

El teorema clásico de Bernstein y algunos resultados de superficies de curvatura media constante en el espacio euclídeo

S. Carolina García-Martínez
Universidad de Murcia

Recibido Jul. 02, 2010 Aceptado Sep. 07, 2010

Abstract

The classical Bernstein theorem is one of the most important and celebrated results on global geometry of minimal surfaces. This result asserts that the planes are the only minimal surfaces of Euclidean space that can be written as the graph of a globally differentiable function defined on whole \mathbb{R}^2 . In other words, the planes are the only entire minimal graphs in \mathbb{R}^3 . The original proof of this result, given by Bernstein in [2, 3] is based in the theory of the partial differential equations. However, in this paper we present a proof more geometric following an approach given by S.S. Chern in [4]. Furthermore, we study some results of Klotz and Osserman [10] which characterize the complete constant mean curvature surfaces in Euclidean space whose Gaussian curvature does not change sign.

Keywords: Bernstein theorem, entire graphs, minimal surfaces, constant mean curvature surfaces, parabolicity, conformal metric, Euclidean space.

MSC(2000): 53C40, 53C42

Resumen

El teorema clásico de Bernstein es uno de los resultados más importantes y destacados sobre geometría global de superficies minimales. Dicho resultado establece que los planos son las únicas superficies minimales del espacio euclídeo que se pueden escribir como el grafo de una función diferenciable globalmente definida sobre todo \mathbb{R}^2 . En otras palabras, los planos son los únicos grafos *enteros* minimales en \mathbb{R}^3 . La demostración original de este resultado, dada por Bernstein en [2, 3] está basada fuertemente en la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales. No obstante, en este artículo presentamos una prueba más geométrica siguiendo el enfoque dado por S.S. Chern en [4]. Además, estudiamos algunos resultados de Klotz y Osserman [10] que permiten caracterizar a las superficies completas de curvatura media constante en el espacio euclídeo cuya curvatura de Gauss no cambia de signo.

Palabras y frases claves: Teorema de Bernstein, grafos enteros, superficies minimales y de curvatura media constante, parabolicidad, métricas conformes, espacio euclídeo.

1 Introducción

La versión clásica del teorema de Bernstein, dada por Bernstein en 1910, establece que:

Teorema 1. *Los únicos grafos enteros minimales en \mathbb{R}^3 son los planos. Esto es, las únicas soluciones enteras de la ecuación de las superficies minimales*

$$\operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0$$

sobre el plano euclídeo \mathbb{R}^2 son las funciones afines $u(x, y) = ax + by + c$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Un teorema equivalente en términos más geométricos fue dado por S.S. Chern en 1969, y es el siguiente.

Teorema 2. *Las únicas superficies minimales completas en \mathbb{R}^3 cuya imagen esférica está contenida en una semiesfera abierta son los planos.*

Nuestro objetivo principal es realizar la prueba del Teorema 2 siguiendo la idea original dada por Chern, pero con algunas diferencias. Por ejemplo, no utilizaremos la representación de la superficie en coordenadas isotermas, ni el teorema de Liouville; en cambio utilizaremos el concepto de parabolicidad y su invarianza conforme en dimensión dos.

Por otra parte, las superficies minimales y de curvatura media constante han recibido desde siempre un trato privilegiado por parte de los geómetras, ya sea por su interés intrínsecamente matemático o porque ellas modelan problemas físicos. Así que, con el fin de realizar un estudio más completo, analizaremos también una caracterización de estas superficies dada por Klotz y Osserman en [10], cuando dichas superficies son completas y están inmersas en el espacio euclídeo, pues para probar estos resultados se utilizan técnicas similares a las que desarrollaremos para demostrar el teorema de Bernstein.

Por lo tanto, el artículo está organizado de la siguiente forma: una sección de preliminares para fijar la notación y presentar todos los prerequisites necesarios para abordar el tema, otra sección donde realizamos la demostración del teorema de Bernstein en detalle y una sección adicional de grafos de curvatura media constante, donde se puede apreciar una aplicación del teorema en mención. También incluimos una sección donde estudiamos los resultados de Klotz y Osserman que anteriormente mencionamos.

Es importante señalar que este estudio tiene como base la tesis de Máster de la autora, véase [5], donde se realizó una introducción al estudio de las superficies minimales y de curvatura media constante en el espacio euclídeo.

2 Preliminares

Consideremos el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 como variedad diferenciable, dotado de la métrica canónica

$$\langle, \rangle = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

donde (x, y, z) son las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 .

Sea $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ una *inmersión* de una superficie diferenciable Σ en \mathbb{R}^3 . Aunque la superficie no está, en principio, provista de una métrica, no es difícil inducirle una utilizando el pullback de la inmersión ψ , convirtiendo a ψ en una inmersión isométrica.

Si consideramos a la superficie orientable, existe una aplicación diferenciable globalmente definida sobre Σ conocida como *aplicación de Gauss*, que denotaremos por

$$N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

y que asocia a cada punto p de Σ , un vector normal unitario $N(p) \in (T_p\Sigma)^\perp$.

Representaremos por $\overline{\mathfrak{X}}(\Sigma)$ al conjunto de campos diferenciables a lo largo de ψ y denotaremos por $\mathfrak{X}(\Sigma)$ al conjunto de campos de $\overline{\mathfrak{X}}(\Sigma)$ tangentes a Σ y por $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ al conjunto de campos de $\overline{\mathfrak{X}}(\Sigma)$ normales a Σ . De este modo, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ la *fórmula de Gauss* está dada por

$$\nabla_X^\circ Y = \nabla_X Y + \sigma(X, Y), \quad (1)$$

donde ∇° y ∇ son las conexiones de Levi Civita en \mathbb{R}^3 y Σ , respectivamente, y σ es la segunda forma fundamental de Σ .

Denotaremos el *operador de forma* por A , de manera que la *fórmula de Weingarten* está dada por

$$AX = -\nabla_X^\circ N. \quad (2)$$

Asociados al operador de forma, y más concretamente a las curvaturas principales κ_1 y κ_2 , tenemos la *curvatura media* de la superficie en el punto p que viene dada por

$$H(p) = \frac{1}{2} \text{tr}(A_p) = \frac{1}{2} (\kappa_1(p) + \kappa_2(p)),$$

y la *curvatura de Gauss*

$$K(p) = \det(A_p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p).$$

Además, diremos que una superficie regular orientada es *minimal* si su curvatura media H es idénticamente nula, es decir, $H(p) = 0$, para todo $p \in \Sigma$. El siguiente resultado establece una desigualdad fundamental entre las curvaturas anteriormente definidas.

Proposición 1. *Si Σ es una superficie en \mathbb{R}^3 con curvatura media H y curvatura de Gauss K entonces $(H^2 - K)(p) \geq 0$ para todo $p \in \Sigma$, y la igualdad se obtiene si y sólo si p es un punto umbílico.*

Demostración. Por definición

$$(H^2 - K)(p) = \frac{1}{4} (\kappa_1(p) + \kappa_2(p))^2 - \kappa_1(p)\kappa_2(p) = \frac{(\kappa_1(p) - \kappa_2(p))^2}{4} \geq 0.$$

Nótese que $(H^2 - K)(p) = 0$ si y sólo si $\kappa_1(p) = \kappa_2(p)$, es decir, si y sólo si p es un punto umbílico. \square

Cuando una superficie se encuentra inmersa en el espacio euclídeo como es nuestro caso, es bien conocido que la *ecuación de Gauss* está dada por

$$R(X, Y)Z = K(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X) \quad (3)$$

y la ecuación de Codazzi

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X) \quad (4)$$

donde $\nabla A(X, Y) = (\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)$.

Uno de los ejemplos más sencillos de superficies son los grafos.

Definición 1 (Grafo). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio conexo. Una función diferenciable u determina un grafo sobre Ω dado por*

$$\Sigma(u) = \left\{ (x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Dicho grafo se dice entero si $\Omega = \mathbb{R}^2$.

La curvatura media de un grafo se puede expresar como una ecuación en derivadas parciales de tipo divergencia. Dicha expresión será fundamental para muchas de las aplicaciones posteriores, y viene dada por

$$2H = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right),$$

donde H es la curvatura media de $\Sigma(u)$, Div denota la divergencia en \mathbb{R}^2 y $Du = (u_x, u_y)$ es el gradiente euclídeo de u . Para ver esto, consideremos $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inmersión del grafo $\Sigma(u)$ en \mathbb{R}^3 , dada por

$$\psi(x, y) = (x, y, u(x, y)). \quad (5)$$

Así que, $\psi_x = (1, 0, u_x)$ y $\psi_y = (0, 1, u_y)$.

Entonces

$$E = 1 + u_x^2, \quad F = u_x u_y \quad \text{y} \quad G = 1 + u_y^2,$$

y el normal unitario es

$$N = \frac{\psi_x \wedge \psi_y}{|\psi_x \wedge \psi_y|} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} (-u_x, -u_y, 1), \quad (6)$$

con $|Du|^2 = u_x^2 + u_y^2$. Además,

$$\psi_{xx} = (0, 0, u_{xx}), \quad \psi_{yy} = (0, 0, u_{yy}) \quad \text{y} \quad \psi_{xy} = (0, 0, u_{xy}).$$

Por tanto, los coeficientes de la segunda forma fundamental vienen dados por

$$e = \langle N, \psi_{xx} \rangle = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \quad f = \langle N, \psi_{xy} \rangle = \frac{u_{xy}}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \quad \text{y}$$

$$g = \langle N, \psi_{yy} \rangle = \frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Así, la curvatura media H está dada por

$$2H = \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) \\ &= \frac{u_{xx}(1 + u_x^2 + u_y^2) - (u_x u_{xx} + u_y u_{yx}) u_x}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \\ &\quad + \frac{u_{yy}(1 + u_x^2 + u_y^2) - (u_y u_{yy} + u_x u_{xy}) u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_x u_y u_{xy} + u_{yy}(1 + u_x^2)}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Luego,

$$2H = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

Evidentemente, cualquier grafo minimal satisface la ecuación

$$0 = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right). \quad (7)$$

Los ejemplos más sencillos de grafos minimales son aquellos en los que $u(x, y)$ es una función afín, del tipo $u(x, y) = ax + by + c$, y corresponden a planos. Por otra parte, un ejemplo de grafo minimal no entero es la *superficie de Scherk*, determinada por una función del tipo $u(x, y) = f(x) + g(y)$, donde $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Obsérvese que una solución de ese tipo, satisface

$$u_x = f'(x), \quad u_y = g'(y), \quad u_{xx} = f''(x), \quad u_{yy} = g''(y) \quad \text{y} \quad u_{xy} = 0.$$

Si es minimal cumple la ecuación (7), que en este caso es equivalente a

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0,$$

es decir,

$$(1 + f'(x)^2) g''(y) + (1 + g'(y)^2) f''(x) = 0.$$

Separando variables en esta expresión, obtenemos

$$\frac{g''(y)}{1 + g'(y)^2} = -\frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2}. \quad (8)$$

Dado que x e y son independientes, el término de cada lado de la igualdad anterior es constante respecto del otro. Sea entonces

$$a = -\frac{f''(x)}{1 + f'(x)^2}$$

para una cierta constante a . Haciendo $w = f'(x)$, se tiene que $f''(x) = \frac{dw}{dx}$ y por lo tanto

$$adx = -\frac{dw}{1 + w^2}.$$

Esta ecuación se puede integrar y obtenemos que $ax = -\arctan(w)$, es decir,

$$-\tan(ax) = w.$$

Dado que $w = \frac{df}{dx}$, integramos nuevamente y nos da

$$f(x) = \frac{1}{a} \ln(\cos ax).$$

Aplicando el mismo razonamiento al otro lado de la ecuación diferencial (8) obtenemos

$$g(y) = -\frac{1}{a} \ln(\cos ay).$$

Combinando ambos términos concluimos que

$$u(x, y) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos ax}{\cos ay} \right).$$

Nótese que la superficie está solamente definida para $(\cos ax / \cos ay) > 0$.

El descubrimiento de esta superficie fue muy peculiar, pues el catenoide y el helicoide eran las únicas superficies minimales no triviales conocidas en 1700, y no fue sino hasta 1835 que se encontró el siguiente ejemplo, que fue precisamente la superficie de Scherk (véase Figura 1). Scherk la descubrió cuando buscaba soluciones del tipo $u(x, y) = f(x) + g(y)$. Lo sorprendente de este hecho, es que esta condición algebraica tan simple no hubiese sido considerada antes.

Siguiendo una idea similar a la utilizada para encontrar la superficie de Scherk, podemos construir otros ejemplos de grafos minimales no enteros. Consideremos una solución del tipo $u(x, y) = f(x)g(y)$ con $f''(x) = 0$, por ejemplo el grafo determinado por la función $u(x, y) = x \tan(y)$ (véase Figura 2) definido en

$$\Omega = \{(x, y) : y \neq (2n + 1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}\},$$

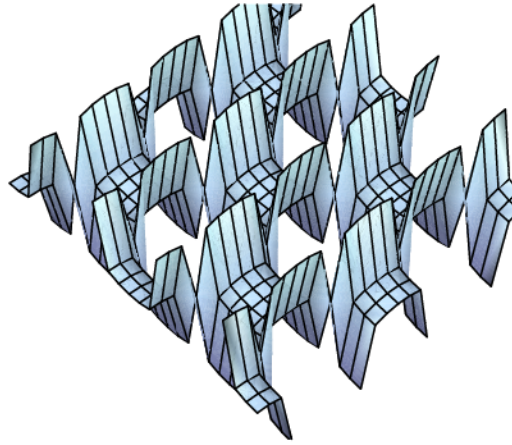


Figura 1: La superficie de *Scherk*.

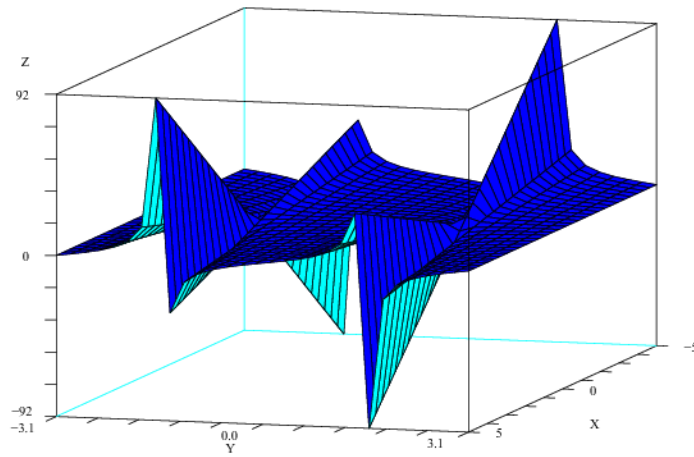


Figura 2: El grafo minimal $u(x, y) = x \tan(y)$.

el cual es minimal pues satisface la ecuación (7).

Por otra parte, los grafos satisfacen el hecho de que su imagen esférica está en una semiesfera abierta. En efecto, si consideramos de nuevo el grafo $\Sigma(u)$ dado por (5), de la ecuación (6) tenemos que el normal unitario es $N = (N_1, N_2, N_3)$ donde $N_3 = 1/\sqrt{1 + |Du|^2} > 0$. Así que, para todo $(x, y) \in \Omega$, $N(x, y)$ está en la semiesfera abierta $\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y } z > 0\}$.

Observemos el siguiente cálculo.

Lema 2. *Sea $\psi : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie orientable con aplicación de Gauss N . Para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, se tiene que:*

$$i) \Delta \langle \psi, \mathbf{a} \rangle = 2H \langle N, \mathbf{a} \rangle.$$

$$ii) \Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle = -2 \langle \nabla H, \mathbf{a} \rangle - (4H^2 - 2K) \langle N, \mathbf{a} \rangle.$$

Demostración. Para calcular los gradientes de estas funciones, consideremos $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ un campo tangente a lo largo de la superficie y veamos que

$$\langle \nabla \langle \psi, \mathbf{a} \rangle, X \rangle = X(\langle \psi, \mathbf{a} \rangle) = \langle \nabla_X^\circ \psi, \mathbf{a} \rangle + \langle \psi, \nabla_X^\circ \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a} \rangle = \langle X, \mathbf{a}^\top \rangle,$$

donde

$$\mathbf{a}^\top = \mathbf{a} - \langle N, \mathbf{a} \rangle N$$

denota la componente tangente de \mathbf{a} a lo largo de la superficie. Por lo tanto, $\nabla \langle \psi, \mathbf{a} \rangle = \mathbf{a}^\top$. Análogamente,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle, X \rangle &= X(\langle N, \mathbf{a} \rangle) = \langle \nabla_X^\circ N, \mathbf{a} \rangle + \langle N, \nabla_X^\circ \mathbf{a} \rangle = \langle -AX, \mathbf{a} \rangle = \langle -AX, \mathbf{a}^\top \rangle \\ &= \langle X, -A\mathbf{a}^\top \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia, $\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle = -A\mathbf{a}^\top$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \nabla_X^\circ \mathbf{a} &= \nabla_X^\circ (\mathbf{a}^\top + \langle N, \mathbf{a} \rangle N) = \nabla_X^\circ \mathbf{a}^\top + \nabla_X^\circ (\langle N, \mathbf{a} \rangle N) \\ &= \nabla_X^\circ \mathbf{a}^\top + X(\langle N, \mathbf{a} \rangle)N + \langle N, \mathbf{a} \rangle \nabla_X^\circ N. \end{aligned}$$

Aplicando las formulas de Gauss (1) y Weingarten (2) se tiene que

$$\nabla_X^\circ \mathbf{a} = \left(\nabla_X \mathbf{a}^\top - \langle N, \mathbf{a} \rangle AX \right) + \left(\sigma(X, \mathbf{a}^\top) + X(\langle N, \mathbf{a} \rangle)N \right).$$

Teniendo en cuenta que $\nabla_X^\circ \mathbf{a} = 0$, entonces resulta

$$\nabla_X \mathbf{a}^\top = \langle N, \mathbf{a} \rangle AX \quad \text{y} \quad \sigma(X, \mathbf{a}^\top) = -X(\langle N, \mathbf{a} \rangle)N.$$

Por ende, $\nabla_X(\nabla\langle\psi, \mathbf{a}\rangle) = \nabla_X\mathbf{a}^\top = \langle N, \mathbf{a}\rangle AX$ y tenemos que

$$\begin{aligned}\Delta\langle\psi, \mathbf{a}\rangle &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{E_i}(\nabla\langle\psi, \mathbf{a}\rangle), E_i \rangle = \langle N, \mathbf{a}\rangle \sum_{i=1}^2 \langle A(E_i), E_i \rangle = \langle N, \mathbf{a}\rangle \operatorname{tr}(A) \\ &= 2\langle N, \mathbf{a}\rangle H.\end{aligned}$$

Esto es, $\Delta\langle\psi, \mathbf{a}\rangle = 2H\langle N, \mathbf{a}\rangle$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}-\nabla_X(\nabla\langle N, \mathbf{a}\rangle) &= \nabla_X(A\mathbf{a}^\top) = (\nabla_X A)(\mathbf{a}^\top) + A(\nabla_X\mathbf{a}^\top) \\ &= (\nabla_X A)(\mathbf{a}^\top) + \langle N, \mathbf{a}\rangle A^2X = (\nabla_{\mathbf{a}^\top} A)(X) + \langle N, \mathbf{a}\rangle A^2X,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la ecuación de Codazzi (4). Entonces

$$\begin{aligned}-\Delta\langle N, \mathbf{a}\rangle &= \sum_{i=1}^2 \langle -\nabla_{E_i}(\nabla\langle N, \mathbf{a}\rangle), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle (\nabla_{\mathbf{a}^\top} A)(E_i), E_i \rangle + \langle N, \mathbf{a}\rangle \sum_{i=1}^2 \langle A^2E_i, E_i \rangle \\ &= \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{a}^\top} A) + \langle N, \mathbf{a}\rangle \operatorname{tr}(A^2) = 2\langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle + \langle N, \mathbf{a}\rangle |A|^2\end{aligned}$$

donde $|A|^2$ denota $\operatorname{tr}(A^2)$ y la última igualdad se verifica pues

$$\operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{a}^\top} A) = \nabla_{\mathbf{a}^\top}(\operatorname{tr}(A)) = \nabla_{\mathbf{a}^\top}(2H) = 2\mathbf{a}^\top(H) = 2\langle \nabla H, \mathbf{a}^\top \rangle = 2\langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle.$$

Finalmente, por el teorema de *Cayley-Hamilton* tenemos

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I = 0,$$

lo que implica que

$$A^2 = \operatorname{tr}(A)A - \det(A)I.$$

Tomando trazas a ambos lados de esta igualdad resulta

$$|A|^2 = (\operatorname{tr}(A))^2 - 2\det(A) = (2H)^2 - 2K = 4H^2 - 2K. \quad (9)$$

Por lo tanto, $\Delta\langle N, \mathbf{a}\rangle = -2\langle \nabla H, \mathbf{a}\rangle - (4H^2 - 2K)\langle N, \mathbf{a}\rangle$. \square

Una consecuencia interesante de la expresión obtenida en el Lema 2 para el laplaciano de la función $\langle\psi, \mathbf{a}\rangle$, es la siguiente caracterización de las superficies minimales como aquellas superficies cuyas funciones coordenadas son *armónicas*.

Corolario 1. *Una superficie inmersa $\psi : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es minimal si y sólo si sus funciones coordenadas son funciones armónicas sobre Σ . En particular, no existen superficies minimales compactas (sin borde) en \mathbb{R}^3 .*

Demostración. En efecto, la expresión dada en el apartado *i)* del Lema 2 implica que si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ son las funciones coordenadas de la inmersión, donde $\psi_i = \langle \psi, \mathbf{e}_i \rangle$ siendo $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 , entonces

$$\Delta\psi = (\Delta\psi_1, \Delta\psi_2, \Delta\psi_3) = 2HN.$$

Esta es la conocida *fórmula de Laplace-Beltrami*. Por lo tanto, Σ es minimal si y sólo si $\Delta\psi = 0$. En particular, no existen superficies minimales compactas (sin borde) en \mathbb{R}^3 , ya que, como es bien sabido, las únicas funciones armónicas sobre una superficie riemanniana compacta (y conexa) son las funciones constantes. Esta afirmación es una sencilla consecuencia del teorema de la divergencia. En efecto, supongamos que f es una función armónica definida sobre una superficie compacta Σ . Entonces se tiene que

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = f\Delta f + |\nabla f|^2 = |\nabla f|^2.$$

Por el teorema de la divergencia,

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma}\Delta f^2 d\Sigma = \int_{\Sigma}|\nabla f|^2 d\Sigma = 0,$$

lo cual implica que $|\nabla f| = 0$ en todo punto de Σ y f debe ser necesariamente constante. \square

2.1 Completitud y parabolicidad de superficies

En esta subsección presentamos algunos resultados básicos sobre completitud y parabolicidad de superficies riemannianas. Es interesante observar que, a pesar de que los resultados sobre completitud son válidos para variedades riemannianas de cualquier dimensión $n \geq 2$, nos vamos a limitar a enunciarlos únicamente en el caso que nos ocupa, es decir para superficies riemannianas ($n = 2$). Por otra parte, los resultados de parabolicidad son específicos del caso $n = 2$, ya que la parabolicidad de una variedad riemanniana cambia drásticamente si $n \geq 3$.

Definición 2. Sea (Σ, g) una superficie riemanniana conexa. Dados $p, q \in \Sigma$, se define la distancia intrínseca entre p y q como

$$d(p, q) = \inf \{L(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\}$$

donde $\Omega(p, q)$ denota el conjunto de curvas diferenciables a trozos en Σ que unen p con q , y $L(\alpha)$ denota la longitud de la curva α .

Definición 3 (Completitud). Sea Σ una superficie riemanniana.

- i)* Se dice que Σ es métricamente completa, si es completa como espacio métrico con respecto a la distancia intrínseca d .

- ii) Dado un punto $p \in \Sigma$, se dice que Σ es geodésicamente completa en el punto p , si la aplicación \exp_p está definida en todo el espacio tangente $T_p\Sigma$, es decir, si para todo vector $v \in T_p\Sigma$, la geodésica maximal $\gamma_v(t)$ con vector inicial $\gamma'_v(0) = v$ está definida en todo \mathbb{R} .
- iii) Se dice que Σ es geodésicamente completa, si lo es en cada punto $p \in \Sigma$.

El concepto de curva divergente que damos a continuación permite dar una caracterización más geométrica de la completitud de una superficie riemanniana en términos de las longitudes de sus curvas divergentes.

Definición 4 (Curva divergente). *Una curva divergente en una superficie diferenciable Σ es una curva $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \Sigma$ que se sale de los compactos de Σ , es decir, tal que para cada conjunto compacto $A \subset \Sigma$ existe un t_0 para el cual $\alpha(t) \notin A$ si $t > t_0$. Se define entonces la longitud de α como*

$$L(\alpha) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a |\alpha'(t)| dt \leq \infty.$$

El siguiente criterio de completitud fue la definición original de completitud que dieron Hopf y Rinow en 1931 [7]. Una prueba detallada del siguiente teorema se puede ver en ([5], pág. 8).

Teorema 3. *Una superficie riemanniana (Σ, g) es completa si y sólo si toda curva divergente en Σ tiene longitud infinita.*

La proposición que sigue a continuación, es una de las herramientas principales en la demostración del teorema de Bernstein y los teoremas de Klotz y Osserman.

Proposición 2. *Sea (Σ, g) una superficie riemanniana completa. Supongamos que existe una métrica \tilde{g} sobre Σ que satisface $\tilde{g} \geq cg$, para una constante positiva c , entonces la superficie (Σ, \tilde{g}) es completa.*

Demostración. Sea $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \Sigma$ una curva divergente arbitraria sobre Σ . Dado que la superficie (Σ, g) es completa, la longitud de la curva α bajo la métrica g es infinita; es decir,

$$L(\alpha) = \int_0^\infty \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt = \infty.$$

Como \tilde{g} es una métrica sobre Σ tal que $\tilde{g} \geq cg$ con $c > 0$, tenemos

$$\tilde{L}(\alpha) = \int_0^\infty \sqrt{\tilde{g}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \geq \sqrt{c} \int_0^\infty \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt = \sqrt{c} L(\alpha) = \infty.$$

Por lo tanto, la curva divergente α tiene longitud infinita bajo la métrica \tilde{g} . Luego, la superficie (Σ, \tilde{g}) es completa. \square

Terminamos esta subsección estableciendo algunos criterios útiles de parabolicidad de superficies.

Definición 5 (Parabolicidad). *Una superficie riemanniana Σ es parabólica si no admite funciones superarmónicas ($\Delta f \leq 0$) no negativas ($f \geq 0$) que no sean constantes.*

Un ejemplo de superficie completa y parabólica es el plano euclídeo \mathbb{R}^2 y como un ejemplo de superficie completa no parabólica tenemos al plano hipérbolico \mathbb{H}^2 con su métrica estándar; para estudiarlos con más detalle, véase Kazdan [9].

A continuación, enunciaremos un criterio clásico dado por Ahlfors [1] y Blanc-Fiala-Huber [8] que nos permite determinar si una superficie es parabólica.

Teorema 4. *Si Σ^2 es una superficie completa con $K \geq 0$ entonces Σ es parabólica.*

En la siguiente proposición probaremos que la parabolicidad es un invariante conforme en dimensión $n = 2$.

Proposición 3. *Sea (Σ^2, g) una superficie riemanniana y $\tilde{g} = e^{2u}g$ una métrica conforme a g , donde $u \in C^\infty(\Sigma)$. Entonces (Σ, g) es parabólica si y sólo si (Σ, \tilde{g}) es parabólica.*

Demostración. Si \tilde{g} es una métrica conforme a g , es claro que g es una métrica conforme a \tilde{g} (pues $g = e^{-2u}\tilde{g}$). Por lo tanto, para demostrar esta proposición sólo es necesario probar una implicación. Así que, veamos que la condición es suficiente. Consideremos una función f sobre Σ tal que

$$f \leq 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\Delta}f \geq 0,$$

donde $\tilde{\Delta}$ es el laplaciano con respecto a la métrica \tilde{g} . Como $\tilde{g} = e^{2u}g$ tenemos $\tilde{\Delta} = e^{-2u}\Delta$ y por lo tanto $f \leq 0$ y $\Delta f \geq 0$. Sabemos que (Σ, g) es parabólica, luego f es constante, y en consecuencia (Σ, \tilde{g}) es parabólica. \square

3 Prueba del Teorema 2

Sea Σ una superficie minimal y completa cuya imagen esférica está contenida en una semiesfera abierta; es decir, existe $\mathbf{a} \in \mathbb{S}^2$ tal que

$$\langle N(p), \mathbf{a} \rangle > 0, \quad \text{para todo } p \in \Sigma. \quad (10)$$

Dado que $H = 0$ por el Lema 2 tenemos que $\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle = 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle$, y como sabemos de la Proposición 3 que $H^2 - K \geq 0$ entonces $K \leq 0$, con igualdad en los puntos totalmente geodésicos. Luego,

$$\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle (p) \leq 0 \quad \text{en todo punto } p \text{ de } \Sigma. \quad (11)$$

Así, de (10) y (11) concluimos que $\langle N, \mathbf{a} \rangle$ es una función positiva y superarmónica sobre Σ . Observemos que si Σ fuese parabólica, entonces $\langle N, \mathbf{a} \rangle$ debería ser una constante positiva, y si esto ocurre, entonces $\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle = 0$, lo que implicaría que $K(p) = 0$ en todo punto $p \in \Sigma$ y por lo tanto, Σ sería un plano, y terminaríamos la demostración.

De este modo, sólo nos basta probar que Σ es parabólica. Para ello, consideremos la métrica $\tilde{g} = (1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2 g$, que es una *métrica conforme* a g . Como es bien sabido, si g y \tilde{g} son dos métricas conformes sobre una superficie riemanniana Σ con función conforme e^{2u} (es decir, $\tilde{g} = e^{2u}g$), sus curvaturas de Gauss están relacionadas de la siguiente forma:

$$e^{2u} \tilde{K} = K - \Delta u,$$

donde K y \tilde{K} son las curvaturas de Gauss de g y \tilde{g} , respectivamente. En nuestro caso,

$$e^{2u} = (1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2.$$

Por tanto,

$$(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2 \tilde{K} = K - \Delta \log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle). \quad (12)$$

Nótese que

$$|\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2 = \langle -A(\mathbf{a}^\top), -A(\mathbf{a}^\top) \rangle = \langle A^2(\mathbf{a}^\top), \mathbf{a}^\top \rangle = -K \langle \mathbf{a}^\top, \mathbf{a}^\top \rangle = -K |\mathbf{a}^\top|^2,$$

pues $A^2 = -KI$. Por la descomposición $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\top + \langle N, \mathbf{a} \rangle N$ se tiene que

$$1 = |\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}^\top|^2 + \langle N, \mathbf{a} \rangle^2.$$

Así,

$$|\mathbf{a}^\top|^2 = 1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2.$$

Luego,

$$|\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2 = -K (1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2).$$

Por otra parte, la función $\log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)$ se puede re-escribir de la siguiente forma:

$$\log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle) = \varphi(\langle N, \mathbf{a} \rangle), \text{ donde } \varphi(t) = \log(1 + t).$$

De manera que,

$$\Delta \varphi(\langle N, \mathbf{a} \rangle) = \varphi''(\langle N, \mathbf{a} \rangle) |\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2 + \varphi'(\langle N, \mathbf{a} \rangle) \Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle,$$

donde $\varphi'(t) = 1/(1+t)$ y $\varphi''(t) = -1/(1+t)^2$. Teniendo en cuenta estos cálculos y utilizando las expresiones obtenidas previamente para $\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle$ y $|\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2$ en

el Lema 2, resulta que

$$\begin{aligned}
\Delta \log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle) &= \frac{1}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} K \left(1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2\right) + \frac{1}{1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle} 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle \\
&= \frac{K \left(1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2\right) + (1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle) 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} \\
&= \frac{K - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2 K + 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle + 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle^2}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} \\
&= \frac{K \left(1 + 2 \langle N, \mathbf{a} \rangle + \langle N, \mathbf{a} \rangle^2\right)}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} = K.
\end{aligned}$$

Del cálculo anterior y la ecuación (12) tenemos que $\tilde{K} = 0$. Por otra parte, dado que (Σ, g) es completa y $\tilde{g} = (1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2 g \geq g$ (pues $\langle N, \mathbf{a} \rangle > 0$) entonces por la Proposición 2, sabemos que (Σ, \tilde{g}) también es completa. Resumiendo, (Σ, \tilde{g}) es una superficie completa y llana ($\tilde{K} = 0$), así que, por el Teorema 4 (Σ, \tilde{g}) es parabólica.

Y dado que la parabolicidad es un invariante conforme 2-dimensional, como vimos en la Proposición 3, tenemos que (Σ, g) es parabólica, y esto finaliza la demostración del teorema.

4 Grafos enteros de curvatura media constante

En esta sección, y siguiendo una idea original de Heinz [6], damos una estimación de la curvatura media de un grafo. Como aplicación, podemos concluir que un grafo entero con curvatura media constante debe ser necesariamente minimal y, por el teorema de Bernstein, un plano. Comenzamos viendo el siguiente resultado.

Lema 3. Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un dominio conexo, $u \in C^\infty(\Omega)$ y $\Sigma(u)$ el grafo determinado por la función u . Para todo $x_0 \in \Omega$ y para todo $R > 0$ tal que el disco euclídeo con centro en x_0 y radio R , que denotaremos por $D(x_0, R)$, esté contenido en Ω , se tiene

$$\left| \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy \right| \leq \pi R,$$

donde $H(x, y)$ es la curvatura media del grafo en el punto $(x, y, u(x, y)) \in \Sigma(u)$.

Demostración. Dado que

$$\text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 2H \quad \text{en } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

e integrando esta igualdad sobre $D(x_0, R)$ se tiene que

$$\int_{D(x_0, R)} \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) dx dy = 2 \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy.$$

Ahora bien, del teorema clásico de la divergencia en \mathbb{R}^2 , sabemos que

$$\int_{D(x_0, R)} \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) dx dy = - \oint_{\partial D(x_0, R)} \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \nu \right\rangle ds,$$

donde ν es el co-normal interior unitario a lo largo de la frontera del disco $\partial D(x_0, R)$.

En consecuencia,

$$\oint_{\partial D(x_0, R)} \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \nu \right\rangle ds = -2 \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy. \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que

$$\left| \oint_{\partial D(x_0, R)} \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \nu \right\rangle ds \right| \leq \oint_{\partial D(x_0, R)} \left| \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \nu \right\rangle \right| ds,$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al lado derecho de esta desigualdad se llega a

$$\left| \oint_{\partial D(x_0, R)} \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \nu \right\rangle ds \right| \leq \oint_{\partial D(x_0, R)} \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} ds,$$

pues $|\nu| = 1$.

Dado que $0 \leq \frac{|Du|}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \leq 1$ tenemos

$$\left| \oint_{\partial D(x_0, R)} \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}}, \nu \right\rangle ds \right| \leq 2\pi R.$$

De (13) y la desigualdad anterior tenemos

$$\left| \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy \right| \leq \pi R.$$

□

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Lema 3.

Corolario 2. *Sea u una función diferenciable definida en el disco $D(0, R) \subset \mathbb{R}^2$. Si la curvatura media H del grafo determinado por u satisface $|H| \geq \alpha > 0$ en todo punto del disco, entonces debe ser*

$$R \leq \frac{1}{\alpha}.$$

La siguiente proposición es una extensión del teorema clásico de Bernstein.

Proposición 4. *Los únicos grafos enteros de curvatura media constante en \mathbb{R}^3 son los planos.*

Demostración. Si $\Sigma(u)$ es un grafo entero entonces $\Omega = \mathbb{R}^2$. Así que, podemos tomar $x_0 = (0, 0)$ y aplicar el lema anterior para cualquier R , de modo que

$$\left| \int_{D(x_0, R)} H dx dy \right| \leq \pi R$$

para todo $R > 0$. Como $\Sigma(u)$ tiene curvatura media H constante, se tiene que

$$\left| \int_{D(x_0, R)} H dx dy \right| = |H| \left| \int_{D(x_0, R)} dx dy \right| = |H| \text{área}(D(x_0, R)) = |H| \pi R^2.$$

Por lo tanto, $|H| \pi R^2 \leq \pi R$ para todo valor de $R > 0$. Es decir,

$$|H| \leq \frac{1}{R}.$$

Si hacemos $R \rightarrow \infty$ tenemos $|H| = 0$. Es decir, el grafo es necesariamente minimal y por el teorema de Bernstein debe ser un plano. \square

Como otra consecuencia interesante del Lema 3 tenemos la siguiente proposición.

Proposición 5. *Sea $\Sigma(u)$ un grafo entero. Entonces*

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} H(x, y) \leq 0 \leq \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} H(x, y),$$

donde $H(x, y)$ es la curvatura media de $\Sigma(u)$.

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$ y consideremos

$$\alpha = \min_{(x,y) \in D(x_0, R)} H(x, y) \quad \text{y} \quad \beta = \max_{(x,y) \in D(x_0, R)} H(x, y).$$

Dado que $\alpha \leq H(x, y)$, integrando esta desigualdad obtenemos

$$\alpha\pi R^2 = \int_{D(x_0, R)} \alpha dx dy \leq \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy.$$

Pero sabemos

$$\int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy \leq \left| \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy \right| \leq \pi R.$$

Entonces

$$\alpha \leq \frac{1}{R}. \tag{14}$$

De manera análoga,

$$\beta\pi R^2 \geq - \left| \int_{D(x_0, R)} H(x, y) dx dy \right| \geq -\pi R.$$

Luego,

$$\beta \geq -\frac{1}{R}. \tag{15}$$

Haciendo $R \rightarrow \infty$ en las ecuaciones (14) y (15) tenemos

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} H(x, y) \leq 0 \quad \text{y} \quad \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} H(x, y) \geq 0.$$

□

5 Algunos resultados de superficies minimales y de curvatura media constante

Las superficies minimales y de curvatura media constante han sido objeto de estudio de numerosos trabajos de investigación en geometría diferencial, ya sea porque aparecen como soluciones o extremales de un problema variacional asociado a un funcional que mide el área de las superficies que poseen un borde o volumen fijo (para más detalles, véase la Sección 1.3 de [5] para las superficies minimales o la Sección 3.1 de [12] para las superficies de curvatura media constante) o porque este tipo de superficies describen eventos físicos, por ejemplo las superficies minimales son el modelo matemático que describe a las películas de jabón o pompas jabonosas.

Ejemplos sencillos de estas superficies son el plano, la esfera y el cilindro circular. Klotz y Osserman en [10] caracterizan estas superficies estableciendo que una superficie completa de curvatura media constante en el espacio euclídeo, cuya curvatura de Gauss tiene signo constante, debe ser uno de los tres ejemplos

arriba mencionados; es decir, o bien es una superficie minimal, o bien una esfera, o bien un cilindro circular. Esta caracterización es la que estudiaremos en esta sección, siguiendo la idea principal de la prueba original dada por ellos en 1967, pero sin emplear técnicas de variable compleja.

El siguiente resultado auxiliar será fundamental para la demostración de los resultados principales.

Lema 4. *Sea Σ una superficie con curvatura media constante H en \mathbb{R}^3 . Entonces, el laplaciano de su curvatura de Gauss K está dado por*

$$\Delta K = -4K(H^2 - K) - |\nabla A|^2. \quad (16)$$

Demostración. De (9) sabemos que

$$K = 2H^2 - \frac{1}{2}|A|^2.$$

Dado que H es constante, se tiene que

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\Delta |A|^2. \quad (17)$$

De la ecuación anterior observamos que una forma para calcular el laplaciano de la curvatura de Gauss es calculando el laplaciano de la función traza de A^2 . Para ello, usaremos una formula de tipo Simons, técnica que ha sido utilizada ampliamente por muchos autores. Incluimos aquí su derivación siguiendo la idea de Nomizu y Smyth [11].

Un cálculo tensorial estándar implica que

$$\frac{1}{2}\Delta |A|^2 = \langle A, \Delta A \rangle + |\nabla A|^2 \quad (18)$$

donde $\Delta A : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ es el laplaciano del operador A el cual está dado por

$$\Delta A(X) = \sum_{i=1}^2 \nabla^2 A(X, E_i, E_i).$$

La diferencial covariante de $\nabla A : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ que denotamos por $\nabla^2 A : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ se define como

$$\nabla^2 A(X, Y, Z) = (\nabla_Z \nabla A)(X, Y),$$

y satisface las siguientes propiedades de simetría

- (a) $\nabla^2 A(X, Y, Z) = \nabla^2 A(Y, X, Z),$
- (b) $\nabla^2 A(X, Y, Z) = \nabla^2 A(X, Z, Y) - K(\langle AX, Z \rangle Y - \langle Y, AX \rangle Z)$
 $+ A(K(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, X \rangle Z))$

para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Obsérvese que (a) se tiene por la simetría de ∇A y (b) al realizar el cálculo de la diferencia $\nabla^2 A(X, Y, Z) - \nabla^2 A(X, Z, Y)$ y utilizar la ecuación de Gauss.

Así que de (a) y (b) tenemos que

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X, E_i, E_i) &= \nabla^2 A(E_i, X, E_i) \\ &= \nabla^2 A(E_i, E_i, X) - K(\langle AE_i, E_i \rangle X - \langle X, AE_i \rangle E_i) \\ &\quad + A(K(\langle E_i, E_i \rangle X - \langle X, E_i \rangle E_i)).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta A(X) &= \sum_{i=1}^2 \nabla^2 A(E_i, E_i, X) - K \left(\sum_{i=1}^2 \langle AE_i, E_i \rangle X - \sum_{i=1}^2 \langle AX, E_i \rangle E_i \right) \\ &\quad + A \left(K \left(\sum_{i=1}^2 \langle E_i, E_i \rangle X - \sum_{i=1}^2 \langle X, E_i \rangle E_i \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 (\nabla_X \nabla A)(E_i, E_i) - K(\operatorname{tr}(A)X - AX) + A(K(2X - X)) \\ &= \operatorname{tr}(\nabla_X(\nabla A)) - K(2HX - AX) + KAX \\ &= \nabla_X(\operatorname{tr}(\nabla A)) - 2HKX + 2KAX.\end{aligned}$$

donde en la última igualdad utilizamos el hecho que la traza conmuta con la derivada covariante ∇_X .

Dado que ∇A es simétrico (véase (4) la ecuación de Codazzi) se tiene

$$\operatorname{tr}(\nabla A) = \nabla(\operatorname{tr}(A)).$$

Usando esta igualdad y el hecho que H es constante, obtenemos

$$\nabla_X(\operatorname{tr}(\nabla A)) = \nabla_X(\nabla(\operatorname{tr}(A))) = \nabla_X(\nabla(2H)) = 0.$$

En consecuencia,

$$\Delta A(X) = -2HKX + 2KAX.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle A, \Delta A \rangle &= \sum_{i=1}^2 \langle A(E_i), \Delta A(E_i) \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle A(E_i), -2HKE_i + 2KA(E_i) \rangle \\ &= -2HK \sum_{i=1}^2 \langle A(E_i), E_i \rangle + 2K \sum_{i=1}^2 \langle A^2(E_i), E_i \rangle \\ &= -2HK \operatorname{tr}(A) + 2K|A|^2.\end{aligned}$$

De (9) concluimos

$$\langle A, \Delta A \rangle = -4H^2K + 2K(4H^2 - 2K) = 4H^2K - 4K^2 = 4K(H^2 - K). \quad (19)$$

Entonces de (17), (18) y (19) concluimos que

$$\Delta K = -4K(H^2 - K) - |\nabla A|^2.$$

□

Observación 1. Consideremos $\{E_1, E_2\}$ una base ortonormal que diagonaliza a A . Esto es,

$$AE_1 = \kappa_1 E_1 \quad \text{y} \quad AE_2 = \kappa_2 E_2$$

donde κ_1, κ_2 son las curvaturas principales.

Sabemos que $|\nabla A|^2 = \sum_{i=1}^2 |\nabla A(E_i, E_j)|^2$ donde

$$\begin{aligned} \nabla A(E_i, E_j) &= \nabla_{E_j} A(E_i) - A(\nabla_{E_j} E_i) = \nabla_{E_j}(\kappa_i E_i) - A(\nabla_{E_j} E_i) \\ &= E_j(\kappa_i) E_i + \kappa_i \nabla_{E_j} E_i - A(\nabla_{E_j} E_i). \end{aligned} \quad (20)$$

También es conocido que en dimensión dos, para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se tiene

$$\nabla_X E_1 = \alpha(X) E_2 \quad \text{y} \quad \nabla_X E_2 = -\alpha(X) E_1$$

donde α es la 1-forma dada por $\alpha(X) = \langle \nabla_X E_1, E_2 \rangle = -\langle E_1, \nabla_X E_2 \rangle$. Entonces para $j = 1, 2$ se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla A(E_1, E_j) &= E_j(\kappa_1) E_1 + \kappa_1 \nabla_{E_j} E_1 - A(\nabla_{E_j} E_1) \\ &= E_j(\kappa_1) E_1 + \kappa_1 \alpha(E_j) E_2 - \alpha(E_j) A E_2 \\ &= E_j(\kappa_1) E_1 + \alpha(E_j) (\kappa_1 - \kappa_2) E_2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \nabla A(E_2, E_j) &= E_j(\kappa_2) E_2 + \kappa_2 \nabla_{E_j} E_2 - A(\nabla_{E_j} E_2) \\ &= E_j(\kappa_2) E_2 - \kappa_2 \alpha(E_j) E_1 + \alpha(E_j) A E_1 \\ &= E_j(\kappa_2) E_2 + \alpha(E_j) (\kappa_1 - \kappa_2) E_1. \end{aligned}$$

De la ecuación de Codazzi $\nabla A(E_1, E_2) = \nabla A(E_2, E_1)$ afirmamos que

$$E_2(\kappa_1) = \alpha(E_1) (\kappa_1 - \kappa_2) \quad \text{y} \quad E_1(\kappa_2) = \alpha(E_2) (\kappa_1 - \kappa_2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \nabla A(E_1, E_1) &= E_1(\kappa_1) E_1 + E_2(\kappa_1) E_2, \\ \nabla A(E_1, E_2) &= E_2(\kappa_1) E_1 + E_1(\kappa_2) E_2, \\ \nabla A(E_2, E_2) &= E_1(\kappa_2) E_1 + E_2(\kappa_2) E_2. \end{aligned}$$

Luego,

$$|\nabla A|^2 = E_1(\kappa_1)^2 + 3E_2(\kappa_1)^2 + 3E_1(\kappa_2)^2 + E_2(\kappa_2)^2. \quad (21)$$

Por otro lado, obsérvese que $K = \kappa_1\kappa_2$, en consecuencia la norma al cuadrado de su gradiente está dada por

$$\begin{aligned} |\nabla K|^2 &= E_1(K)^2 + E_2(K)^2 \\ &= (E_1(\kappa_1)\kappa_2 + E_1(\kappa_2)\kappa_1)^2 + (E_2(\kappa_1)\kappa_2 + E_2(\kappa_2)\kappa_1)^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Ahora, dado que $\kappa_1 + \kappa_2$ es constante (pues H lo es) se tiene que para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$X(\kappa_1) = -X(\kappa_2).$$

Por ende, las ecuaciones (21) y (22) se pueden reescribir de la siguiente forma

$$|\nabla A|^2 = 4(E_1(\kappa_1)^2 + E_2(\kappa_1)^2) \quad (23)$$

y

$$\begin{aligned} |\nabla K|^2 &= (E_1(\kappa_1)\kappa_2 - E_1(\kappa_1)\kappa_1)^2 + (E_2(\kappa_1)\kappa_2 - E_2(\kappa_1)\kappa_1)^2 \\ &= (\kappa_1 - \kappa_2)^2 (E_1(\kappa_1)^2 + E_2(\kappa_1)^2). \end{aligned} \quad (24)$$

Del hecho que $H^2 - K = (\kappa_1 - \kappa_2)^2/4$ y de las ecuaciones (23) y (24) concluimos

$$|\nabla K|^2 = (H^2 - K) |\nabla A|^2.$$

Es más, la anterior igualdad junto con (16) implican

$$(H^2 - K) \Delta K = -4K (H^2 - K)^2 - |\nabla K|^2. \quad (25)$$

A continuación presentamos los resultados de Klotz y Osserman en función del signo de la curvatura de Gauss. El primero de ellos, es para aquellas superficies que poseen curvatura de Gauss no negativa.

Teorema 5. *Las únicas superficies completas con curvatura media constante en \mathbb{R}^3 y $K \geq 0$ son los planos, los cilindros circulares y las esferas.*

Demostración. Dado que la superficie es completa y $K \geq 0$ por el Teorema 4 tenemos que es parabólica.

De la ecuación (16) y del hecho que $H^2 - K \geq 0$ y $|\nabla A|^2$, $K \geq 0$ tenemos que K es una función no negativa y superarmónica ($\Delta K \leq 0$) sobre la superficie, y por definición de parabolicidad K debe ser constante. Entonces H y K son constantes, luego la superficie debe ser o bien

i) un plano, si $H = 0$ y $K = 0$, o bien

- ii) un cilindro circular, si $H \neq 0$ y $K = 0$, o bien
- iii) una esfera si $H, K \neq 0$.

□

El segundo resultado es para las superficies que tienen curvatura de Gauss no positiva.

Teorema 6. *Las únicas superficies completas con curvatura media constante en \mathbb{R}^3 y $K \leq 0$ son las superficies minimales completas o los cilindros circulares.*

Demostración. Sea (Σ, g) una superficie completa con curvatura media constante en \mathbb{R}^3 . Obsérvese que si $H = 0$ no hay nada que probar. Así que supongamos $H \neq 0$, y consideremos la métrica \tilde{g} conforme a g dada por

$$\tilde{g} = \sqrt{H^2 - K}g, \quad \text{pues } \sqrt{H^2 - K} \geq \sqrt{H^2} = |H| > 0,$$

Dado que $\tilde{g} \geq |H|g$ y la métrica g es completa, por la Proposición 2 tenemos que \tilde{g} es también completa. Más aún, la curvatura de Gauss \tilde{K} de (Σ, \tilde{g}) está dada por

$$\sqrt{H^2 - K}\tilde{K} = K - \frac{1}{4}\Delta \log(H^2 - K). \quad (26)$$

Reescribiendo la anterior ecuación, de la siguiente forma

$$\log(H^2 - K) = \phi(H^2 - K), \quad \text{donde } \phi(t) = \log(t)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta \phi(H^2 - K) &= \phi''(H^2 - K)|\nabla(H^2 - K)|^2 + \phi'(H^2 - K)\Delta(H^2 - K) \\ &= -\frac{|\nabla(H^2 - K)|^2}{(H^2 - K)^2} + \frac{\Delta(H^2 - K)}{H^2 - K}. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que H es constante y la ecuación (25) podemos concluir

$$\Delta \log(H^2 - K) = -\frac{|\nabla K|^2}{(H^2 - K)^2} - \frac{\Delta K}{H^2 - K} = 4K. \quad (27)$$

Por tanto, a partir de (26) tenemos $\tilde{K} = 0$.

Resumiendo (Σ^2, \tilde{g}) es una superficie riemanniana completa y llana, así que del Teorema 4 concluimos que (Σ^2, \tilde{g}) es parabólica, y de la Proposición 3 sabemos que la parabolicidad se preserva bajo el cambio de la métrica, por lo tanto (Σ^2, g) también es parabólica.

De (27) deducimos que $\log(H^2 - K)$ es una función superarmónica ($\Delta \log(H^2 - K) \leq 0$) pues $K \leq 0$. Además dicha función está acotada inferiormente sobre (Σ^2, g) ya que $\log(H^2 - K) \geq \log(|H|) > -\infty$. De modo que, por la definición de parabolicidad la función $\log(H^2 - K)$ debe ser constante. Ahora, utilizando nuevamente la ecuación (27) concluimos que $K = \text{constante} = 0$. Entonces la superficie debe ser un cilindro circular pues $H = \text{constante} \neq 0$ y $K = \text{constante} = 0$. □

Agradecimientos

Agradezco especialmente al profesor Luis J. Alías por sus valiosas sugerencias y comentarios, que fueron de gran utilidad en la elaboración de este artículo. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el proyecto MICINN MTM2009-10418 y el proyecto de la Fundación Séneca 04540/GERM/06, España. Esta investigación es un resultado de la actividad desarrollada dentro del marco del Programa en Apoyo a los Grupos de Excelencia de la Región de Murcia, España, por la Fundación Séneca, Agencia Regional para la Ciencia y la Tecnología (Plan Regional para la Ciencia y la Tecnología 2007-2010). La autora agradece el apoyo de una Beca-Contrato en el marco del Programa “Formación en Grupos de Excelencia GERM” de la Universidad de Murcia.

Referencias

- [1] L.V. Ahlfors, Sur le type d'une surface de Riemann, C.R. Acad. Sc. Paris. 201 (1935), 30–32.
- [2] S. Bernstein, Sur la généralisation du problème de Dirichlet, Math. Ann. 69 (1910), 82–136.
- [3] S. Bernstein, Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale, Ann. Sci. école Norm. Sup. 27 (1910), 233–256.
- [4] S.S. Chern, Simple proofs of two theorems on minimal surfaces, Enseignement Math. 15 (1969), 53–61.
- [5] S.C. García-Martínez, Una introducción al estudio de superficies minimales y de curvatura media constante en el espacio euclídeo, Tesis del Máster Oficial en Matemática Avanzada, Universidad de Murcia, (2007).
- [6] E. Heinz, Über Flächen mit eineindeutiger Projektion auf eine Ebene, deren Krümmungen durch Ungleichungen eingeschränkt sind, Math. Ann. 129 (1955), 451–454.
- [7] H. Hopf y W. Rinow, Ueber den Begriff der vollst ändigen differentialgeometrischen Fläche. Comment. Math. Helv. 3 (1931), 209–225.
- [8] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13–72.
- [9] J.L. Kazdan, Parabolicity and the Liouville property on complete Riemannian manifolds, Seminar on new results in nonlinear partial differential equations (Bonn, 1984), 153–166, Aspects Math., E10, Vieweg, Braunschweig, 1987.
- [10] T. Klotz y R. Osserman, Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature, Comment. Math. Helv. 41 (1966/1967), 313–318.

- [11] K. Nomizu y B. Smyth, A formula of Simons'type and hypersurfaces with constant mean curvature, *J. Differential Geometry* 3 (1969), 367–377.
- [12] J. Pastor, Superficies compactas con borde de curvatura media constante en los espacios euclídeo y de Lorentz-Minkowski, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Universidad de Murcia, (1997).

Dirección del autor

S. Carolina García-Martínez — Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia,
Espinardo, Murcia-España
e-mail: sandracarolina.garcia@um.es