que faciliten el entendimiento sobre los fenómenos generales, ayudando a resolver problemáticas particulares, y con ello, adaptar y desarrollar estrategias de estudio que incentiven la búsqueda de formas propias de contrastar los resultados teóricos con la realidad que éstos pretenden modelar (Waldegg, 2018, p.12). Por ello, a través de la historia se han desarrollado diversos mecanismos tecnológicos que facilitan su aprendizaje en las aulas de clase, aquellas herramientas “que se utilizan con un propósito pedagógico pueden ser de gran utilidad en el aprendizaje del conocimiento matemático” (Ibargüen y Realpe, 2012, p.2).

A nivel nacional, en Colombia, existe una amplia problemática en cuanto al desempeño del componente geométrico – métrico, evidenciado en los últimos 20 años para las instituciones de educación media, según los resultados del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2010).

En el departamento del Valle del Cauca, la cantidad de estudiantes que tienen facilidades para aplicar sus conocimientos en lenguaje, matemáticas y ciencias es reducida. A partir de lo anterior una posible hipótesis para explicar estas falencias es que algunas de las preguntas hacen alusión a la composición y recomposición de figuras, y el reconocimiento de propiedades y de invariantes de figuras cuando se efectúan transformaciones en el plano; esto podría llevar a que en estos conceptos o desempeños se estén presentando dificultades.

Por otro lado, la implementación de herramientas tecnológicas en el aula de clase para impartir el área de matemáticas también presenta una gran problemática en cuanto a la incorporación del software interactivo o procesador geométrico AGD (Ambiente de Geometría Dinámica), que posee herramientas de geometría, con herramientas de álgebra y cálculo

(Carranza, 2011). Por ello, es indispensable realizar una preparación previa a las actividades a desarrollar en las clases por medio del uso de software de esta naturaleza como es el caso de Geogebra.

La primera parte de este trabajo corresponde al planteamiento del problema, justificación y objetivos, donde se hace referencia a la necesidad de favorecer el concepto de simetría axial y la importancia de desarrollar un pensamiento geométrico en el aula, este problema se concretó al final del apartado con la pregunta que orientó esta investigación. En la segunda parte se alude a los referentes teóricos donde se identifican varias dimensiones referentes a la geometría dinámica y al uso de la tecnología, como también algunos elementos teóricos que permitieron fundamentar el trabajo. En la tercera parte se indican los aspectos metodológicos utilizados en el trabajo donde se explican las cuatro fases del trabajo y los aspectos a tener en cuenta para realizar la secuencia de actividades. En la cuarta parte se presentan los resultados acorde con cada uno de los objetivos específicos planteados. Finalmente, se presentan las conclusiones a las que se llegó tras la realización del estudio y con las cuales se resaltan los aportes del mismo.

1. Planteamiento del problema

1.1 Descripción del problema

El trabajo gira en torno a dos ideas: El desarrollo del pensamiento geométrico y la incorporación de las tecnologías digitales en la clase de matemáticas.

En cuanto a la primera idea, y desde las pruebas nacionales el estudio realizado por el Ministerio de Educación Nacional, indicó que los resultados de las pruebas SABER 2002/2003, 2005/2006 y 2009 aplicados en estudiantes de educación básica develaron que pocos estudiantes pueden aplicar sus conocimientos en lenguaje, matemáticas y ciencias en el departamento del Valle del Cauca, lo cual indica que la educación en este departamento evidenció deficiencias en su calidad y que los resultados de las pruebas SABER estuvieron muy lejos de lo esperado.

Específicamente en el área de matemáticas el resumen ejecutivo *SABER 5° y 9° 2009 Resultados Nacionales del año 2010* indicaron que:

En quinto grado, 31 de cada 100 estudiantes están en el nivel mínimo. Ellos son capaces de utilizar operaciones básicas para solucionar problemas, identificar información relacionada con la medición, hacer recubrimientos y descomposiciones de figuras planas, además de organizar y clasificar información estadística.

“El 17% de los estudiantes demuestra las competencias establecidas en el nivel satisfactorio, es decir, además de hacer lo definido para el nivel mínimo, estos alumnos saben, entre otros aspectos, describir algunas transformaciones en el plano cartesiano, reconocer diferentes maneras de representar una fracción propia en relaciones parte-todo, resolver problemas relacionados con la estructura aditiva y multiplicativa de los números naturales y estimar la probabilidad de un evento para resolver situaciones en contextos de juegos o en acontecimientos cotidianos”. Resaltando que la simetría axial es una transformación geométrica en el plano cartesiano (p. 13).

Para ampliar esta idea, el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), encargado de aplicar las pruebas SABER cada año en Colombia, en los análisis realizados en el año 2014, posteriores a la aplicación de la prueba del año 2013, evidenció que el 40% de los ítems evaluados correspondieron al componente geométrico-métrico definido como la relación, la construcción y manipulación de representantes de objetos bidimensionales y tridimensionales, además de sus características, relaciones y transformaciones.

También se refirió a la comprensión del espacio y el plano a través de la observación de patrones y regularidades, así como al razonamiento geométrico y a la solución de problemas de medición (longitud, área, volumen, capacidad, masa, tiempo, entre otras) a partir de la selección de unidades, patrones e instrumentos pertinentes (ICFES, 2010). En la prueba de quinto grado de educación básica y en la prueba de noveno este componente correspondió al 35% de las preguntas evaluadas, el cual es un porcentaje alto para tener en cuenta, que sugiere plantear una hipótesis que sería que, si se trabajan más en el aula los conceptos geométricos, se podría elevar significativamente el porcentaje de favorabilidad en la prueba por parte de los estudiantes.

De este mismo modo, en su informe el ICFES (2010) indicó que los estudiantes de grado quinto mostraron dificultades en relación con los requerimientos conceptuales de los problemas planteados, en particular para los intereses del presente proyecto se destacó que “se evidenciaron debilidades al exigir la composición y recomposición de figuras, y el reconocimiento de propiedades y de invariantes de figuras cuando se efectuaron transformaciones en el plano” (ICFES, 2010, p. 12).

Además de las pruebas nacionales, en evaluaciones externas como la prueba de Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS), la cual es una evaluación de los

conocimientos de matemática y ciencia de los estudiantes de grado cuarto y octavo en países alrededor de todo el mundo, donde Colombia es uno de ellos, y cuyos resultados no han sido nada alentadores, específicamente en la prueba TIMSS del año 1995, en el área de matemáticas el 35% de las preguntas de grado cuarto fueron de contenido geométrico y en el grado octavo fue del 20%; en las pruebas efectuadas en el año mencionado, se evidenció bajo desempeño de los estudiantes en comparación con resultados de otros países con el mismo nivel económico y de desarrollo humano similares, textualmente se indica que: “A nivel nacional más del 75% de los estudiantes responden de manera incorrecta a más del 43% de las preguntas que involucran primordialmente aspectos geométricos, mientras que a nivel internacional no existen preguntas en el área que sean muy difíciles” (TIMMS, 1997. p.80). Para especificar, este estudio también revela que “el rendimiento promedio en el concepto de transformaciones geométricas solo es del 29.5% en Colombia mientras que en otros países es del 53.7%, es decir, que se evidencia una deficiencia en el concepto de transformaciones geométricas” (TIMMS, 1997. p 81).

Así mismo, en las pruebas TIMMS aplicadas en el año 2007 el ICFES analiza los resultados y argumenta que:

A pesar de la similitud entre el cubrimiento de los tópicos en Colombia y los demás países, algunos podrían reforzarse en los planes de estudio de los establecimientos educativos. En matemáticas, éstos comprenden los tres dominios de contenido evaluados en cuarto grado; en octavo predominan aquellos correspondientes a geometría (Resultados de Colombia en TIMSS 2007 Seminario Internacional de Investigación sobre la Calidad de la Educación, 2010 p. 44).

Teniendo en cuenta lo anterior se puede inferir que existe una falencia en la enseñanza y aprendizaje de matemáticas, más específicamente en el pensamiento geométrico, en el cual se encuentra el concepto de simetría axial, que fue objeto de estudio en este trabajo.

Del mismo modo, en otra evaluación internacional como la prueba PISA (2012), Colombia se ubicó entre los últimos puestos de Latinoamérica, obteniendo un porcentaje de 42% de nivel 1 (Nivel 1: Insuficientes para acceder a estudios superiores y para las actividades que exige la vida en la sociedad del conocimiento) y 32% de nivel 2 (Nivel 2: Mínimo adecuado para desempeñarse en la sociedad contemporánea), lo cual ya supera en más de un 70% de no tener un desempeño satisfactorio. En su contenido PISA evaluó cuatro ideas generales relacionadas con los números, el álgebra y la geometría: (i) cantidad; (ii) espacio y forma; (iii) cambio y relaciones; y (iv) incertidumbre y datos lo cual quiere decir que un porcentaje considerable puede estar destinado al aspecto geométrico. Estos resultados evidenciaron que existen problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y aunque los análisis de las pruebas PISA no son específicos, podría entonces un porcentaje de las preguntas del componente geométrico estar destinado a las transformaciones geométricas.

Como cierre de esta idea, queda evidenciado que en general, los estudiantes de educación básica en Colombia, dentro del componente geométrico han mostrado bajo desempeño y que en particular las transformaciones geométricas juegan un papel importante dentro de los conceptos y desempeños evaluados a nivel nacional e internacional.

La segunda idea que se aborda en la descripción de la problemática hace referencia a las dificultades y retos que implicó el uso de la tecnología, especialmente el en área de matemáticas. Actualmente se usa el término Ambiente de Geometría Dinámica como AGD, que es: “básicamente un *procesador geométrico* y un *procesador algebraico*, es decir, un compendio de matemática con software interactivo que integra herramientas de geometría, con herramientas de álgebra y cálculo” (Carranza, 2011, p.35). Al incorporar estos ambientes en el aula se generaron nuevas dificultades, como las vistas en el trabajo de Osorio (2010) donde se cuestiona cómo

afectaron los Ambientes de Geometría Dinámica en la Construcción de la Demostración, y se refirió de la siguiente manera:

En este trabajo se exponen algunas reflexiones sobre las dificultades que presentan la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, las cuales están ligadas con el significado que se le otorga a la demostración en el caso de la Geometría y con su construcción en Ambientes de Geometría Dinámica (AGD). El énfasis se hace en que la demostración tiene un significado más o menos bien determinado en la comunidad matemática y que no puede ser reproducido tal cual en la escuela. Se expone una postura pragmática para proponer un significado acorde con el ambiente escolar considerando ciertas características específicas a través de un proceso de transposición didáctica. Se hace una reflexión sobre fenómenos cognitivos relacionados con la visualización y con los AGD que pueden afectar directamente a la construcción de la demostración geométrica al influir en el proceso de “ver” propiedades invariables que llevan a la producción de justificaciones deductivas (Osorio, 2010, p.34).

Se concluye de lo citado anteriormente que el uso de Geogebra puede generar algunos obstáculos y dificultades si no se hace una buena preparación previa de las actividades a desarrollar en las clases, por lo demás, es lo suficientemente confiable, amigable y de fácil consecución.

Por otra parte, en algunas investigaciones se analizaron las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las isometrías del plano. Williford (1972, citado por Acuña & Martínez, s.f.) en su investigación estudió las habilidades espaciales que los estudiantes poseen en la enseñanza de las transformaciones, encontrando que les es posible aprender a realizar procedimientos manuales para producir la transformación de imágenes, pero les resulta difícil realizar la transformación de manera mental.

Del mismo modo, Moyer (1974) y Schultz (1977) (citados por Jaime, 1993) en sus investigaciones encontraron que entre los factores que influyeron en el aprendizaje de las isometrías del plano, se encontró la dificultad para realizar correctamente el movimiento, dependiendo de la dirección de este (vertical, horizontal, inclinada), la distancia entre el objeto y su imagen y, para las simetrías, la posición del eje.

1.2 Formulación del problema

Teniendo en cuenta las dos ideas problemáticas encontradas, la cuestión de este trabajo de grado fue tratar de responder la siguiente pregunta: ¿Cómo diseñar e implementar una secuencia de actividades, mediada por Geogebra, para promover el aprendizaje del concepto de la transformación de simetría axial en estudiantes de grado séptimo de Educación Básica en Colombia?

1.3 Justificación

Este trabajo pretendió generar actividades de simetría axial sin utilizar el lápiz y papel que le daba un tratamiento estático al concepto a trabajar, por lo que en este sentido se propuso elaborar una secuencia de actividades que aportaron al aprendizaje de los estudiantes de grado séptimo al establecer una concepción satisfactoria de la simetría axial y sus propiedades gracias al uso adecuado de Geogebra. Y fue precisamente aquí donde el uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), jugaron un papel fundamental para indagar los procesos de variación que se presentaron entre algunos objetos matemáticos, ello debido a que la forma en que estos se concibieron no fue la misma desde otro ambiente, por ejemplo un punto en lápiz y papel es la huella que deja el lápiz en el papel y se caracteriza por ser estático, mientras que Geogebra brinda una interfaz gráfica movable con capacidad de arrastre logrando observar de

manera más fácil la transformación de la simetría axial. Es por ello que fue importante tener en cuenta todas estas particularidades en el momento del desarrollo de la secuencia didáctica.

En este trabajo de grado se tomaron los análisis de las diferentes pruebas que realizaron los estudiantes de la básica primaria y secundaria en Colombia y con base en estos resultados este trabajo de grado giró alrededor de la importancia del pensamiento geométrico-métrico en las pruebas antes mencionadas y el papel de la tecnología en la conceptualización de este pensamiento.

En este orden de ideas, a partir de los argumentos planteados en la problemática, que evidenciaron los diferentes resultados que se presentaron en las pruebas realizadas por el estado Colombiano en donde se indicó que hay un nivel académico muy bajo alrededor del pensamiento geométrico-métrico lo cual sugirió como lo hizo la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2010) que los maestros deben diseñar e implementar actividades de aprendizaje en las cuales los estudiantes tengan la oportunidad de desarrollar y usar diversos sistemas de representación para resolver tareas matemáticas. Además, en los estándares curriculares de la NCTM (2002) se propusieron cuatro objetivos transversales para el aprendizaje de la Geometría, y uno de ellos se ocupó de las transformaciones y usos de simetría para analizar situaciones matemáticas.

Es importante determinar que este trabajo, se inscribió en el campo de estudio de interés de la línea de formación e investigación en relación a la *Educación Matemática y Nuevas Tecnologías* del área de matemática, por consiguiente, el estudio de los problemas didácticos, curriculares y relacionados con la formación inicial respecto a los contenidos matemáticos escolares propuestos en los currículos nacional (MEN, 1999) y (MEN, 2009).

Por otra parte en los Derechos Básicos del Aprendizaje (DBA) (MEN, 2015) se observó que las transformaciones geométricas se encontraron en el contenido temático de grado séptimo y octavo donde hubo preguntas relacionadas con la rotación, simetría y la homotecia.

Se evidenció entonces que el concepto de simetría es de nivel básico para los estándares curriculares del país y por eso fue importante crear una secuencia de actividades que lograra una mejor conceptualización en los estudiantes.

Adicional a esto el MEN (2005) expresó que:

“actividades donde se aplican transformaciones geométricas pueden ser desarrolladas en el aula de clase para abordar conceptos relativos a la conservación del área y que las figuras planas pueden ser diseccionadas en diferentes regiones parciales y posteriormente transformadas en otras figuras que tienen la misma área de la figura original” (p. 18).

Entonces fue importante proponer actividades que permitieran indagar por la aplicación de diferentes estrategias para dar solución a situaciones referentes a la determinación del cálculo de áreas o perímetros de diferentes figuras planas, dado que en la simetría axial se conservan estos conceptos.

Ahora bien, respecto al papel de la tecnología, se debe tener en cuenta que hoy en día la sociedad se caracteriza por un ritmo cada vez más acelerado de cambios propiciados por la inmediatez, de las comunicaciones, la informática. Todo lo anterior, planteó el reto del cambio, implicó llegar al alumno con un conocimiento en forma ágil, oportuna, agradable dándoles a conocer las múltiples formas, por medio de recursos tecnológicos innovadores, estos pueden ser la clave del éxito de los estudiantes en su proceso de formación académica matemática.

En este sentido la NCTM (2002), argumenta que:

La tecnología juega un rol muy importante en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Herramientas tales como un software de geometría dinámica, habilitan a los estudiantes para modelar situaciones y proporcionan una experiencia interactiva con una variedad de formas de dos dimensiones. (p. 24)

De esta misma forma el ICFES (2010) en sus análisis Resultados de Colombia en TIMSS 2007 expresó que: “La tenencia de computadores en el hogar contribuye a reducir las diferencias de resultados entre estudiantes de zonas urbana y rural en octavo grado” (p. 8).

De la misma forma, Moreno (2002), consideró que las herramientas computacionales pueden ayudar a revivir el interés por la geometría en estudiantes y profesores, puesto que por medio de ésta se brindan más y mejores posibilidades de exploración de los conceptos geométricos. Así como también ayudaron a reconocer algunos de los problemas que contribuyen en el desarrollo de las matemáticas a la sistematización de la noción de transformación geométrica.

Así mismo, el MEN (2002) consideró que un medio como Cabri Géomètre brinda posibilidades de exploración acerca de las relaciones geométricas. El software se convirtió en un socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sobre los objetos matemáticos, que da paso a inspirar ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos. El papel que juegan estas representaciones y las construcciones geométricas realizadas en el entorno de geometría dinámica es fundamental, pues se convirtieron en los objetos de *experimentación* sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso, contribuyendo a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la geometría, como es, la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial heurístico en la resolución de problemas y los procesos de justificación y su potencial pedagógico. Aunque el MEN no nombró a Geogebra,

este software fue muy similar, dado que cumple algunas características similares a las del software Cabri Geometre, algo que fue muy favorable fue que es de uso gratuito y aplicable en computadores, celulares y tabletas electrónicas.

1.4Objetivos

1.4.1 Objetivo general.

Diseñar una secuencia de actividades, mediada por Geogebra, para favorecer el aprendizaje del concepto de la transformación de simetría axial en estudiantes de grado séptimo de Educación Básica en Colombia.

1.4.2 Objetivos específicos.

- Integrar algunos aspectos matemáticos, curriculares y didácticos alrededor de la simetría axial y del micromundo Geogebra, al proceso de diseño de una secuencia de actividades para estudiantes de grado séptimo de la educación básica.
- Identificar a través de la implementación de la secuencia de actividades, elementos conceptuales y procedimentales de los avances y dificultades en el manejo del concepto de simetría axial.

2. Marco de referencia

2.1 Antecedentes

En el presente proyecto se tuvo en cuenta como primer antecedente el trabajo *Integrando Cabri en el aula: Una estrategia didáctica en quinto de primaria para explorar la transformación de rotación* (Santacruz y López, 2004). Este trabajo realizó dentro de una propuesta de desarrollo curricular, una secuencia de situaciones problema fundamentada en la perspectiva de diseño didáctico, que ofrezca la oportunidad de explorar las propiedades y efectos de la transformación de rotación a estudiantes de quinto grado de educación básica utilizando Cabri Geometre II Plus. En este documento consideran a la geometría transformacional como una alternativa para que los estudiantes construyan el conocimiento del espacio a partir de la exploración y actuación sobre el mismo. En la perspectiva del diseño didáctico tienen varios aspectos como, la dimensión epistemológica, la cognitiva, la gestión del profesor y el proceso de diseño curricular, estos aspectos desencadenan en actos pedagógicos y posteriormente en la documentación de toda la experiencia, enmarcado en un proceso de Desarrollo Curricular. Uno de los aportes del trabajo es que a partir de un proceso curricular se integran las nuevas tecnologías al aula y se ponen en juego conocimientos matemáticos con estudiantes de quinto grado de educación básica, con el fin de abordar de manera sistemática la reflexión didáctica sobre el impacto de este tipo de tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Así, Santacruz y López (2004) concluyeron que es necesario trabajar desde los primeros grados en el reconocimiento de las figuras geométricas, para posteriormente ahondar en la indagación de las propiedades de las mismas. La integración de este tipo de tecnología permite al docente la posibilidad y la oportunidad de diseñar sus propias actividades de intervención en el

aula por la interacción del estudiante y la herramienta, el cual genera un buen ambiente de aprendizaje. Además, destacan que es importante el papel de este tipo de tecnología en las aulas de educación básica, la experiencia pone en juego elementos conceptuales interesantes y que la interacción que el ambiente proporciona es muy fructífera. El aporte de este antecedente citado para el presente proyecto, es que sirve como un posible modelo en la creación de la secuencia de actividades y la forma de implementarlo.

Un segundo antecedente es el trabajo *La Enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos* (Ibargüen y Realpe, 2012), el cual se centra en la enseñanza y en el aprendizaje de la transformación de la simetría axial, en donde se presenta la pregunta de investigación: ¿de qué manera la utilización de artefactos como el simetrizador y el software Cabri Geometre II Plus permite la conceptualización de las propiedades de la simetría axial en niños de tercero de básica primaria? Para responder a la pregunta, las autoras determinaron el papel de la complementariedad de artefactos (regla, lápiz, Cabri Geometre II Plus y un simetrizador) en la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

Un trabajo un poco más general sobre la enseñanza de la geometría por medio de las TIC, fue *La enseñanza y aprendizaje de la Geometría en enseñanza media. Un procesador Geométrico como medio didáctico* (Pérez, 2005), en éste se tuvo el propósito de estudiar las condiciones pedagógicas bajo las cuales un procesador geométrico, como Cabri Geometre II, permite que estudiantes de primer año de enseñanza media, obtengan aprendizajes significativos en el eje temático de geometría, específicamente en la unidad de Transformaciones Isométricas.

El diseño metodológico desarrollado, utilizó un modelo casi experimental en ambientes educacionales naturales, en los cuales se seleccionaron 2 grupos equivalentes, uno experimental

y otro de control. Con el grupo experimental se abordaron los contenidos de la unidad, vinculando guías de aprendizaje y el procesador geométrico Cabri Géomètre II plus. Con el grupo de control se procedió a trabajar con guías de aprendizaje, utilizando medios tradicionales: regla, compás y transportador. En ambos grupos se administró sólo un postest.

El proyecto se implementó entre los meses de marzo y agosto del 2005, en 4 establecimientos subvencionados de la región metropolitana, específicamente en 8 cursos del primer nivel de enseñanza media. Fueron 4 los docentes del área de matemática y 337 los alumnos que participan en la experiencia.

En esta propuesta, se presentó una forma de sintonizar el laboratorio de computación y el aula tradicional, donde se debió articular un accionar entre el docente, los alumnos y el contenido que se deseó abordar. En esa perspectiva, se articularon actividades pedagógicas que fueron la columna vertebral de la experiencia, donde se pusieron en sintonía los recursos didácticos, guías de aprendizaje, Cabri Géomètre y otros recursos que se utilizaron con el propósito de facilitar el acercamiento de los alumnos al conocimiento geométrico. Lo anterior, en un ambiente de trabajo colaborativo donde la exploración, estructuración y formalización fueron etapas claves.

Otro trabajo consultado fue *Enseñanza de las simetrías con uso de Geogebra según el modelo De Van Hiele* (Rodríguez, 2013). Esta investigación tuvo como objetivo entregar a los docentes de matemática una propuesta de trabajo para la enseñanza de la geometría, integrando un modelo de razonamiento con el uso de las tecnologías de información y comunicación. Para esto se diseñaron guías de aprendizaje, según los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, para la enseñanza del objeto geométrico Simetrías, a través del software Geogebra. El trabajo con estos talleres permitió a los estudiantes pasar de lo más simple a lo más complejo en

el estudio de las simetrías, visualizar, manipular y resolver los problemas planteados a través de applets construidos con Geogebra. Es importante señalar que la puesta a prueba de estos recursos permitió verificar si el aprendizaje de las simetrías fue más significativo al usar el modelo de Van Hiele, integrando este modelo con el uso de Geogebra, o utilizando la metodología tradicional del establecimiento. Para validar y probar esta propuesta se implementó con un grupo de alumnos de la comuna de Maipú.

El anterior trabajo fue un antecedente muy importante para este trabajo de grado, dado que los dos diseñan actividades para implementar en el aula y analizan los distintos dispositivos de registro de evidencia y sus resultados.

2.1.1 Aspectos curriculares y didácticos

La simetría axial, pertenece al campo de la geometría, ya que es la geometría precisamente, la disciplina que contribuye de manera importante a la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes, como cita Cascallana (1996) en el libro "Iniciación a la matemática":

La geometría, permite el razonamiento espacial, reconocer y relacionarse con el espacio (...) La facilidad y destreza para lo espacial es componente esencial del funcionamiento matemático. En el corazón mismo de casi todo el pensamiento matemático parece latir un conocimiento intuitivo de las propiedades del espacio. Al niño, el conocimiento intuitivo del espacio le llega antes que el conocimiento intuitivo del número. (Cascallana, 1996)

Otro aspecto importante, que estudia y aporta la geometría a los estudiantes, es la orientación en el espacio, el estudiante a través de la geometría se reconoce a sí mismo y su ubicación respecto a los demás y respecto al mundo que le rodea por ejemplo, a través de los

conceptos tales como dirección y sentido; los cuales son conceptos básicos necesarios en el estudio y comprensión de la simetría axial. A través del estudio de la simetría axial, también se promoverá el tratamiento de la noción de medida, lo cual favorece la interpretación numérica de la realidad, estimando de manera objetiva las características físicas de distintos elementos y situaciones en su contexto. También Hernández y Villalba (2001), aportan una visión de la geometría, pertinente y que viene a reforzar la validez e importancia de estudiar la simetría axial, ésta es:

- La ciencia del espacio, vista esta como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y fenómenos del mundo real.
- Un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias.
- Un punto de encuentro en una matemática teórica y una matemática como fuente de modelos.
- Una manera de pensar y entender.
- Un ejemplo y modelo para la enseñanza del razonamiento deductivo.
- Una herramienta en aplicaciones, tanto tradicionales como innovadoras, como por ejemplo, gráficas por computadora, procesamiento y manipulación de imágenes, reconocimiento de patrones, robótica, investigación de operaciones. (Hernández & Villalba, 2001)

Adicional a ello, Báez e Iglesias (2007) señalan seis principios didácticos que consideran fundamentales dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, los

cuales serán tenidos en cuenta en el diseño y aplicación de la secuencia didáctica para la comprensión de la simetría axial, éstos son:

- Principio globalizador o interdisciplinar: Consiste en un acercamiento consciente a la realidad, donde todos los elementos están estrechamente relacionados entre sí.
- Integración del conocimiento: El conocimiento no está fragmentado, sino que representa un saber integrado, lo que implica también una integración de los objetivos, contenidos, metodología y la evaluación.
- Contextualización del conocimiento: Los conocimientos son adaptados a las necesidades y características de los estudiantes, a partir del uso de hechos concretos.
- Principio de flexibilidad: La organización y administración del proceso educativo debe ser adaptable a las necesidades de los estudiantes, sin perder de vista el logro de los objetivos propuestos.
- Aprendizaje por descubrimiento: Todo proceso de enseñanza debe considerar una participación activa de los estudiantes, de manera que propicie la investigación, reflexión y búsqueda del conocimiento.
- Innovación de estrategias metodológicas: El grupo docente debe buscar y emplear estrategias metodológicas que incentiven a los alumnos hacia la investigación, descubrimiento y construcción del aprendizaje (Báez & Iglesias, 2007).

Por otra parte, en el diseño de la secuencia didáctica sobre la simetría axial, se tienen en cuenta los aportes de Veloso (1998), (citado por Almeida, 2002), quien señala que la enseñanza de la geometría en secundaria debe:

- Profundizar y sintetizar los aspectos geométricos en desarrollo, como la comprensión del espacio y de los respectivos modelos geométricos que son dados por las matemáticas; es

decir, partir de problemas y situaciones relacionadas con el espacio, como la simetría, la forma y la dimensión.

- Integrar la historia de la geometría en su enseñanza, para permitir a los estudiantes tener la noción de la existencia de otras geometrías.
- Buscar la conexión de la geometría con otras ramas de las matemáticas, con otras disciplinas como el arte y promover su aplicabilidad en contextos reales. (Almeida, 2002)

Se busca con esta secuencia didáctica que los estudiantes, a partir de la experimentación, construyan los conceptos básicos de la simetría axial, adquieran el vocabulario formal y demuestren su comprensión del tema a través de la aplicación de estos conceptos a situaciones diversas de su cotidianidad, tomando como base lo que afirma Stone:

(...) los teóricos del aprendizaje han demostrado que los alumnos no recuerdan ni comprenden gran parte de lo que se les enseña. Para comprender ideas complejas y formas de investigación, los estudiantes deben aprender haciendo y deben cambiar activamente su opinión. (Stone, 1999)

A partir de este concepto se plantea a los estudiantes diversas actividades con el fin de despertar su interés involucrarlos en el proceso de aprendizaje, inicialmente identificando los conceptos claves, posteriormente se espera que de manera autónoma se interesen en consultar en torno al tópico generativo y finalmente que evidencien los saberes adquiridos a través de sus expresiones y del uso de su conocimiento para interpretar lo que sucede en su entorno y generar nuevo conocimiento.

2.2 Marco teórico

A continuación se abordarán los referentes teóricos con los cuales se dio sustento al desarrollo de esta investigación.

2.2.1 Proceso Enseñanza ±Aprendizaje.

La enseñanza es una actividad que se realiza para orientar o dirigir el aprendizaje de los estudiantes. Para enseñar bien se necesita tener una noción clara y exacta de lo que realmente es enseñar y aprender, pues existe una relación directa y necesaria, no solamente teórica, si no también práctica. Así, la enseñanza es un proceso que pretende apoyar el logro del aprendizaje significativo (Díaz, Barriga & Hernández, 2002, p.140). En la enseñanza los docentes actúan como facilitadores, guías y/o acompañantes de los estudiantes en el aprendizaje (Torres & Girón, 2004, p.50).

De esta manera el proceso enseñanza – aprendizaje corresponde al quehacer educativo de los docentes y estudiantes, por esta razón se deben comprender e identificar las diferentes técnicas y métodos, al igual que las etapas dentro del sistema educativo (Díaz, Barriga & Hernández, 2002).

Para Alcaraz et al., (2004) el aprendizaje es la forma en que el estudiante posee la información que tiene que estudiar. El aprendizaje es exclusivamente psicológico, ya que se produce en la mente de las personas y se extiende desde el mismo momento de su nacimiento a lo largo de la vida. Entre todas las actividades humanas, aprender ha sido una de las más antiguas y todo hombre o mujer está sometida a un largo proceso de aprendizaje.

Por lo tanto, el aprendizaje es el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades y destrezas, conocimientos y conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la intuición, el razonamiento y la observación. Este proceso puede ser analizado desde distintas perspectivas, ya que el aprendizaje es una de las funciones más importantes en el ser humano, siendo realizado con la educación y formación personal (Argüello & Sequeira, 2016).

El desarrollo de un aprendizaje formal implica el cumplimiento generalmente consciente de varias fases entrelazadas entre sí, a veces con límites claros entre ellas, a veces con límites difusos: motivación, interés, atención, adquisición, comprensión, asimilación, aplicación, transferencia y evaluación (Yáñez, 2016).

El cumplimiento cabal de estas fases suele necesitar niveles diferentes de esfuerzo y planificación por parte de los docentes y los estudiantes; igualmente, cabe mencionar que estas fases pueden cumplirse dentro o fuera del centro educativo, dependiendo de la temática propia de uno u otro aprendizaje (Yáñez, 2016).

La interdependencia entre una y otra fase suele ser alta, dentro de un contexto de aprendizaje formal (escuelas, colegios, institutos, universidades) y la consecución de buenos resultados dependerá de varios factores: por ejemplo, que al inicio del proceso la motivación y el interés hayan sido desencadenados de tal manera que la expectativa por aprender algo nuevo sea lo suficientemente fuerte para que el aprendiz invierta el tiempo y el esfuerzo posteriores necesarios para ello. Solo así se podrán alcanzar niveles de atención y colaboración suficientes que permitan al individuo (estudiante) involucrarse de lleno en el proceso, pudiendo luego adquirir, comprender y asimilar los nuevos conocimientos de manera integral (Yáñez, 2016).

En este sentido, la *Enseñanza ±Aprendizaje* es una construcción conjunta de conocimientos entre enseñantes (docentes) y aprendices (estudiantes), donde el maestro actúa como facilitador de los estudiantes, para que estos adquieran habilidades y destrezas y puedan obtener un aprendizaje significativo (Argüello & Sequeira, 2016).

En tal sentido, el aprendizaje significativo de acuerdo con Ausubel (1976, citado en: Escobar, 2016), se presenta cuando el estudiante relaciona de manera sustancial la nueva

información con algún elemento existente en la estructura cognitiva, sus conocimientos y experiencias previas. Del cual se requiere una disposición para aprender significativamente con la intervención del docente en esa dirección. De igual manera es cuando se trasciende y se logra construir significados dando sentido a lo aprendido para aplicar a las situaciones cotidianas (Moreira, 1994; Barriga, 2003; Alonso, 2010).

Como el aprendizaje significativo es un proceso a través del cual una nueva información (un nuevo conocimiento) se relaciona de manera no arbitraria y sustantiva (no-literal) con la estructura cognitiva de la persona que aprende (Ausubel, 1976, citado en: Escobar, 2016), la enseñanza debe ser constructivista, para promover el cambio conceptual y facilitar el aprendizaje significativo. Según Moreira (1994), el aprendizaje significativo es un mecanismo humano por excelencia, para adquirir y almacenar ideas, información, representada en cualquier campo de conocimiento.

2.2.2 Educación básica.

Según la Constitución Política, “El Estado, la Sociedad y la Familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los 5 y los 15 años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica” (Presidencia de la República, 1991, Art.67).

La Educación Básica comprende un ciclo de educación “básica primaria» que se extiende del grado 1 al 5, a niños cuyas edades oscilan entre los 6 y los 10 años, y el ciclo de educación “básica secundaria” que se imparte del grado 6 a 9, entre las edades de 11 a 14 años, ofreciéndose indistintamente en instituciones privadas y oficiales.

La Educación Básica Primaria desarrolla planes y programas propios, integrando las áreas de conocimiento y formación en los tres primeros grados. La orientación y metodología varía de acuerdo con la población según sea rural o urbana.

Objetivos de la educación básica primaria (OEI, 2004):

- Reconocer las potencialidades físicas, intelectuales y emocionales, buscando un desarrollo armónico y equilibrado, a fin de que el individuo asuma con decisión y acierto la solución de sus problemas como tal y como parte integrante de la comunidad.
- Identificar y valorar los factores que influyen en el desarrollo social, cultural, económico y político del país y participar crítica y creativamente en la solución de los problemas y en el desarrollo de la comunidad, teniendo en cuenta los principios democráticos de la nacionalidad Colombiana.
- Generar conocimientos, habilidades y destrezas, a través de las distintas experiencias educativas, que contribuyan a su formación tanto personal como cívico-social, cultural, científica, tecnológica, ética y religiosa, que le permitan al sujeto organizar un sistema de valores y actitudes, en orden a un efectivo compromiso con el desarrollo social.

2.2.3 Secuencia de Enseñanza Aprendizaje.

Según Duit (2006), las tradiciones de investigación en la enseñanza de las ciencias en los últimos treinta años pueden clasificarse en dos grandes enfoques. Uno está orientado hacia la ciencia, donde investigadores en enseñanza de las ciencias cercanos a un campo disciplinar particular centran su atención en la práctica docente, poniendo mayor énfasis en los problemas de los contenidos científicos y en la elaboración de nuevas secuencias de enseñanza y aprendizaje. El otro enfoque está orientado hacia el alumno, con investigaciones que enfatizan las necesidades

de los estudiantes en diversos ámbitos y la mejora de los entornos de aprendizaje, a veces desestimando los contenidos de las ciencias como materia de estudio (Arriasecq, Cayul & Greca, 2017).

Una mejoría en el aprendizaje de las ciencias parecería ser posible solo cuando existe un razonable equilibrio entre estas dos perspectivas. Esta visión, más holística, al intentar conjugar perspectivas parciales, es compartida por diversos investigadores (Fensham, 2001; Psillos, 2001; Duit, 2006) y se encuadra en lo que se ha denominado secuencias de enseñanza y aprendizaje (SEA). Su objetivo es el diseño y evaluación, en condiciones reales de aula, de SEAs sobre tópicos específicos, basadas en resultados de investigación sobre las concepciones de alumnos y profesores y contenidos científicos (Psillos y Méheut, 2001). Esta perspectiva focaliza la investigación en el «nivel micro» (estudio de una clase en un tema específico) o en el «nivel medio» (estudio de la secuencia de un único tópico), pero no en el «nivel macro» (estudio de todo un currículo durante uno o varios años) (Kariotoglou y Tselfes, 2000).

De esta forma, se podría contribuir a que los docentes, no comprometidos con grupos específicos de investigación, tomen contacto con resultados aplicables a sus clases. Si bien el diseño de SEA sustentadas en resultados de las investigaciones comienza alrededor de 1980, estas secuencias se centraban fundamentalmente en las concepciones y formas de razonar de los estudiantes, pero dejaban en segundo plano –o directamente no consideraban– otros dos elementos fundamentales de una situación de aprendizaje: el conocimiento que debe ser desarrollado y el papel de los docentes (Mehuet, 2005).

Hasta el momento se han desarrollado escasos marcos teóricos focalizados en los factores y procesos involucrados en el diseño de SEA como actividad de investigación (Méhuet y Psillos,

2004). Aunque han aparecido en los últimos años varios trabajos que discuten ampliamente los resultados conseguidos por los estudiantes con las secuencias diseñadas, “muchos de sus presupuestos y decisiones implícitas y explícitas que afectan, en un grado considerable, al diseño y el desarrollo de los abordajes de enseñanza son menos tratados y hasta a veces no presentados claramente” (Lijnse & Klaassen, 2004, p.554).

Algunos modelos propuestos son: el abordaje de resolución de problemas de Lijnse (2000), que tiene en consideración el conocimiento que va a ser enseñado en la secuencia junto con las ideas que a priori los estudiantes puedan tener sobre él; el sistema educacional, donde la secuencia es implementada y la motivación; la reconstrucción educacional (Kattmann et al., 1995), en la tradición pedagógica alemana, que relaciona la estructura conceptual de la ciencia con el análisis del significado educacional del contenido y con estudios empíricos de los procesos de aprendizaje de los alumnos y de sus intereses en un marco constructivista; y la ingeniería didáctica (Artigue, 1988), que realiza un análisis a priori para definir los problemas que deberán abordar los alumnos, teniendo en cuenta la dimensión epistemológica del contenido, la dimensión psicocognitiva y la dimensión didáctica vinculada al funcionamiento de la institución escolar.

2.2.4 Ambiente de aprendizaje.

De acuerdo con Jiménez (2011) el ambiente de aprendizaje es el espacio físico en donde se puede llevar a cabo el proceso de aprendizaje, en el cual entran en juego elementos tales como la guía del docente y los elementos lúdicos.

El ambiente de aprendizaje es un factor relevante en la educación pues permite que los estudiantes lleven a cabo un aprendizaje significativo y relaciones de aprendizaje más óptimas,

incentivando el trabajo en equipo. A partir de los elementos descritos anteriormente, se entiende por ambiente de aprendizaje como:

Un espacio pedagógico y sistémico que permite entender desde una lógica diferente los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Escuela. Desde esta propuesta se valida al estudiante como sujeto activo y participante en el ambiente, reconociendo sus necesidades e intereses desde lo cognitivo, lo socio afectivo y lo físico-creativo, entendiendo estas características a la luz del desarrollo humano que se reconoce desde la Reorganización Curricular por Ciclos RCC. (Secretaría de Educación de Bogotá, 2012. p. 27)

Por lo tanto, los ambientes de aprendizaje nacen como respuesta a los paradigmas tradicionales de enseñanza y aprendizaje, relacionan elementos pedagógicos y didácticos en pro de que los estudiantes para que participen activamente en la construcción de su conocimiento, potencializando el desarrollo cognitivo, socio afectivo y físico creativo.

Sumado a lo anterior, Otálora (2010) indica que existen cuatro elementos que permiten que un ambiente de aprendizaje se constituya en un espacio educativo significativo, tendientes a que dicho espacio genere una situación:

- Estructurada: debe tener en cuenta objetivos centrales y metas específicas.
- Intensiva: exige la resolución de problemas relacionados con metas específicas.
- Extensiva: permite manipular la complejidad de las metas en el tiempo.
- Generativa: exige el uso de variadas competencias.

Por su parte, según el MEN (2014) los ambientes de aprendizaje para la formación en matemáticas deben contener en su organización tres elementos predominantes, propuestos por los lineamientos y estándares curriculares:

- Los cinco procesos generales de la actividad matemática
- Los conocimientos básicos (cinco tipos de pensamiento matemático)
- Los contextos que dan sentido a la actividad matemática escolar.

De acuerdo con estas premisas, los maestros deben propender por diseñar y gestionar ambientes de aprendizaje que contengan elementos del aprendizaje significativo y que a su vez permitan trabajar desde los procesos, tipos de pensamientos y contextos de aprendizaje de las matemáticas.

Así mismo, para el MEN (2014) un ambiente de aprendizaje para matemáticas se debe construir teniendo en cuenta cuatro dimensiones:

- *Dimensión 1. Un entorno o espacio físico, donde se tienen lugar las actividades y las relaciones entre los sujetos:* el espacio de un ambiente de aprendizaje en matemáticas debe contribuir al diálogo, la comunicación y el trabajo en equipo, contrarrestando el esquema del aula tradicional, “los estudiantes trabajan por grupos pero no necesariamente todos los grupos abordan la situación de la misma manera. Cada grupo usa los recursos que requiere de acuerdo con su proceso y el profesor acompaña de manera activa este proceso” (p. 20)
- *Dimensión 2. Un conjunto de acciones reguladas por el aprendizaje de temas matemáticos o centrados en la actividad matemática:* usualmente se cae en el error de pensar que la enseñanza de las matemáticas debe estar mediada principalmente por la memorización de procedimientos que se ponen en práctica con la realización de ejercicios repetitivos y secuenciales, lo cual reduce la participación de los estudiantes limitándoles a la resolución de cuestionamientos por parte del docente. Contrarrestando dicho panorama,

se propone que el ambiente de aprendizaje permita resolver situaciones problemas, construir soluciones y comprensiones particulares con el fin de fortalecer las competencias matemáticas. Desde esta dimensión, el rol del maestro es primordial, pues tiene la responsabilidad de posibilitar en sus estudiantes una actuación crítica frente a la resolución de problemas matemáticos.

- *Dimensión 3. Un conjunto de recursos dispuestos en el ambiente con una intención didáctica:* en este punto es importante resaltar el uso de recursos tecnológicos que dinamizan el proceso de enseñanza-aprendizaje. En un ambiente de aprendizaje los recursos deben apoyar los tipos de experiencia y reflexión con el fin de construir nuevos significados y comprensiones.
- *Dimensión 4. Un conjunto de interacciones que alternan organizaciones sociales del aula para promover aprendizaje individual y aprendizaje con otros:* el ambiente de aprendizaje debe permitir la interacción social del individuo con su medio y con otros pares.

Para que el trabajo en colaboración tenga lugar en el ambiente será necesario construir participativamente con los estudiantes unas normas de trabajo que sean compartidas y que mediante ellas el estudiante tome consciencia de que está aprendiendo en comunidad y que en su participación en el grupo debe asumir la responsabilidad no sólo de su propio aprendizaje sino también el de sus compañeros (MEN, 2014, p. 28)

Se concluye por tanto, que el ambiente de aprendizaje debe ser un escenario de aprendizaje que genere múltiples experiencias, haciendo a los estudiantes partícipes de ellas. Además, debe favorecer la construcción de nuevos conocimientos y permitir el crecimiento de formas de aprehensión y modalidades de interacción.

2.2.5 Génesis Instrumental

Cuando se llevan artefactos al aula de clase, se debe buscar que cumplan con el propósito deseado. En este sentido, al integrar las computadoras al aula de clase se origina una transposición informática que implica una contextualización del conocimiento creado, con posibles consecuencias para el proceso de aprendizaje (Trouche, 2005). De ahí que, los estudiantes deben apropiarse de los artefactos dispuestos en su contexto de aprendizaje, para poder sacar el mayor provecho de éstos; pues como lo plantea Rabardel (1995; citado por Cedillo, 2006): “un artefacto, por sí mismo, no es automáticamente un instrumento mediador” (p. 133). Es decir, es necesario que los estudiantes utilicen el artefacto, asignándole un papel específico dentro de cierta actividad, y de esta manera lo reconozcan como un instrumento útil que le aporta a su proceso de aprendizaje.

Verillon y Rabardel (1995; citado por Trouche, 2005) proponen una distinción entre artefacto e instrumento, donde el artefacto es un objeto material o abstracto, que es empleado por un sujeto para realizar cierto tipo de tarea; mientras que el instrumento es construido por el sujeto a partir del artefacto. Este proceso de construcción se denomina génesis instrumental e involucra dos componentes: la instrumentalización y la instrumentación (Figura).

La instrumentalización es un proceso dirigido hacia el artefacto, donde intervienen varias fases: una fase donde se descubren y seleccionan las herramientas o elementos pertinentes, una fase de personalización, donde se ajusta el artefacto dependiendo de las necesidades y una fase de transformación del artefacto; por ejemplo, la modificación de la barra de herramientas, la creación de atajos en el teclado, entre otros. En otras palabras, el sujeto al usar el artefacto se apropia de sus propiedades iniciales, adaptándolo a sus necesidades y limitado a sus potencialidades. La instrumentación es un proceso dirigido hacia el sujeto, donde éste concibe

las restricciones y potencialidades del artefacto, pasando a través de la emergencia y evolución de esquemas mientras realiza un determinado tipo de tarea.

Figura 1. Explicación de la génesis instrumental

Fuente: Guin y Trouche (2002, citado en Ibarguen & Realpe, 2012).

Durante este proceso el sujeto puede llevar al mejoramiento del artefacto o a su subutilización, este último se da cuando se utiliza un porcentaje mínimo de la tecnología que se dispone. De este modo, cuando se utiliza un artefacto para amplificar y no para generar conocimiento se está subutilizando.

Del mismo modo, en tanto el sujeto se apropia del artefacto, desarrolla esquemas mentales que en palabras de Vergnaud (1996; citado por Cedillo, 2006) son “una acción deliberada para lograr una meta que contiene operaciones invariantes” (p. 134). Éstos le permiten al sujeto organizar la estrategia con la cual abordar un problema, los conceptos que establecen el fundamento de esa estrategia y los significados técnicos para usar el artefacto. En este sentido,

Cedillo (2006) sostiene que “el artefacto se convierte en un instrumento sólo si se combina con el desarrollo de esquemas mentales” (p. 133).

Trouche (2000; citado por Cedillo, 2006) habla sobre esquemas de utilización, definiéndolos como “una organización mental estable, que incluye técnicas y los conceptos que las apoyan para usar un artefacto en una clase específica de tareas” (p. 134), distingue dos tipos: los esquemas de uso y los esquemas de acción instrumentada.

La génesis instrumental tiene aspectos individuales y sociales (Trouche, 2005), cuyo balance depende de:

- Factores materiales, los cuales ocasionan que se trabaje de forma grupal o individual dependiendo del tipo de artefacto; por ejemplo, la “intimidad” de la pantalla de la calculadora favorece el trabajo individual o en grupos pequeños.
- La disponibilidad de los artefactos, puesto que en ocasiones sólo están disponibles en la escuela, a veces se prestan durante todo el año escolar o, a veces son propiedad de los estudiantes. Respecto a esto, Chacón y Soto (1998; citado por Trouche, 2005) afirman que cuando las calculadoras o computadores sólo están de vez en cuando disponibles, los estudiantes a menudo desarrollan una actitud crítica hacia la tecnología. Esto los lleva a estar bastante confundidos, porque aprender en dos ambientes – informático y clásico- no es lo mismo, y en ocasiones frustrados, por no tener a su disposición las computadoras fuera del trabajo de laboratorio.
- La manera en que el maestro tiene en cuenta estos artefactos, pues si el maestro los utiliza frecuentemente en la clase, como mediadores del conocimiento, será más viable que se conviertan en instrumentos.

Por otra parte, en la aproximación histórica de los artefactos se muestra la existencia de un simetrizador o máquina articulada con la cual es posible realizar la transformación de simetría axial, ésta puede ser llevada al aula para la adquisición de nuevos conocimientos que se evidencian cuando el estudiante desarrolla esquemas de utilización.

El simetrizador puede constituirse en un artefacto valioso cuando se incorpora al aula de clase al iniciar el tema de la simetría axial; de esta manera, no se está utilizando como amplificador sino como reorganizador que permite generar nuevos conocimientos.

2.2.6 Geometría dinámica

Se trata de un espacio virtual en el cual se construyen libremente figuras siguiendo una serie de pasos y donde cada elemento depende uno del otro en relación de lo que se quiera hacer (Corredor, 2011).

En un cierto modo la geometría dinámica es una especie de primera física. Se pueden construir y manipular objetos que conservan su coherencia durante el desplazamiento (Richard, 2010).

Cuando las figuras geométricas adquieren la forma de moverse, es decir, adquieren dinamismo, estamos en presencia de la geometría dinámica y esta permite que el alumno se forme una idea más general de esas figuras geométricas, que no asocie las propiedades a una forma particular de las figuras. Por ejemplo, en el caso de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, él podrá ver que cuando movemos el triángulo esto hace que se mantenga la suma de sus ángulos interiores y permite, además, precisar el caso especial del triángulo rectángulo y el caso límite que es el caso en que un ángulo se hace 180 grados y los otros dos miden 0 grados (Campistrous & López, 2002).

De igual modo sucede con la propiedad de que en todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos, donde con esta variante dinámica se puede, además de comprender de una manera más general la propiedad, también precisar el caso límite, es decir, cuando los tres puntos están en línea recta que es cuando se obtiene la igualdad.

Lo mismo pasa con cualquier tipo de figura, por ejemplo cuando se toma un paralelogramo cualquiera y se analiza la amplitud de sus ángulos opuestos, el alumno podrá apreciar que cualquiera que sea la forma de ese paralelogramo, se va a mantener la propiedad de que esos ángulos son iguales o que tienen la misma amplitud, pero sin embargo, si se toma la longitud de los lados consecutivos, los alumnos verán que la propiedad de igualdad de dos lados consecutivos solo se va a cumplir en un tipo muy particular de cuadrilátero (el rombo y, en particular, el cuadrado) pues cuando uno lo mueve va a obtener variaciones (Campistrous & López, 2002).

Esto hace que la geometría dinámica permita a los alumnos formarse conceptos mucho más generales acerca de las figuras geométricas y comprender de una manera más completa las propiedades geométricas. De esa manera el alumno no va a asociar ya cada propiedad con una forma particular de la figura.

Otra ventaja de la geometría dinámica es que permite aprovechar plenamente una de las estrategias heurísticas en la solución de problemas geométricos que difícilmente puede ser aprovechada en otros casos, que es la estrategia de *mover la figura*. De esta manera el alumno puede mover la figura y conservar ciertas propiedades, y puede formarse una imagen de qué cosa es lo que ocurre al hacer las variaciones y así tener ideas de cómo resolver el problema, es decir, esto permite realizar esta estrategia heurística, ya recomendada en el libro *Howtosolveit*, que de otra forma es casi imposible de hacer.

Lo mismo ocurre con la estrategia heurística de *considerar casos particulares, considerar casos límites*, así como *medir y comparar*, entre otras, en las cuales al darle movilidad a la figura se hacen visibles de una manera muy natural y se pueden alcanzar esos casos y formarse una idea de cuál puede ser la solución del problema (Campistrous & López, 2002).

2.2.6.1 Uso de tecnología en matemáticas.

Las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiantes obtener conclusiones y realizar observaciones en otros ambientes, el papel que la tecnología puede tener en la educación matemática de acuerdo a Balachef (1996, citado en Gómez, 1997, p.1) “es el de ser un medio con el que los estudiantes tienen encuentros organizados por el profesor para que de estos surja conocimiento”.

Además hoy en día el mundo evoluciona muy rápido y es necesario que se produzcan cambios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de forma tal que haya creaciones innovadoras respecto a las actividades que se implementen. Para ampliar esta idea el MEN (1999) indica que:

(...) tiene entre sus objetivos implementar procesos de acompañamiento, vigilancia y control para los planes regionales de renovación pedagógica y las TIC, nacionales e institucionales de educación, como también rediseñar proyectos educativos institucionales (PEI) y planes educativos municipales (PEM) que incluyan el uso ético y pedagógico de las TIC, permitiendo mejorar los currículos orientados hacia los procesos investigativos, informativos y al desarrollo de inteligencias cognitivas, sociales y prácticas. Y así mismo transformar la formación inicial y permanente de docentes y directivos para que centren su labor de enseñanza en el estudiante como sujeto activo, la

investigación educativa y el uso apropiado de las TIC, para ello avanzar en la consolidación e implementación de proyectos innovadores se requieren acciones y prácticas individuales y colectivas que respondan a un proceso planeado, intencional, deliberado y sistematizado tanto para su gestación como para su desarrollo; y así lograr transformaciones en la formación de los docentes que se hagan visibles desde las aulas de clase, en donde la incorporación de las TIC, juega un papel fundamental. Y es en este momento donde un AGD como Cabri Géomètre II Plus, considerado un micromundo geométrico que no tiene una intención didáctica, sino que es el profesor, como responsable de la enseñanza, quien debe crear o escoger las situaciones que considere pertinentes para la adquisición del conocimiento. (p.6)

Sin embargo, en el presente trabajo se usa el micromundo Geogebra, ya que además de poseer una intención didáctica y de libre uso, permite tener diferentes representaciones de los objetos de forma simultánea como geométrica, CAS, hoja de cálculo, entre otros.

Los micromundos le van a permitir a los estudiantes la construcción, exploración, manipulación directa y dinámica de objetos en pantalla que, lo llevará a identificar conjeturas, a registrar observaciones de lo palpado, posibilitando la generalización de conceptos.

2.2.6.2 Micromundos

En la evolución del concepto de micromundo, Thompson (1987) describió la idea de micromundo matemático como un sistema compuesto de objetos, relaciones entre objetos, y operaciones que transforman los objetos y sus relaciones. Lo que es esencial es el hecho de que existan operaciones mediante las cuales se puedan construir nuevos objetos, ya que esto es lo que hace a un micromundo "matemático": la construcción de relaciones y la utilización de esas relaciones como nuevos objetos a los que se pueden aplicar operaciones. La meta de un micromundo matemático es pues la construcción de significado y de relaciones que sirvan como

modelo para un sistema formal; es decir, el micromundo da a los estudiantes oportunidades para crear modelos mentales que reflejen la estructura y composición de los sistemas formales (op.cit., p.85) Es así como se ha llegado a la definición de micromundos como mundos computacionales donde las ideas matemáticas se expresan y desarrollan. Hoyles (1993) explica que la meta de los micromundos ha cambiado desde sus orígenes, transformando su propósito al de diseñar ambientes de aprendizaje para la apropiación del conocimiento, donde juegan un papel central los "objetos transicionales" (aquellos que son intermediarios entre lo concreto y directamente manipulable, y lo formal y abstracto; ver Papert, 1987).

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones, realizar conjeturas, comprobar propiedades. El papel de la tecnología puede tener en la educación matemática de acuerdo a Balacheff (1996) "el de ser un medio con el que los estudiantes tienen encuentros organizados por el profesor para que de estos surja un conocimiento" (p.470).

Así mismo Dunham (1994) afirma que: "los estudiantes pueden aprender más matemáticas y en mayor profundidad con el uso apropiado de la tecnología" (p.13). Este autor afirma que tampoco se puede decir que esta tecnología deba ser un remplazo de la forma convencional en la que se ha trabajado siempre, esta tecnología se debe utilizar de forma frecuente pero también responsablemente con el fin de tener un mejor aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes.

A partir de lo anterior, se tiene como hipótesis del trabajo del autor que la tecnología ofrece a los docentes opciones para adaptar sus funciones a necesidades específicas de los estudiantes, sobre todo para aquellos estudiantes que en un ambiente computacional pueden concentrarse

mejor, pues las restricciones impuestas por un ambiente tecnológico pueden beneficiar a aquellos que tienen dificultades de organización. Además, estudiantes que tienen problemas con procedimientos básicos pueden desarrollar otras formas de comprensión matemática.

En el caso de las matemáticas, y dentro de la gama de software para educación, la Geometría Dinámica, que son micromundos matemáticos que “pueden ofrecer entornos más relevantes y poderosos para dar significado a los conceptos matemáticos” (Balacheff, 2002).

Así en el uso de estas herramientas computacionales para el aprendizaje, hay que tener en cuenta el principio de la génesis instrumental que permite que una herramienta en un primer momento sea asumida bajo la categoría de artefacto, es decir un objeto tecnológico presto a emplearse en alguna labor; pero cuando el artefacto mediante unos procesos de apropiación que hace el usuario de él se convierte en un mediador importante entre el hombre y la actividad humana que realiza, respondiendo a unos esquemas de uso, se transforma en instrumento (Moreno, 2002).

Con las TIC en el aula los maestros deben crear formas novedosas de aprender y enseñar. Las herramientas computacionales ofrecen una mirada diferente a los objetos matemáticos por ejemplo en Geogebra la opción de arrastre hace que un punto tenga un realismo diferente al del lápiz y papel.

La enseñanza de la geometría utilizando un AGD está basada en la resolución de problemas, con una perspectiva en la que los alumnos tienen la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar; en definitiva, investigar sobre cada contenido que se pretende adquirir (Vergnaud, 2004).

2.2.6.2.1 Micromundo Geogebra

Geogebra, por su parte, es un software de matemáticas desarrollado por Markus Hohenwarter de la Universidad de Salzburgo que incorpora elementos geométricos, algebraicos y de cálculo. La gran ventaja sobre otros programas de geometría dinámica es la dualidad en pantalla: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa (Recio, Cruz, Bautista & Jáuregui, 2016).

Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente. Por otra parte pueden incorporarse ecuaciones y coordenadas directamente, permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un menú de comandos propios del análisis matemático. Geogebra es un programa interactivo especialmente diseñado para la enseñanza y aprendizaje de Álgebra y Geometría a nivel escolar medio (secundaria) (Castellanos, 2010).

Por lo mencionado anteriormente, Geogebra se considera un software de geometría dinámica que contiene herramientas para el trabajo con simetrías. Este ambiente ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos no sólo de geometría sino también de álgebra, análisis y estadística. Es sencillo y fácil de utilizar, lo que facilita desarrollar actividades a través de las herramientas y/o recursos que ofrece. Permite abordar la geometría y otros aspectos de las matemáticas, a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

2.2.6.3 Ambiente de Geometría Dinámica.

En el presente trabajo de grado se aborda el concepto de herramienta computacional desde lo que es un ambiente de geometría dinámica (AGD) y las principales características del medio geométrico dinámico son las siguientes:

Santacruz (2004), dice que la capacidad de arrastre (dragging) de las figuras construidas que favorece la búsqueda de rasgos que permanecen vivos durante la deformación. La diferencia fundamental entre un entorno de papel y lápiz y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una temporalidad: ya no son estáticas, sino móviles, y por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla. (p.14)

Con esta opción, es posible reconocer los invariantes de una construcción, según si el arrastre conserva las propiedades matemáticas de esta construcción o no. Así, la capacidad de arrastre de los objetos de una construcción favorece la búsqueda de propiedades de la figura, que permanecen “vivas” durante la deformación a la que sometemos la figura original. Estas son las propiedades geométricas genuinas. El objeto geométrico queda definido entonces por estas propiedades (Rabardel, 1995).

De acuerdo con lo anterior, el AGD permite observar las propiedades invariantes, que, para el caso de la simetría axial con la conservación de las figuras en su tamaño y forma, la distancia de cada punto del objeto del eje de simetría.

Las TIC hoy en día tiene un gran auge en nuestra sociedad, y la educación no debe estar desligada de ella, autores como Moreno (1999) afirman que es necesario reflexionar e indagar sobre cómo debe de incorporarse en las aulas, por ejemplo aquellos autores que han trabajado con TIC dentro del contexto escolar como Balacheff (2002), especialmente con programas

diseñados para ser introducidos en el aula, han encontrado que se dan nuevas características en la construcción del conocimiento matemático.

Por otra parte, los AGD no son un simple medio de interacción entre el alumno y los objetos matemáticos representados, sino que funcionan modificando la forma en que se ejerce la actividad matemática respecto de la enseñanza geométrica tradicional con lápiz y papel.

Por medio del AGD es posible observar las propiedades de una figura (sin tener que reconstruirla) cuando por vía del arrastre, se desplaza uno de sus puntos. De esta manera, es posible que los estudiantes puedan señalar las propiedades invariantes y enunciar conjeturas, los AGD constituyen una alternativa complementaria de ciertas actividades de exploración de las figuras en un ambiente de lápiz y papel, ya que facilitan la observación de las propiedades. Entonces al trabajar las nuevas tecnologías en el aula de clase invitaría al profesor tradicional al cuestionarse en las nuevas formas de enseñar y así mismo manejar un proceso de adaptación que lo lleve al diseño de plantear actividades que se movilicen utilizando las herramientas que ofrecen los AGD.

De igual manera Laborde (2004) plantea la posibilidad de que los estudiantes, que trabajen en un AGD se familiaricen progresivamente con ciertos rasgos de los entornos computacionales.

Los AGD integrados en el aula no se deben ver como la herramienta que reemplazaría la enseñanza ejercida por el maestro a trabajar, lo que debe tener claro los estudiantes es que es una de las maneras que invita a movilizar conocimiento.

La propuesta no obliga a los docentes a dejar aparte la forma usual que han adquirido de enseñar, sino que invita a los maestros a poder integrar nuevas herramientas pedagógicas en el proceso de movilizar conocimiento matemático.

Existen ciertas concepciones acerca del uso de las herramientas en aula de clase lo que es cierto es que no todo maestro le es fácil adaptarse a una manera diferentes a la que ya venía trabajando, generando de esta manera rechazo a la misma.

Las siguientes son las diferentes concepciones enunciadas por maestros que han dado su punto de vista acerca de las nuevas tecnologías:

Por ejemplo, Rabardel (1999) Expone que los profesores presentan una concepción “ingenua” de los instrumentos que se basan en su supuesta neutralidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje De las matemáticas. Su argumento central destaca, que, en las actividades educativas, los instrumentos no son entidades neutras, al contrario, presentan un impacto fundamental en los productos cognitivos del sujeto.

Otro autor como Trouche (1996) ha mostrado, por ejemplo, que, en el uso de calculadoras gráficas en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar, tanto profesores como estudiantes opinan que el uso de éstas en el contexto de la clase no requiere de ningún aprendizaje, y, por tanto, son considerados neutrales en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

A partir de lo anterior se concluye que el maestro puede diseñar actividades que movilicen los conceptos a trabajar, así el alumno empieza a experimentar y descubrir conjeturas, de esta manera se plantearían muchos aportes a la clase tradicional y lo llevaría a una clase en donde constantemente se tendría participación de alumno profesor.

A continuación se planteara ciertas definiciones en donde se dirá cuál es el término adecuado que utilizaremos a trabajar, por ejemplo para Rabardel (1999) el instrumento es una entidad mixta que comprende de una parte, el artefacto material o simbólico y de otra parte, los esquemas de utilización, las representaciones que forman parte de las competencias del usuario y

son necesarias para la utilización del artefacto.” así mismo autor reconoce el artefacto como un dispositivo material o simbólico utilizado por el sujeto en la acción instrumentada.

2.2.7 Transformaciones isométricas.

En este trabajo de grado el objeto matemático a analizar son las transformaciones rígidas, o también llamadas isometrías que conservan las propiedades geométricas invariantes, como el área de las figuras, sus líneas paralelas o perpendiculares, el perímetro y la congruencia entre figuras. Una de las grandes ventajas del dibujo isométrico es que se puede realizar el dibujo de cualquier modelo sin utilizar ninguna escala especial. Así, por ejemplo, un cuadrado cuando se dibuja en forma isométrica conserva todas sus propiedades.

Las Isometrías son grupos de transformaciones definidas como objetos matemáticos que dejan invariantes ciertas propiedades de los objetos geométricos, la conservación de la distancia lleva implícita, por deducirse de ella, la conservación de otras propiedades observables, como lo son los ángulos, el área, el paralelismo o la perpendicularidad de las que nos hablan los postulados de Euclides (Alsina, 1993). Es decir que todo esto justifica lo cualitativo de las transformaciones rígidas que se aplica a tales movimientos.

Otra característica de estas transformaciones es que la composición de dos isometrías, da como resultado otra isometría, por lo tanto, los elementos que conforman estas imágenes mantienen invariantes sus propiedades geométricas (Santacruz & López, 2004).

Existen tres tipos de transformaciones rígidas que son la traslación, la rotación y la simetría, estas transformaciones no cambian ni el tamaño ni la forma del objeto matemático.

2.2.7.1 Simetría.

La simetría es la correspondencia de posición, forma y tamaño, respecto a un punto, una línea o un plano, de los elementos de un conjunto o de dos o más conjuntos de elementos entre sí.

Existen dos tipos de simetrías que son la simetría axial y la simetría central. La primera se considera como el reflejo de un objeto respecto a un eje, y la segunda respecto a un punto. Para definir entonces una transformación de simetría, es necesario un eje o un punto en el plano y un objeto inicial se puede llamar pre imagen el cual sufre la transformación respecto al eje o el punto.

A continuación, se amplía la definición de cada simetría y de sus elementos, para la simetría Yaglom (1962) indica que, una simetría axial o reflexión axial se puede caracterizar como:

2.2.7.2 Simetría axial

Un punto A' es la imagen de un punto A mediante una reflexión respecto a una línea l (llamada eje de simetría) si:

- El segmento AA' es perpendicular a l
- l pasa por el punto medio del segmento AA'

Es decir, la recta l es la mediatriz del segmento AA'

Si el punto A es la imagen de A' respecto a una línea recta l , entonces recíprocamente, A' es la imagen de A en l . Así es posible aludir que los puntos son imágenes el uno del otro respecto a una línea recta l , entonces también puede decirse que A' es simétrico de A con respecto a la línea l . Como se observa en la figura 1.

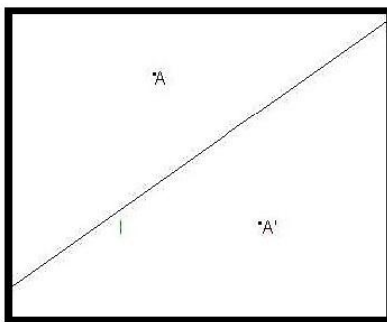


Figura 2. Simetría axial

2.2.7.3 Simetría Central

La simetría central se puede caracterizar como:

La transformación en que a cada punto del plano se le asocia otro punto del plano llamado imagen, que debe cumplir con las siguientes condiciones:

- El punto y su imagen están a igual distancia de un punto llamado centro de simetría.
- El punto, su imagen y el centro de simetría pertenecen a una misma recta.
- Una simetría de centro O equivale a un giro de centro O y amplitud 180° .
- Como una simetría de centro O equivale a un giro de centro O y amplitud 180° , al aplicar otra transformación el ángulo será de 360° , por lo que se obtiene la misma figura, lo que se llama involución. Es una transformación involutiva.
- Un punto es centro de simetría de una figura si define una simetría central.
- La simetría central transforma rectas en rectas paralelas.
- Las rectas dobles son las que pasan por el centro.

Tal como se muestra en la figura 2.

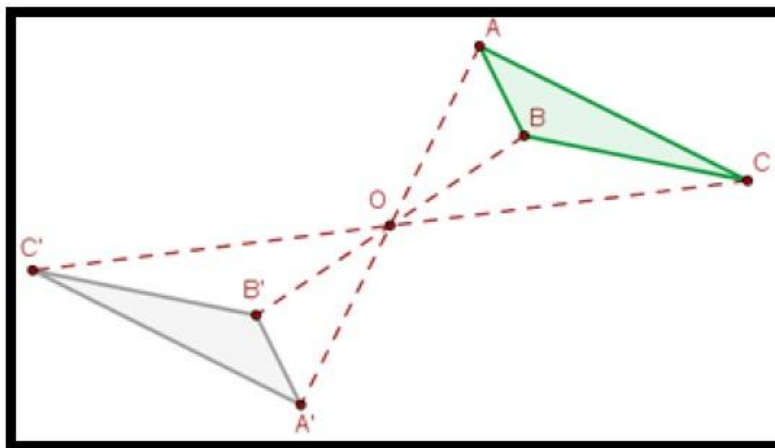


Figura 3. Simetría central

Una simetría axial de eje e es una transformación, por tanto a todo punto P del plano le corresponde otro punto P' también del plano, de manera que el eje e sea mediatriz del segmento PP' . Las simetrías axiales son isometrías inversas porque conservan las distancias entre sus puntos y sus homólogos, pero su orientación es la inversa. La simetría axial no solo se presenta entre un objeto y su reflexión, sino también en las figuras que mediante una línea pueden partirse en dos secciones que son simétricas respecto a la línea. Estos objetos tienen uno (o más) ejes de simetría (Sangaku, 2018).

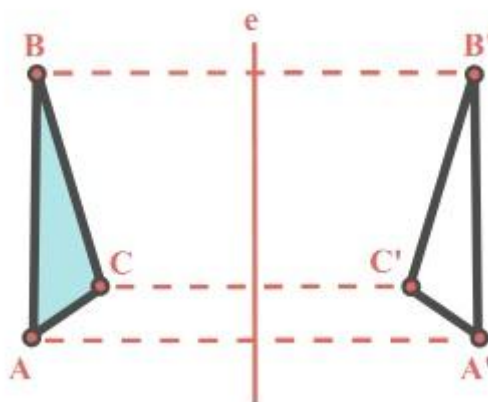


Figura 4. Simetría axial

La simetría axial se da cuando los puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría. En la simetría axial se da el mismo fenómeno que en una imagen reflejada en el espejo.

A los puntos que pertenecen a la figura simétrica se les llama puntos homólogos, es decir, A' es homólogo de A , B' es homólogo de B y C' es homólogo de C . Además, las distancias existentes entre los puntos de la figura original son iguales que las distancias entre los puntos de la figura simétrica. En este caso: La simetría axial se puede dar también en un objeto con respecto de uno o más ejes de simetría.

Si se doblara la figura sobre el eje de simetría trazado, se podría observar con toda claridad que los puntos de las partes opuestas coinciden, es decir, ambas partes son congruentes.

A continuación se indica la expresión en coordenadas de las simetrías axiales.

Sean $P = (x,y)$ y $P' = (x',y')$ dos puntos del plano, se dará su expresión en coordenadas en función de la posición de su eje:

- El eje de simetría es el eje de ordenadas:

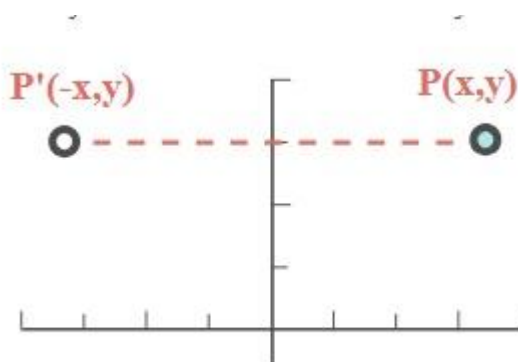


Figura 5. Eje de simetría

- El eje de simetría es el eje de abscisas:

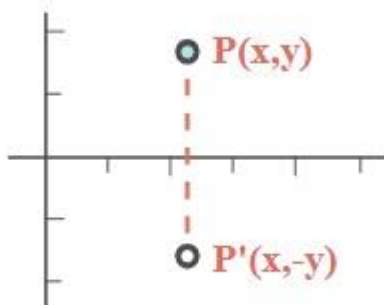


Figura 6. Eje de simetría en las abscisas

Así se da la composición de simetrías axiales:

- La composición de dos simetrías con los ejes paralelos e y e' es una traslación, cuyo vector tiene la longitud el doble de la distancia entre los ejes, la dirección es perpendicular a los ejes y su sentido es el que va de e a e' .

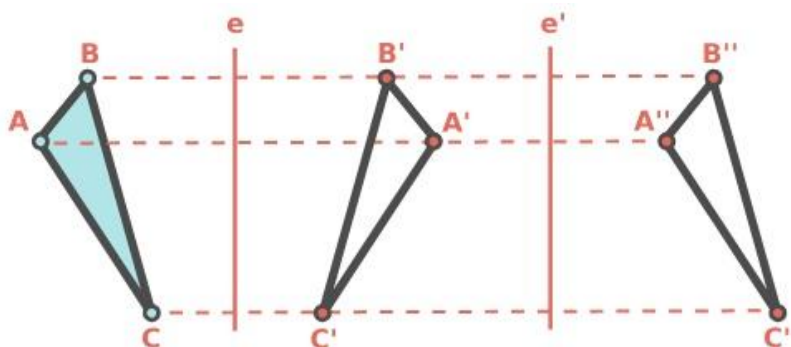


Figura 7. Composición de dos simetrías con ejes paralelos

- La composición de dos simetrías con los ejes perpendiculares e y e' es una simetría central respecto del punto de corte de los dos ejes de simetría.

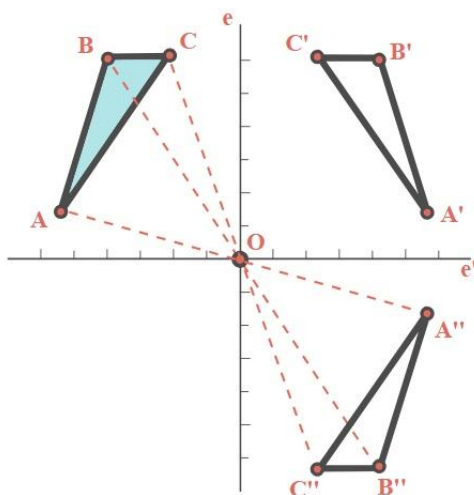


Figura 8. Composición de dos simetrías con ejes perpendiculares

A partir de lo anterior, se establecen los elementos matemáticos que caracterizan la simetría, en particular la axial que se evidencian en la elaboración de la secuencia didáctica.

2.2.8 Obstáculos y dificultades en el aprendizaje de las transformaciones isométricas.

Para el desarrollo de este trabajo es importante, el reconocer cuales son los obstáculos y dificultades o errores, que los estudiantes tienen en el aprendizaje de las transformaciones y específicamente con la simetría central en las dificultades reportadas en algunos autores.

La dificultad encontrada por Thomas (1978) (citado en Alsina et al, 1993) recoge en su informe sobre geometría escolar los resultados obtenidos al efectuar con niños de 6, 9 y 12 años, distintas transformaciones como rotaciones, simetrías y traslaciones sobre un triángulo, y dedujo que la mayoría de los niños creen que la longitud de los lados del triángulo queda invariante cuando se efectúan transformaciones de rotación y reflexión, mientras que en las traslaciones vieron que las longitudes del triángulo si habían cambiado. Dedujo además que hacia los 12 años de edad que este invariante es aceptado plenamente.

En un estudio sobre la conservación de longitudes a las edades de 8, 9 y 10 años realizado por Kidder (1978), el 40% de los niños de 8 años cree que conserva la longitud, el 55% de los de 9 y el 60% de los de 10. Lo anterior da un indicio que para cuando los niños estén en grado séptimo con una edad de 11 o 12 años, ellos tendrán poca claridad sobre la propiedad de conservación de las longitudes en las transformaciones geométricas como la simetría.

En cuanto a otra dificultad, Perham (1978) (citado en Alsina et al, 1993), estudio las transformaciones de traslación, reflexión y rotaciones. Las traslaciones y reflexiones fueron estudiadas en orientación horizontal, vertical y oblicua, se concluyó que los niños aprenden las transformaciones en el siguiente orden: traslaciones, reflexiones y rotaciones, confirmando los resultados de los estudios de Piaget (1982). Pero el factor más importante en el aprendizaje de las traslaciones y reflexiones, es la orientación, en la que menos tienen dificultades es en la horizontal y la que tiene más dificultad es la oblicua.

Sobre las simetrías Küchermann (1980) (citado en Alsina et al, 1993) en un estudio con niños de 14 años encontró que un error común consistía en ignorar la inclinación del eje y reflejar horizontalmente y verticalmente, debido a esto la orientación oblicua es la que ofrece mayores problemas en el aprendizaje de las transformaciones con reflexión. Este autor añade que en la enseñanza de las reflexiones hay que hacer hincapié en tres aspectos: la dirección del movimiento, la distancia del objeto al eje y deshacer el objeto en partes separadas que serán llevadas mentalmente mientras se realiza el paso siguiente.

A partir de lo anterior, en la secuencia didáctica estará en ese orden; la simetría axial horizontal, vertical y por último la oblicua, haciendo hincapié en la dirección, movimiento y la distancia entre el objeto y el eje de simetría.

2.2.8.1 Sobre la visualización.

La visualización es estudiada por la Didáctica de las Matemáticas, en particular con el uso de los micromundos en contextos escolares. En ellos se pueden manipular directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el arrastre. El arrastre permite explorar la figura o construcción y llegar a la elaboración de conjeturas o a la determinación de propiedades.

Es por tanto la evidencia visual un proceso importante en la resolución de problemas en geometría, porque: es interpretada en términos geométricos y genera cuestiones que son resueltas por medio de la geometría; el análisis geométrico provoca nuevas preguntas las cuales son, en una primera instancia empíricamente exploradas, dando lugar a que se realicen nuevos experimentos con el software.

Según Laborde (1992) los fenómenos visuales que se plantean en el ámbito geométrico dan paso a que se miren los trabajos en resolución de problemas geométricos, utilizando programas para desarrollar actividades visuales como los AGD: Reglas y Compás, Cabri Géomètre, y el micromundo Geogebra, entre otros.

La resolución de problemas es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, y por su importancia las actividades de la secuencia didáctica estarán encaminadas en ese sentido, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén asociadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean significativas para los estudiantes. Según el MEN (1998) se exponen tres contextos para la resolución de estos problemas que pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano,

pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad.

Las diferentes características que tienen estos programas geométricos dan paso a que se planteen conjeturas de cómo resolver el problema desde lo visual.

Dependiendo de donde se mire la visualización tiene diferentes definiciones siempre y cuando se tenga en cuenta en donde se puede identificar para poderla denotar; a continuación, se dará diferentes definiciones de la visualización dependiendo de algunos autores que han estudiado acerca de ella.

Bishop (1983), este investigador establece una diferenciación a tener en cuenta en el término *visualización* y es su consideración como *sustantivo* o como *verbo*. “Como sustantivo se fija la mirada hacia el producto, hacia el objeto, el *qué* de la visualización, es decir las imágenes visuales” (p.33). En cambio, como verbo Bishop se refiere al proceso, a la actividad, a la habilidad, al *cómo* visualizar. También alude al dominio y procesamiento mental de esas imágenes y figuras. Según Bishop (1983) “la visualización implica la habilidad de manipular mentalmente, rotar, deformar o invertir un objeto presentado de manera gráfica” (p.34).

Por otro lado, la investigadora Presmeg (2006), vincula las representaciones internas y externas con la visualización, afirmando que: “en el proceso de hacer las representaciones internas y externas, el estudiante efectúa una estrecha conexión entre ellas que luego permite interpretar el trabajo de los estudiantes, y *ver* la utilización que hacen de la visualización en sus procesos de pensamiento” (p.18).

Otros autores como Arcavi y Hadas (2000) conciben la visualización como: “la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflejar una información visual” (p.12).

Entre tanto, en Tall (1991), se puede inferir que concibe la visualización como la simultaneidad de las representaciones gráficas y mentales de un concepto o un proceso matemático.

De acuerdo a lo citado por diferentes autores sobre la visualización, se considera importante para este trabajo tener en cuenta las representaciones que se van a tomar para el diseño de la secuencia de actividades, debido a que los estudiantes pueden manipular los objetos que se tendrán en las actividades.

Finalmente, Moreno (2001) expresa que los instrumentos de mediación generan una alta influencia en la arquitectura de la mente humana y sobre los mecanismos cognitivos. Por ello es importante entender que las herramientas computacionales en la educación son herramientas de mediación de las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje.

Así mismo, como existen definiciones acerca de la visualización, este concepto va de la mano con la representación en geometría, el cual es esencial pues la mayoría de veces se nombra y requiere una adecuada aclaración de este término.

Los ordenadores son una herramienta con grandes posibilidades para esta visualización de conceptos matemáticos y en las últimas dos décadas, con la aparición de los programas de Geometría Dinámica (Cabri, Sketchpad, Cinderella, Geogebra y otros), han ido transformándose unos programas de dibujo geométrico para convertirse en auténticos asistentes matemáticos que actualmente integran de forma natural geometría de coordenadas, hoja de cálculo (Mora, s.f.).

Las nuevas versiones de micromundos son cada vez más fáciles de utilizar. Para la Web de Simetría se ha utilizado de forma exclusiva el programa Geogebra, que es de libre distribución, lo que supone una gran ventaja para el alumnado que puede disponer de él tanto en el instituto, como en sus casas. Esta facilidad de uso ha ido paralela a una mayor integración del software con los navegadores con las herramientas para la creación de applets dinámicos que permiten mostrar los conceptos en movimiento (Mora, s.f.).

Así como la visualización, la representación tiene diferentes definiciones que plantean autores que han investigado acerca de ellas. A continuación, se citan algunos de ellos para el trabajo sobre el concepto de representaciones.

2.2.8.2 Representaciones.

Los autores Castro y Castro (1997), la definen como:

Las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción matemática, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. Por ejemplo, la notación decimal para la escritura de los números reales; el diagrama cartesiano, que asigna un punto del plano a cada pareja de números; los puntos de la circunferencia unidad, con centro en el origen, cuyas coordenadas representan los valores de las funciones seno y coseno. (p.68)

Por otro lado, Rico y Sierra (2000) caracterizan la noción de representaciones, para la Educación Matemática de la siguiente manera:

Las representaciones matemáticas se han entendido, desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas signos o gráficos que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con las cuales los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican sus conocimientos sobre las matemáticas. Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas. (p.53)

A partir de lo anterior se deduce que en el presente trabajo de grado el énfasis de las actividades a diseñar y los análisis de las mismas, tendrán como centro las representaciones gráficas.

Kaput (1987), por su parte, desarrolla un acercamiento teórico para explicar el uso de símbolos matemáticos y señala que:

Cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas el mundo representante y el mundo representado. Hay, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirá:

- El mundo representado;
- El mundo representante;
- Qué aspectos del mundo representado han sido representados;
- Qué aspectos del mundo representante hacen la representación y la correspondencia entre los dos mundos. (p.46)

De este autor se puede usar la idea de que el mundo representado en el contexto real puede expresarse en un mundo representante con Geogebra.

Toda actividad cognitiva del ser humano esta mediada por instrumentos, los cuales son catalogados como mediación para la construcción y organización del conocimiento matemático en donde genera al proceso mental, una forma y lo transforma, de esta manera el alumno va poder identificar conjeturas interrogantes que lo posibilite aun buen reto en el trabajo del ambiente geométrico (Wertsch, 1991).

3. Diseño metodológico

El diseño de las situaciones de aula tomó en consideración las particularidades que se observan en los procesos de aprendizaje en relación con las estrategias de enseñanza que surgen directamente en los procesos de interacción y desarrollo de las situaciones con las estudiantes.

Los diseños propuestos con características específicas y secuenciales involucran directamente la metodología a través de los distintos contextos que dan forma a los diseños y a los análisis de la secuencia de actividades

La fase del diseño y planificación tuvo que ver con la demarcación del problema de investigación, la contextualización y caracterización de la institución educativa y sus estudiantes; la definición de las Transformaciones Isométricas específicamente la simetría axial como el objeto geométrico que se movilizó a la luz de un marco teórico de referencia que orienta el diseño de la secuencia de actividades, que parte de la experiencia del profesor investigador.

3.1 Tipo y enfoque de estudio

3.1.1 Enfoque Cuantitativo y Cualitativo.

El presente estudio se realizó con base en un enfoque cualitativo. En éste, según Hincapié (2014), se “parte del estudio de métodos de recolección de datos de tipo descriptivo y de observaciones para descubrir de manera discursiva categorías conceptuales” (p.1).

Por su parte, Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014), afirman que el enfoque cualitativo “utiliza la recolección de datos sin medición numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación” (p.15). Respecto a lo anterior, se tuvo

en cuenta este enfoque, ya que algunas respuestas de los estudiantes en las tareas de la secuencia, dieron cuenta de las estrategias que se utilizaron para resolver las tareas de la secuencia.

Entonces, para llevar a cabo el presente estudio se tomaron los datos proporcionados por medio de la aplicación de la secuencia didáctica, dirigida a la muestra seleccionada, y se tabularon dichas respuestas a fin de generar un diagnóstico.

3.1.2 Tipo de investigación.

En cuanto al tipo de investigación que dirigió el presente estudio, el actual trabajo se desarrolló bajo una investigación descriptiva – explicativa, definida de la siguiente manera:

Investigación Descriptiva: “Refiere o narra características y propiedades de un objeto, sujeto o situación específica, sin emplear juicios de valor y en procura de altos niveles de objetividad” (Hincapié, 2014, p.1). Por lo anterior, el presente estudio buscó describir el estado actual del conocimiento de los estudiantes sobre el manejo del concepto de simetría axial, a través de la implementación de la secuencia de actividades, elementos conceptuales y procedimentales.

Investigación Explicativa: “Se orientan a dar respuesta a las causas de eventos y situaciones de tipo social o físico explicando por qué ocurre y las condiciones en que se da” (Hincapié, 2014, p.1). Partiendo de la obtención de los resultados, el estudio buscó explicar los avances y dificultades de los estudiantes frente al concepto de simetría axial por medio del diseño e implementación de una secuencia de actividades, mediada por Geogebra, con estudiantes de grado séptimo de la educación básica en Colombia.

3.2 Población y muestra

El presente estudio estuvo dirigido a todos los estudiantes de grado séptimo de la educación básica en Colombia, cuya muestra seleccionada estuvo constituida por todos los estudiantes de

grado séptimo de bachillerato en la institución educativa de carácter privado ubicado en el municipio de Jamundí, Valle del Cauca, Colombia.

3.3 Metodología de investigación desde la Didáctica de las Matemáticas

Este trabajo se enmarcó en una experiencia en el aula, dentro de un diseño de una secuencia de situaciones problema para el aprendizaje de transformaciones con simetría axial. Se pensó el desarrollo de este diseño desde la resolución de problemas, pero complementado con el uso de las TIC, pues es innegable que la computadora llegó para quedarse y se nota que se ha penetrado en todas las actividades humanas. En este sentido, la resolución de problemas mediada con una buena utilización de software de geometría dinámica, ayudó a los estudiantes a explorar, conjeturar y verificar resultados matemáticos como propiedades.

Con esta secuencia se pretendió integrar la tecnología al aula, de tal forma que se pudo analizar si esta tecnología tuvo un impacto favorable en los estudiantes, tanto para su motivación y aprendizaje de las transformaciones de simetría. Esta secuencia se fundamentó desde varias dimensiones como la matemática, la didáctica, la curricular y la tecnológica, para poder contextualizar y ser aplicado en el aula.

Este trabajo estuvo enfocado en el análisis de las actividades implementadas por el autor en el aula, teniendo en cuenta las siguientes fases:

Fase 1. Diseño: Esta fase tuvo dos objetivos:

El primero, concerniente a la concepción, que fue diseñar situaciones o actividades que ayuden a analizar los procesos de construcción y comunicación del saber. Además, para la construcción de las actividades debe tener en cuenta lo siguiente:

f En un primer momento, los alumnos deben tener estrategias de solución que les permitan abordar el problema con sus conocimientos disponibles.

f Las actividades deben ser diseñadas teniendo en cuenta los resultados de estudios previos.

El segundo objetivo, fue señalar cómo la manipulación de las variables didácticas permitió controlar los comportamientos de los alumnos antes de la experimentación. Se debieron considerar dos aspectos: el análisis matemático y el análisis didáctico del objeto matemático, y para ello se tuvo en cuenta lo siguiente:

- Los resultados que se esperan de los alumnos.
- Planificar las intervenciones del profesor.
- Identificar las variables del estudio.
- Prever y analizar las dificultades que los alumnos podrían enfrentar en la resolución de las actividades.

Fase2: Análisis Preliminar: Tiene como objetivo identificar y describir los obstáculos epistemológicos, didácticos y/o cognitivos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. Los análisis preliminares estuvieron constituidos por un conjunto de análisis en relación al objeto matemático: la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el análisis del campo de restricciones donde se situó la realización didáctica efectiva teniendo en cuenta los objetivos de la investigación. Para Artigue et al. (1995) el análisis de esta fase fue necesario hacerlo bajo tres dimensiones:

- Epistemológica: Aquí se analizaron las características del saber en juego, una reseña histórica y los aspectos teóricos del objeto matemático en estudio.

- Cognitiva: Aquí se analizaron las características cognitivas del público al cual se dirigió la enseñanza. Se analizó la forma como los alumnos interpretan el conocimiento matemático en cuestión y sus dificultades teniendo en cuenta sus conocimientos acumulados anteriormente.
- Didáctica: Aquí se analizaron las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. Se analizó la forma cómo se desarrolló el proceso de enseñanza del objeto matemático, así como los recursos didácticos (libros, guías, etc.) que utilizaron los profesores donde se realizó el estudio.

Fase 3: Recolección y procesamiento de la información: Esta fase fue la puesta en marcha de las actividades diseñadas. Inició en el momento en que el investigador, profesor y observador entró en contacto con la población de estudiantes.

De Faria (2006), señaló que consta de las siguientes etapas:

- La explicitación de los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- El establecimiento del contrato didáctico.
- La aplicación de los instrumentos de investigación.
- El registro de observaciones realizadas durante la experimentación.

Como la experimentación se llevó a cabo en más de una sesión, se hizo un procesamiento parcial, para realizar las correcciones necesarias y continuar con la siguiente sesión de clase.

Fase 4: Análisis: El análisis estuvo constituido por el conjunto de datos recogidos durante la realización didáctica, como fueron las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, las producciones de los estudiantes en clase o fuera de ella y la frecuencia de ciertas actitudes.

Estos datos se complementaron con la utilización de metodologías externas, como cuestionarios y entrevistas aplicadas en distintos momentos de la enseñanza.

Para la realización del análisis, Artigue et al. (1995) sostuvieron que: “la confrontación de los dos análisis, el a priori y a posteriori, fundamentan en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación” (p.48). Esta comparación fue entre los comportamientos esperados con respecto a los que sucedieron realmente durante la clase.

De acuerdo con lo mencionado anteriormente, cabe aclarar que en este trabajo se tuvo como objetivo el estudio de un determinado tema, en este caso el de la transformación de simetría axial. Con esto el estudiante de acuerdo con sus conocimientos realizó una exploración, la cual le permitió desarrollar la actividad, dentro de dicha exploración se consideraron aspectos tales como la interpretación del enunciado de la actividad, el análisis que realizaron antes de trabajar con la herramienta, la modelación y reformulación de la situación, la formulación de preguntas en relación con el contenido matemático y el uso de la herramienta, las explicaciones, argumentos o justificaciones que utilizaron para la validación de sus respuestas y finalmente el tratamiento que se le dio a las refutaciones que se les presentaron.

3.4 Actividades desarrolladas

Las situaciones de aprendizaje pretenden movilizar las Transformaciones Isométricas de objetos bidimensionales a partir de relaciones de congruencia y equivalencia de polígonos o superficies. El diseño de las situaciones se enmarca en el pensamiento espacial y sistemas geométricos y en el pensamiento métrico y sistemas de medidas. En ese sentido, se tomaron como referencia los Lineamientos Curriculares del MEN y los estándares básicos de

competencias en el ciclo de 6° a 7°; tomando puntualmente el siguiente estándar: Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte.

En el presente trabajo de investigación se desarrollan dos actividades en donde se incluye el programa Geogebra como instrumento tecnológico mediador que transversaliza el desarrollo de todas las actividades, en función de representar y manipular estos objetos geométricos de forma diferente al tradicional lápiz y papel. Camargo (2003) afirma que las Transformaciones Isométricas enseñadas de una forma tradicional, por lo general, ignora que la conceptualización descansa sobre procesos de construcción, visualización, elaboración de explicaciones y clasificación (Camargo, 2003).

Las siguientes fueron las actividades que llevadas a cabo:

Actividad 1

La primera actividad consta de una definición de simetría axial que se da al principio de la hoja y de tres preguntas para argumentar, las cuales pretenden que el estudiante logre crear estrategias usando Geogebra para saber si dos puntos son o no simétricos y comprobar que las estrategias usadas están correctas.

De este modo, el objetivo de la actividad 1 va más allá de la interacción entre las estudiantes y Geogebra. En esta situación se espera que haya una exploración de los distintos menús que ofrece el programa para determinar las estrategias posibles para comprobar la simetría axial entre puntos.

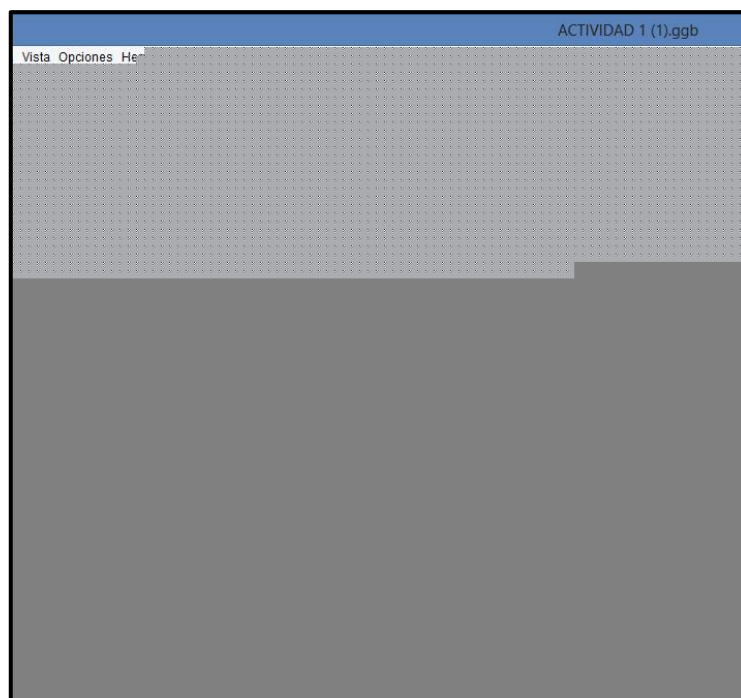


Figura 9. Representación grafica de la Actividad 1

Tema: Simetría axial

La simetría axial se da cuando los puntos de una figura coinciden con los puntos de otra, al tomar como referencia una línea que se conoce con el nombre de eje de simetría. En la simetría axial se da el mismo fenómeno que en una imagen reflejada en el espejo.

“Abre el archivo ACTIVIDAD 1” y completa sobre las líneas las respuestas a las siguientes preguntas.

- a) Discute con tu compañero dos estrategias usando Geogebra para verificar si los puntos A y D son simétricos. Escribe detalladamente cada estrategia.

Estrategia 1:

Estrategia 2:

Después de aplicar las dos estrategias ¿pueden afirmar que los puntos A y D son simétricos? ¿Sí o no?_____ ¿Porqué?

Usa el cursor en movimiento para el punto A ¿Qué observan respecto al punto D?

- b) Aplica las estrategias usadas en el punto 1 para verificar si los puntos B y E son simétricos. Después de aplicar las dos estrategias, ¿pueden concluir que los puntos B y E son simétricos? ¿Sí o no?_____ Explica el porqué.

- c) Usa de nuevo las dos estrategias para verificar si los puntos C y F son simétricos. Después de aplicar las dos estrategias, ¿pueden concluir que los puntos C y F son simétricos? ¿Sí o no?_____ Explica el porqué.

Actividad 2



Figura 10. Representación gráfica de la Actividad 2

La segunda actividad consta de una definición de congruencia que se da al principio de la hoja y de cinco preguntas para argumentar y una de opción múltiple, las cuales pretenden que el estudiante logre crear estrategias usando el micromundo Geogebra para saber cuál es el eje de simetría entre dos o más figuras y si aquellas figuras planas son o no congruentes entre sí, argumentado la estrategia usada.

Tema: Congruencia

Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y tamaño, aunque su posición u orientación sean distintas

Abre el archivo “ACTIVIDAD 2” y completa sobre las líneas las respuestas a las siguientes preguntas.

- a) Escoge con cuál de los siguientes segmentos de recta se puede dividir simétricamente la cometa:

- b) ¿Cómo compruebas que la cometa se dividió en partes iguales con la línea recta que elegiste en el punto anterior? Explica la estrategia que utilizaste usando las herramientas de Geogebra:

- c) ¿Son los triángulos ABC y GHI congruentes entre sí? ¿Sí o no? _____

Usando Geogebra discute una estrategia para verificar o no la congruencia. Explica cómo lo hicieron:

- d) Aplica la misma estrategia para analizar si los triángulos DEF y JKL son congruentes entre sí. ¿Sí o no? _____ ¿Por qué?

- e) Aplica la misma estrategia para analizar si los triángulos ABC y DEF son congruentes entre sí. ¿Sí o no? _____ ¿Por qué?

- f) Redacta una conclusión sobre los elementos a tener presentes al establecer una simetría:

4. Análisis

En esta parte del trabajo se describen las actividades que componen el presente trabajo así como el propósito de cada una de ellas.

En una primera parte se detallan las características de los sujetos que participaron en la investigación y, posteriormente, se explican las fases que la integran: el diseño, análisis preliminar, recolección de datos y la fase de análisis.

4.1 Sujetos

La aplicación de la propuesta didáctica se realizó en el colegio Comfandi Terranova. Esta institución educativa es en la jornada de la mañana y se encuentra ubicada en el municipio de Jamundí, Valle.

Las personas que participaron en la investigación son los alumnos del grupo de séptimo, integrado por 40 estudiantes, de los cuales 25 son mujeres y 15 hombres, con edades que oscilan entre los 12 y los 13 años.

4.2 Diseño

Se realizaron una serie de actividades

- a) Identificar las dificultades de redacción que pudiesen presentarse.
- b) Determinar la pertinencia de los problemas y preguntas.
- c) Establecer el tiempo requerido para contestar el instrumento.

d) Someter a prueba la manera de analizar la información cualitativa y cuantitativa de los resultados del diagnóstico.

4.3 Características de las hojas de trabajo

En general las actividades diseñadas consisten en lograr que el estudiante logre comprender el concepto de simetría, argumentando desde su exploración en Geogebra como comprobar si elementos geométricos tienen propiedades específicas. De esta forma, se tienen que poner en práctica las habilidades comunicativas y de argumentación. Los estudiantes deben argumentar en casi todas las preguntas y solo una pregunta es de opción múltiple. Es importante mencionar que la interacción con la tecnología permite que los estudiantes entren en conflicto con sus concepciones previas, muchas veces equivocadas, buscando con ello que el conocimiento efectivamente sea construido, y no memorizado como tradicionalmente se hace.

Por otra parte, hay que destacar que la ventaja de utilizar la tecnología computacional reside en el hecho de poder usar una gran cantidad de menús que ofrece el micromundo Geogebra, y que los estudiantes entren en conflicto con sus concepciones previas, muchas veces equivocadas, buscando con ello que el conocimiento efectivamente sea construido.

4.4 Condiciones de aplicación de hojas de trabajo

Cada una de las dos actividades de trabajo se aplicó en un tiempo de 45 minutos. La metodología de trabajo en las dos actividades fue la siguiente:

En el salón de tecnología el cual cuenta con 22 computadores, se dividió el grupo en parejas al azar:

- a) A cada pareja de estudiantes se le entregó, copia de la primera actividad para ser contestada abriendo el archivo previamente ubicado en los computadores del salón de sistemas usando dicho archivo para trabajar con Geogebra, dándoles el tiempo suficiente para hacerlo.
- b) Se dieron las indicaciones necesarias para contestar la actividad, haciendo hincapié en que escribieran de forma legible.
- c) Se recogió la actividad contestada a los 45 minutos y se entregó inmediatamente la fotocopia de la actividad 2.
- e) Los estudiantes, por pareja, contestaron la actividad durante otros 45 minutos, el cual es tiempo suficiente apoyándose en el uso de la tecnología.
- f) Se recogió la segunda actividad de las hojas de trabajo ya contestadas.
- g) Posteriormente se socializó la actividad con la participación voluntaria y designada de algunos de los estudiantes.
- h) Finalmente, se formalizó la actividad utilizando una presentación de las ideas importantes, así como la señalización de los errores y la forma correcta de contestarla. En este momento se resolvieron las dudas de los estudiantes.

4.5 Recolección de información

La recolección de datos es fundamental, ya que a partir de ahí se analizó y procesó la información que se obtuvo en cada una de las actividades que integran la propuesta didáctica.

Los datos se tomaron de diversas fuentes:

- Los archivos guardados por los estudiantes, así como las fotocopias de trabajo.

- Filmaciones y fotografías de clase, las cuales permitirán analizar las condiciones en las cuales se desarrolla el trabajo durante la implementación de la propuesta didáctica.

4.6 Análisis de resultados

Una vez recolectada la información, se analiza en términos cualitativos y no cuantitativos. A partir de estos resultados es posible contestar las preguntas de investigación que dieron pie a la realización del presente trabajo, y además, se está en condiciones de evaluar el impacto de las actividades didácticas implementadas en el aprendizaje de los estudiantes.

4.6.1 Análisis cualitativo.

Consiste en analizar los diferentes métodos de solución de los estudiantes y su forma de redactar los argumentos o pasos que siguieron al trabajar en Geogebra

De igual manera, se hace un análisis de las características sobresalientes del razonamiento de los alumnos cuando interactúan con herramientas computacionales en la solución de las tareas propuestas

La situación de aula se propuso como un ejercicio en las clases de geometría del grado séptimo del colegio Comfandi Terranova para este trabajo de grado, y en función de un Experimento de Enseñanza, se diseñaron e implemento una secuencia con dos actividades compuestas de sus actividades respectivas.

Esta secuencia se divide en dos actividades, la primera consta de 3 preguntas argumentativas y la segunda actividad consta de seis preguntas, cinco de ellas argumentativas y una de ellas de opción múltiple. Siendo así la primera actividad contributiva a comprender el concepto de simetría y la segunda actividad a reconocer el eje de simetría y comprender el concepto de congruencia el cual es necesario para comprender las propiedades invariantes debido al uso de la simetría, potenciando así

las actividades cognitivas de los estudiantes en el trabajo con geometría en particular con la simetría axial, para un aprendizaje significativo en los estudiantes y un acercamiento a través de la visualización.

A continuación se presenta la tabla 1 que contiene la organización de la actividad en la clase para la actividad 1.

Tabla 1. Organización de la actividad 1

Grado	Cantidad de estudiantes	Modalidad de trabajo	Cantidad de preguntas
7°	40	parejas	3

Pregunta a

Abre el archivo "ACTIVIDAD 1" y completa sobre las líneas las respuestas a las siguientes preguntas.

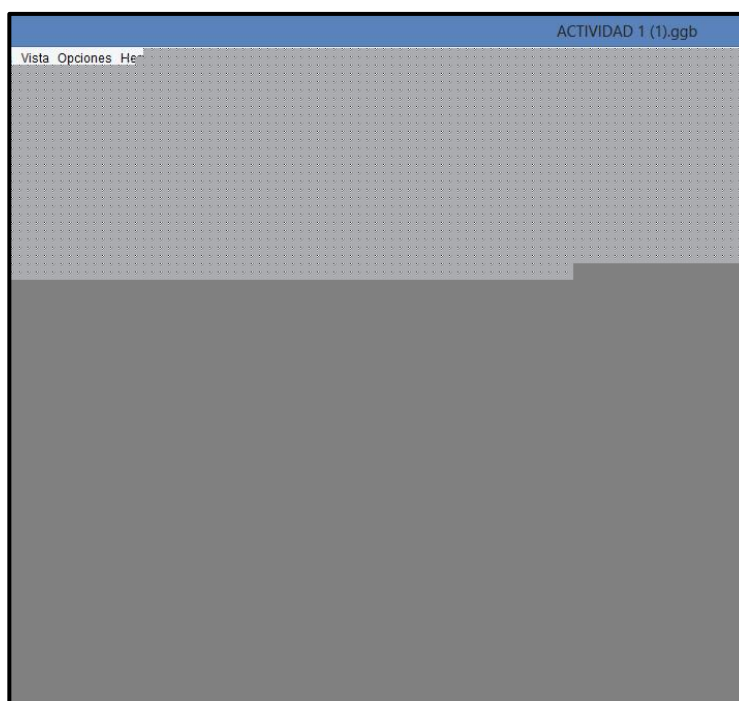


Figura 11. Representación gráfica Geogebra para la Actividad 1

- Discute con tu compañero dos estrategias usando Geogebra para verificar si los puntos A y D son simétricos. Escribe detalladamente cada estrategia.
- Después de aplicar las dos estrategias ¿pueden afirmar que los puntos A y D son simétricos? ¿Sí o no?_____ ¿Porqué?
- Usa el cursor en movimiento para el punto A ¿Qué observan respecto al punto D?

Tabla 2. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 1 de la Actividad 1

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas
Los estudiantes establecen la estrategia de usar en el menú de Geogebra la opción de “Distancia o Longitud” para establecer la simetría entre los puntos A y D	10
Los estudiantes establecen la estrategia de usar en el menú de Geogebra la opción de “Medio o Centro” para establecer la simetría entre los puntos A y D	4
Los estudiantes establecen la estrategia de usar en el menú de Geogebra la opción de “simetría Axial” para establecer la simetría entre los puntos A y D	1
Los estudiantes establecen la estrategia de usar en el menú de Geogebra la opción de “Circunferencia (centro, punto)” para establecer la simetría entre los puntos A y D	1
No respondieron/ ninguna de las anteriores	4
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la primera pregunta fue conseguir que los estudiantes logaran explorar las herramientas del micromundo Geogebra para hallar dos estrategias que pudieran argumentar si los puntos A y D eran simétricos entre sí.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

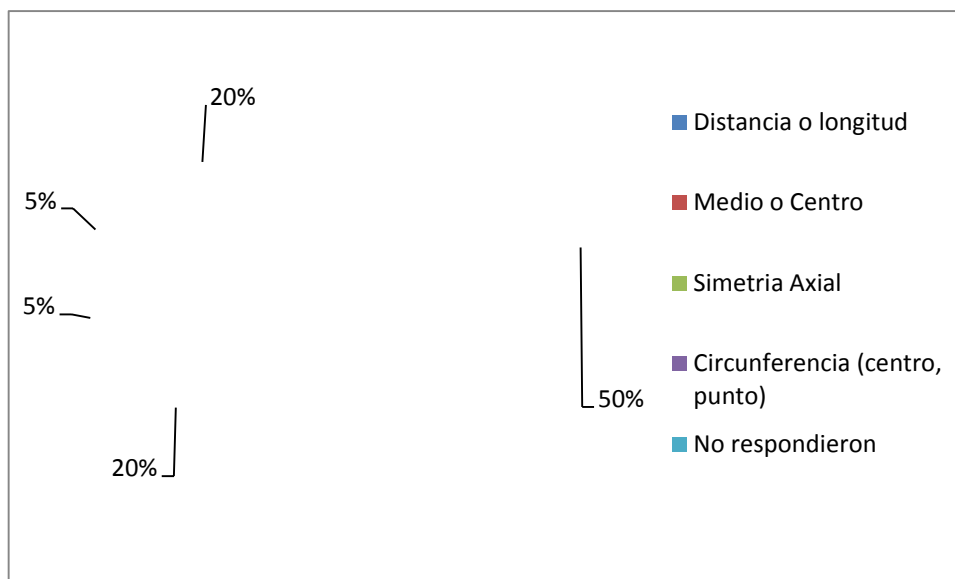


Figura 12. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta a de la Actividad 1

Diez parejas de estudiantes, correspondientes al 50%, utilizaron la herramienta “Distancia o Longitud” tal como se muestra en la figura 13, la cual era una de las herramientas que más se esperaba que el estudiante utilizara, debido a que el estudiante al notar visualmente la distancia de los puntos al eje parece ser la misma tendrá presente que la distancia entre el punto A y el eje de simetría debería ser la misma que del eje de simetría a el punto D si utiliza dicha herramienta.



Figura 13. Respuesta de pareja de estudiantes

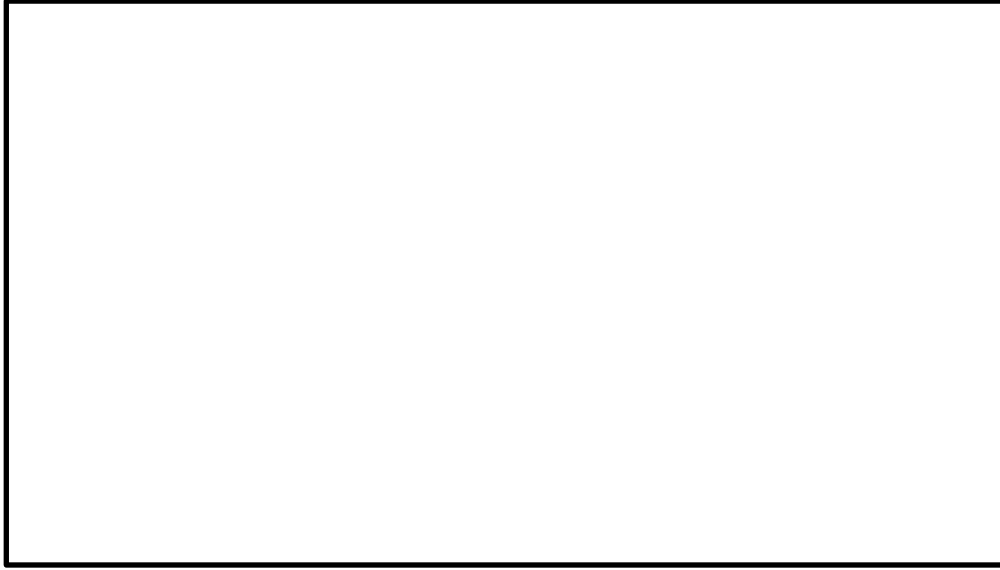


Figura 14. Respuesta de pareja de estudiantes

Así mismo, 4 parejas de estudiantes (20%) utilizaron la herramienta “Medio o Centro” al notar visualmente que el eje de simetría estaría entre los puntos A y D, de forma tal que cuando vieron dicha herramienta con su logo pensaron que al usarla, podrían determinar si estos puntos eran simétricos si el nuevo punto quedaba justo sobre el eje de simetría tal como se observa en la figura 15.



Figura 15. Respuesta de pareja de estudiantes

Otra posible respuesta era que los estudiantes utilizaran la herramienta “simetría axial” y si el nuevo punto quedaba sobrepuesto en el otro punto se comprobaría que es simétrico, pero solo una pareja (5%) respondió con esta estrategia.

Por último otra posible respuesta era trazar una línea recta que pasara por los puntos A y D y luego trazar una circunferencia desde el punto intersección del eje de simetría y la nueva recta hasta el punto A o D y si la circunferencia generaba intersección con el otro punto se comprobaría que los puntos están a la misma distancia del eje de simetría, pero solo una pareja (5%) respondió de esta forma, así como se muestra en la figura 16



Figura 16. Respuesta de pareja de estudiantes

Pregunta b

- Aplica las estrategias usadas en el punto 1 para verificar si los puntos B y E son simétricos. Después de aplicar las dos estrategias, ¿pueden concluir que los puntos B y E son simétricos? ¿Sí o no? _____ Explica el porqué.

Tabla 3. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 2 de la Actividad 1

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas
Si	2
No	18
No respondieron	0
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la segunda pregunta fue conseguir que los estudiantes lograran construir y afianzar su conocimiento a partir de la aplicación práctica de las herramientas del micromundo Geogebra para determinar si hay o no simetría entre los puntos B y E usando las estrategias que realizó en el punto anterior, pero esta vez se dará cuenta que los puntos B y E no son simétricos.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 17. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta b de la Actividad 1

Dieciocho parejas, correspondientes al 90%, concluyeron que los puntos B y E no eran simétricos, ante lo cual adujeron que “No son simétricos porque no tienen la misma distancia o

longitud de cada punto indicado hasta el Eje” (pareja 1), “Hicimos la primera estrategia y el compás no coincidió con el otro punto, en la segunda estrategia usamos la longitud y distancia y B dio 5,11 y E dio 4,7 así que no son simétricos” (pareja 3), “No son simétricos ya que hicimos los procedimientos tal cual en la estrategia 1 y 2 y con la misma herramienta de distancia o longitud y los resultados dieron diferentes el punto B nos dio 3,11 y el D 1,7; también hicimos lo mismo con medio o centro y el centro no es el mismo” (pareja 7).

Con esto los estudiantes empiezan a reflexionar mediante la aplicación práctica de los conocimientos que han desarrollado, empleando las herramientas dadas por el micromundo Geogebra.

Pregunta c

- Usa de nuevo las dos estrategias para verificar si los puntos C y F son simétricos. Después de aplicar las dos estrategias, ¿pueden concluir que los puntos C y F son simétricos? ¿Sí o no? _____ Explica el porqué.

Tabla 4. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 3 de la Actividad 1

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas.
Si	18
No	2
No respondieron	0
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la tercera pregunta fue conseguir que los estudiantes lograran ratificar su conocimiento a partir de la aplicación práctica de las herramientas del micromundo Geogebra para determinar la simetría entre los puntos C y F utilizando las estrategias usadas en los puntos anteriores.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 18. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta c de la Actividad 1

Dieciocho parejas, correspondientes al 90%, concluyeron que los puntos C y F eran simétricos, ante lo cual adujeron que “Porque al utilizar la herramienta de distancia o longitud en el punto C hasta el Eje nos da 1.2, y del punto F hasta el Eje nos da 1.2, o sea que son simétricos porque tienen la misma distancia o longitud de los puntos indicados hasta el Eje” (pareja 1) tal como se muestra en la figura 19,

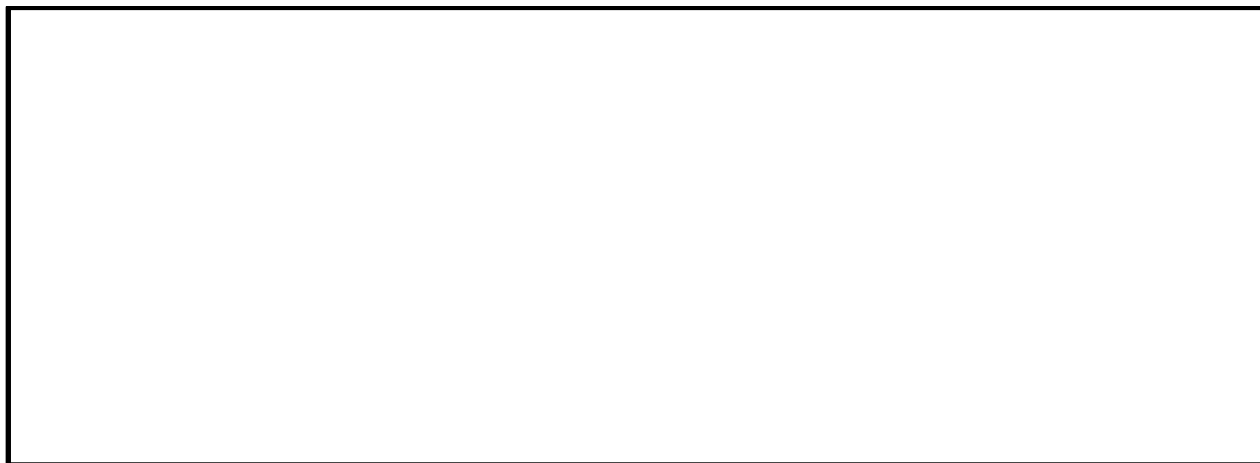


Figura 19. Respuesta de pareja de estudiantes

“Porque nosotros utilizamos el cursor y después de medir los puntos dio 1 por eso son simétricos” (pareja 2), “Porque para asegurarnos usamos 2 estrategias que son la del compás y la de la distancia y longitud a lo que $C=1,2$ y $F=1,2$ por lo tanto sus medidas son iguales” (pareja 6).

Con esto los estudiantes corroboraron el uso de las herramientas de Geogebra y afianzaron sus conocimientos al realizar el análisis de la simetría de estos nuevos puntos.

Actividad 2

A continuación se presenta la tabla 9 que contiene la organización de la actividad en la clase para la situación 2.

Tabla 5. Organización de la actividad 2

Grado	Cantidad de estudiantes	Modalidad de trabajo	Cantidad de preguntas
7°	40	parejas	6

Pregunta a

Abre el archivo “ACTIVIDAD 2” y completa sobre las líneas las respuestas a las siguientes preguntas.



Figura 20. Representación gráfica Geogebra para la Actividad 2

- Escoge con cuál de los siguientes segmentos de recta se puede dividir simétricamente la cometa: _____

Tabla 6. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 1 de la Actividad 2

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas
AI	4
AB	0
FC	14
JK	0
No responde	2
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la segunda actividad es que el estudiante reconozca el eje de simetría oblicuo e identifique y de esa manera incrementaran su capacidad de reflexión frente al tema de simetrías.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 21. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta a de la Actividad 2

Catorce parejas, correspondientes al 70%, concluyeron que el segmento F-C se podía dividir simétricamente la cometa, lo cual es acertado, sin embargo cuatro (20%) anotaron el segmento A-I, lo cual no es correcto. Pese a que eligieron segmentos diferentes, tienen alguna idea de la

simetría, pues visualmente se podría pensar que este segmento AI podría dividir en partes iguales la cometa, con lo cual se ratifica el entendimiento del concepto de simetría por parte de los estudiantes.

Cabe mencionar que en este punto algunas parejas de estudiantes no respondieron utilizando la terminología adecuada para nombrar un segmento, sino que señalaban con un ovalo o circulo asi como se observa en la figura 22 el segmento o en ocasiones colocaban “F y C”, “C y F” o señalaban con una flecha indicando su respuesta

Figura 22. Respuesta de pareja de estudiantes

Pregunta b

- ¿Cómo compruebas que la cometa se dividió en partes iguales con la línea recta que elegiste en el punto anterior? Explica la estrategia que utilizaste usando las herramientas de Geogebra:

Tabla 7. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 2 de la Actividad 2

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas.
Los estudiantes establecen la estrategia de usar en el menú de Geogebra la	5

opción de “Distancia o Longitud” para establecer la congruencia entre las figuras y sus lados.	
Los estudiantes establecen la estrategia de usar en el menú de Geogebra la opción de “Área” para establecer la congruencia entre figuras	10
Otra respuesta	1
No responde	4
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la segunda pregunta es que con la definición de congruencia que se presentó en la hoja, los estudiantes comprendan dicho concepto y comprueben por medio del micromundo geogebra la existencia de figuras congruentes en la pantalla.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 23. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta b de la Actividad 2

Diez parejas de estudiantes, correspondientes al 50%, utilizaron la herramienta “Área”, la cual les permitió visualizar y comparar la simetría de cada parte formada por el segmento elegido. Al respecto la Pareja 6 anotó “utilizamos área en el triángulo ABC y lo juntamos con

DEF nos dio $=7$ y lo mismo con el triángulo IHG y JKL lo que dio 7 y quedó la misma área respecto al eje simétrico”. Tal como se muestra en las figuras 24



Figura 24. Respuesta de pareja de estudiantes

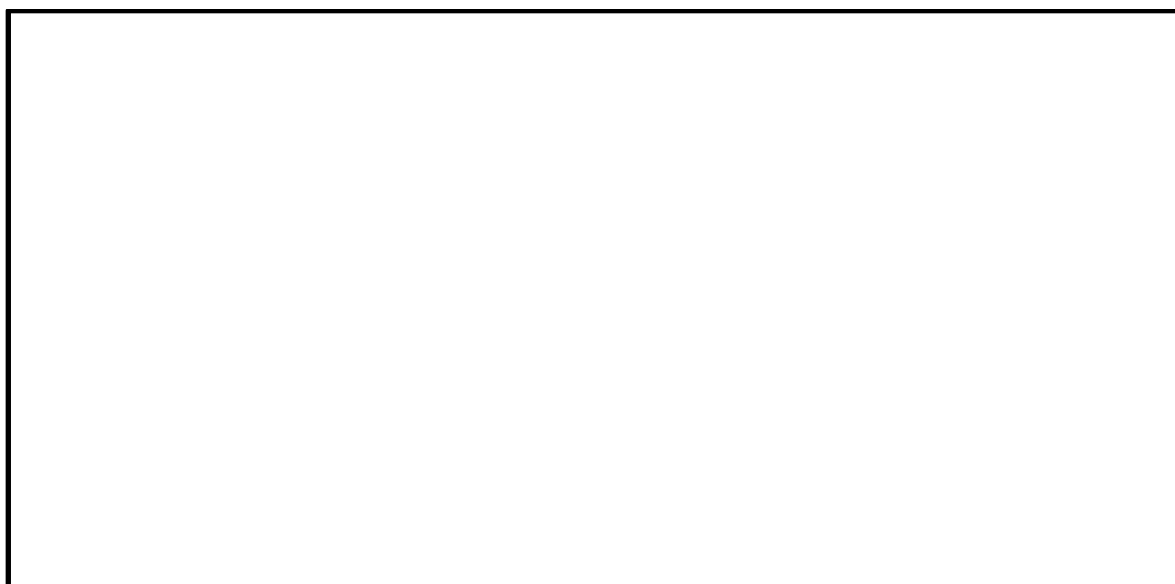


Figura 25. Fotografía, respuesta de pareja de estudiantes

Así mismo, 5 parejas de estudiantes (25%) utilizaron la herramienta “Distancia o Longitud” con lo cual lograron medir la simetría de los lados. Al respecto la pareja 2 mencionó que

“utilizamos la herramienta distancia o longitud y por figura medimos de cada lado de la figura y las dos figuras son congruentes”. Tal como se muestra en la figura 26



Figura 26. Respuesta de pareja de estudiantes

De lo anterior resultó que las herramientas de *Área* y de *Distancia o Longitud* se constituyeron en las más empleadas, dada su facilidad de comparación para determinar la simetría de la figura.

Pregunta c

- ¿Son los triángulos ABC y GHI congruentes entre sí? ¿Sí o no? _____

Usando Geogebra discute una estrategia para verificar o no la congruencia. Explica como lo hicieron:

Tabla 8. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 3 de la Actividad 2

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas
Si	12
No	2
No responde	6
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la tercera pregunta de la segunda actividad fue que los estudiantes aplicaran las herramientas de Geogebra para determinar la congruencia entre triángulos como estrategia para reflexionar acerca de la cuestión dada en busca de afianzar sus conocimientos sobre el concepto de simetría y la forma de corroborarlo.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 27. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta c de la Actividad 2

Doce parejas, correspondientes al 60%, afirmaron que los triángulos ABC y GHI son congruentes entre sí, para ello emplearon las siguientes estrategias: “utilizamos la herramienta *distancia o longitud* para medir cada lado de los triángulos al final nos dio que entre los dos triángulos tenían las medidas iguales” (pareja 2); “sí porque el área de estos triángulos es de 3, utilizamos la herramienta *área*” (pareja 4); “porque se usaron las medidas de distancia y longitud que nos permitieron hallar si eran congruentes, además se usó el método del compás para tener una seguridad de lo expuesto” (pareja 7) así como se observa en la figura 28.

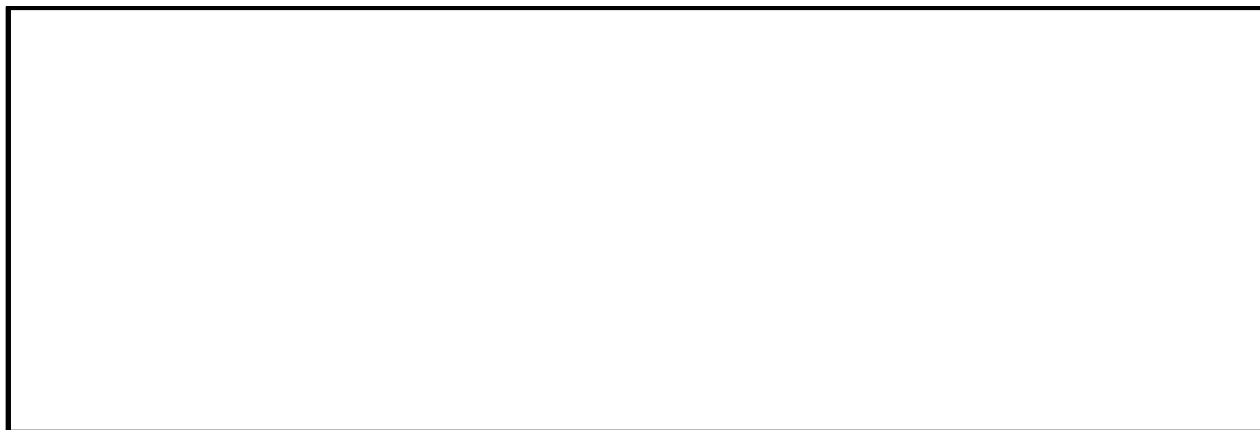


Figura 28. Respuesta de pareja de estudiantes

Pregunta d

- Aplica la misma estrategia para analizar si los triángulos DEF y JKL son congruentes entre sí. ¿Sí o no? ____ ¿Por qué?

Tabla 9. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 4 de la Actividad 2

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas
Si	12
No	2
No responde	6
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la cuarta pregunta de la segunda actividad fue similar al anterior, es decir, que los estudiantes aplicaran las herramientas de Geogebra para determinar la congruencia entre triángulos como estrategia para reflexionar acerca de la cuestión dada en busca de afianzar sus conocimientos sobre el concepto de simetría y la forma de corroborarlo.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 29. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta d de la Actividad 2

Doce parejas, correspondientes al 60%, afirmaron que los triángulos DEF y JKL son congruentes entre sí, para ello emplearon las siguientes estrategias: “nosotros utilizamos la herramienta *distancia o longitud* para medir cada lado de los triángulos DEF, JKL y los dos triángulos tenían medidas iguales y por eso son congruentes” (pareja 2); “porque hicimos lo mismo que en los anteriores puntos y $DEF=4$ y $JKL=4$ sí son congruentes” (pareja 3). La congruencia la establecieron principalmente al medir y comparar sus áreas.

Pregunta e

- Aplica la misma estrategia para analizar si los triángulos ABC y DEF son congruentes entre sí. ¿Sí o no? ____ ¿Por qué?

Tabla 10. Respuestas dadas por las parejas a la Pregunta 5 de la Actividad 2

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes por parejas.
Si	1
No	12
No responde	7
Total estudiantes	20 parejas

El propósito de la quinta pregunta de la segunda actividad fue similar al de las anteriores, es decir, que los estudiantes aplicaran las herramientas de Geogebra para determinar la congruencia entre triángulos como estrategia para reflexionar acerca de la cuestión dada en busca de afianzar sus conocimientos sobre el concepto de simetría y la forma de corroborarlo.

En la Figura se muestra la distribución porcentual de las respuestas dadas.

Figura 30. Distribución porcentual de las respuestas dadas a la Pregunta e de la Actividad 2

Doce parejas, correspondientes al 60%, negaron al congruencia de los triángulos ABC y DEF entre sí, para ello emplearon las siguientes estrategias: “nosotros utilizamos la herramienta de

distancia o longitud para medir cada lado de los triángulos ABC, DEF y los dos triángulos tuvieron medidas diferentes y por eso no son congruentes” (pareja 2); “porque el área del triángulo ABC es de 3, mientras que el triángulo DEF es de 4” (pareja 4). La incongruencia la establecieron principalmente al medir y comparar sus áreas y sus lados.

Por otra parte 7 estudiantes no respondieron, pues dijeron que no les alcanzó el tiempo para terminar, porque se demoraron mucho en argumentar las primeras preguntas, pues no están acostumbrados a trabajar argumentando de forma escrita en la clase de matemáticas o geometría.

Pregunta 6

- Redacta una conclusión sobre los elementos a tener presentes al establecer una simetría:

Las conclusiones emitidas por los estudiantes fueron similares “para sacar la simetría utilizamos el área, la medición de los ángulos, y la medición de los lados” (pareja 2); “los elementos que debemos tener presentes para hallar una simetría son la distancia o longitud que sirve para hallar la distancia entre dos puntos y también se puede hallar con ángulos. Todas las medidas deben dar iguales, la medida de un punto A al eje debe ser igual, tal cual como un espejo” (pareja 6).

5. Conclusiones

El planteamiento inicial de la formulación del problema la cual dice: "¿Cómo diseñar e implementar una secuencia de actividades, mediada por Geogebra, para promover el aprendizaje del concepto de la transformación de simetría axial en estudiantes de grado séptimo de Educación Básica en Colombia?" propicio el interés de implementar una secuencia de actividades con la finalidad de dar respuesta a esta pregunta. Este interrogante y los objetivos planteados se convirtieron en el punto de partida de las actividades planteadas que aquí han sido consignadas y analizadas, en este capítulo se da respuesta a la pregunta problema.

Un aspecto importante para responder al "como" diseñar e implementar una secuencia de actividades mediada por Geogebra para favorecer el concepto de simetría axial, son las características que favorecen el desarrollo del pensamiento espacial, las cuales son:

- Destacar de manera importante la dinámica que se establece al interior de la clase.
- Crear un ambiente en el que los estudiantes participen activamente en la construcción de su aprendizaje, y en el cual los papeles del docente y los estudiantes sean completamente distintos a la enseñanza tradicional.
- Propiciar las condiciones necesarias para dar la oportunidad a los alumnos de interactuar con los demás a través de la discusión de ideas y de posibles estrategias de solución a actividades.
- Las actividades deben partir de problemas en contexto, reales o hipotéticos, alrededor de los cuales los estudiantes formulen conjeturas que posteriormente validen o refuten gracias a la realización de las actividades en parejas, de esta forma, se debe considerar el

tiempo necesario para que los estudiantes comuniquen y discutan las ideas asociadas a la actividad implementada en su momento.

- Socializar las actividades para confrontar ideas y llegar a una puesta en común.
- El docente debe formalizar la actividad, señalando los errores y explicitando las nociones que la actividad pone en juego.
- Las actividades también deben estar en concordancia con los lineamientos curriculares del ministerio de educación nacional de Colombia

Ademas, Geogebra se considera un software de geometría dinámica que contiene herramientas para el trabajo con simetrías. Este ambiente ofrece una amplia variedad de opciones para desarrollar contenidos de geometría, lo que facilita mediante actividades a través de las herramientas y/o recursos que ofrece. Permite abordar la geometría a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones para deducir resultados y propiedades a partir de la observación directa.

El trabajo permitió identificar a través de la implementación de la secuencia de actividades, elementos conceptuales tales como simetría, plano, segmento, congruencia, entre otros, y procedimentales, en cuanto al manejo de las herramientas del micromundo Geogebra, con los cuales se efectuaron avances y se solventaron posibles dificultades en la comprensión y el manejo del concepto de simetría axial tal como los análisis por pregunta y su estadística así lo demuestran, cumpliendo con el segundo objetivo específico planteado en este trabajo.

El uso de la tecnología resulto ser una herramienta fructífera para el desarrollo de la visualización, el razonamiento y la argumentación, la cual permitió generar en cada una de las

sesiones de trabajo un ambiente agradable, conduciendo de esta forma un aprendizaje más dinámico en la simetría axial y sus conceptos inmediatos y así lograr los objetivos planteados.

La utilización de Geogebra presenta distintas potencialidades que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje, debido a que los estudiantes pueden fácilmente mover o construir objetos para establecer estrategias y argumentar soluciones a tareas planteadas mucho más rápido que cuando se trabaja con lápiz y papel.

En la implementación por parejas se concluye que con la ayuda de la herramienta Geogebra y del trabajo colaborativo se puede dar con mayor facilidad y rapidez la incorporación y el manejo de conceptos de geometría por parte de los estudiantes ya que el tipo de justificaciones realizadas por algunos estudiantes mejoró notablemente al utilizar un lenguaje claro y preciso acerca de las nociones de geometría.

Referencias bibliográficas

- Acuña, C. & Martínez, A. (s.f.). El aprendizaje de la reflexión en geometría entre estudiantes de primaria. Recuperado el 20 de agosto de 2011, de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/index.php?option=com_content&view=article&id=125&Itemid=158
- Alcaraz, A., Cruz, M., Guzmán, M., Vidal, V., Pastor, M., Rodríguez, F., & Sánchez, C. (2004). *Didáctica de las Ciencias Sociales: Didáctica de las Ciencias Sociales para primaria*. Madrid, España: Pearson Education.
- Alonso, M. (2010). Variables del Aprendizaje Significativo para el desarrollo de las competencias básicas. *Prácticas del Profesorado (seminario)*(1), 5-12.
- Alsina C., Pérez R. & Ruiz C. (1993) Simetría dinámica. Colección de libros de Matemáticas: cultura y aprendizaje. Vol. 13 Madrid
- Almeida, M. (2002). Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia. (Memoria de tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Barcelona, Barcelona.
- Argüello, B., & Sequeira, M. (2016). *Estrategias metodológicas que facilitan el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Geografía e Historia en la Educación Secundaria Básica*. Juigalpa, Chontales: Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua.

- Arriasecq, I., Cayul, E., & Greca, I. (2017). Secuencias de enseñanza y aprendizaje basadas en resultados de investigación: propuesta de un marco teórico para el abordaje de la teoría especial de la relatividad. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(1), 133-155.
- Artigue, M. (1988). Ingenierie Didactique. *Recherche en didactique des mathematiques*, 9(3), 281-308.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano
- Ausubel, D. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Baez, R. & Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL “El Mácaro”. *Enseñanza de la Matemática*, Vols. 12 al 16, Número extraordinario, 67-87
- Balacheff, N. (2002). 2002 International conference on mathematics-“ Understanding proving and proving to understand”. Taipei: NSC and NTNU
- Barriga, F. (2003). Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5(2), 4.
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh & Landau (Eds.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 125-203. New York: Academic Press.
- Campistrous, L., & López, J. (2002). *La Geometría Dinámica*. Obtenido de Centros Regionales de Adiestramiento en Instrucción Matemática (CRAIM): https://www.researchgate.net/publication/273762823_La_geometria_dinamica

- Camargo, Z., URIBE, G., y CARO, M. A. (comp.). (2003). *Secuencias didácticas para aprender a escribir*. Barcelona: Graó
- Castellanos, I. (2010). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software Geogebra con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N.* Tegucigalpa: Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Maestría en Matemática Educativa.
- Cascallana, M. T. (1996). *Iniciación a la Matemática: Materiales y recursos didácticos*. Buenos Aires: Santillana.
- Castro, Y. & Castro, L. (1997). Capítulo 4. Representaciones y modelización. Encarnación Castro. Enrique Castro. Departamento Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Carranza, M. (2011). Exploración del impacto producido por la integración del ambiente de geometría dinámica (AGD) geogebra en la enseñanza de los cursos de matemáticas básicas de primer semestre de la Universidad Nacional de Colombia Sede Palmira.
- Cedillo, T. E. (2006, enero-marzo). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(28), 129-153.
- Corredor, L. (2011). *Geometría Dinámica y lugares geométricos*. Bogotá: Fundación Komrad Lorenz.
- De Faria, E. (2006) Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática.

- Díaz, F., Barriga, F., & Hernández, G. (2002). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo: Una interpretación constructivista* (Segunda ed.). México: McGraw Hill Interamericana.
- Duit, R. (2006). La investigación sobre enseñanza de las ciencias. Un requisito imprescindible para mejorar la práctica educativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(30), 741-770.
- Dunham y Cols (1994). El principio de la tecnología. EDUTEKA, 2003.
- Escobar, F. (2016). *El uso de las TIC como herramienta pedagógica para la motivación de los docentes en el proceso de aprendizaje y enseñanza en la asignatura de Inglés*. Medellín: Universidad Pontificia Bolivariana.
- Fensham, P. (2001). Science content as problematic: Issues for research. En H. Behrendt (Ed.), *Research in science education. Past, present, and future* (págs. 27-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Hincapié, S. J. (2014). Métodos, enfoque y tipos de investigación. Diseño de la Investigación. Obtenido de <http://sanjahingu.blogspot.com.co/2014/01/metodos-tipos-y-enfoques-de.html>
- Ibargüen, Y., & Realpe, J. (2012). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos*. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

- ICFES (2010) Informes ICFES SABER 5° y 9° 2009. Resultados nacionales. Resumen ejecutivo. Bogotá
- ICFES (2010) Resultados de Colombia en TIMSS 2007. Bogota
- Jaime, A. (1993). Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Valencia, Valencia, España
- Kaput, J. J. (1987). Representation systems and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in teaching and learning mathematics* (pp. 19–26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Kidder (1978) La conservación de longitud
- Laborde C. (2004) Buscar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la noción de variación con geometría dinámica. Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Memorias del congreso internacional. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá. 2002.
- Laborde C. (1992) Solvin Problems in Computer Based Geometry Environments: The Influence of the Features of the Software, *Zentralblatt für Didaktik des Mathematik*, 1992 (4) p. 129 (p.128-35).
- Lijnse, P. (2000). Didactics of science: The forgotten dimension in science education research? En R. Millar, J. Leach, & J. Osborne (Edits.), *Improving science education - The contribution of research*. (págs. 308-326). Buckingham: Open University Press.
- Lijnse, P., & Klaassen, K. (2004). Didactical structures as an outcome of research on teaching-learning sequences? *International Journal of Science Education*, 26(5), 537-554.

- Méheut, M. (2005). Teaching-learning sequences tools for Learning and/or research. En K. Boersma, M. Goedhart, O. Jong, & H. Eijkelhof (Edits.), *Research and the quality of science education* (págs. 195-208). Netherlands: Springer.
- Méheut, M., & Psillos, D. (2004). Teaching-learning sequences: aims and tools for science education research. *International Journal of Science Education*, 26(5), 515-535.
- MEN. (2014). *Foro educativo nacional 2014: ciudadanos matemáticamente competentes. Documento Orientador. Bogotá Colombia*. Obtenido de Ministerio de Educación Nacional: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-342931_recurso_1.pdf
- MEN (2002) Proyecto “Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia” y sus avances. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN P. (2001-2002) Seminario Nacional de formación de docentes uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Faltan muchos más documentos del MEN
- Ministerio de Educación Nacional. MEN (1999) Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas.
- Mora, J. (s.f.). *La simetría: celosías y mosaicos en educación secundaria*. Obtenido de jmora7: http://jmora7.com/Mosaicos/Textos/Guia_didactica.pdf
- Moreira, M. (1994). *Aprendizaje Significativo: un concepto subyacente*. Porto Alegre, Brasil: Instituto de Física, UFRGS.
- Moreno L (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. MEN 2002. Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias.

Moreno L (2002). Ideas geométricas del currículo presentadas mediante CabriGeometre. MEN 2002. Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias.

Moreno L (1999). La epistemología genética: una interpretación. MEN 2002. Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias.

Moreno L (2002). Argumentación y formalización mediadas por CabriGeometre. MEN 2002. Memorias del congreso internacional, tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas Serie Memorias.

Moreno L &Waldegg. G. (2002) Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Memorias del seminario Nacional. Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Ministerio de educación Nacional Serie Memorias.

Moreno J. (2002).La simulación como herramienta de aprendizaje intercultural.

National research council of teachers of mathematics.(2002) Principles and standards for school mathematics.

Pérez F. (2005), “La enseñanza y aprendizaje de la Geometría en enseñanza media. Un procesador Geométrico como medio didáctico.

OEI. (2004). *Principios y estructura del sistema educativo*. Bogotá: Organización de Estados Iberoamericanos.

Osorio, O. (2010), El uso de cabrigeometry como apoyo en el aprendizaje de traslación de figuras geométricas para estudiantes de grado sexto.

Piaget, J Inhelder, B Psicologías del niño ed morata: Madrid 1982

- Papert, S. (1987), "Microworlds: Transforming Education", en Lawler, R.W. & Yazdani, M. (eds.). *Artificial Intelligence and Education, Volume One: Learning Environments and Tutoring Systems*, Ablex, Norwood, NJ, USA; p.27-54
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp.210-213).UK: SensePublishers.
- Psillos, D. (2001). Science education researchers and research in transition: Issues and policies. En H. Behrendt (Ed.), *Research in science education. Past, present, and future* (págs. 11-16). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Psillos, D., & Méheut, M. (2001). Teaching-learning sequences as a means for linking research to development. En D. Psillos, P. Kariotoglou, V. Tselves, G. Bisdikian, G. Fassoulopoulos, E. Hatzikraniotis, & M. Kallery (Edits.), *Proceedings of the third International Conference on Science Education Research in the Knowledge based Society* (págs. 226-244). Thessaloniki, Greece: Art of Text Publication.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In Bailleul Marc, *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques. Évolution des enseignants de mathématiques; rôle des instruments informatiques et de l'écrit. Qu'apportent les recherches en didactique des mathématiques*. Caen.
- Recio, C., Cruz, C., Bautista, S., & Jáuregui, M. (2016). Softwares más comunes para la enseñanza de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*(4), 1-17.

- Richard, P. (2010). *La geometría dinámica como herramienta para desarrollar competencias de modelización en el Bachillerato*. España: IFIIE.
- Rico L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (Eds.), *Matemática española en los albores del siglo XXI* (pp. 77-131). Huelva, España: Editorial Hergué.
- Rodriguez, L. (2013). Enseñanza de las simetrías con uso de geogebra según el modelo de van hiele.
- Sangaku, S. (2018). *Simetría axial y simetría central*. Obtenido de Sangakoo: <https://www.sangakoo.com/es/temas/simetria-axial-y-simetria-central>
- Santacruz M. & López L. (2004). *Integrando Cabri Al Aula: Una Estrategia Didáctica En Quinto De Primaria Para Explorar La Transformación De Rotación*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.
- Secretaría de Educación de Bogotá. (2012). *Reorganización curricular por ciclos* (Segunda ed.). Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Secretaria de Gobierno del Valle del Cauca (2014). *Análisis y uso de los resultados de las evaluaciones de estudiantes SABER 3°, 5°, 9° y 11° año 2013*.
- Trouche, L. (1996) *A propos de la prentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice. Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d instrumentation*. Thèse, Université de Montpellier.
- Torres, M., & Girón, D. (2009). *Didáctica General : Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centro americanos de Educación Básica* (Vol. 9). San José, Costa Rica: Editoram, S.A.

Thompson, P. W. (1987), "Mathematical Microworlds and Intelligent Computer Assisted Instruction (ICAI)", en Kearsley, G.E. (ed) *Artificial Intelligence and Instruction: Applications and Methods*,. Addison-Wesley. P. 83-109.

Vergnaud, G. (2004). *Lev Vygotsky. Pedagogo e pensador do nosso tempo*. Portoalegre: Grempe

Waldegg, G. (consultado en 2018). *La educación matemática ¿Una disciplina científica?*
Obtenido de Repositorio Institucional de la Universidad Veracruzana:
https://cdigital.uv.mx/bitstream/123456789/5804/2/la_educacion_matematica.htm

Wertsch J. (1991). *Voices of the mind: A Sociocultural approach to mediated action*. Cambridge, MA: Harvard UniversityPress.

Yaglom I. (1962) *Geometric Transformations*

Yáñez, P. (2016). El proceso de aprendizaje: fases y elementos fundamentales. *Revista San Gregorio*, 1(11), 70-81.