DUALIDAD T FERMIÓNICA EN EL FORMALISMO DE ESPINORES PUROS

ALEJANDRO GONZÁLEZ MELAN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2011

DUALIDAD T FERMIÓNICA EN EL FORMALISMO DE ESPINORES PUROS

ALEJANDRO GONZÁLEZ MELAN

Trabajo de Grado presentado como
requisito para optar al título de Físico

Director

HERNÁN OCAMPO DURÁN
Dr. Rer. Nat.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2011

ALEJANDRO GONZÁLEZ MELAN

DUALIDAD T FERMIÓNICA EN EL FORMALISMO DE ESPINORES PUROS

Palabras clave:
Supercuerdas
Supersimetría
Espinores puros
Dualidad T

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
ACTA DE EVALUACION DE TRABAJO DE GRADO
PROGRAMA ACADEMICO DE FISICA.

JURADO CONFORMADO POR:

DR. HERNÁN OCAMPO DURÁN
DR. JOHN HENRY REINA

El día 1 de Diciembre de 2011 a las 4:30 P.M. se llevó a cabo la ENTREGA DE LA EVALUACION ( ) SUSTENTACION (**X**) del INFORME FINAL DEL TRABAJO DE GRADO titulado ***"DUALIDAD T FERMIÓNICA EN EL FORMALISMO DE ESPINORES PUROS".*** Presentado por el estudiante **ALEJANDRO GONZÁLEZ MELAN** código 0732535, bajo la dirección del Profesor HERNAN OCAMPO DURÁN.

RESULTADO DE LA EVALUACION:

(X) **APROBADO .**
( ) **REPROBADO.**

Se recomienda modificaciones: SI ( ) NO ( ).

OBSERVACIONES:

HERNÁN OCAMPO DURÁN
DIRECTOR

JOHN HENRY REINA
JURADO

Esperanza Torijano

ESPERANZA TORIJANO
DIRECTORA
PROGRAMA ACADEMICO DE FISICA

Resumen

En este trabajo se realiza una revisión de los aspectos básicos de los formalismos de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS), Green-Schwarz (GS) y de espinores puros, para la teoría de supercuerdas. Se calculan las transformaciones de la dualidad T bosónica y fermiónica, utilizando primero el procedimiento de Buscher y luego utilizando una transformación canónica de las variables del espacio de fase, verificando que con ambos métodos se obtienen los mismos resultados. Los cálculos para la dualidad T fermiónica se realizan en los formalismos GS y de espinores puros.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La propuesta de la teoría de cuerdas es que los constituyentes elementales de la naturaleza no son partículas puntuales, sino pequeñas cuerdas cuyos diferentes modos de oscilación corresponden a las partículas que conocemos. La teoría de cuerdas nació en 1960 como un intento de modelar la fuerza nuclear fuerte, pero en 1973 perdió terreno debido al desarrollo de la cromodinámica cuántica como la teoría para la interacción nuclear fuerte [1].

En 1974 se encontró que el espectro de la teoría de cuerdas contenía una partícula de espín 2 que podía ser asociada a la interacción gravitacional [2], con lo cual la teoría de cuerdas adquirió un nuevo objetivo como teoría de unificación. Debido a que la teoría de cuerdas sólo contenía bosones, fue necesaria la inclusión de fermiones, lo cual se realizó a través de la supersimetría, que asocia un fermión a cada bosón, esto se logra agregando a la teoría unas variables espinoriales adicionales. La teoría supersimétrica recibe el nombre de teoría de supercuerdas. En 1985 se habían encontrado cinco teorías de supercuerdas diferentes: tipo I, tipo IIA, tipo IIB, heterótica $SO(32)$ y heterótica $E_8 \times E_8$. La teoría tipo I y las dos heteróticas tienen supersimetría $\mathcal{N} = 1$, es decir, tienen un espinor de 16 componentes reales o en forma equivalente 16 supercargas. Las teorías tipo IIA y tipo IIB tienen supersimetría $\mathcal{N} = 2$, es decir, tienen dos espinores de 16 componentes reales o 32 supercargas. En la teoría tipo I las cuerdas no son orientadas, mientras que en las otras cuatro teorías sí. En la teoría tipo IIA los espinores tienen quiralidad opuesta y en la teoría tipo IIB tienen igual quiralidad. La diferencia entre las dos teorías heteróticas está en sus grupos de calibración, en una es el $SO(32)$ y en la otra es el $E_8 \times E_8$.

La existencia de cinco teorías diferentes es un poco contradictoria con la idea de unificación que pretendía la teoría de cuerdas. La solución a este inconveniente se encontró alrededor de 1995 con el descubrimiento de una serie de dualidades, las cuales permitieron demostrar que estas teorías, aparentemente diferentes, están interconectadas. Por ejemplo, la dualidad S que es una simetría entre una teoría con constante de acoplamiento g y una con constante de acoplamiento $1/g$, relaciona las teorías tipo

I y heterótica $SO(32)$ [3, 4], mientras que la dualidad T que es una simetría entre una teoría compatificada sobre un circulo de radio R y una compactificada sobre un circulo de radio $1/R$, relaciona las dos teorías tipo II [5] y las dos teorías heteróticas [6].

Para la teoría de supercuerdas existen principalmente tres formalismos diferentes: el formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) [7], el de Green-Schwarz (GS) [8] y el de espinores puros propuesto por Berkovits en el año 2000 [9]. En el formalismo RNS se introduce la supersimetría en la superficie dos dimensional que genera la cuerda al desplazarse a través del espacio-tiempo. Este formalismo se puede cuantizar fácilmente en forma covariante (la teoría permanece invariante bajo transformaciones de Lorentz), pero tiene el inconveniente de no poseer un espacio-tiempo supersimétrico, por lo cual es necesario realizar un truncamiento del espectro conocido como proyección GSO [10], de forma tal que el espectro de la teoría sea supersimétrico, es decir que contenga igual número de bosones y fermiones. Además, en este formalismo es difícil la introducción de los campos de fondo del sector de Ramond-Ramond [11, 12], el cual es un sector del formalismo RNS donde las variables fermiónicas satisfacen condiciones de frontera periódicas. Por otro lado, en el formalismo GS la supersimetría se introduce en el espacio-tiempo, pero en este formalismo no es posible una cuantización covariante debido a la presencia de una simetría de calibre de las variables fermiónicas conocida como simetría kappa [13], cuya solución sólo se conoce en el calibre (gauge) de cono de luz [14]. Las desventajas de estos dos formalismos no se encuentran en el formalismo de espinores puros, el cual posee un espacio-tiempo supersimétrico, puede ser cuantizado en forma covariante y permite la inclusión de campos de fondo de Ramond-Ramond [11].

En 2008, con el objetivo de comprender la simetría dual superconforme [15] de las amplitudes de dispersión planares, Berkovits y Maldacena proponen la dualidad T fermiónica [16] donde se considera la invariancia de los campos de fondo bajo la traslación de una coordenada fermiónica. A partir de ese momento la dualidad T original pasa a conocerse como dualidad T bosónica. Algunos de los trabajos recientes que estudian la dualidad T fermiónica son [17, 18, 19, 20, 21, 22]. La derivación de las transformaciones de la dualidad T generalmente sigue el procedimiento de Buscher [23]. Una forma alternativa de obtener las transformaciones de la dualidad T bosónica es utilizar una transformación canónica de las variables del espacio de fase [24]. En 2010, Sfetsos y colaboradores [25] extendieron esta idea al caso de la dualidad T fermiónica.

En este trabajo se estudian los aspectos básicos de la teoría de supercuerdas en sus tres principales formalismos y se calculan las transformaciones de la dualidad T fermiónica en el formalismo de espinores puros.

En el capítulo 2 se introduce la acción para la teoría de la cuerda bosónica y luego se presentan los argumentos del formalismo RNS. En el capítulo 3 se presenta el formalismo GS y se introduce la acción en un espacio de fondo curvo. En el capítulo 4 se estudia el formalismo de espinores puros, se soluciona la restricción de los espinores puros y se presenta la acción para un espacio de fondo curvo. Finalmente en el capítulo 5 se realizan los cálculos de las transformaciones de la dualidad T bosónica y fermiónica utilizando el procedimiento de Buscher y el método de la transformación canónica.

Capítulo 2

Formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz

En este capítulo se introduce la acción para la cuerda bosónica, la cual corresponde a la teoría de cuerdas más simple y es un buen punto de partida para desarrollar los demás formalismos. Posteriormente se presentan las ideas básicas del formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz (RNS) para la teoría de supercuerdas [7], en el que se introduce la supersimetría en la hoja de mundo. Los argumentos que se siguen en este capítulo pueden ser encontrados en [14, 26, 27].

2.1. Acción para la cuerda bosónica

La cuerda es un objeto unidimensional que se mueve a través del espacio-tiempo generando una superficie de dos dimensiones. Esta superficie es llamada la *hoja de mundo*. La teoría de cuerdas es definida bajo el requerimiento de que el movimiento clásico de la cuerda sea tal que el área de la hoja de mundo sea mínima. La acción para la teoría de la cuerda bosónica es[1]

$$S_{bos} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}(\sigma)g_{\mu\nu}(X)\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X^\nu. \tag{2.1}$$

Las funciones $X^\mu(\tau,\sigma)$ con $\mu = 0,\ldots,D-1$, definen una aplicación desde la hoja de mundo al espacio-tiempo de dimensión D. $\sigma^0 = \tau$ y $\sigma^1 = \sigma$ parametrizan la hoja de mundo y $h_{\alpha\beta}$ con $\alpha,\beta = 0,1$, es una métrica auxiliar en la hoja de mundo, donde $h = \det h_{\alpha\beta}$ y $h^{\alpha\beta} = (h^{-1})_{\alpha\beta}$. La métrica $g_{\mu\nu}$ describe la geometría del espacio-tiempo, el cual, a menos que se diga explícitamente se considerará plano ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$), con signatura $(-,+,\ldots,+)$. Además se trabaja con unidades donde $\hbar = c = 1$.

La acción para la cuerda bosónica tiene las siguientes simetrías:

[1]Ésta es conocida como la acción de Polyakov [14], además se asume la tensión de la cuerda $T = 1/\pi$.

- Transformaciones de Poincaré:

$$\delta X^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} + a^{\mu}, \tag{2.2}$$

donde $\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}$ representa las transformaciones de Lorentz y a^{μ} las traslaciones en el espacio-tiempo.

- Reparametrizaciones (difeomorfismos):

$$\sigma^{\alpha} \to \sigma'^{\alpha} \;=\; f^{\alpha}(\sigma) \tag{2.3}$$

$$h_{\alpha\beta}(\sigma) \;=\; \frac{\partial f^{\gamma}}{\partial \sigma^{\alpha}} \frac{\partial f^{\delta}}{\partial \sigma^{\beta}} h_{\gamma\delta}(\sigma'). \tag{2.4}$$

- Transformaciones de Weyl:

$$h_{\alpha\beta} \to e^{\phi(\sigma)} h_{\alpha\beta}\,. \tag{2.5}$$

Las transformaciones de Poincaré corresponden a simetrías globales, mientras que las reparametrizaciones y las transformaciones de Weyl a simetrías locales.

El tensor de energía momento está dado por

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2\pi}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S}{\delta h^{\alpha\beta}} = 0\,. \tag{2.6}$$

La variación de la acción (2.1) con respecto a $h^{\alpha\beta}$ es

$$\begin{aligned} \delta S_{bos} &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(\sqrt{-h}\, \delta h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu} - \frac{1}{2} \frac{\delta h}{\sqrt{-h}} h^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X^{\mu} \partial_{\delta} X_{\mu} \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h}\, \delta h^{\alpha\beta} \Big(\partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X^{\mu} \partial_{\delta} X_{\mu} \Big), \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde se ha usado $\delta h = h h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = -h h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}$. Obteniendo

$$T_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X_{\mu} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_{\gamma} X^{\mu} \partial_{\delta} X_{\mu} = 0\,. \tag{2.8}$$

En (2.7), la invariancia bajo las transformaciones de Weyl implica que $h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0$, es decir que el tensor de energía momento no tiene traza.

Las simetrías locales de la acción pueden ser usadas para realizar una escogencia de calibre, de tal forma que

$$h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

con lo cual, la acción (2.1) toma la forma simple

$$S_{bos} = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma\, \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial^{\alpha} X_{\mu}\,. \tag{2.10}$$

Ésta es la acción para la cuerda bosónica en el calibre conforme [14].

2.2. Acción para la cuerda supersimétrica

Debido a que en la naturaleza, además de bosones existen fermiones, es necesario generalizar la teoría para la cuerda bosónica, de manera que el espectro de la teoría también incluya fermiones. En el formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz [7] se generaliza la acción (2.10) introduciendo los campos fermiónicos $\psi^\mu(\tau, \sigma)$, los cuales son espinores de Majorana[2] de dos componentes en la hoja de mundo y vectores bajo las transformaciones de Lorentz en el espacio-tiempo.

Agregando la acción de Dirac para fermiones de Majorana sin masa a la acción para la cuerda bosónica (2.10) obtenemos [26]

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \, (\partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu + \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi_\mu), \tag{2.11}$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger i \rho^0$ (en el caso de espinores de Majorana $\psi^\dagger = \psi^T$). Las matrices ρ^α, con $\alpha = 0, 1$ son matrices de Dirac en dos dimensiones:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Estas matrices obedecen el álgebra

$$[\rho^\alpha, \rho^\beta]_+ \equiv \rho^\alpha \rho^\beta + \rho^\beta \rho^\alpha = 2\eta^{\alpha\beta}. \tag{2.13}$$

Las componentes de ψ^μ son números de Grassmann,[3] lo que implica que

$$[\psi^\mu, \psi^\nu]_+ = 0\,. \tag{2.14}$$

Algunas propiedades de los espinores de Majorana son

$$\bar{\chi}\psi = \bar{\psi}\chi \tag{2.15}$$
$$\bar{\chi}\rho^\alpha\psi = -\bar{\psi}\rho^\alpha\chi\,. \tag{2.16}$$

Las transformaciones de supersimetría están dadas por [26]

$$\delta X^\mu = \bar{\epsilon}\psi^\mu = \bar{\psi}^\mu \epsilon \tag{2.17}$$
$$\delta \psi^\mu = \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \epsilon \tag{2.18}$$
$$\delta \bar{\psi}^\mu = -\bar{\epsilon}\rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \tag{2.19}$$

donde ϵ es un espinor de Majorana infinitesimal constante, cuyas componentes son números de Grassmann. Estas transformaciones intercambian los campos bosónicos y

[2]La condición de Majorana simplemente indica que las componentes de ψ son reales para la representación del álgebra de Dirac dada.

[3]Los números de Grassmann son números que anticonmutan.

fermiónicos de la hoja de mundo. La invariancia de la acción (2.11) bajo las transformaciones de supersimetría se verifica en el Apéndice B.1.

Para calcular la supercorriente J^α asociada a las transformaciones de supersimetría, se calcula la variación de la acción (2.11), considerando a ϵ dependiente de τ y σ. Obteniendo

$$\delta S = -\frac{2}{\pi}\int d^2\sigma\, \partial_\alpha \bar{\epsilon} J^\alpha, \tag{2.20}$$

donde

$$J^\alpha = \frac{1}{2}\rho^\beta \rho^\alpha \psi^\mu \partial_\beta X_\mu\,. \tag{2.21}$$

El tensor de energía momento se obtiene considerando la traslación $\delta\sigma^\alpha = a^\alpha$, de forma que

$$\delta S \sim \int d^2\sigma\, \partial^\alpha a^\beta T_{\alpha\beta}\,, \tag{2.22}$$

donde

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu + \frac{1}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi_\mu + \frac{1}{4}\bar{\psi}^\mu \rho_\beta \partial_\alpha \psi_\mu\,. \tag{2.23}$$

En este punto es conveniente definir las coordenadas de cono de luz

$$\sigma^\pm = \tau \pm \sigma, \tag{2.24}$$

con

$$\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma \qquad \text{y} \qquad \begin{pmatrix} \eta_{++} & \eta_{+-} \\ \eta_{-+} & \eta_{--} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

En estas coordenadas tenemos que [27]

$$\rho^+ = \rho^0 + \rho^1\,, \qquad \rho^- = \rho^0 - \rho^1 \tag{2.26}$$

$$\rho_+ = \eta_{+-}\rho^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_- = \eta_{-+}\rho^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

La condición de que el tensor de energía momento no tenga traza, toma la forma $T_{+-} = 0$ y $T_{-+} = 0$. Utilizando (2.27), las demás componentes del tensor de energía momento y las componentes de la supercorriente se escriben como

$$T_{++} = \partial_+ X^\mu \partial_+ X_\mu + \frac{i}{2}\psi_+^\mu \partial_+ \psi_{+\mu} \tag{2.28}$$

$$T_{--} = \partial_- X^\mu \partial_- X_\mu + \frac{i}{2}\psi_-^\mu \partial_- \psi_{-\mu} \tag{2.29}$$

y

$$J_+ = \psi_+^\mu \partial_+ X_\mu \tag{2.30}$$

$$J_- = \psi_-^\mu \partial_- X_\mu\,. \tag{2.31}$$

2.3. Condiciones de frontera

2.3.1. Campos bosónicos

Las ecuaciones de movimiento para los campos bosónicos obtenidas de la variación de la acción (2.11) respecto a X^μ son

$$\partial_\alpha \partial^\alpha X^\mu = 0\,, \tag{2.32}$$

las cuales, en las coordenadas de cono de luz, se escriben como

$$\partial_- \partial_+ X^\mu = 0\,. \tag{2.33}$$

La solución general de (2.32) es de la forma

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu_L(\tau+\sigma) + X^\mu_R(\tau-\sigma), \tag{2.34}$$

donde X^μ_L y X^μ_R son funciones que describen ondas propagándose hacia la izquierda y derecha respectivamente.

Las condiciones de frontera son

$$\delta X^\mu X'_\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0\,, \tag{2.35}$$

donde se introduce la notación $X' \equiv \partial_\sigma X$ y $\dot{X} \equiv \partial_\tau X$.

Estas condiciones de frontera nos llevan a dos casos: cuerdas cerradas y cuerdas abiertas [14].

Cuerdas cerradas

Para las cuerdas cerradas, la condición de frontera es

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+\pi). \tag{2.36}$$

En las coordenadas de cono de luz esta condición se escribe como

$$X^\mu_R(\sigma^-) - X^\mu_R(\sigma^- - \pi) = -X^\mu_L(\sigma^+) + X^\mu_L(\sigma^+ + \pi). \tag{2.37}$$

Como el lado izquierdo de (2.37) depende únicamente de σ^- y el lado derecho depende únicamente de σ^+, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_- X^\mu_R(\sigma^-) &= \partial_- X^\mu_R(\sigma^- - \pi) && (2.38)\\ \partial_+ X^\mu_L(\sigma^+) &= \partial_+ X^\mu_L(\sigma^+ + \pi), && (2.39) \end{aligned}$$

es decir que $\partial_- X^\mu_R(\sigma^-)$ y $\partial_+ X^\mu_L(\sigma^+)$ son funciones periódicas de período π. Expandiéndolas en series de Fourier,

$$\partial_- X^\mu_R(\sigma^-) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha^\mu_n e^{-2in\sigma^-} = \alpha^\mu_0 + \sum_{n\neq 0} \alpha^\mu_n e^{-2in\sigma^-} \tag{2.40}$$

$$\partial_+ X^\mu_L(\sigma^+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in\sigma^+} = \tilde{\alpha}^\mu_0 + \sum_{n\neq 0} \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in\sigma^+}. \tag{2.41}$$

Integrando estas expresiones obtenemos

$$X^\mu_R(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau-\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha^\mu_n e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{2.42}$$

$$X^\mu_L(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}x^\mu + \frac{1}{2}p^\mu(\tau+\sigma) + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in(\tau+\sigma)}, \tag{2.43}$$

donde $\alpha^\mu_0 = \tilde{\alpha}^\mu_0 = p^\mu/2$. x^μ y p^μ son interpretados como la posición del centro de masa y el momento de la cuerda respectivamente [14].

La solución total queda entonces

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + p^\mu\tau + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}e^{-2in\tau}(\alpha^\mu_n e^{2in\sigma} + \tilde{\alpha}^\mu_n e^{-2in\sigma}). \tag{2.44}$$

Como se verifica fácilmente, el requerimiento de que X^μ sea real implica que

$$\alpha^\mu_{-n} = (\alpha^\mu_n)^\dagger, \qquad \tilde{\alpha}^\mu_{-n} = (\tilde{\alpha}^\mu_n)^\dagger. \tag{2.45}$$

Cuerdas abiertas

En el caso de las cuerdas abiertas hay dos posibilidades para las condiciones de frontera: considerar la función X^μ fija en los extremos $\sigma = 0, \pi$ (condición de Dirichlet), o dejar esta función libre y exigir que su derivada X'^μ se anule en los extremos (condición de Neumann). En nuestro caso utilizaremos la condición de Neumann.[4]

La condición en $\sigma = 0$ implica que

$$X'^\mu_R(\tau) = X'^\mu_L(\tau) = \tilde{X}'^\mu(\tau), \tag{2.46}$$

con lo cual $X^\mu_R = X^\mu_L = \tilde{X}^\mu$ salvo una constante que se absorbe en la definición de $\tilde{X}^\mu$.

Por otro lado, la condición en $\sigma = \pi$ implica que

$$\tilde{X}'^\mu(\tau-\pi) = \tilde{X}'^\mu(\tau+\pi), \tag{2.47}$$

[4] La condición de Dirichlet se usa en teorías donde se consideran las D-branas o Dirichlet-branas, las cuales son hiperplanos donde terminan los extremos de las cuerdas abiertas [26].

es decir, $\tilde{X}'^{\mu}$ es un función periódica de período 2π. Expandiendo en series de Fourier

$$\tilde{X}'^{\mu}(\sigma^{\pm}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n^{\mu} e^{-in\sigma^{\pm}} = \alpha_0^{\mu} + \sum_{n\neq 0} \alpha_n^{\mu} e^{-in\sigma^{\pm}}. \tag{2.48}$$

Integrando obtenemos

$$\tilde{X}^{\mu}(\sigma^{\pm}) = \frac{1}{2}x^{\mu} + \frac{1}{2}p^{\mu}\sigma^{\pm} + \frac{i}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu} e^{-in\sigma^{\pm}}, \tag{2.49}$$

de donde se obtiene la solución total

$$X^{\mu}(\tau,\sigma) = x^{\mu} + p^{\mu}\tau + i\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\alpha_n^{\mu} e^{-in\tau}\cos n\sigma, \tag{2.50}$$

con $\alpha_0^{\mu} = p^{\mu}$. En este caso, los modos de los movimientos a izquierda y derecha se combinan formando ondas estacionarias.

2.3.2. Campos fermiónicos

Utilizando las coordenadas de cono de luz (2.24), la parte fermiónica de la acción (2.11) se reescribe como (omitiendo el índice μ)

$$S_{fer} = \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma\,(\psi_+\partial_-\psi_+ + \psi_-\partial_+\psi_-), \tag{2.51}$$

donde

$$\psi^{\mu} = \begin{pmatrix} \psi_-^{\mu} \\ \psi_+^{\mu} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

La variación de la acción (2.51) con respecto a ψ es

$$\begin{aligned} \delta S_{fer} &= \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma\,(\delta\psi_+\partial_-\psi_+ + \psi_+\partial_-\delta\psi_+ + \delta\psi_-\partial_+\psi_- + \psi_-\partial_+\delta\psi_-) \\ &= \frac{i}{\pi}\int d^2\sigma\,(2\delta\psi_-\partial_+\psi_- + 2\delta\psi_+\partial_-\psi_+ - \partial_+(\delta\psi_-\psi_-) - \partial_-(\delta\psi_+\psi_+)), \end{aligned} \tag{2.53}$$

de donde se obtienen las ecuaciones de movimiento para los campos fermiónicos

$$\partial_+\psi_- = 0, \qquad \partial_-\psi_+ = 0\,, \tag{2.54}$$

con la condición de frontera

$$(\psi_-\delta\psi_- - \psi_+\delta\psi_+)\Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} = 0\,, \tag{2.55}$$

la cual, para cuerdas abiertas se satisface con

$$\psi_+^{\mu} = \pm\psi_-^{\mu}\,, \qquad \sigma = 0,\pi. \tag{2.56}$$

Por convención se escoge $\psi_+^{\mu}(\tau,0) = \psi_-^{\mu}(\tau,0)$. Mientras que para $\sigma = \pi$ es necesario considerar dos casos: la condición de frontera de Ramond y la condición de frontera de Neveu-Schwarz.

Condición de frontera de Ramond (R)

La condición que se utiliza es

$$\psi_+^\mu(\tau,\pi) = \psi_-^\mu(\tau,\pi). \tag{2.57}$$

Siguiendo un procedimiento similar al empleado con los campos bosónicos, encontramos la expansión en modos de oscilación para los campos fermiónicos

$$\begin{aligned} \psi_-^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \text{con } d_n^{\mu\dagger} = d_{-n}^\mu \,. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Las funciones que se obtienen son periódicas [14].

Condición de frontera de Neveu-Schwarz (NS)

En este caso la condición que se escoge es

$$\psi_+^\mu(\tau,\pi) = -\psi_-^\mu(\tau,\pi), \tag{2.59}$$

encontrando que

$$\begin{aligned} \psi_-^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau-\sigma)} \\ \psi_+^\mu(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-ir(\tau+\sigma)}, \quad \text{con } b_r^{\mu\dagger} = b_{-r}^\mu \,. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Las funciones obtenidas son antiperiódicas [14].

Para cuerdas cerradas podemos fijar condiciones periódicas (R) o antiperiódicas (NS) para los modos de izquierda y derecha en forma independiente. Con lo cual tenemos lo siguiente:

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} \tag{2.61}$$

o

$$\psi_-^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} b_r^\mu e^{-2ir(\tau-\sigma)}, \tag{2.62}$$

para los movimientos a derecha, y

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{d}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \tag{2.63}$$

o

$$\psi_+^\mu(\tau,\sigma) = \sum_{r\in\mathbb{Z}+1/2} \tilde{b}_r^\mu e^{-2ir(\tau+\sigma)}, \tag{2.64}$$

para los movimientos a izquierda. Las cuatro diferentes formas de agrupar estas funciones se denotan como R-R, R-NS, NS-R y NS-NS.

2.4. Cuantización canónica

El analisis siguiente se realiza para el caso de cuerdas abiertas.[5]

El momento asociado a X^μ está dado por

$$P^\mu(\tau,\sigma) = \frac{\delta S}{\delta \dot{X}_\mu} = \frac{1}{\pi}\dot{X}^\mu. \tag{2.65}$$

Las relaciones de conmutación canónicas para X^μ y P^μ son

$$\begin{aligned} [X^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma')] &= [P^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')] = 0 &(2.66)\\ [X^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')] &= i\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma'). &(2.67)\end{aligned}$$

La relación de anticonmutación para los campos fermiónicos es

$$[\psi_A^\mu(\tau,\sigma), \psi_B^\nu(\tau,\sigma')]_+ = \pi\delta(\sigma-\sigma')\delta_{AB}\eta^{\mu\nu}, \tag{2.68}$$

donde $A, B = +, -$.

De las expresiones (2.67) y (2.68) se obtienen las relaciones para los modos de Fourier (ver Apéndice B.3)

$$\begin{aligned} [\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} & & (2.69)\\ [b_r^\mu, b_s^\nu]_+ &= \delta_{r+s}\eta^{\mu\nu}, & \text{sector NS} \quad & (2.70)\\ [d_m^\mu, d_n^\nu]_+ &= \delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}, & \text{sector R} \quad & (2.71)\end{aligned}$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $r, s \in \mathbb{Z}+1/2$ (en adelante se seguirá esta convención).

Para las componentes de la supercorriente tenemos que

$$[J_A(\tau,\sigma), J_B(\tau,\sigma')]_+ = \pi\delta(\sigma-\sigma')\delta_{AB}T_{AB}\,. \tag{2.72}$$

El siguiente paso es definir el estado fundamental $|0;p\rangle$ como

$$\alpha_m^\mu|0;p\rangle = b_r^\mu|0;p\rangle = 0\,, \qquad m, r > 0 \tag{2.73}$$

[5]Para el caso de cuerdas cerradas sólo hay que agregar los modos para los movimientos a izquierda $\tilde{\alpha}_m^\mu$.

en el sector NS, y

$$\alpha_m^\mu|0;p\rangle = d_m^\mu|0;p\rangle = 0\,, \qquad m>0 \tag{2.74}$$

en el sector R.

Los estados excitados se obtienen actuando con los operadores de creación $\alpha_m^{\mu\dagger}$, $d_m^{\mu\dagger}$ y $b_r^{\mu\dagger}$ sobre el estado fundamental $|0;p\rangle$.

En el sector NS es posible escoger un único estado fundamental que corresponde a un estado de espín cero en el espacio-tiempo [14]. En el sector R los osciladores d_0^μ satisfacen el álgebra

$$[d_0^\mu, d_0^\nu]_+ = \eta^{\mu\nu}, \tag{2.75}$$

la cual, si se define $d_0^\mu = \gamma^\mu/\sqrt{2}$, es idéntica al álgebra de Dirac

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{2.76}$$

cuya representación corresponde a espinores de SO(1,9), por lo cual el estado fundamental en el sector R es un fermión en el espacio-tiempo. Debido a que los osciladores transforman como vectores en el espacio-tiempo, todos los estados excitados en el sector NS son bosones, mientras que en el sector R son fermiones.

El problema con esta construcción, es que los estados obtenidos con un número impar de osciladores con componente temporal, tienen norma negativa, por ejemplo

$$\langle p';0|\alpha_1^0\alpha_{-1}^0|0;p\rangle \sim -\delta(p-p'). \tag{2.77}$$

Las restricciones que permiten eliminar las componentes temporales de X^μ y ψ^μ son [14]

$$J_+ = J_- = T_{++} = T_{--} = 0\,. \tag{2.78}$$

Las componentes del tensor de energía momento se anulan debido a las ecuaciones de movimiento de la métrica. El hecho de que las componentes de la supercorriente tambien se anulen se puede interpretar del álgebra (2.72).[6]

Supergeneradores de Virasoro y estados físicos

La expansión en series de Fourier de las componentes del tensor de energía momento (2.28) y (2.29) es

$$T_{++} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\, e^{-in(\tau+\sigma)} \tag{2.79}$$

$$T_{--} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\, e^{-in(\tau-\sigma)}, \tag{2.80}$$

[6]Una deducción formal de este argumento se encuentra en [14].

donde los coeficientes de Fourier L_n son los supergeneradores de Virasoro dados por

$$L_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\sigma(e^{im\sigma}T_{++} + e^{-im\sigma}T_{--}) = L_m^{(bos)} + L_m^{(fer)}. \tag{2.81}$$

La parte bosónica de los supergeneradores de Virasoro es[7]

$$L_m^{(bos)} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{m-n}\,, \tag{2.82}$$

en la teoría cuántica estos operadores están definidos con ordenamiento normal[8]

$$L_m^{(bos)} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_{-n}\cdot\alpha_{m+n}:\,, \tag{2.83}$$

aunque de la relación (2.69) vemos que α_{m+n} conmuta con α_{-n} para $m \neq 0$, por lo tanto, L_0 es el único operador para el cual el ordenamiento normal importa. Esta ambigüedad en el ordenamiento se soluciona agregando una constante a todas las formulas donde aparece L_0.

La parte fermiónica de los supergeneradores de Virasoro y los modos de la supercorriente dependen del sector.

2.4.1. Sector bosónico (NS)

En el sector NS tenemos que (Los cálculos son similares al cálculo de $L_m^{(bos)}$)

$$L_m^{(fer)} = \frac{1}{2}\sum_{r=-\infty}^{\infty}(r + \frac{1}{2}m) : b_{-r}\cdot b_{m+r}:\,, \tag{2.84}$$

los modos de la supercorriente son

$$G_r = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} d^2\sigma\,\left(e^{ir\sigma}J_+ + e^{-ir\sigma}J_-\right) \tag{2.85}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot b_{r+n}\,, \tag{2.86}$$

y el operador de número se define como

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \sum_{r=1/2}^{\infty} r b_{-r}\cdot b_r\,. \tag{2.87}$$

---

[7]El cálculo se encuentra en el Apéndice B.2.

[8]En el ordenamiento normal los operadores de creación van a la izquierda de los operadores de aniquilación.

La superálgebra de Virasoro en el sector NS es[9]

$$
\begin{aligned}
[L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{8}D(m^3 - m)\delta_{m+n} &(2.88)\\
[L_m, G_r] &= \Big(\frac{1}{2}m - r\Big)G_{m+r} &(2.89)\\
[G_r, G_s]_+ &= 2L_{r+s} + \frac{1}{2}D\Big(r^2 - \frac{1}{4}\Big)\delta_{r+s}\,. &(2.90)
\end{aligned}
$$

En la teoría cuántica, las restricciones (2.78) se representan a través de los modos del tensor de energía momento y la supercorriente. Estas restricciones permiten definir los estados físicos como los que satisfacen[10]

$$
\begin{aligned}
L_m|\phi\rangle &= 0 \qquad m > 0, &(2.91)\\
G_r|\phi\rangle &= 0 \qquad r > 0, &(2.92)\\
(L_0 - a)|\phi\rangle &= 0\,, &(2.93)
\end{aligned}
$$

donde a es una constante que debe ser agregada por la ambigüedad debida al ordenamiento normal que se mencionó anteriormente.

El operador L_0 lo podemos escribir como

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \frac{1}{2}\alpha_0^2 + N\\
&= \frac{1}{2}p^2 + N, &(2.94)
\end{aligned}
$$

donde se ha usado $\alpha_0^\mu = p^\mu$.

Utilizando la relación relativista $p^2 = -M^2$ y la expresión (2.94), la condición (2.93) nos da la relación para la masa

$$M^2 = 2(N - a). \tag{2.95}$$

Se puede demostrar [14] que para que la teoría esté libre de estados de norma negativa, es necesario que la dimensión crítica del espacio-tiempo sea[11] $D = 10$ y que la constante a sea $1/2$.

De la relación para la masa vemos que el estado fundamental en el sector NS es un taquión, lo cual, como se verá más adelante, implica que el espectro de la teoría no es supersimétrico.

[9] El cálculo explicito de la superálgebra de Virasoro se puede encontrar en [28].

[10] Debido a que $L_{-m} = L_m^\dagger$, sólo es necesario tomar la restricción para $m > 0$.

[11] En el caso de la teoría de la cuerda bosónica, la dimensión crítica es $D = 26$.

2.4.2. Sector fermiónico (R)

En este sector, la parte fermiónica de los supergeneradores de Virasoro es [26]

$$L_m^{(fer)} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(n+\frac{1}{2}m\Big) : d_{-n}\cdot d_{m+n} : , \tag{2.96}$$

los modos de la supercorriente son [26]

$$\begin{aligned} F_m &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi} d^2\sigma (e^{im\sigma}J_+ + e^{-im\sigma}J_-) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d^2\sigma e^{im\sigma}J_+ &(2.97)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}\cdot d_{m+n} : , &(2.98)\end{aligned}$$

y el operador de número está dado por

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}\cdot\alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} n d_{-n}\cdot d_n \,. \tag{2.99}$$

La superálgebra de Virasoro en el sector R es [26]

$$\begin{aligned}[][L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{1}{8}Dm^3\delta_{m+n} &(2.100)\\ [L_m, F_n] &= \Big(\frac{1}{2}m - n\Big)F_{m+n} &(2.101)\\ [F_m, F_n]_+ &= 2L_{m+n} + \frac{1}{2}Dm^2\delta_{m+n} \,. &(2.102)\end{aligned}$$

Los estados físicos satisfacen la condición

$$\begin{aligned} L_m|\phi\rangle &= 0 \qquad m>0, &(2.103)\\ F_m|\phi\rangle &= 0 \qquad r>0, &(2.104)\\ (L_0-\mu)|\phi\rangle &= 0\,. &(2.105)\end{aligned}$$

En este sector, la dimensión crítica es nuevamente $D = 10$ y la constante $\mu = 0$ [14].

La relación para la masa está dada por

$$M^2 = 2N\,, \tag{2.106}$$

de donde se obtiene que el estado fundamental ($N = 0$) en el sector R no tiene masa.

2.5. Proyección GSO

Debido a que el estado fundamental del sector NS es un taquión, el espectro de la teoría no es supersimétrico, ya que no hay un fermión con la misma masa del taquión en el sector R. A continuación se discute la forma de eliminar el taquión y obtener un espectro supersimétrico utilizando un truncamiento del espectro propuesto por Gliozzi, Scherk y Olive, conocido como proyección GSO [10].

2.5.1. Sector NS

El primer paso es definir el operador de paridad G, el cual, en el sector NS está dado por

$$G = (-1)^{\sum_{r=1/2}^{\infty} b_{-r}\cdot b_r + 1}, \tag{2.107}$$

de esta forma, G determina si el número de excitaciones fermiónicas en la hoja de mundo es par o impar [26].

En este sector la proyección GSO consiste en eliminar los estados con paridad G negativa. De esta manera se elimina el taquión del espectro, ya que el estado fundamental tiene paridad G negativa

$$G|0\rangle = -|0\rangle. \tag{2.108}$$

Después de la proyección GSO el estado sin masa $b^{\mu}_{-1/2}|0\rangle$ pasa a ser el estado fundamental del sector NS [26].

2.5.2. Sector R

En este sector tenemos que

$$G = \Gamma^{11}(-1)^{\sum_{n=1}^{\infty} d_{-n}\cdot d_n}, \tag{2.109}$$

donde

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0\Gamma^1 \ldots \Gamma^9, \tag{2.110}$$

siendo Γ^{μ} matrices Gamma de 32×32 que satisfacen el álgebra[12]

$$[\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}]_+ = 2\eta^{\mu\nu}, \tag{2.111}$$

además tenemos que

$$\left(\Gamma^{11}\right)^2 = 1\,, \qquad\qquad [\Gamma^{11}, \Gamma^{\mu}]_+ = 0\,, \tag{2.112}$$

con lo cual

$$\Gamma^{11}|\phi\rangle = \pm|\phi\rangle, \tag{2.113}$$

[12]Para más detalles ver Apéndice A.

donde el signo $\pm$ define la quiralidad del estado $|\phi\rangle$.

En este sector se pueden eliminar los estados con paridad G positiva o negativa dependiendo de la quiralidad del estado fundamental. La elección se realiza por convención. Después de la proyección GSO se tiene un espectro supersimétrico en el espacio-tiempo con igual número de bosones y fermiones en cada nivel de masa.

En el caso de la cuerda cerrada es necesario considerar los modos para los movimientos a izquierda y a derecha. Como la proyección GSO en el sector R se hace de acuerdo a la quiralidad del estado fundamental y debido a que la elección se puede hacer de forma independiente para los movimientos a izquierda y derecha, es posible obtener dos teorías dependiendo de si se elige la quiralidad de los movimientos a izquierda y derecha igual u opuesta [26].

En la teoría tipo IIA los movimientos a izquierda y derecha del estado fundamental en el sector R tienen quiralidad opuesta, mientras que en la teoría tipo IIB tienen la misma quiralidad, la cual se escoge positiva por convención.

Capítulo 3

Formalismo de Green-Schwarz

En este capítulo se presentan las ideas básicas del formalismo de Green-Schwarz (GS) para la teoría de supercuerdas [8]. Se comienza con la descripción de la partícula supersimétrica y luego se generaliza a la cuerda supersimétrica. Las referencias principales para este capítulo son [14] y [26].

3.1. Acción para una partícula puntual supersimétrica

Una partícula relativista de masa m está descrita por

$$S = -m \int d\tau \, \sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}\ . \tag{3.1}$$

La generalización del espacio de Minkowski a un espacio-tiempo supersimétrico se consigue agregando las coordenadas fermiónicas $\theta^{Aa}(\tau)$, las cuales son espinores que anticonmutan, donde $A = 1, \ldots, \mathcal{N}$, siendo $\mathcal{N}$ el número de supersimetrías y $a = 1, \ldots, 2^{D/2}$ para espinores de Dirac en un espacio de dimensión par D. En el caso $D = 10$, los espinores son de Majorana-Weyl[1] [14].

Se introducen las transformaciones de supersimetría en el superespacio dadas por

$$\delta\theta^A = \epsilon^A \tag{3.2}$$

$$\delta x^\mu = \bar{\epsilon}^A \Gamma^\mu \theta^A, \tag{3.3}$$

donde ϵ^A es un espinor infinitesimal constante cuyas componentes son números de Grassmann y las matrices Γ^μ definidas en el Apéndice A satisfacen el álgebra

$$[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

[1] Un espinor de Weyl tiene quiralidad definida, mientras que uno de Majorana no.

La acción supersimétrica se construye a partir de (3.1) reemplazando $\dot{x}^\mu$ por el elemento supersimétrico

$$\pi^\mu = \dot{x}^\mu - \bar{\theta}^A \Gamma^\mu \dot{\theta}^A, \tag{3.5}$$

obteniendo

$$S_1 = -m \int d\tau \sqrt{-\pi \cdot \pi} \,. \tag{3.6}$$

Esta acción es invariante bajo las transformaciones globales de super-Poincaré[2] y los difeomorfismos locales de la línea de mundo.

En el caso de la teoría tipo IIA tenemos que $\mathcal{N} = 2$, de forma que hay dos espinores de Majorana-Weyl θ^1 y θ^2, los cuales tienen quiralidad opuesta. Podemos entonces definir el espinor de Majorana $\theta = \theta^1 + \theta^2$, donde las coordenadas θ^1 y θ^2 se recuperan utilizando la matriz Γ_{11} definida en (2.110)

$$\theta^1 = \frac{1}{2}(1 + \Gamma_{11})\theta \,, \qquad \theta^2 = \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{11})\theta \,, \tag{3.7}$$

con lo cual podemos escribir

$$\pi^\mu = \dot{x}^\mu - \bar{\theta} \Gamma^\mu \dot{\theta} \,. \tag{3.8}$$

El momento asociado a x^μ está dado por

$$p_\mu = \frac{\delta S_1}{\delta \dot{x}^\mu} = \frac{m}{\sqrt{-\pi \cdot \pi}} (\dot{x}_\mu - \bar{\theta} \Gamma_\mu \dot{\theta}). \tag{3.9}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de (3.9) obtenemos la condición

$$p^2 = -m^2. \tag{3.10}$$

Las ecuaciones de movimiento para x^μ y θ obtenidas de la acción (3.6) son respectivamente

$$\dot{p}_\mu = 0 \qquad \text{y} \qquad p \cdot \Gamma \dot{\theta} = 0 \,. \tag{3.11}$$

En el caso de una partícula sin masa tenemos que $(p \cdot \Gamma)^2 = p^2 = 0$, con lo cual, la mitad de las componentes de θ se desacoplan de la teoría como consecuencia de una simetría adicional. Esto sugiere que debe haber otra contribución a la acción S_1, de forma tal que se mantenga la simetría en el caso masivo. Esta segunda contribución está dada por [26]

$$S_2 = -m \int d\tau \, \bar{\theta} \Gamma_{11} \dot{\theta} \,, \tag{3.12}$$

con esto, la ecuación de movimiento para θ cambia a

$$(p \cdot \Gamma + m \Gamma_{11}) \dot{\theta} = 0 \,. \tag{3.13}$$

[2] Éstas consisten en las transformaciones de Poincaré y las transformaciones de supersimetría.

Debido a que $(p\cdot\Gamma+m\Gamma_{11})^2=0$, la mitad de las componentes de θ no están restringidas. Esto es consecuencia de una simetría adicional de la acción total

$$S=S_1+S_2=-m\int d\tau\,(\sqrt{-\pi\cdot\pi}+\bar{\theta}\Gamma_{11}\dot{\theta}),\tag{3.14}$$

la cual se describe a continuación.

3.1.1. Simetría kappa

La acción (3.14) tiene una simetría adicional, la cual es una simetría fermiónica local llamada simetría κ [13]. Para encontrar su forma, tenemos en cuenta que esta simetría involucra la variación $\delta\theta$, por lo cual consideramos la transformación

$$\delta x^\mu=\bar{\theta}\Gamma^\mu\delta\theta=-\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu\theta\,.\tag{3.15}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}\delta\pi^\mu &= \delta\dot{x}^\mu-\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu\dot{\theta}-\bar{\theta}\Gamma^\mu\delta\dot{\theta}\\ &= \dot{\bar{\theta}}\Gamma^\mu\delta\theta-\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu\dot{\theta}\\ &= -2\delta\bar{\theta}\Gamma^\mu\dot{\theta}\,,\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde se ha usado la identidad $\bar{\chi}\Gamma^\mu\psi=-\bar{\psi}\Gamma^\mu\chi$ para espinores de Majorana.

La variación de la acción (3.14) bajo la simetría κ es

$$\begin{aligned}\delta S &= -m\int d\tau\left(-\frac{\pi\cdot\delta\pi}{\sqrt{-\pi\cdot\pi}}+\delta\bar{\theta}\Gamma_{11}\dot{\theta}+\bar{\theta}\Gamma_{11}\delta\dot{\theta}\right)\\ &= -2m\int d\tau\left(\frac{\delta\bar{\theta}\pi\cdot\Gamma\dot{\theta}}{\sqrt{-\pi\cdot\pi}}+\delta\bar{\theta}\Gamma_{11}\dot{\theta}\right)\\ &= -2m\int d\tau\;\delta\bar{\theta}(\gamma+1)\Gamma_{11}\dot{\theta}\,,\end{aligned}$$

donde

$$\gamma=\frac{\Gamma\cdot\pi}{\sqrt{-\pi\cdot\pi}}\Gamma_{11}\,.\tag{3.17}$$

Teniendo en cuenta que $\gamma^2=1$, podemos definir los operadores de proyección

$$P_\pm=\frac{1}{2}(1\pm\gamma),\tag{3.18}$$

de forma que

$$\delta S=-4m\int d\tau\,\delta\bar{\theta}P_+\Gamma_{11}\dot{\theta}\,.\tag{3.19}$$

Encontrando entonces que la acción (3.14) es invariante bajo una transformación de la forma

$$\begin{aligned} \delta\bar{\theta} &= \bar{\kappa}P_- && (3.20)\\ \delta x^\mu &= -\bar{\kappa}P_-\Gamma^\mu\theta\,, && (3.21)\end{aligned}$$

donde $\kappa(\tau)$ es un espinor de Majorana arbitrario.

3.2. Acción para la cuerda supersimétrica

En el capítulo 2 se introdujo la acción para la cuerda bosónica

$$S_{bos} = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu\partial_\beta X_\mu\,. \tag{3.22}$$

La generalización de esta acción se obtiene siguiendo un procedimiento similar al de la sección anterior. En el caso de la teoría tipo II, donde $\mathcal{N}=2$ y $D=10$, tenemos que [26]

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\Pi_\alpha\cdot\Pi_\beta\,, \tag{3.23}$$

con

$$\Pi^\mu_\alpha = \partial_\alpha X^\mu - \bar{\theta}^A\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^A, \tag{3.24}$$

donde θ^A, con $A=1,2$ son espinores de Majorana-Weyl con 16 componentes reales independientes. Como se mencionó en el capítulo 2, para la teoría tipo IIA los espinores θ^1 y θ^2 tienen quiralidad opuesta, mientras que para la teoría tipo IIB tienen la misma quiralidad.

Las transformaciones de supersimetría están dadas por

$$\begin{aligned} \delta\theta^A &= \epsilon^A && (3.25)\\ \delta X^\mu &= \bar{\epsilon}^A\Gamma^\mu\theta^A. && (3.26)\end{aligned}$$

La acción (3.23) es invariante bajo difeomorfismos locales y transformaciones globales de super-Poincaré. El inconveniente con esta acción es que no es invariante bajo la transformación κ, por lo que es necesario agregar un segundo término S_2 del tipo Wess-Zumino, de forma que la acción total $S=S_1+S_2$ posea la simetría κ, permitiendo desacoplar la mitad de las componentes de las variables fermiónicas. Este término extra está dado por [29]

$$S_2 = -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\,\varepsilon^{\alpha\beta}\left[\partial_\alpha X^\mu(\bar{\theta}^1\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^1 - \bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2) + \bar{\theta}^1\Gamma^\mu\partial_\alpha\theta^1\bar{\theta}^2\Gamma_\mu\partial_\beta\theta^2\right], \tag{3.27}$$

donde $\varepsilon^{\alpha\beta}$ tiene componentes $\varepsilon^{01}=-\varepsilon^{10}=1$ y $\varepsilon^{00}=\varepsilon^{11}=0$.

Las transformaciones κ son [14]

$$\delta\bar{\theta}^1 = \Gamma_\mu \Pi^\mu_\alpha \bar{\kappa}^1_\beta P^{\alpha\beta}_-, \qquad \delta\bar{\theta}^2 = \Gamma_\mu \Pi^\mu_\alpha \bar{\kappa}^2_\beta P^{\alpha\beta}_+ \tag{3.28}$$

$$\delta X^\mu = \bar{\theta}^A \Gamma^\mu \delta\theta^A = -\delta\bar{\theta}^A \Gamma^\mu \theta^A, \tag{3.29}$$

donde

$$P^{\alpha\beta}_\pm = \frac{1}{2}\left(h^{\alpha\beta} \pm \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-h}}\right). \tag{3.30}$$

La invariancia de la acción $S = S_1 + S_2$ bajo las transformaciones κ se verifica en el Apéndice C. Usando (3.30), la acción total se puede reescribir como

$$S = -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\, \sqrt{-h}\Big[\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - 2\partial_\alpha X^\mu (P^{\alpha\beta}_- \bar{\theta}^1 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^1 + P^{\alpha\beta}_+ \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2)$$
$$+2P^{\alpha\beta}_+ \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\alpha \theta^1 \bar{\theta}^2 \Gamma_\mu \partial_\beta \theta^2\Big]. \tag{3.31}$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen son

$$\delta h^{\alpha\beta} \;:\quad T_{\alpha\beta} = \Pi_\alpha \cdot \Pi_\beta - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}\Pi_\gamma \cdot \Pi_\delta = 0 \tag{3.32}$$

$$\delta X^\mu \;:\quad \partial_\alpha\Big[\sqrt{-h}\Big(h^{\alpha\beta}\partial_\beta X^\mu - 2P^{\alpha\beta}_- \bar{\theta}^1 \Gamma^\mu \partial_\beta \theta^1 - 2P^{\alpha\beta}_+ \bar{\theta}^2 \Gamma^\mu \partial_\beta \theta^2\Big)\Big] = 0 \tag{3.33}$$

$$\delta\theta^1, \delta\theta^2 \;:\quad \Gamma_\mu \Pi^\mu_\alpha P^{\alpha\beta}_- \partial_\beta \theta^1 = \Gamma_\mu \Pi^\mu_\alpha P^{\alpha\beta}_+ \partial_\beta \theta^2 = 0\,. \tag{3.34}$$

3.2.1. Calibre de cono de luz

Después de hacer la escogencia de calibre de forma que $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$, sigue existiendo una invariancia conforme residual que permite hacer una escogencia de calibre adicional [14]. Para hacer esto, primero definimos las coordenadas de cono de luz en el espacio-tiempo como

$$X^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 \pm X^9), \tag{3.35}$$

las demás coordenadas X^i, con $i = 1, \ldots, 8$ se denominan coordenadas transversales.

El calibre de cono de luz consiste en escoger los modos α^+ con $n \neq 0$ iguales a cero, de forma que

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + p^+\tau\,, \tag{3.36}$$

lo cual deja 8 grados de libertad bosónicos.

En el caso de las variables fermiónicas, la escogencia que se hace es

$$\Gamma^+\theta^A = 0\,, \tag{3.37}$$

donde

$$\Gamma^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma^0 \pm \Gamma^9). \tag{3.38}$$

Después de hacer esta escogencia, el número de grados de libertad para los movimientos a izquierda y derecha fermiónicos se reduce a 8 y se denotan como S_1^a y $S_2^{\dot{a}}$ para la teoría tipo IIA, y S_1^a y S_2^a para la teoría tipo IIB.

En el calibre de cono de luz las ecuaciones de movimiento toman la forma simple

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_- X^i &= 0 & (3.39)\\ \partial_+ S_1^a &= 0 & (3.40)\\ \partial_- S_2^a = 0 \quad \text{o} \quad \partial_- S_2^{\dot{a}} &= 0\,. & (3.41) \end{aligned}$$

3.3. Cuantización canónica

La cuantización de las coordenadas X^i es la misma que se usó en el formalismo RNS. En el caso de las coordenadas fermiónicas tenemos la siguiente relación de anticonmutación

$$[S^{Aa}(\tau,\sigma), S^{Bb}(\tau,\sigma')]_+ = \pi\delta^{ab}\delta^{AB}\delta(\sigma-\sigma'), \tag{3.42}$$

con $A, B = 1, 2$ y $a, b = 1, \ldots, 8$.

3.3.1. Cuerdas abiertas

A diferencia de lo que ocurre en el formalismo RNS, en el caso de cuerdas abiertas no existe la libertad en la escogencia del signo en las condiciones de frontera; para mantener la supersimetría en el espacio-tiempo es necesario que en ambos extremos de la cuerda se tenga el mismo signo [14]. Las condiciones de frontera en este caso son

$$S^{1a} = S^{2a}\,, \qquad \sigma = 0, \pi\,. \tag{3.43}$$

Debido a que las transformaciones de supersimetría son $\delta\theta^A = \epsilon^A$, con ϵ^A constante. Estas condiciones de frontera implican que $\epsilon^1 = \epsilon^2$, con lo que el número de supersimetrías se reduce a $\mathcal{N} = 1$. Esta clase de cuerdas aparece en la teoría tipo I.

La expansión en modos de oscilación para los campos fermiónicos es

$$\begin{aligned} S^{1a}(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau-\sigma)} \\ S^{2a}(\tau,\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n^a e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \text{con} \ \ S_n^{a\dagger} = S_{-n}^a\,, \end{aligned} \tag{3.44}$$

donde

$$[S_m^a, S_n^b]_+ = \delta^{ab}\delta_{m+n}\,. \tag{3.45}$$

El estado fundamental es una representación del álgebra de Clifford

$$[S_0^a, S_0^b]_+ = \delta^{ab}\,, \qquad a, b = 1, \ldots, 8, \tag{3.46}$$

con

$$S_0^a \sim \begin{pmatrix} 0 & \tau^a_{b\dot{a}} \\ (\tau^a_{b\dot{a}})^T & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.47}$$

donde $\tau^a_{b\dot{a}}$ son matrices Gamma de 8×8 definidas en el Apéndice A.

La representación consiste en 8 vectores sin masa $|i\rangle$ y 8 espinores sin masa $|\dot{a}\rangle$. El operador S_0^a relaciona estos estados de la siguiente forma

$$S_0^b|\dot{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau^i_{b\dot{a}}|i\rangle \tag{3.48}$$

$$S_0^b|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau^i_{b\dot{a}}|\dot{a}\rangle. \tag{3.49}$$

Los estados excitados se construyen actuando con los operadores de creación S^a_{-n} y α^i_{-n}.

La relación para la masa es

$$M^2 = 2N, \tag{3.50}$$

donde el operador de número está dado por

$$N = \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha^i_{-n}\alpha^i_n + nS^a_{-n}S^a_n). \tag{3.51}$$

En este caso no aparece ninguna constante adicional, ya que la constante de ordenamiento normal para los modos bosónicos se cancela con la constante para los modos fermiónicos. Tenemos entonces que no existe taquión en el espectro, por lo cual en este formalismo se consigue un espectro supersimétrico en un único sector sin necesidad de realizar ningún truncamiento al estilo de la proyección GSO [26].

3.3.2. Cuerdas cerradas

Las condiciones de frontera son

$$S^{Aa}(\tau,\sigma) = S^{Aa}(\tau,\sigma+\pi). \tag{3.52}$$

La expansión en modos de oscilación es

$$\begin{aligned} S^{1a}(\tau,\sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} S^a_n e^{-2in(\tau-\sigma)} \\ S^{2a}(\tau,\sigma) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{S}^a_n e^{-2in(\tau+\sigma)}. \end{aligned} \tag{3.53}$$

Los estados sin masa están construidos por los productos tensoriales

$$|i\rangle|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle|b\rangle, \qquad \text{tipo IIA} \tag{3.54}$$

$$|i\rangle|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle|\dot{b}\rangle, \qquad \text{tipo IIB} \tag{3.55}$$

Para la teoría tipo IIA se tienen los estados bosónicos $|i\rangle \otimes |j\rangle$ y $|\dot{a}\rangle \otimes |b\rangle$ y los estados fermiónicos $|i\rangle \otimes |b\rangle$ y $|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle$.

En el caso de la teoría tipo IIB, los estados bosónicos son $|i\rangle \otimes |j\rangle$ y $|\dot{a}\rangle \otimes |\dot{b}\rangle$ y los estados fermiónicos $|i\rangle \otimes |\dot{b}\rangle$ y $|\dot{a}\rangle \otimes |j\rangle$.

En ambas teorías el producto $|i\rangle| \otimes |j\rangle$ es el mismo y se descompone en un escalar ϕ (dilatón), un tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$ (campo B) y un tensor simétrico $g_{\mu\nu}$ (métrica).

3.4. Espacio de fondo curvo

Para generalizar la acción de Green-Schwarz de manera que incluya los campos de fondo, es necesario agregar los campos $g_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ que aparecen en el espectro de la teoría. De forma que la acción para la teoría tipo II en un espacio de fondo curvo toma la forma [30]

$$S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left(\sqrt{-h} h^{ab} G_{MN}(Z) + \varepsilon^{ab} B_{MN}(Z)\right) \partial_a Z^M \partial_b Z^N, \tag{3.56}$$

donde $Z^M = (X^\mu, \theta^\alpha, \hat{\theta}^{\hat{\alpha}})$ son las coordenadas del superespacio con $a, b = 0, 1$ y $\alpha, \beta = 1, \ldots, 16$. Las variables θ^α y $\hat{\theta}^{\hat{\alpha}}$ tienen igual quiralidad en la teoría tipo IIB y quiralidad opuesta en la teoría tipo IIA. Las primeras componentes de los supercampos G_{MN} y B_{MN} son los campos $g_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ respectivamente. El primer término de la acción (3.56) reemplaza el espacio-tiempo plano por uno más general, mientras que el segundo término representa el término de Wess-Zumino (3.27).

Los supercampos G_{MN} y B_{MN} obedecen las reglas de simetrización graduada

$$G_{MN} = (-)^{MN} G_{NM}, \qquad B_{MN} = -(-)^{MN} B_{NM}\,, \tag{3.57}$$

siendo $(-)^{MN} = -1$ si ambos índices son fermiónicos, de lo contrario $(-)^{MN} = 1$.

Capítulo 4

Formalismo de espinores puros

En este capítulo se estudia el formalismo de espinores puros propuesto por Berkovits para cuantizar en forma covariante la teoría de supercuerdas [9]. Los argumentos principales que se presentan aquí, se pueden encontrar en [9, 11, 31].

4.1. Modificación al formalismo de Green-Schwarz

La acción de Green-Schwarz se puede escribir como

$$S = -\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,\Pi\cdot\bar{\Pi}\,, \qquad \Pi^\mu = \partial X^\mu - \frac{1}{2}\theta^\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial\theta^\beta, \tag{4.1}$$

donde $\mu = 0,\ldots,9$, $\alpha,\beta = 1,\ldots,16$ y γ^μ son matrices simétricas de 16×16 definidas en el Apéndice A. Además se utilizan las coordenadas

$$z = \sigma - i\tau\,, \qquad \bar{z} = \sigma + i\tau \tag{4.2}$$

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_\sigma - i\partial_\tau)\,, \qquad \bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_\sigma + i\partial_\tau). \tag{4.3}$$

El momento canónico, asociado a θ^α es

$$p_\alpha = -\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial X_\mu\theta^\beta + \frac{1}{2}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\beta\theta^\gamma\partial\theta^\delta, \tag{4.4}$$

el cual define la restricción

$$d_\alpha = p_\alpha + \gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial X_\mu\theta^\beta - \frac{1}{2}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\beta\theta^\gamma\partial\theta^\delta, \tag{4.5}$$

cuyo OPE[1] es (ver Apéndice D.1)

$$d_\alpha(y)d_\beta(z) \sim \frac{2\gamma^\mu_{\alpha\beta}\Pi_\mu}{y-z}\,. \tag{4.6}$$

[1]Expansión de producto de operadores. Representa el producto de operadores en las posiciones y y z, respectivamente, cuando $y\to z$. Para una definición formal ver [32].

El método para cuantizar una teoría sujeta a restricciones desarrollado por Dirac [33] requiere que las restricciones sean separadas en restricciones de primera y segunda clase (ver Apéndice E), para lo cual es necesario calcular $C_{\alpha\beta} = \{d_\alpha, d_\beta\}$. Debido al OPE (4.6) y a que la ecuación (3.32) en el calibre conforme, se convierte en la restricción $\Pi \cdot \Pi = 0$, tenemos que la mitad de las restricciones son de primera clase[2] y la mitad de segunda clase. Hasta el momento no se ha logrado una separación covariante de estas restricciones. La forma usual de hacerlo es en el calibre de cono de luz (capítulo 3).

Siegel [34] propuso resolver el problema tratando a p_α como una variable independiente, utilizando la acción[3]

$$S = -\frac{1}{\pi}\int d^2z \left(\frac{1}{2}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + p_\alpha \bar{\partial}\theta^\alpha\right). \tag{4.7}$$

Junto a esta acción es necesario agregar un conjunto de restricciones de primera clase, de tal forma que se reproduzca el espectro de la teoría. Sin embargo este conjunto de restricciones no fue encontrado.

Los OPE para la acción (4.7) son [35]

$$X^\mu(y)X^\nu(z) \sim -\eta^{\mu\nu} ln(y-z), \qquad \partial X^\mu(y)\partial X^\nu(z) \sim -\frac{\eta^{\mu\nu}}{(y-z)^2} \tag{4.8}$$

$$p_\alpha(y)\theta^\beta(z) \sim \frac{\delta_\alpha^\beta}{y-z}, \qquad p_\alpha(y)\partial\theta^\beta(z) \sim \frac{\delta_\alpha^\beta}{(y-z)^2}\,. \tag{4.9}$$

El tensor de energía momento está dado por[4]

$$T(z) = \frac{1}{2}\partial X^\mu \partial X_\mu + p_\alpha \partial\theta^\alpha. \tag{4.10}$$

Uno de los mayores inconvenientes de la propuesta de Siegel al momento de cuantizar la teoría es que la carga central es diferente de cero. Esto se verifica calculando el OPE para el tensor de energía momento (ver Apéndice D.1).

$$T(y)T(z) \sim -\frac{1}{2}\frac{22}{(y-z)^4} + \frac{2T(z)}{(y-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{y-z}\,, \tag{4.11}$$

comparando con la expresión general [32]

$$T(y)T(z) \sim \frac{c}{2(y-z)^4} + \frac{2T(z)}{(y-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{y-z}\,, \tag{4.12}$$

[2]Como se comenta en el Apéndice E, las restricciones de primera clase están relacionadas con las invariancias de calibre, en este caso éstas corresponden a la simetría kappa.

[3]El análisis de la mayor parte de este capítulo se hace para las variables con movimiento a la izquierda. Las variables con movimiento a la derecha se introducen al final.

[4]Para las variables (p_α, θ^β), el tensor de energía momento se obtiene haciendo la comparación con un sistema bc, con $\lambda = 1$, $b = p$ y $c = \theta$ de acuerdo con [35].

tenemos que la carga central es $c = -22$. Este factor anómalo produce inconvenientes al momento de realizar la cuantización [11].

El otro problema de la propuesta de Siegel es que el OPE de la corriente de Lorentz para las variables fermiónicas es diferente al obtenido en el formalismo RNS. Para ver esto, primero calculamos la corriente de Lorentz $\tilde{M}^{\mu\nu}$ para las variables fermiónicas. Usando el método de Noether, la variación de la acción (4.7) bajo las transformaciones de Lorentz

$$\delta p_\alpha = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta p_\beta, \qquad \delta\theta^\alpha = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\theta^\beta, \tag{4.13}$$

es

$$\delta S = -\frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\bar{\partial}\epsilon_{\mu\nu}\tilde{M}^{\mu\nu}, \tag{4.14}$$

donde

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu). \tag{4.15}$$

Haciendo el cálculo se obtiene que

$$\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,[\delta p_\alpha\bar{\partial}\theta^\alpha + p_\alpha\bar{\partial}(\delta\theta^\alpha)] \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int d^2z\,\frac{1}{4}\left(\epsilon_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta p_\beta\bar{\partial}\theta^\alpha + p_\alpha\bar{\partial}(\epsilon_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\theta^\beta)\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^2z\,\bar{\partial}\epsilon_{\mu\nu}\frac{1}{2}p_\alpha(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\theta^\beta,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

de forma que

$$\tilde{M}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}p_\alpha(\gamma^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\theta^\beta = \frac{1}{2}p\gamma^{\mu\nu}\theta\,, \tag{4.17}$$

cuyo OPE está dado por[5]

$$\tilde{M}^{\mu\nu}(y)\tilde{M}^{\rho\sigma}(z) \sim \frac{\eta^{\rho[\nu}\tilde{M}^{\mu]\sigma} - \eta^{\sigma[\nu}\tilde{M}^{\mu]\rho}}{y-z} + 4\frac{\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}}{(y-z)^2}\,, \tag{4.18}$$

donde

$$\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu} \equiv \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\nu}. \tag{4.19}$$

En el formalismo RNS la corriente de Lorentz para las variables fermiónicas está dada por [36]

$$M^{\mu\nu}_{RNS} = \psi^\mu\psi^\nu, \tag{4.20}$$

y satisface el OPE

$$M^{\mu\nu}_{RNS}(y)M^{\rho\sigma}_{RNS}(z) \sim \frac{\eta^{\rho[\nu}M^{\mu]\sigma}_{RNS} - \eta^{\sigma[\nu}M^{\mu]\rho}_{RNS}}{y-z} + \frac{\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}}{(y-z)^2}\,. \tag{4.21}$$

[5]El cálculo se encuentra en el Apéndice D.1.

Vemos que el coeficiente del polo de segundo orden en (4.18) es 4, mientras que en (4.21) es 1. Esta diferencia hace que las amplitudes de dispersión calculadas en los dos formalismos no coincidan.

4.2. Propuesta del formalismo de espinores puros

La propuesta de Berkovits [9] consiste en agregar a la teoría unas variables "fantasma"que aporten a la corriente de Lorentz $\tilde{M}^{\mu\nu}$ un término adicional $N^{\mu\nu}$ con OPE:

$$N^{\mu\nu}(y)N^{\rho\sigma}(z) \sim \frac{\eta^{\rho[\nu}\tilde{M}^{\mu]\sigma} - \eta^{\sigma[\nu}\tilde{M}^{\mu]\rho}}{y-z} - 3\frac{\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}}{(y-z)^2} \quad (4.22)$$

$$\tilde{M}^{\mu\nu}(y)N^{\rho\sigma}(z) \sim \text{regular.} \quad (4.23)$$

De forma que $M^{\mu\nu} = \tilde{M}^{\mu\nu} + N^{\mu\nu}$ satisface el mismo OPE que $M^{\mu\nu}_{RNS}$. Adicionalmente, estas nuevas variables deben contribuir con una carga de $+22$ a la carga central total para que ésta se anule. Como se muestra más adelante, las variables que cumplen estas condiciones son los espinores puros.

Un espinor puro es un espinor de Weyl que satisface la condición [9]

$$\lambda^\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta}\lambda^\beta = 0\,. \quad (4.24)$$

4.2.1. Solución de la restricción de los espinores puros

Se podría pensar que la condición (4.24) implica que los espinores puros tengan sólo $16 - 10 = 6$ grados de libertad, pero no es así. Para ver esto, se realiza una rotación de Wick y se descompone $SO(10)$ en $U(5) \simeq SU(5) \times U(1)$ (ver Apéndice D.2). Las 16 componentes de λ^α se separan en (e^s, u_{ij}, λ^i) con $i, j = 1, \ldots, 5$ y $u_{ij} = -u_{ji}$.

Introducimos la matriz de conjugación C, la cual satisface $C\Gamma^\mu = -\Gamma^{\mu,T}C$, donde Γ^μ son matrices de 32×32 (ver Apéndice A).

Definimos los operadores de aniquilación a_i y de creación $a^i = a_i^\dagger$ como [29]

$$a_1 = \frac{1}{2}(\Gamma^1 + i\Gamma^2), \quad a_2 = \frac{1}{2}(\Gamma^3 + i\Gamma^4), \quad \ldots \quad, a_5 = \frac{1}{2}(\Gamma^9 - \Gamma^0)$$

$$a^1 = \frac{1}{2}(\Gamma^1 - i\Gamma^2), \quad a^2 = \frac{1}{2}(\Gamma^3 - i\Gamma^4), \quad \ldots \quad, a^5 = \frac{1}{2}(\Gamma^9 + \Gamma^0), \quad (4.25)$$

los cuales satisfacen

$$[a_i, a^j]_+ = \delta_i^j\,, \qquad a^i a^j = -a^j a^i \quad (4.26)$$

$$a_i C = -Ca^i\,, \qquad a^i C = -Ca_i\,, \qquad i, j = 1, \ldots, 5. \quad (4.27)$$

Las matrices Γ^μ se pueden obtener de (4.25) de la forma

$$\Gamma^0 = a^5 - a_5\,, \quad \Gamma^1 = a^1 + a_1\,, \quad \Gamma^2 = i(a^1 - a_1)\,, \quad \ldots \quad, \Gamma^9 = a^5 + a_5\,. \quad (4.28)$$

Se define el estado vacio $|0\rangle$ como

$$a_i|0\rangle = 0\,. \tag{4.29}$$

Actuando con los operadores a^i se obtienen los estados $|A\rangle$ con $A = 1, \ldots, 32$.

Los espinores de Weyl se expanden en términos de los operadores de creación de acuerdo con el Apéndice D.2, de la siguiente manera

$$|\lambda\rangle = e^s|0\rangle + \frac{1}{2!}u_{ij}a^j a^i|0\rangle + \frac{1}{4!}\lambda^i \varepsilon_{ijklm}a^j a^k a^l a^m|0\rangle, \tag{4.30}$$

donde

$$\varepsilon_{ijklm} = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j,k,l,m \text{ es una permutación par de } 1,2,3,4,5 \\ -1 & \text{si } i,j,k,l,m \text{ es una permutación impar de } 1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{si hay algún índice repetido} \end{cases} \tag{4.31}$$

La restricción (4.24) se obtiene como el primer bloque de

$$\bar{\lambda}\Gamma^\mu\lambda = 0\,, \tag{4.32}$$

donde $\bar{\lambda} = \lambda^T C$.

Usando (4.28), la restricción (4.32) se descompone en

$$\lambda^T C a^i \lambda = 0\ , \qquad \lambda^T C a_i \lambda = 0\ , \qquad i = 1, \ldots, 5, \tag{4.33}$$

que se pueden reescribir como

$$\langle\lambda|Ca^i|\lambda\rangle = 0\ , \qquad \langle\lambda|Ca_i|\lambda\rangle = 0\,. \tag{4.34}$$

Expandiendo el espinor $\langle\lambda|$ en el primer conjunto de restricciones (4.34) tenemos que

$$\langle\lambda|Ca^i|\lambda\rangle = e^s\langle 0|Ca^i|\lambda\rangle + \frac{1}{2}u_{kj}\langle 0|a_j a_k Ca^i|\lambda\rangle + \frac{1}{4!}\lambda^j\varepsilon_{jklmn}\langle 0|a_k a_l a_m a_n Ca^i|\lambda\rangle. \tag{4.35}$$

La matriz C se puede escribir como

$$C = -\Gamma^2\Gamma^4\Gamma^6\Gamma^8\Gamma^0 = (a^1 - a_1)(a^2 - a_2)\cdots(a^5 - a_5), \tag{4.36}$$

donde se ha usado (4.28), con lo cual

$$C|0\rangle = -a^1a^2a^3a^4a^5|0\rangle\ , \qquad \langle 0|C = \langle 0|a_1a_2a_3a_4a_5\,. \tag{4.37}$$

De esta forma tenemos que $\langle 0|Ca^1a^2a^3a^4a^5|0\rangle = 1$, y en general $\langle 0|Ca^ia^ja^ka^la^m|0\rangle = \varepsilon^{ijklm}$. De acuerdo con esto, cuando se expande el espinor $|\lambda\rangle$ en (4.35), los únicos términos diferentes de cero son los proporcionales a $\langle 0|Ca^i a^j a^k a^l a^m|0\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle\lambda|Ca^i|\lambda\rangle &= \frac{1}{4!}e^s\lambda^j\varepsilon_{jklmn}\langle 0|Ca^i a^n a^m a^l a^k|0\rangle + \frac{1}{4}u_{kj}u_{lm}\langle 0|a_j a_k C a^i a^m a^l|0\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4!}e^s\lambda^j\varepsilon_{jklmn}\langle 0|a_k a_l a_m a_n C a^i|0\rangle \\
&= \frac{1}{4!}e^s\lambda^j\varepsilon_{jklmn}\varepsilon^{inmlk} + \frac{1}{4}u_{kj}u_{lm}\varepsilon^{jkiml} + \frac{1}{4!}e^s\lambda^j\varepsilon_{jklmn}e^{klmni} \\
&= \frac{1}{4!}e^s\lambda^j 4!\delta^i_j + \frac{1}{4}u_{kj}u_{lm}\varepsilon^{jkiml} + \frac{1}{4!}e^s\lambda^j 4!\delta^i_j \\
&= 2e^s\lambda^i + \frac{1}{4}u_{kj}u_{lm}\varepsilon^{jkiml},
\end{aligned} \tag{4.38}$$

de donde tenemos que[6]

$$\lambda^i = -\frac{1}{8}e^{-s}\varepsilon^{ijklm}u_{jk}u_{lm}\,. \tag{4.39}$$

De forma similar, se expande $\langle\lambda|$ en el segundo conjunto de restricciones (4.34)

$$\langle\lambda|Ca_i|\lambda\rangle = e^s\langle 0|Ca_i|\lambda\rangle + \frac{1}{2}u_{kj}\langle 0|a_j a_k C a_i|\lambda\rangle + \frac{1}{4!}\lambda^j\varepsilon_{jklmn}\langle 0|a_k a_l a_m a_n C a_i|\lambda\rangle, \tag{4.40}$$

en este caso, el único término deferente de cero es

$$\begin{aligned}
\langle\lambda|Ca_i|\lambda\rangle &= \frac{1}{4!}\frac{1}{2!}\lambda^j\varepsilon_{jklmn}u_{pq}\langle 0|a_k a_l a_m a_n C a_i a^q a^p|0\rangle \\
&= \frac{1}{4!}\frac{1}{2!}\lambda^j\varepsilon_{jklmn}u_{pq}\langle 0|a_k a_l a_m a_n C(\delta^q_i - a^q a_i)a^p|0\rangle \\
&= \frac{1}{4!}\frac{1}{2!}\lambda^j\varepsilon_{jklmn}u_{pq}\langle 0|Ca^k a^l a^m a^n(\delta^q_i a^p - a^q\delta^p_i)|0\rangle \\
&= \frac{1}{4!}\lambda^j u_{pi}\varepsilon_{jklmn}\varepsilon^{klmnp} \\
&= \lambda^p u_{pi}\,.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Esta condición se cumple automáticamente si se reemplaza (4.39), puesto que

$$\lambda^p u_{pi} = \varepsilon^{pjklm}u_{jk}u_{lm}u_{pi} = 0\,, \tag{4.42}$$

debido a que i sólo puede ser igual a p, j, k, l o m, y en cualquiera de los casos la expresión se anula.

De esta forma vemos que el espacio de los espinores puros es un espacio de 11 dimensiones [9].

[6] La idea de definir la primera componente en la descomposición de λ^α como e^s es porque se trabaja en la región del espacio de espinores puros donde esta componente es diferente de cero.

La corriente de Lorentz $N^{\mu\nu}$ se descompone bajo $U(5)$ como $(n, n^a_b, n^{ab}, n_{ab})$. Las expresiones que están de acuerdo con el OPE (4.22) son [31] (ver Apéndice D.2)

$$\begin{aligned}
n &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{4}u_{ab}v^{ab} + \frac{5}{2}\partial t - \frac{5}{2}\partial s\right) && (4.43)\\
n^a_b &= u_{bc}v^{ac} - \frac{1}{5}\delta^a_b u_{cd}v^{cd} && (4.44)\\
n^{ab} &= -e^s v^{ab} && (4.45)\\
n_{ab} &= e^{-s}(2\partial u_{ab} - u_{ab}\partial t - 2u_{ab}\partial s + u_{ac}u_{bd}v^{cd} - \frac{1}{2}u_{ab}u_{cd}v^{cd}), && (4.46)
\end{aligned}$$

donde $t(z)$ y $v^{ab}(z)$ son los momentos asociados a $s(z)$ y $u_{ab}(z)$ respectivamente.
El momento asociado a λ^α es ω_α, el cual se descompone bajo $U(5)$ como $(\omega_+, \omega^{ab}, \omega_a)$, siendo

$$\omega_+ = \partial t e^{-s}, \quad \omega^{ab} = v^{ab}, \quad \omega_a = 0\,, \tag{4.47}$$

de forma que

$$N^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\omega\gamma^{\mu\nu}\lambda. \tag{4.48}$$

4.3. Acción para los espinores puros

En el calibre conforme la acción para los espinores puros es [31]

$$S_\lambda = \frac{1}{\pi}\int d^2z\left(\frac{1}{2}v^{ab}\bar{\partial}u_{ab} - \partial t\bar{\partial}s\right). \tag{4.49}$$

Los OPE están dados por

$$\begin{aligned}
t(y)s(z) &\sim ln(y-z) && (4.50)\\
v^{ab}(y)u_{cd}(z) &\sim 2\frac{\delta^{ab}_{cd}}{y-z} = \frac{\delta^{[a}_c\delta^{b]}_d}{y-z}, && (4.51)
\end{aligned}$$

y el tensor de energía momento para S_λ es

$$T_\lambda = \frac{1}{2}v^{ab}\partial u_{ab} + \partial t\partial s + \partial^2 s\,. \tag{4.52}$$

De la expresión 4.12, tenemos que la carga central para los fantasmas se calcula del coeficiente del polo de cuarto orden en el OPE $T_\lambda(y)T_\lambda(z)$

$$\frac{1}{4} : v^{ab}(y)\partial u_{cd}(z) :: \partial u_{ab}(z)v^{cd}(y) : + : \partial t(y)\partial s(z) :: \partial s(z)\partial t(y) :$$

$$= \frac{\delta^{ab}_{cd}\delta^{cd}_{ab}}{(y-z)^4} + \frac{1}{(y-z)^4} = \frac{22}{2(y-z)^4}\,, \tag{4.53}$$

lo que muestra que la carga central para los fantasmas es +22, con lo cual la carga central total es cero.

La acción del formalismo de espinores puros para las variables con movimiento a izquierda queda entonces

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{\pi}\int d^2z\left(\frac{1}{2}\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu + p_\alpha\bar{\partial}\theta^\alpha - \frac{1}{2}v^{ab}\bar{\partial}u_{ab} + \partial t\bar{\partial}s\right) && (4.54)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int d^2z\left(\frac{1}{2}\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu + p_\alpha\bar{\partial}\theta^\alpha + \omega_\alpha\bar{\partial}\lambda^\alpha\right). && (4.55)\end{aligned}$$

Para incluir las cuerdas cerradas es necesario considerar los movimientos a derecha agregando las variables $\hat{\theta}^{\hat{\alpha}}$ y $\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}$, y sus respectivos momentos asociados $\hat{p}_{\hat{\alpha}}$ y $\hat{\omega}_{\hat{\alpha}}$, donde $\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\hat{\lambda}^{\hat{\beta}} = 0$. La acción completa para la teoría de supercuerdas tipo II es

$$S = -\frac{1}{\pi}\int d^2z\left(\frac{1}{2}\partial X^\mu\bar{\partial}X_\mu + p_\alpha\bar{\partial}\theta^\alpha + \hat{p}_{\hat{\alpha}}\partial\hat{\theta}^{\hat{\alpha}} + \omega_\alpha\bar{\partial}\lambda^\alpha + \hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\right). \tag{4.56}$$

Para la teoría tipo IIA los índices $\hat{\alpha}$ y α denotan espinores de quiralidad opuesta, mientras que para la teoría tipo IIB, espinores de igual quiralidad.

4.4. Estados físicos

El tensor de energía momento (4.52), se puede escribir de la forma [31]

$$T_\lambda = \frac{1}{10}N^{\mu\nu}N_{\mu\nu} - \frac{1}{8}J^2 - \partial J\,, \tag{4.57}$$

donde la corriente fantasma J está definida como

$$J = \frac{1}{2}u_{ab}v^{ab} + \partial t + 3\partial s \tag{4.58}$$

y satisface el OPE

$$J(y)\lambda^\alpha(z) \sim \frac{\lambda^\alpha}{y-z}\,. \tag{4.59}$$

La corriente (4.58) permite definir el número fantasma n_g de un estado arbitrario Ψ como [31]

$$[\oint dz\ J(z), \Psi(y)] = n_g\Psi\,. \tag{4.60}$$

Utilizando el OPE (4.59) se encuentra que el número fantasma de λ^α es 1.

Los estados físicos son definidos como estados de número fantasma $n_g = 1$ en la cohomología del operador BRST[7] [37]

$$Q = \oint dz\,\lambda^\alpha(z)d_\alpha(z). \tag{4.61}$$

[7]Para una revisión sobre cuantización BRST ver [38].

Este operador es nilpotente ($Q^2 = 0$) debido a la condición de espinores puros $\lambda\gamma^\mu\lambda = 0$.

$$
\begin{aligned}
Q^2 &= \frac{1}{2}[Q,Q]_+ = \frac{1}{2}\oint\oint dydz\ \lambda^\alpha(y)\lambda^\beta(z)[d_\alpha(y), d_\beta(z)]_+ \\
&= 2\pi i \oint dz\ \lambda^\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\lambda^\beta\Pi_\mu = 0\,,
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

donde se ha usado el OPE (4.6).

La condición de que los estados físicos pertenezcan a la cohomología de Q, en otras palabras establece que un estado físico Ψ debe satisfacer $Q\Psi = 0$, y que dos estados físicos Ψ y Ψ' son equivalentes si $\Psi' = \Psi + Q\Phi$, donde Φ es un estado arbitrario.

Los estados físicos en el nivel de masa $M^2 = l/2$ están descritos por operadores de vértice[8] con número fantasma $n_g = 1$ y peso conforme l construidos de combinaciones de los elementos $(\partial X^\mu, \theta^\alpha, d_\alpha, \lambda^\alpha, N^{\mu\nu}, \omega_\alpha, \lambda^\alpha)$ [31]. Por ejemplo, los estados sin masa están descritos por el operador de vértice de peso conforme cero [37]

$$
U = \lambda^\alpha A_\alpha(X,\theta), \tag{4.63}
$$

donde $A_\alpha(X,\theta)$ es un supercampo espinorial.

Las condiciones de la cohomología BRST son

$$
QU = 0, \qquad U \simeq U + Q\Omega\,, \tag{4.64}
$$

donde Ω es un supercampo escalar. Esto se puede interpretar como la invariancia de calibre $\delta U = Q\Omega$.

Teniendo en cuenta que d_α actúa de la forma [11]

$$
d_\alpha F(X,\theta) \sim \frac{D_\alpha F(X,\theta)}{z}\,. \tag{4.65}
$$

donde $F(X,\theta)$ es una función en el superespacio y D_α es la derivada supersimétrica en diez dimensiones definida por

$$
D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\gamma^\mu_{\alpha\beta}\theta^\beta\partial_\mu\ , \tag{4.66}
$$

la condición $QU = 0$ queda

$$
\lambda^\alpha\lambda^\beta D_\alpha A_\beta = 0\,. \tag{4.67}
$$

Si se resuelve esta ecuación y se expande A_α, se obtienen los estados sin masa. Los estados masivos se obtienen de forma similar a partir de los operadores de vértice de peso conforme l.

[8]Los operadores de vértice son operadores que representan la emisión o absorción de estados de la cuerda, ver [14].

4.5. Espacio de fondo curvo

La forma general de la acción para la teoría tipo II en un espacio de fondo curvo en el formalismo de espinores puros es [12]

$$\begin{aligned} S \;=\; & -\frac{1}{\pi}\int d^2z \left[\frac{1}{2}(G_{MN}(Z)+B_{MN}(Z))\partial Z^M\bar{\partial}Z^N + P^{\alpha\hat{\beta}}(Z)d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}}\right. \\ & + E^\alpha_M(Z)d_\alpha\bar{\partial}Z^M + E^{\hat{\alpha}}_M(Z)\hat{d}_{\hat{\alpha}}\partial Z^M + \Omega_{M\alpha}{}^{\beta}(Z)\lambda^\alpha w_\beta\bar{\partial}Z^M + \hat{\Omega}_{M\hat{\alpha}}{}^{\hat{\beta}}(Z)\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{w}_{\hat{\beta}}\partial Z^M \\ & \left. + C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha(Z)\lambda^\alpha w_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}} + \hat{C}^{\hat{\beta}\gamma}_{\hat{\alpha}}(Z)\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{w}_{\hat{\beta}}d_\gamma + S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}(Z)\lambda^\alpha w_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{w}_{\hat{\delta}} + \omega_\alpha\bar{\partial}\lambda^\alpha + \hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\right] \end{aligned} \tag{4.68}$$

donde $Z^M = (X^\mu, \theta^\alpha, \hat{\theta}^{\hat{\alpha}})$ son las coordenadas en el superespacio, G_{MN} es el tensor métrico, B_{MN} es campo de Kalb-Ramond o campo B, $P^{\alpha\hat{\beta}}$ es el campo de esfuerzos de Ramond-Ramond, E^α_M es la parte espinorial del vielbein, $\Omega^\beta_{M\alpha}$ es la conexión espinorial, $C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha$ contiene el campo de esfuerzos del dilatino y $S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}$ contiene la curvatura de Riemann. Los primeros dos términos de la acción (4.68) corresponden a la acción de Green-Schwarz (3.56).

Capítulo 5

Dualidad T

La dualidad T[1] es una simetría de la teoría de cuerdas, que permite relacionar teorías sobre espacios de fondo con geometrías diferentes. El ejemplo más simple de esta dualidad, muestra que una teoría de cuerdas compactificada sobre un circulo de radio R, es equivalente a una compactificada sobre un circulo de radio $1/R$ [26]. Para una revisión de la dualidad T bosónica se puede consultar [24] y [39].

En este capítulo se obtienen las transformaciones de la dualidad T bosónica y fermiónica utilizando primero el procedimiento de Buscher y posteriormente utilizando una transformación canónica.

5.1. Procedimiento de Buscher

En esta sección se utiliza el procedimiento de Buscher [23] para calcular las transformaciones de la dualidad T bosónica y fermiónica. Este procedimiento consiste en considerar el espacio de fondo invariante bajo el desplazamiento de una de sus coordenadas, para la cual se introduce un campo de calibre, luego, por medio de integración se obtienen los campos duales. En esta sección se sigue como referencia a [16].

5.1.1. Dualidad T bosónica

La acción para la cuerda bosónica en un espacio de fondo curvo, utilizando las coordenadas de cono de luz (2.24), está dada por

$$S = \frac{1}{2}\int d^2\sigma\, l_{mn}(X)\partial_+ X^m \partial_- X^n, \qquad\qquad l_{mn} = g_{mn} + b_{mn}\,, \tag{5.1}$$

donde $m, n = 0, \ldots, 9$, g_{mn} es el tensor métrico y b_{mn} el tensor antisimétrico. Se asume que el campo de fondo l_{mn} es invariante bajo la isometría

$$X^0 \to X^0 + c\,, \tag{5.2}$$

[1]La letra T viene de Toroidal.

donde c es una constante. Reescribimos la acción (5.1) como

$$S = \frac{1}{2}\int d^2\sigma\Big(g_{00}\partial_+X^0\partial_-X^0 + l_{0\mu}\partial_+X^0\partial_-X^\mu + l_{\mu 0}\partial_+X^\mu\partial_-X^0 + l_{\mu\nu}\partial_+X^\mu\partial_-X^\nu\Big), \quad (5.3)$$

donde μ y ν recorren todos los índices excepto $m = 1$.

Para obtener la acción dual, el procedimiento de Buscher establece que si g_{00} es diferente de cero, se reemplazan las derivadas ∂_+X^0 y ∂_-X^0 por el campo vectorial (V_+, V_-) y se agrega el multiplicador de Lagrange $\tilde{X}^0$. Realizando los reemplazos tenemos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int d^2\sigma\Big(g_{00}V_+V_- + l_{0\mu}V_+\partial_-X^\mu + l_{\mu 0}\partial_+X^\mu V_- + l_{\mu\nu}\partial_+X^\mu\partial_-X^\nu \\ &\quad +\tilde{X}^0(\partial_+V_- - \partial_-V_+)\Big). \end{aligned} \quad (5.4)$$

La ecuación de movimiento para $\tilde{X}^0$ es

$$\partial_+V_- - \partial_-V_+ = 0\,, \quad (5.5)$$

cuya solución es $V_+ = \partial_+X^0$ y $V_- = \partial_-X^0$. Si se reemplazan estas expresiones en (5.4) se recupera la acción original.

La variación de la acción con respecto al campo vectorial es

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{2}\int d^2\sigma\Big[g_{00}V_-\delta V_+ + l_{0\mu}\partial_-X^\mu\delta V_+ - \tilde{X}^0\partial_-\delta V_+ \\ &\quad +g_{00}V_+\delta V_- + l_{\mu 0}\partial_+X^\mu\delta V_- + \tilde{X}^0\partial_+\delta V_-\Big] \\ &= \frac{1}{2}\int d^2\sigma\ \Big[\Big(g_{00}V_- + l_{0\mu}\partial_-X^\mu + \partial_-\tilde{X}^0\Big)\delta V_+ - \partial_-(\tilde{X}^0\delta V_+) \\ &\quad +\Big(g_{00}V_+ + l_{\mu 0}\partial_+X^\mu - \partial_+\tilde{X}^0\Big)\delta V_- + \partial_+(\tilde{X}^0\delta V_-)\Big], \end{aligned} \quad (5.6)$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} V_- &= \frac{1}{g_{00}}\Big(-l_{0\mu}\partial_-X^\mu - \partial_-\tilde{X}^0\Big) \\ V_+ &= \frac{1}{g_{00}}\Big(-l_{\mu 0}\partial_+X^\mu + \partial_+\tilde{X}^0\Big), \end{aligned} \quad (5.7)$$

reemplazando estas expresiones en la acción (5.4) obtenemos (salvo una derivada total)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int d^2\sigma\left(\frac{1}{g_{00}}\partial_+\tilde{X}^0\partial_-\tilde{X}^0 + \frac{l_{0\mu}}{g_{00}}\partial_+\tilde{X}^0\partial_-X^\mu - \frac{l_{\mu 0}}{g_{00}}\partial_+X^\mu\partial_-\tilde{X}^0 \right.\\ &\quad \left. + \left(l_{\mu\nu} - \frac{l_{\mu 0}l_{0\nu}}{g_{00}}\right)\partial_+X^\mu\partial_-X^\nu\right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Comparando con la acción dual

$$\tilde{S}=\frac{1}{2}\int d^2\sigma\Big(\tilde{g}_{00}\partial_+\tilde{X}^0\partial_-\tilde{X}^0+\tilde{l}_{0\mu}\partial_+\tilde{X}^0\partial_-X^\mu+\tilde{l}_{\mu 0}\partial_+X^\mu\partial_-\tilde{X}^0+\tilde{l}_{\mu\nu}\partial_+X^\mu\partial_-X^\nu\Big), \quad (5.9)$$

encontramos las transformaciones de la dualidad T bosónica [16]

$$\tilde{g}_{00}=\frac{1}{g_{00}}, \qquad \tilde{l}_{0\mu}=\frac{l_{0\mu}}{g_{00}}, \qquad \tilde{l}_{\mu 0}=-\frac{l_{\mu 0}}{g_{00}}, \qquad \tilde{l}_{\mu\nu}=l_{\mu\nu}-\frac{l_{\mu 0}l_{0\nu}}{g_{00}}\,. \quad (5.10)$$

5.1.2. Dualidad T fermiónica

La dualidad T fermiónica propuesta por Berkovits y Maldacena en [16] es una transformación sobre variables fermiónicas similar a la dualidad T bosónica, sólo que a diferencia de ésta, la dualidad T fermiónica no permite relacionar las teorías tipo IIA y tipo IIB.

Dualidad T fermiónica en el formalismo de espinores puros

En la Sección 4.5 se introdujo la acción para la teoría tipo II en un espacio de fondo curvo en el formalismo de espinores puros

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\Big(\frac{1}{2}L_{MN}(Z)\partial_+Z^M\partial_-Z^N+P^{\alpha\hat{\beta}}(Z)d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}}+\ E^\alpha_M(Z)d_\alpha\partial_-Z^M \\ &\quad +E^{\hat{\alpha}}_M(Z)\partial_+Z^M\hat{d}_{\hat{\alpha}}+\Omega^\beta_{M\alpha}(Z)\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-Z^M+\hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{M\hat{\alpha}}(Z)\partial_+Z^M\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}+C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha(Z)\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}} \\ &\quad +\hat{C}^{\hat{\beta}\gamma}_{\hat{\alpha}}(Z)d_\gamma\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}+S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}(Z)\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{\omega}_{\hat{\delta}}+\omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha+\hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\Big), \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde $Z^M=(X^m,\theta^\alpha,\hat{\theta}^{\hat{\alpha}})$ y $L_{MN}=G_{MN}+B_{MN}$. Los supercampos G_{MN} y B_{MN} obedecen las reglas de simetrización graduada (3.57).

Suponemos que los campos de fondo son invariantes bajo la traslación

$$\theta^1\to\theta^1+\rho\,, \quad (5.12)$$

donde ρ es constante. Reescribimos la acción (5.11) como

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\Big(\frac{1}{2}B_{11}\partial_+\theta^1\partial_-\theta^1+\frac{1}{2}L_{1\mu}\partial_+\theta^1\partial_-Z^\mu+\frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+Z^\mu\partial_-\theta^1+\frac{1}{2}L_{\mu\nu}\partial_+Z^\mu\partial_-Z^\nu \\ &\quad +P^{\alpha\hat{\beta}}d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}}+E^\alpha_1 d_\alpha\partial_-\theta^1+E^\alpha_\mu d_\alpha\partial_-Z^\mu+E^{\hat{\alpha}}_1\partial_+\theta^1\hat{d}_{\hat{\alpha}}+E^{\hat{\alpha}}_\mu\partial_+Z^\mu\hat{d}_{\hat{\alpha}}+\Omega^\beta_{1\alpha}\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-\theta^1 \\ &\quad +\Omega^\beta_{\mu\alpha}\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-Z^\mu+\hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}}\partial_+\theta^1\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}+\hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{\mu\hat{\alpha}}\partial_+Z^\mu\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}+\ C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}}+\hat{C}^{\hat{\beta}\gamma}_{\hat{\alpha}}d_\gamma\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} \\ &\quad +S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{\omega}_{\hat{\delta}}+\omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha+\hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\Big), \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde μ y ν recorren todos los índices excepto $m=1$.

Si B_{11} es diferente de cero, podemos utilizar el procedimiento de Buscher de la misma forma que en la sección anterior para determinar las transformaciones de la dualidad T fermiónica.

Reemplazando las derivadas de θ^1 con el campo vectorial fermiónico (V_+, V_-) e introduciendo el multiplicador de Lagrange $\tilde{\theta}^1$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\Big(\frac{1}{2}B_{11}V_+V_- + \frac{1}{2}L_{1\mu}V_+\partial_-Z^\mu + \frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+Z^\mu V_- + \frac{1}{2}L_{\mu\nu}\partial_+Z^\mu\partial_-Z^\nu \\
&\quad + P^{\alpha\hat{\beta}}d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}} + E_1^\alpha d_\alpha V_- + E_\mu^\alpha d_\alpha\partial_-Z^\mu + E_1^{\hat{\alpha}}V_+\hat{d}_{\hat{\alpha}} + E_\mu^{\hat{\alpha}}\partial_+Z^\mu\hat{d}_{\hat{\alpha}} + \Omega_{1\alpha}^{\beta}\lambda^\alpha\omega_\beta V_- \\
&\quad + \Omega_{\mu\alpha}^{\beta}\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-Z^\mu + \hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}V_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + \hat{\Omega}_{\mu\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\partial_+Z^\mu\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + C_\alpha^{\beta\hat{\gamma}}\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}} + \hat{C}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma}d_\gamma\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} \\
&\quad + S_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}}\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{\omega}_{\hat{\delta}} + \omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha + \hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^1(\partial_+V_- - \partial_-V_+)\Big).
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

De la variación de la acción (5.14) con respecto $\tilde{\theta}^1$ nuevamente obtenemos que $V_+ = \partial_+\theta^1$ y $V_- = \partial_-\theta^1$.

La variación de la acción con respecto al campo vectorial fermiónico es

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\Big[\frac{1}{2}B_{11}\delta V_+V_- + \frac{1}{2}L_{1\mu}\delta V_+\partial_-Z^\mu + E_1^{\hat{\alpha}}\delta V_+\hat{d}_{\hat{\alpha}} + \hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\delta V_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} - \frac{1}{2}\tilde{\theta}^1\partial_-\delta V_+ \\
&\quad + \frac{1}{2}B_{11}V_+\delta V_- + \frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+Z^\mu\delta V_- + E_1^\alpha d_\alpha\delta V_- + \Omega_{1\alpha}^{\beta}\lambda^\alpha\omega_\beta\delta V_- + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^1\partial_+\delta V_-\Big] \\
&= -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\Big[\Big(-\frac{1}{2}B_{11}V_- + \frac{1}{2}(-)^\mu L_{1\mu}\partial_-Z^\mu - E_1^{\hat{\alpha}}\hat{d}_{\hat{\alpha}} + \hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + \frac{1}{2}\partial_-\tilde{\theta}^1\Big)\delta V_+ \\
&\quad + \Big(\frac{1}{2}B_{11}V_+ + \frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+Z^\mu + E_1^\alpha d_\alpha + \Omega_{1\alpha}^{\beta}\lambda^\alpha\omega_\beta - \frac{1}{2}\partial_+\tilde{\theta}^1\Big)\delta V_- \\
&\quad - \frac{1}{2}\partial_-(\tilde{\theta}^1\delta V_+) + \frac{1}{2}\partial_+(\tilde{\theta}^1\delta V_-)\Big],
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

lo cual nos permite obtener las expresiones para el campo vectorial

$$
V_- = \frac{1}{B_{11}}\Big((-)^\mu L_{1\mu}\partial_-Z^\mu - 2E_1^{\hat{\alpha}}\hat{d}_{\hat{\alpha}} + 2\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + \partial_-\tilde{\theta}^1\Big) \tag{5.16}
$$

$$
V_+ = \frac{1}{B_{11}}\Big(-L_{\mu 1}\partial_+Z^\mu - 2E_1^\alpha d_\alpha - 2\Omega_{1\alpha}^{\beta}\lambda^\alpha\omega_\beta + \partial_+\tilde{\theta}^1\Big), \tag{5.17}
$$

donde $(-)^\mu = -1$ si μ es un índice fermiónico y $(-)^\mu = 1$ si μ es un índice bosónico.

Reemplazando estas expresiones en (5.14) y ordenando términos se llega a

$$
\begin{aligned}
S \;=\; & -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\Big[-\frac{1}{2}\frac{1}{B_{11}}\partial_+\tilde{\theta}^1\partial_-\tilde{\theta}^1+\frac{1}{2}\frac{L_{1\mu}}{B_{11}}\partial_+\tilde{\theta}^1\partial_-Z^\mu+\frac{1}{2}\frac{L_{\mu1}}{B_{11}}\partial_+Z^\mu\partial_-\tilde{\theta}^1\\
&+\frac{1}{2}\left(L_{\mu\nu}-\frac{L_{1\nu}L_{\mu1}}{B_{11}}\right)\partial_+Z^\mu\partial_-Z^\nu+\left(P^{\alpha\hat{\beta}}-2\frac{E_1^{\hat{\beta}}E_1^\alpha}{B_{11}}\right)d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}}+\frac{E_1^\alpha}{B_{11}}d_\alpha\partial_-\tilde{\theta}^1\\
&+\left(E_\mu^\alpha-\frac{L_{1\mu}E_1^\alpha}{B_{11}}\right)d_\alpha\partial_-Z^\mu+\frac{E_1^{\hat{\alpha}}}{B_{11}}\partial_+\tilde{\theta}^1\hat{d}_{\hat{\alpha}}+\left(E_\mu^{\hat{\alpha}}-\frac{E_1^{\hat{\alpha}}L_{\mu1}}{B_{11}}\right)\partial_+Z^\mu\hat{d}_{\hat{\alpha}}\\
&+\frac{\Omega_{1\alpha}^\beta}{B_{11}}\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-\tilde{\theta}^1+\left(\Omega_{\mu\alpha}^\beta-\frac{L_{1\mu}\Omega_{1\alpha}^\beta}{B_{11}}\right)\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-Z^\mu+\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}}{B_{11}}\partial_+\tilde{\theta}^1\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}\\
&+\left(\hat{\Omega}_{\mu\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}-\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}L_{\mu1}}{B_{11}}\right)\partial_+Z^\mu\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}+\left(C_\alpha^{\beta\hat{\gamma}}-2\frac{E_1^{\hat{\gamma}}\Omega_{1\alpha}^\beta}{B_{11}}\right)\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}}\\
&+\left(\hat{C}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma}-2\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}E_1^\gamma}{B_{11}}\right)d_\gamma\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}+\left(S_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}}-2\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\gamma}}^{\hat{\delta}}\Omega_{1\alpha}^\beta}{B_{11}}\right)\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{\omega}_{\hat{\delta}}\\
&+\omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha+\hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial_+\lambda^{\hat{\alpha}}\Big],
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

encontrando que las transformaciones de la dualidad T fermiónica son

$$
\begin{gathered}
\tilde{B}_{11}=-\frac{1}{B_{11}},\quad \tilde{L}_{1\mu}=\frac{L_{1\mu}}{B_{11}},\quad \tilde{L}_{\mu1}=\frac{L_{\mu1}}{B_{11}},\quad \tilde{L}_{\mu\nu}=L_{\mu\nu}+\frac{L_{\mu1}L_{1\nu}}{B_{11}}\\
\tilde{E}_1^\alpha=\frac{E_1^\alpha}{B_{11}},\quad \tilde{E}_1^{\hat{\alpha}}=\frac{E_1^{\hat{\alpha}}}{B_{11}},\quad \tilde{E}_\mu^\alpha=E_\mu^\alpha-\frac{L_{1\mu}E_1^\alpha}{B_{11}},\quad \tilde{E}_\mu^{\hat{\alpha}}=E_\mu^{\hat{\alpha}}-\frac{E_1^{\hat{\alpha}}L_{\mu1}}{B_{11}}\\
\tilde{\Omega}_{1\alpha}^\beta=\frac{\Omega_{1\alpha}^\beta}{B_{11}},\quad \tilde{\hat{\Omega}}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}=\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}}{B_{11}},\quad \tilde{\Omega}_{\mu\alpha}^\beta=\Omega_{\mu\alpha}^\beta-\frac{L_{1\mu}\Omega_{1\alpha}^\beta}{B_{11}},\quad \tilde{\hat{\Omega}}_{\mu\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}=\hat{\Omega}_{\mu\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}-\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}L_{\mu1}}{B_{11}}\\
\tilde{C}_\alpha^{\beta\hat{\gamma}}=C_\alpha^{\beta\hat{\gamma}}+2\frac{\Omega_{1\alpha}^\beta E_1^{\hat{\gamma}}}{B_{11}},\quad \tilde{\hat{C}}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma}=\hat{C}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma}-2\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}E_1^\gamma}{B_{11}},\quad \tilde{P}^{\alpha\hat{\beta}}=P^{\alpha\hat{\beta}}+2\frac{E_1^\alpha E_1^{\hat{\beta}}}{B_{11}}\\
\tilde{S}_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}}=S_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}}+2\frac{\Omega_{1\alpha}^\beta\hat{\Omega}_{1\hat{\gamma}}^{\hat{\delta}}}{B_{11}}\,.
\end{gathered}
\tag{5.19}
$$

Estas expresiones difieren en algunos factores de 2 con las presentadas en [16] debido al 1/2 que acompaña al campo L_{MN} en la acción (5.11).

Dualidad T fermiónica en el formalismo de Green-Schwarz

La acción de Green-Schwarz (3.56) en el calibre conforme se escribe como

$$
S=\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\, L_{MN}(Z)\partial_+Z^M\partial_-Z^N,\qquad L_{MN}=G_{MN}+B_{MN}\,. \tag{5.20}
$$

Los cálculos de la sección anterior nos permiten encontrar las transformaciones de la dualidad T fermiónica en el formalismo de Green-Schwarz de forma inmediata, ya que la acción (5.20) corresponde al primer término de la acción (5.11). Por lo tanto, las transformaciones de la dualidad T fermiónica en este formalismo están dadas en la primera línea de (5.19)

$$\tilde{B}_{11} = -\frac{1}{B_{11}}, \qquad \tilde{L}_{1\mu} = \frac{L_{1\mu}}{B_{11}}, \qquad \tilde{L}_{\mu 1} = \frac{L_{\mu 1}}{B_{11}}, \qquad \tilde{L}_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{L_{\mu 1}L_{1\nu}}{B_{11}}\,. \tag{5.21}$$

Estas transformaciones corresponden a las presentadas en [16].

5.2. Transformación canónica

En esta sección se presenta una manera alternativa para obtener las transformaciones de la dualidad T utilizando una transformación canónica de las variables del espacio de fase. Esta idea fue introducida en [40] para la dualidad T bosónica y posteriormente fue extendida a la dualidad T fermiónica en [25]. En esta sección se siguen los argumentos presentados en estos dos trabajos. La notación y las condiciones para los campos de fondo son las mismas de la sección 5.1.

5.2.1. Dualidad T bosónica

La densidad Lagrangiana de la acción para la cuerda bosónica (5.1) es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} l_{mn}(X)\partial_+ X^m \partial_- X^n, \qquad\qquad l_{mn} = g_{mn} + b_{mn}\,. \tag{5.22}$$

Nuevamente consideramos la invariancia de los campos de fondo bajo la traslación (5.2) y reescribimos la densidad Lagrangiana (5.22) como[2]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2} g_{00}\partial_+ X^0 \partial_- X^0 + \frac{1}{2} l_{0\mu}\partial_+ X^0 \partial_- X^\mu + \frac{1}{2} l_{\mu 0}\partial_+ X^\mu \partial_- X^0 + \frac{1}{2} l_{\mu\nu}\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \\
&= \frac{1}{2} g_{00}(\dot{X}^0 + X'^0)(\dot{X}^0 - X'^0) + \frac{1}{2} l_{0\mu}\partial_- X^\mu(\dot{X}^0 + X'^0) + \frac{1}{2} l_{\mu 0}\partial_+ X^\mu(\dot{X}^0 - X'^0) \\
&\quad + \frac{1}{2} l_{\mu\nu}\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \\
&= \frac{1}{2} g_{00}(\dot{X}_0^2 - X_0'^2) + (J_+ + J_-)\dot{X}^0 - (J_+ - J_-)X'^0 - V,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

donde μ y ν recorren todos los valores excepto $m = 0$ y se han hecho las definiciones

$$J_+ = \frac{1}{2} l_{\mu 0}\partial_+ X^\mu, \qquad J_- = \frac{1}{2} l_{0\mu}\partial_- X^\mu, \qquad V = -\frac{1}{2} l_{\mu\nu}\partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu. \tag{5.24}$$

[2] Recordando que $X' \equiv \partial_\sigma X$ y $\dot{X} \equiv \partial_\tau X$.

El momento asociado a X^0 está dado por

$$P_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^0} = g_{00}\dot{X}_0 + J_+ + J_- \,. \tag{5.25}$$

Los paréntesis de Poisson para X_0 y P_0 son

$$\begin{aligned} \{X_0(\sigma,\tau), X_0(\sigma',\tau)\} &= \{P_0(\sigma,\tau), P_0(\sigma',\tau)\} = 0 && (5.26) \\ \{X_0(\sigma,\tau), P_0(\sigma',\tau)\} &= \delta(\sigma - \sigma'). && (5.27) \end{aligned}$$

La densidad Hamiltoniana la obtenemos realizando la transformación de Legendre

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{X}^0 P_0 - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{g_{00}}(P^0 - J_+ - J_-)P_0 - \frac{1}{2g_{00}}(P_0 - J_+ - J_-)^2 + \frac{1}{2}g_{00}{X_0'}^2 + (J_+ - J_-)X'^0 \\ &\quad - \frac{1}{g_{00}}(J_+ + J_-)(P^0 - J_+ - J_-) + V \\ &= \frac{1}{2g_{00}}P_0^2 + \frac{1}{2}g_{00}{X_0'}^2 - \frac{1}{g_{00}}P^0(J_+ + J_-) + (J_+ - J_-)X'^0 \\ &\quad + \frac{1}{2g_{00}}(J_+ + J_-)^2 + V. \end{aligned} \tag{5.28}$$

La transformación canónica que se utiliza es [25]

$$P_0 = \tilde{X}_0', \qquad X_0' = \tilde{P}_0 \,, \tag{5.29}$$

la cual está generada por

$$\mathcal{F} = -\int d\sigma\; X_0'\tilde{X}^0, \qquad P_0 = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta X^0}, \qquad \tilde{P}_0 = -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\tilde{X}^0} \,. \tag{5.30}$$

Reemplazando (5.29) en (5.28), obtenemos la densidad Hamiltoniana transformada

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{TC} &= \frac{1}{2g_{00}}{\tilde{X}_0'}^2 + \frac{1}{2}g_{00}\tilde{P}_0^2 - \frac{1}{g_{00}}\tilde{X}_0'(J_+ + J_-) + (J_+ - J_-)\tilde{P}_0 \\ &\quad + \frac{1}{2g_{00}}(J_+ + J_-)^2 + V. \end{aligned} \tag{5.31}$$

La densidad Hamiltoniana dual se obtiene de (5.28) reemplazando cada elemento por su dual

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2\tilde{g}_{00}}\tilde{P}_0^2 + \frac{1}{2}\tilde{g}_{00}{\tilde{X}_0'}^2 - \frac{1}{\tilde{g}_{00}}\tilde{P}^0(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-) + (\tilde{J}_+ - \tilde{J}_-)\tilde{X}'^0 \\ &\quad + \frac{1}{2\tilde{g}_{00}}(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)^2 + \tilde{V}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Comparando las expresiones para $\mathcal{H}_{TC}$ y $\tilde{\mathcal{H}}$, vemos que para que sean iguales se debe cumplir que

$$\tilde{J}_{\pm} = \mp\frac{J_{\pm}}{g_{11}}, \qquad \tilde{V} = V + 2\frac{J_+J_-}{g_{11}}, \qquad \tilde{g}_{11} = \frac{1}{g_{11}}\,, \tag{5.33}$$

de las dos primeras relaciones tenemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_+ &= \frac{1}{2}\tilde{l}_{\mu 0}\partial_+X^\mu = -\frac{1}{2}\frac{l_{\mu 0}}{g_{00}}\partial_+X^\mu && (5.34)\\
\tilde{J}_- &= \frac{1}{2}\tilde{l}_{0\mu}\partial_-X^\mu = \frac{1}{2}\frac{l_{0\mu}}{g_{00}}\partial_-X^\mu && (5.35)\\
\tilde{V} &= -\frac{1}{2}\tilde{l}_{\mu\nu}\partial_+X^\mu\partial_-X^\nu = -\frac{1}{2}\left(l_{\mu\nu} - \frac{l_{\mu 0}l_{0\nu}}{g_{00}}\right)\partial_+X^\mu\partial_-X^\nu, && (5.36)
\end{aligned}$$

de donde obtenemos las transformaciones

$$\tilde{g}_{00} = \frac{1}{g_{00}}, \quad \tilde{l}_{0\mu} = \frac{l_{0\mu}}{g_{00}}, \quad \tilde{l}_{\mu 0} = -\frac{l_{\mu 0}}{g_{00}}, \quad \tilde{l}_{\mu\nu} = l_{\mu\nu} - \frac{l_{\mu 0}l_{0\nu}}{g_{00}}\,, \tag{5.37}$$

las cuales coinciden con las obtenidas en la sección 5.1.1.

5.2.2. Dualidad T fermiónica

Dualidad T fermiónica en el formalismo de espinores puros

La densidad Lagrangiana de la acción (5.11) es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}L_{MN}(Z)\partial_+Z^M\partial_-Z^N + P^{\alpha\hat{\beta}}(Z)d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}} + E^\alpha_M(Z)d_\alpha\partial_-Z^M\\
&\quad +E^{\hat{\alpha}}_M(Z)\partial_+Z^M\hat{d}_{\hat{\alpha}} + \Omega^\beta_{M\alpha}(Z)\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-Z^M + \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{M\hat{\alpha}}(Z)\partial_+Z^M\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha(Z)\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}}\\
&\quad +\hat{C}^{\hat{\beta}\gamma}_{\hat{\alpha}}(Z)d_\gamma\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}(Z)\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{\omega}_{\hat{\delta}} + \omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha + \hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}. \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

Suponiendo la invariancia de los campos de fondo bajo la traslación (5.12), reescribimos la densidad Lagrangiana (5.38) como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}B_{11}\partial_+\theta^1\partial_-\theta^1 + \frac{1}{2}L_{1\mu}\partial_+\theta^1\partial_-Z^\mu + \frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+Z^\mu\partial_-\theta^1 + \frac{1}{2}L_{\mu\nu}\partial_+Z^\mu\partial_-Z^\nu\\
&\quad +P^{\alpha\hat{\beta}}d_\alpha\hat{d}_{\hat{\beta}} + E^\alpha_1 d_\alpha\partial_-\theta^1 + E^\alpha_\mu d_\alpha\partial_-Z^\mu + E^{\hat{\alpha}}_1\partial_+\theta^1\hat{d}_{\hat{\alpha}} + E^{\hat{\alpha}}_\mu\partial_+Z^\mu\hat{d}_{\hat{\alpha}} + \Omega^\beta_{1\alpha}\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-\theta^1\\
&\quad +\Omega^\beta_{\mu\alpha}\lambda^\alpha\omega_\beta\partial_-Z^\mu + \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{1\hat{\alpha}}\partial_+\theta^1\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + \hat{\Omega}^{\hat{\beta}}_{\mu\hat{\alpha}}\partial_+Z^\mu\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}} + C^{\beta\hat{\gamma}}_\alpha\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{d}_{\hat{\gamma}} + \hat{C}^{\hat{\beta}\gamma}_{\hat{\alpha}}d_\gamma\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\hat{\omega}_{\hat{\beta}}\\
&\quad +S^{\beta\hat{\delta}}_{\alpha\hat{\gamma}}\lambda^\alpha\omega_\beta\hat{\lambda}^{\hat{\gamma}}\hat{\omega}_{\hat{\delta}} + \omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha + \hat{\omega}_{\hat{\alpha}}\partial_+\hat{\lambda}^{\hat{\alpha}}\\
&= -B_{11}\dot{\theta}^1\theta'^1 - \dot{\theta}^1(J_+ - J_-) + \theta'^1(J_+ + J_-) - V, \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

donde

$$
\begin{aligned}
J_+ &= \frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+ Z^\mu + E_1^\alpha d_\alpha + \Omega_{1\alpha}^\beta \lambda^\alpha \omega_\beta, && (5.40)\\
J_- &= -\frac{1}{2}(-)^\mu L_{1\mu}\partial_- Z^\mu - E_1^{\hat\alpha}\hat d_{\hat\alpha} - \hat\Omega_{1\hat\alpha}^{\hat\beta}\hat\lambda^{\hat\alpha}\hat\omega_{\hat\beta} && (5.41)\\
V &= -\frac{1}{2}L_{\mu\nu}\partial_+ Z^\mu \partial_- Z^\nu - P^{\alpha\hat\beta} d_\alpha \hat d_{\hat\beta} - E_\mu^\alpha d_\alpha \partial_- Z^\mu - E_\mu^{\hat\alpha}\partial_+ Z^\mu \hat d_{\hat\alpha}\\
&\quad -\Omega_{\mu\alpha}^\beta \lambda^\alpha \omega_\beta \partial_- Z^\mu - \hat\Omega_{\mu\hat\alpha}^{\hat\beta}\partial_+ Z^\mu \hat\lambda^{\hat\alpha}\hat\omega_{\hat\beta} - C_\alpha^{\beta\hat\gamma}\lambda^\alpha\omega_\beta \hat d_{\hat\gamma}\\
&\quad -\hat C_{\hat\alpha}^{\hat\beta\gamma} d_\gamma \hat\lambda^{\hat\alpha}\hat\omega_{\hat\beta} - S_{\alpha\hat\gamma}^{\beta\hat\delta}\lambda^\alpha\omega_\beta\hat\lambda^{\hat\gamma}\hat\omega_{\hat\delta} - \omega_\alpha\partial_-\lambda^\alpha - \hat\omega_{\hat\alpha}\partial_+\hat\lambda^{\hat\alpha}. && (5.42)
\end{aligned}
$$

El momento asociado a θ está dado por[3]

$$
\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = -B_{11}\theta' - J_+ + J_- \,. \qquad (5.43)
$$

Los paréntesis de Poisson para θ y Π son

$$
\begin{aligned}
\{\theta(\sigma,\tau),\theta(\sigma',\tau)\} &= \{\Pi(\sigma,\tau),\Pi(\sigma',\tau)\} = 0 && (5.44)\\
\{\theta(\sigma,\tau),\Pi(\sigma',\tau)\} &= -\delta(\sigma-\sigma') && (5.45)\\
\{\Pi(\sigma,\tau),\theta'(\sigma',\tau)\} &= -\frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma-\sigma') && (5.46)\\
\{\theta'(\sigma,\tau),\Pi(\sigma',\tau)\} &= -\frac{\partial}{\partial\sigma}\delta(\sigma-\sigma') = \frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma-\sigma'). && (5.47)
\end{aligned}
$$

La ecuación (5.43) define la restricción primaria

$$
\phi = \Pi + B_{11}\theta' + J_+ - J_- \approx 0\,. \qquad (5.48)
$$

El tratamiento de sistemas restringidos definido por Dirac [33] que se sigue en esta sección, se discute en el Apéndice E.

La densidad Hamiltoniana la obtenemos realizando una transformación de Legendre

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \dot\theta\Pi - \mathcal{L}\\
&= \dot\theta(\Pi + B_{11}\theta' + J_+ - J_-) - \theta'(J_+ + J_-) + V\\
&= -\theta'(J_+ + J_-) + V. && (5.49)
\end{aligned}
$$

De acuerdo con (E.5), el Hamiltoniano total lo obtenemos como

$$
H_{tot} = \int d\sigma\,(\mathcal{H} + u\phi), \qquad (5.50)
$$

[3]Por comodidad, en adelante se escribe θ en lugar de θ^1.

donde u es un multiplicador de Lagrange que debe ser determinado.

Para verificar si hay restricciones secundarias calculamos la evolución temporal de ϕ

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\sigma) &= \{\phi(\sigma), H_{tot}\} \\ &= \int d\sigma' \,\{\phi(\sigma), \mathcal{H}(\sigma')\} - \int d\sigma' \,\{\phi(\sigma), \phi(\sigma')\} u(\sigma'),\end{aligned} \tag{5.51}$$

esto se calcula utilizando las expresiones (5.46) y (5.47)

$$\begin{aligned}\{\phi(\sigma), \mathcal{H}(\sigma')\} &= -\{\Pi(\sigma), \theta'(\sigma')\}(J_+ + J_-)(\sigma') \\ &= \frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')(J_+ + J_-)(\sigma')\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}\{\phi(\sigma), \phi(\sigma')\} &= B_{11}(\sigma')\{\Pi(\sigma), \theta'(\sigma')\} + B_{11}(\sigma)\{\theta'(\sigma), \Pi(\sigma')\} \\ &= \Big(B_{11}(\sigma) - B_{11}(\sigma')\Big)\frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma-\sigma') \\ &= \frac{\partial}{\partial\sigma'}\Big[\Big(B_{11}(\sigma) - B_{11}(\sigma')\Big)\delta(\sigma-\sigma')\Big] - \frac{\partial}{\partial\sigma'}\Big(B_{11}(\sigma) - B_{11}(\sigma')\Big)\delta(\sigma-\sigma') \\ &= B'_{11}(\sigma')\delta(\sigma-\sigma').\end{aligned} \tag{5.53}$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\sigma) &= \int d\sigma' \,\frac{\partial}{\partial\sigma'}\delta(\sigma-\sigma')(J_+ + J_-)(\sigma') - \int d\sigma' \,u(\sigma')B'_{11}(\sigma')\delta(\sigma-\sigma') \\ &= -(J_+ + J_-)'(\sigma) - u(\sigma)B'_{11}(\sigma).\end{aligned} \tag{5.54}$$

La condición $\dot{\phi}(\sigma) \approx 0$, en lugar de introducir una nueva restricción, permite determinar el multiplicador de Lagrange

$$u = -\frac{1}{B'_{11}}(J_+ + J_-)'. \tag{5.55}$$

Conociendo esto, la densidad Hamiltoniana total toma la forma

$$\mathcal{H}_{tot} = -\theta'(J_+ + J_-) + V - \frac{1}{B'_{11}}(J_+ + J_-)'(\Pi + B_{11}\theta' + J_+ - J_-). \tag{5.56}$$

Utilizando la transformación canónica [25]

$$\theta' = \tilde{\Pi}, \qquad \Pi = -\tilde{\theta}', \tag{5.57}$$

generada por

$$\mathcal{F} = \int d\sigma \;\theta'\tilde{\theta}, \qquad \Pi = \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\theta}, \qquad \tilde{\Pi} = -\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\tilde{\theta}}, \tag{5.58}$$

obtenemos la densidad Hamiltoniana total transformada

$$\mathcal{H}_{tot,TC} = -\tilde{\Pi}(J_+ + J_-) + V - \frac{1}{B'_{11}}(J_+ + J_-)'(-\tilde{\theta}' + B_{11}\tilde{\Pi} + J_+ - J_-). \tag{5.59}$$

Comparando con la densidad Hamiltoniana dual

$$\tilde{\mathcal{H}}_{tot} = -\tilde{\theta}'(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-) + \tilde{V} - \frac{1}{\tilde{B}'_{11}}(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)'(\tilde{\Pi} + \tilde{B}_{11}\tilde{\theta}' + \tilde{J}_+ - \tilde{J}_-), \tag{5.60}$$

encontramos que $\mathcal{H}_{tot,TC}$ es igual a $\tilde{\mathcal{H}}_{tot}$ si

$$\frac{B_{11}}{B'_{11}}(J_+ + J_-)' - (J_+ + J_-) = \frac{1}{\tilde{B}'_{11}}(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)' \tag{5.61}$$

$$\frac{1}{B'_{11}}(J_+ + J_-)' = (\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-) - \frac{\tilde{B}'_{11}}{\tilde{B}'_{11}}(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)' \tag{5.62}$$

$$V - \frac{1}{B'_{11}}(J_+ + J_-)'(J_+ - J_-) = \tilde{V} - \frac{1}{\tilde{B}'_{11}}(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)'(\tilde{J}_+ - \tilde{J}_-). \tag{5.63}$$

La relación (5.61) se puede escribir como

$$\left(\frac{J_+ + J_-}{B_{11}}\right)' = -\left(\frac{1}{B_{11}}\right)' \frac{1}{\tilde{B}'_{11}}(\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)', \tag{5.64}$$

que se cumple si

$$\left(\frac{J_+ + J_-}{B_{11}}\right)' = (\tilde{J}_+ + \tilde{J}_-)', \qquad \tilde{B}'_{11} = -\left(\frac{1}{B_{11}}\right)', \tag{5.65}$$

de donde se obtiene que[4]

$$\tilde{J}_+ + \tilde{J}_- = \frac{J_+ + J_-}{B_{11}}, \qquad \tilde{B}_{11} = -\frac{1}{B_{11}}\,. \tag{5.66}$$

Utilizando estas expresiones en la relación (5.63) encontramos que

$$\tilde{J}_\pm = \frac{J_\pm}{B_{11}}, \qquad \tilde{V} = V + 2\frac{J_+ J_-}{B_{11}}\,. \tag{5.67}$$

[4]Salvo constantes de integración.

Reemplazando las expresiones para J_+, J_-, V y sus duales, obtenemos las transformaciones de la dualidad T fermiónica

$$\tilde{B}_{11} = -\frac{1}{B_{11}}, \quad \tilde{L}_{1\mu} = \frac{L_{1\mu}}{B_{11}}, \quad \tilde{L}_{\mu 1} = \frac{L_{\mu 1}}{B_{11}}, \quad \tilde{L}_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{L_{\mu 1}L_{1\nu}}{B_{11}}$$

$$\tilde{E}_1^{\alpha} = \frac{E_1^{\alpha}}{B_{11}}, \quad \tilde{E}_1^{\hat{\alpha}} = \frac{E_1^{\hat{\alpha}}}{B_{11}}, \quad \tilde{E}_{\mu}^{\alpha} = E_{\mu}^{\alpha} - \frac{L_{1\mu}E_1^{\alpha}}{B_{11}}, \quad \tilde{E}_{\mu}^{\hat{\alpha}} = E_{\mu}^{\hat{\alpha}} - \frac{E_1^{\hat{\alpha}}L_{\mu 1}}{B_{11}}$$

$$\tilde{\Omega}_{1\alpha}^{\beta} = \frac{\Omega_{1\alpha}^{\beta}}{B_{11}}, \quad \tilde{\hat{\Omega}}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}}{B_{11}}, \quad \tilde{\Omega}_{\mu\alpha}^{\beta} = \Omega_{\mu\alpha}^{\beta} - \frac{L_{1\mu}\Omega_{1\alpha}^{\beta}}{B_{11}}, \quad \tilde{\hat{\Omega}}_{\mu\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} = \hat{\Omega}_{\mu\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}} - \frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}L_{\mu 1}}{B_{11}}$$

$$\tilde{C}_{\alpha}^{\beta\hat{\gamma}} = C_{\alpha}^{\beta\hat{\gamma}} + 2\frac{\Omega_{1\alpha}^{\beta}E_1^{\hat{\gamma}}}{B_{11}}, \quad \tilde{\hat{C}}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma} = \hat{C}_{\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}\gamma} - 2\frac{\hat{\Omega}_{1\hat{\alpha}}^{\hat{\beta}}E_1^{\gamma}}{B_{11}}, \quad \tilde{P}^{\alpha\hat{\beta}} = P^{\alpha\hat{\beta}} + 2\frac{E_1^{\alpha}E_1^{\hat{\beta}}}{B_{11}}$$

$$\tilde{S}_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}} = S_{\alpha\hat{\gamma}}^{\beta\hat{\delta}} + 2\frac{\Omega_{1\alpha}^{\beta}\hat{\Omega}_{1\hat{\gamma}}^{\hat{\delta}}}{B_{11}}\,. \tag{5.68}$$

Estas expresiones coinciden con las obtenidas por el método de Buscher en la sección 5.1.2.

Dualidad T fermiónica en el formalismo de Green-Schwarz

Es claro que las transformaciones de la dualidad T fermiónica en este formalismo se obtienen de la primera línea de (5.19). Pero podemos seguir el mismo procedimiento de la sección anterior utilizando la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}L_{MN}(Z)\partial_+ Z^M \partial_- Z^N, \qquad L_{MN} = G_{MN} + B_{MN}\,, \tag{5.69}$$

con las expresiones

$$J_+ = \frac{1}{2}L_{\mu 1}\partial_+ Z^{\mu}, \quad J_- = -\frac{1}{2}(-)^{\mu}L_{1\mu}\partial_- Z^{\mu}, \quad V = \frac{1}{2}L_{\mu\nu}\partial_+ Z^{\mu}\partial_- Z^{\nu}, \tag{5.70}$$

y al hacer los reemplazos en las relaciones (5.67), encontramos que las transformaciones son nuevamente

$$\tilde{B}_{11} = -\frac{1}{B_{11}}, \quad \tilde{L}_{1\mu} = \frac{L_{1\mu}}{B_{11}}, \quad \tilde{L}_{\mu 1} = \frac{L_{\mu 1}}{B_{11}}, \quad \tilde{L}_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{L_{\mu 1}L_{1\nu}}{B_{11}}\,.$$

Tenemos entonces que con el método de la transformación canónica y el método de Buscher se obtienen las mismas transformaciones para la dualidad T. A pesar de que los cálculos son un poco más extensos, la ventaja de la formulación canónica está en que no es necesario incluir elementos adicionales como los campos de calibre que emplea el método de Buscher.

Capítulo 6

Conclusiones

Se presentó el formalismo de Ramond-Neveu-Schwarz, mostrando cómo cuantizar la teoría en forma covariante en los sectores NS y R. Además se mostró que es posible obtener un espectro supersimétrico utilizando la proyección GSO.

Se presentó el formalismo de Green-Schwarz, evidenciando la presencia de la simetría kappa. Se cuantizó la teoría en el calibre de cono de luz, obteniendo un espectro supersimétrico en un único sector sin la necesidad de realizar ningún truncamiento al estilo de la proyección GSO.

Se estudiaron los aspectos básicos del formalismo de espinores puros, mostrando cómo se obtiene este formalismo a partir del formalismo de Green-Schwarz. Se presentó la forma de solucionar la restricción de los espinores puros y la cuantización de la teoría utilizando un operador BRST.

Se calcularon las transformaciones de la dualidad T bosónica y fermiónica utilizando el procedimiento de Buscher. Luego se mostró que se pueden obtener los mismos resultados utilizando una transformación canónica de las variables del espacio de fase, sin la necesidad de introducir campos de calibre adicionales.

Apéndice A

Matrices Gamma

En este apéndice se siguen los argumentos de [29].
Las matrices Gamma en 10 dimensiones son de 32×32, se denotan como Γ^μ y satisfacen el álgebra

$$[\Gamma^\mu, \Gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}. \tag{A.1}$$

Estas matrices se construyen como

$$\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{\mu\alpha\beta} \\ \gamma^\mu_{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.2}$$

donde $\mu, \nu = 0, \ldots, 9$ y $\alpha, \beta = 1, \ldots, 16$. Las matrices $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ son matrices simétricas de 16×16 que satisfacen

$$\begin{aligned} [\gamma^\mu_{\alpha\beta}, \gamma^{\nu\beta\gamma}]_+ &= 2\eta^{\mu\nu}\delta^\gamma_\alpha && \text{(A.3)} \\ \gamma_{\mu\alpha(\beta}\gamma^\mu_{\gamma)\delta} &= \gamma_{\mu\alpha\beta}\gamma^\mu_{\gamma\delta} + \gamma_{\mu\alpha\gamma}\gamma^\mu_{\beta\delta} = 0\,. && \text{(A.4)} \end{aligned}$$

Estas matrices están dadas por

$$\begin{aligned} \gamma^{0\alpha\beta} &= -\gamma^0_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{8\times 8} & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{8\times 8} \end{pmatrix} && \text{(A.5)} \\ \gamma^{a\alpha\beta} &= \gamma^a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \tau^a \\ (\tau^a)^T & 0 \end{pmatrix} && \text{(A.6)} \\ \gamma^{9\alpha\beta} &= \gamma^9_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{8\times 8} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{8\times 8} \end{pmatrix}, && \text{(A.7)} \end{aligned}$$

donde $a = 1, \ldots, 8$. Las matrices τ^a se obtienen de la forma

$$\begin{aligned} \tau^a = \{ & -i\sigma^2 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^2,\ i\mathbb{1} \otimes \sigma^1 \otimes \sigma^2,\ i\mathbb{1} \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2,\ i\sigma^1 \otimes \sigma^2 \otimes \mathbb{1}, \\ & i\sigma^3 \otimes \sigma^2 \otimes \mathbb{1},\ i\sigma^2 \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma^1,\ i\sigma^2 \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma^3,\ \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}\}, \end{aligned} \tag{A.8}$$

donde las matrices sigma son las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Las matrices τ^a satisfacen el álgebra

$$[\tau^a, \tau^b]_+ = 2\delta^{ab}. \tag{A.10}$$

Las matrices de quiralidad y de conjugación tienen la forma explícita

$$\Gamma^{11} = \Gamma^0\Gamma^1 \dots \Gamma^9 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{16\times16} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{16\times16} \end{pmatrix} \tag{A.11}$$

y

$$C = \Gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{16\times16} \\ -\mathbb{1}_{16\times16} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.12}$$

respectivamente.

Apéndice B

Detalle de varios cálculos del formalismo RNS

B.1. Supersimetría de la acción RNS

La variación de la acción (2.11) bajo las transformaciones de supersimetría (2.17) es

$$
\begin{aligned}
\delta S &= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma(2\partial_\alpha\delta X^\mu\partial^\alpha X_\mu + \delta\bar{\psi}^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu - \partial_\alpha\delta\bar{\psi}_\mu\rho^\alpha\psi^\mu) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ \bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu - \rho^\beta\partial_\beta X^\mu\rho^\alpha\partial_\alpha\psi_\mu + \rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu\psi^\mu) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ \bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu - \partial_\alpha(\rho^\beta\partial_\beta X^\mu\rho^\alpha\psi_\mu) + 2\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta X^\mu\psi_\mu) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ \bar{\epsilon}(2\partial_\alpha\psi^\mu\partial^\alpha X_\mu - \partial_\alpha(\rho^\beta\partial_\beta X^\mu\rho^\alpha\psi_\mu) + 2\partial_\alpha\partial^\alpha X^\mu\psi_\mu) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\ \bar{\epsilon}\partial_\alpha(2\partial^\alpha X^\mu\psi_\mu - \rho^\beta\partial_\beta X^\mu\rho^\alpha\psi_\mu),
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

donde se ha usado

$$
\rho^\beta\rho^\alpha\partial_\alpha\partial_\beta = \frac{1}{2}(\rho^\beta\rho^\alpha + \rho^\alpha\rho^\beta)\partial_\alpha\partial_\beta = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \partial_\alpha\partial^\alpha. \tag{B.2}
$$

Tenemos entonces que la supersimetría de la acción RNS se mantiene salvo una derivada total que puede ser manejada con las condiciones de frontera adecuadas.

B.2. Supergeneradores de Virasoro

Teniendo en cuenta que

$$
\partial_\pm X^\mu = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n^\mu\, e^{-in(\tau\pm\sigma)}, \tag{B.3}
$$

la parte bosónica de los supergeneradores de Virasoro se obtiene de (2.81), utilizando la parte bosónica de las expresiones (2.28) y (2.29) (el cálculo se hace en $\tau = 0$)

$$\begin{aligned}
L_m^{(bos)} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma(e^{im\sigma}\partial_+X^\mu\partial_+X_\mu + e^{-im\sigma}\partial_-X^\mu\partial_-X_\mu) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi d\sigma\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_n\cdot\alpha_l\, e^{-i(n+l-m)\sigma} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_n\cdot\alpha_l\, e^{i(n+l-m)\sigma}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_n\cdot\alpha_l\,\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\cos\big((n+l-m)\sigma\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\alpha_n\cdot\alpha_l\,\delta_{n+l,m} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\cdot\alpha_{m-n}\,. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}$$

B.3. Algunos conmutadores

Para obtener el conmutador $[X^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')]$, se calcula el paréntesis de Poisson, luego se pasa de la teoría clásica a la cuántica haciendo la sustitución $\{\dots\} \to -i[\dots]$. De igual forma, el anticonmutador $[\psi_A^\mu(\tau,\sigma), \psi_B^\nu(\tau,\sigma')]_+$ se obtiene del paréntesis de Poisson para variables de Grassmann.

Se puede verificar facilmente que para las cuerdas abiertas, los modos de oscilación para los campos bosónicos α_n^μ están dados por

$$\alpha_n^\mu = \int_0^\pi d\sigma\cos n\sigma\left(P^\mu(\tau,\sigma) - \frac{in}{\pi}X^\mu(\tau,\sigma)\right). \qquad \text{(B.5)}$$

Con esta expresión y el conmutador (2.67) se calcula en forma directa el conmutador para los modos de oscilación de los campos bosónicos

$$\begin{aligned}
[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] &= -\frac{i}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\int_0^\pi d\sigma'\cos m\sigma\cos n\sigma'\Big(n[P^\mu(\tau,\sigma), X^\nu(\tau,\sigma')] \\
&\quad +m[X^\mu(\tau,\sigma), P^\nu(\tau,\sigma')]\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\int_0^\pi d\sigma'\cos m\sigma\cos n\sigma'(m-n)\eta^{\mu\nu}\delta(\sigma-\sigma') \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\sigma\cos m\sigma\cos n\sigma(m-n)\eta^{\mu\nu} \\
&= m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}. \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

Análogamente, para los modos de oscilación de los campos fermiónicos tenemos que

$$b_r^\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi d\sigma \left(\psi_+^\mu(\tau,\sigma) e^{ir(\tau+\sigma)} + \psi_-^\mu(\tau,\sigma) e^{ir(\tau-\sigma)} \right), \tag{B.7}$$

en el sector NS, y

$$d_n^\mu = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\pi d\sigma \left(\psi_+^\mu(\tau,\sigma) e^{in(\tau+\sigma)} + \psi_-^\mu(\tau,\sigma) e^{in(\tau-\sigma)} \right), \tag{B.8}$$

en el sector R.

Utilizando estas expresiones y el anticonmutador (2.68) se obtienen los anticonmutadores $[b_r^\mu, b_s^\nu]_+$ y $[d_m^\mu, d_n^\nu]_+$

$$\begin{aligned}
[b_r^\mu, b_s^\nu] &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' e^{i\tau(r+s)} \Big(e^{i(r\sigma+s\sigma')} [\psi_+^\mu(\tau,\sigma), \psi_+^\nu(\tau,\sigma')]_+ \\
&\quad + e^{-i(r\sigma+s\sigma')} [\psi_-^\mu(\tau,\sigma), \psi_-^\nu(\tau,\sigma')]_+ \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma' e^{i\tau(r+s)} \Big(e^{i(r\sigma+s\sigma')} + e^{-i(r\sigma+s\sigma')} \Big) \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma-\sigma') \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma e^{i\tau(r+s)} \cos\big((r+s)\sigma\big) \eta^{\mu\nu} \\
&= \delta_{r+s} \eta^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

El anticonmutador $[d_m^\mu, d_n^\nu]_+$ se obtiene en forma similar.

Apéndice C

Invariancia kappa de la acción de Green-Schwarz

Al igual que en (3.16), la transformación (3.29) implica que

$$\delta\Pi_{\alpha}^{\mu} = -2\delta\bar{\theta}^{A}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{A}, \tag{C.1}$$

con lo cual la variación de (3.23) es

$$\delta S_1 = \frac{2}{\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-h}h^{\alpha\beta}\delta\bar{\theta}^{A}\gamma_{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{A}\Pi_{\beta}^{\mu}\,. \tag{C.2}$$

La variación de la acción (3.27) está dada por

$$\begin{aligned}
\delta S_2 \;=\; & -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{\alpha\beta}\Big[-(\partial_{\alpha}\delta\theta^{A}\gamma^{\mu}\theta^{A} + \delta\theta^{A}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{A})(\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{1} - \bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2}) \\
& +\partial_{\alpha}X^{\mu}(\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{1} - \partial_{\beta}\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\theta^{1} - \delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2} + \partial_{\beta}\delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\theta^{2}) + \delta\bar{\theta}^{1}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{1}\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2} \\
& -\partial_{\alpha}\delta\bar{\theta}^{1}\gamma^{\mu}\theta^{1}\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2} + \bar{\theta}^{1}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{1}\delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2} - \bar{\theta}^{1}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{1}\partial_{\beta}\delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\theta^{2}\Big] \\
=\; & -\frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{\alpha\beta}\Big[\partial_{\alpha}X^{\mu}(\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{1} - \partial_{\beta}\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\theta^{1} - \delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2} + \partial_{\beta}\delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\theta^{2}) \\
& +2\delta\bar{\theta}^{1}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{1}\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2} + 2\delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\beta}\theta^{2}\bar{\theta}^{1}\gamma^{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{1}\Big] \\
=\; & \frac{1}{\pi}\int d^2\sigma\varepsilon^{\alpha\beta}\Big[2(\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{1} - \delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\partial_{\alpha}\theta^{2})\Pi_{\beta}^{\mu} \\
& -\partial_{\beta}\partial_{\alpha}X^{\mu}(\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\theta^{1} - \delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\theta^{2}) + \partial_{\beta}\big[\partial_{\alpha}X^{\mu}(\delta\bar{\theta}^{1}\gamma_{\mu}\theta^{1} - \delta\bar{\theta}^{2}\gamma_{\mu}\theta^{2})\big]\Big],
\end{aligned} \tag{C.3}$$

el segundo término de esta expresión se anula debido a que $\varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}$ mientras que las derivadas ∂_{α} y ∂_{β} conmutan.

Tenemos entonces que, salvo una derivada total, la variación de la acción $S = S_1 + S_2$ está dada por

$$\delta S = \frac{4}{\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} \Big(P_{+}^{\alpha\beta} \delta\bar{\theta}^1 \gamma_\mu \partial_\alpha \theta^1 + P_{-}^{\alpha\beta} \delta\bar{\theta}^2 \gamma_\mu \partial_\alpha \theta^2 \Big) \Pi_\beta^\mu \,, \tag{C.4}$$

obteniendo así, que la acción total es invariante bajo las transformaciones κ (3.28), ya que $P_+ P_- = P_- P_+ = 0$.

Apéndice D

Detalle de varios cálculos del formalismo de espinores puros

D.1. Cálculo de algunos OPE

Los cálculos de esta sección utilizan los OPE (4.8) y (4.9).

- OPE para las restricciones (4.5)

$$
\begin{aligned}
d_\alpha(y)d_\beta(z) \quad \sim \quad & :p_\alpha(y)::\gamma^\mu_{\beta\gamma}\partial X_\mu(z)\theta^\gamma(z): -\frac{1}{2}:p_\alpha(y)::\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\gamma(z)\theta^\delta(z)\partial\theta^\epsilon(z): \\
& + :\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\partial X_\mu(y)\theta^\gamma(y)::p_\beta(z): + :\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\partial X_\mu(y)\theta^\gamma(y)::\gamma^\nu_{\beta\delta}\partial X_\nu(z)\theta^\delta(z): \\
& -\frac{1}{2}:\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\gamma(y)\theta^\delta(y)\partial\theta^\epsilon(y)::p_\beta(z): \\
\sim \quad & \frac{\delta^\gamma_\alpha:\gamma^\mu_{\beta\gamma}\partial X_\mu(z):}{y-z} - \frac{1}{2}\frac{\delta^\gamma_\alpha:\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\delta(z)\partial\theta^\epsilon(z):}{y-z} \\
& -\frac{1}{2}\frac{\delta^\delta_\alpha:\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\gamma(z)\partial\theta^\epsilon(z):}{y-z} - \frac{1}{2}\frac{\delta^\epsilon_\alpha:\gamma^\mu_{\beta\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\gamma(z)\theta^\delta(z):}{(y-z)^2} \\
& +\frac{\delta^\gamma_\beta:\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\partial X_\mu(y):}{y-z} - \frac{\eta^{\mu\nu}:\gamma_{\mu\alpha\gamma}\gamma_{\nu\beta\delta}\theta^\gamma(y)\theta^\delta(z):}{(y-z)^2} \\
& -\frac{1}{2}\frac{\delta^\gamma_\beta:\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\delta(y)\partial\theta^\epsilon(y):}{y-z} - \frac{1}{2}\frac{\delta^\delta_\beta:\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\gamma(y)\partial\theta^\epsilon(y):}{y-z} \\
& +\frac{1}{2}\frac{\delta^\epsilon_\beta:\gamma^\mu_{\alpha\gamma}\gamma_{\mu\delta\epsilon}\theta^\gamma(y)\theta^\delta(y):}{(y-z)^2} \\
\sim \quad & \frac{2\gamma^\mu_{\alpha\beta}\partial X_\mu - \gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\gamma\partial\theta^\delta}{y-z} + \frac{\gamma^\mu_{\alpha\beta}\gamma_{\mu\gamma\delta}\theta^\gamma\theta^\delta}{(y-z)^2} \\
\sim \quad & \frac{2\gamma^\mu_{\alpha\beta}\Pi_\mu}{y-z}\,.
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

en el paso de la segunda a la tercera línea se expanden los campos que dependen de y y se conservan sólo los términos singulares. El mismo procedimiento se sigue en los demás cálculos. El término del polo de segundo orden en la tercera línea se anula debido a que $\gamma^{\mu}_{\gamma\delta}\theta^{\gamma}\theta^{\delta} = -\gamma^{\mu}_{\gamma\delta}\theta^{\gamma}\theta^{\delta} = 0$

- OPE para el tensor de energía momento (4.10)

$$
\begin{aligned}
T(y)T(z) &\sim \frac{1}{4} : \partial X^{\mu}(y)\partial X_{\mu}(y) :: \partial X^{\nu}(z)\partial X_{\nu}(z) : + : p_{\alpha}(y)\partial\theta^{\alpha}(y) :: p_{\beta}(z)\partial\theta^{\beta}(z) : \\
&\sim \frac{1}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu} - 2\delta^{\beta}_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\beta}}{(y-z)^4} - \frac{\eta^{\mu\nu} : \partial X_{\mu}(y)\partial X_{\nu}(z) :}{(y-z)^2} + \frac{\delta^{\beta}_{\alpha} : \partial\theta^{\alpha}(y)p_{\beta}(z) :}{(y-z)^2} \\
&\quad -\frac{\delta^{\alpha}_{\beta} : p_{\alpha}(y)\partial\theta^{\beta}(z) :}{(y-z)^2} \\
&\sim -\frac{1}{2}\frac{22}{(y-z)^4} - \frac{\partial X^{\mu}\partial X_{\mu} + 2p_{\alpha}\partial\theta^{\alpha}}{(y-z)^2} - \frac{\partial^2 X^{\mu}\partial X_{\mu} + p_{\alpha}\partial^2\theta^{\alpha} + \partial p_{\alpha}\partial\theta^{\alpha}}{y-z} \\
&\sim -\frac{1}{2}\frac{22}{(y-z)^4} + \frac{2T(z)}{(y-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{y-z}\,, \qquad \text{(D.2)}
\end{aligned}
$$

- OPE para las corrientes de Lorentz (4.17)

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}^{\mu\nu}(y)\tilde{M}^{\rho\sigma}(z) &= \frac{1}{4} : p_{\alpha}(y)(\gamma^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta}(y) :: p_{\gamma}(z)(\gamma^{\rho\sigma})^{\gamma}{}_{\delta}\theta^{\delta}(z) : \\
&\sim \frac{1}{4}\frac{\delta^{\delta}_{\alpha} : (\gamma^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}\theta^{\beta}(y)p_{\gamma}(z)(\gamma^{\rho\sigma})^{\gamma}{}_{\delta} : + \delta^{\beta}_{\gamma} : p_{\alpha}(y)(\gamma^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}(\gamma^{\rho\sigma})^{\gamma}{}_{\delta}\theta^{\delta}(z) :}{y-z} \\
&\quad + \frac{1}{4}\frac{\delta^{\delta}_{\alpha}\delta^{\beta}_{\gamma}(\gamma^{\mu\nu})^{\alpha}{}_{\beta}(\gamma^{\rho\sigma})^{\gamma}{}_{\delta}}{(y-z)^2} \\
&\sim \frac{1}{4}\frac{p(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu})\theta^{\beta}}{y-z} + \frac{1}{4}\frac{tr(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma})}{(y-z)^2} \\
&\sim \frac{\eta^{\nu\rho}\tilde{M}^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\tilde{M}^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\tilde{M}^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\tilde{M}^{\nu\sigma}}{y-z} + 4\frac{\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}}{(y-z)^2} \\
&\sim \frac{\eta^{\rho[\nu}\tilde{M}^{\mu]\sigma} - \eta^{\sigma[\nu}\tilde{M}^{\mu]\rho}}{y-z} + 4\frac{\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}}{(y-z)^2}\,, \qquad \text{(D.3)}
\end{aligned}
$$

donde

$$\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu} \equiv \eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\nu}, \qquad \text{(D.4)}$$

además se ha usado[1]

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu} = 2\eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho} + 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} \qquad \text{(D.5)}$$

y

$$tr(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}) = 16\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}. \qquad \text{(D.6)}$$

[1]La demostración se encuentra en el Apéndice D.3.

D.2. Descomposición de $SO(10)$

En este apéndice se sigue como referencia a [41].

Un vector de $SO(10)$ se descompone bajo $SU(5)$ como

$$V^m \to v^a \oplus v_a \,, \qquad m = 1, \ldots, 10; \;\; a = 1, \ldots 5, \tag{D.7}$$

donde

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}(V^1 + iV^2), \quad v_2 = \frac{1}{2}(V^3 + iV^4), \quad \ldots \quad , v_5 = \frac{1}{2}(V^9 - V^0) \\ v^1 &= \frac{1}{2}(V^1 - iV^2), \quad v^2 = \frac{1}{2}(V^3 - iV^4), \quad \ldots \quad , v^5 = \frac{1}{2}(V^9 + V^0). \end{aligned} \tag{D.8}$$

En el caso del tensor antisimétrico N^{mn} tenemos que

$$N^{mn} \to n \oplus n^a_b \oplus n^{ab} \oplus n_{ab} \,, \tag{D.9}$$

donde

$$n = \frac{i}{\sqrt{5}} \sum_a N^{(a+5)a} \tag{D.10}$$

$$n^a_b = \frac{1}{2}\Big(N^{ab} - iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} + iN^{(a+5)(b+5)}\Big) - i\frac{\delta^a_b}{5} \sum_a N^{(a+5)a} \tag{D.11}$$

$$n^{ab} = \frac{1}{2}\Big(N^{ab} + iN^{a(b+5)} + iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}\Big) \tag{D.12}$$

$$n_{ab} = \frac{1}{2}\Big(N^{ab} - iN^{a(b+5)} - iN^{(a+5)b} - N^{(a+5)(b+5)}\Big). \tag{D.13}$$

Utilizando el OPE (4.22) se pueden verificar los siguientes productos

$$n(y)n(z) \sim -\frac{3}{(y-z)^2} \tag{D.14}$$

$$n^a_b(y)n^c_d(z) \sim \frac{\delta^a_d n^c_b - \delta^c_b n^a_d}{y-z} - 3\frac{\delta^c_b\delta^a_d - \frac{1}{5}\delta^a_b\delta^c_d}{(y-z)^2} \tag{D.15}$$

$$n_{ab}(y)n^{cd}(z) \sim \frac{-\delta^{[c}_{[a}n^{d]}_{b]} - \frac{2}{\sqrt{5}}\delta^{[c}_a\delta^{d]}_b n}{y-z} + 3\frac{\delta^{[c}_a\delta^{d]}_b}{(y-z)^2} \tag{D.16}$$

$$n(y)n^{ab}(z) \sim \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{n^{ab}}{y-z} \tag{D.17}$$

$$n(y)n_{ab}(z) \sim -\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{n_{ab}}{y-z} \tag{D.18}$$

$$n(y)n^a_b(z) \sim \text{regular}. \tag{D.19}$$

Los cuales coinciden si se calculan con las expresiones (4.43) a (4.46) y los OPE (4.50) y (4.51). Lo cual demuestra que la construcción que se ha realizado es consistente.

La expansión para un espinor de Weyl está dada por

$$\lambda^{\alpha} \to \lambda^{+} \oplus \lambda_{ab} \oplus \lambda^{a} \,, \qquad \text{con } \lambda_{ab} = -\lambda_{ba} \,. \tag{D.20}$$

Este espinor se escribe en términos de sus componentes como

$$|\lambda\rangle = \lambda^{+}|0\rangle + \frac{1}{2!}\lambda_{ij}a^{j}a^{i}|0\rangle + \frac{1}{4!}\lambda^{i}\varepsilon_{ijklm}a^{j}a^{k}a^{l}a^{m}|0\rangle, \tag{D.21}$$

donde los operadores a_i están definidos en (4.25).

Las componentes están dadas por

$$\begin{aligned} \lambda^{+} &= \langle 0|\lambda\rangle && \text{(D.22)} \\ \lambda_{ij} &= \frac{1}{2!}\langle 0|a_i a_j|\lambda\rangle && \text{(D.23)} \\ \lambda^{i} &= \frac{1}{4!}\varepsilon^{ijklm}\langle 0|a_j a_k a_l a_m|\lambda\rangle. && \text{(D.24)} \end{aligned}$$

En la sección 4.2.1 se usa la notación $\lambda^{+} = e^{s}$ y $\lambda_{ij} = u_{ij}$.

D.3. Algunas identidades

Los siguientes cálculos se realizan teniendo en cuenta (4.15) y (A.3).

- Cálculo de la traza de $\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}$.

Primero calculamos la traza de $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}$

$$\begin{aligned} tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) &= \frac{1}{2}\left(tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) + tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu})\right) \\ &= \frac{1}{2}tr([\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]_{+}) \\ &= \frac{1}{2}tr(2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}) \\ &= 16\eta^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{D.25}$$

Luego se calcula la traza de $\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}$

Conmutando γ^{ρ} y γ^{σ} tenemos que

$$\begin{aligned} tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}) &= tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}(2\eta^{\rho\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\rho})) \\ &= 2\eta^{\rho\sigma}tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}) - tr(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}), \end{aligned} \tag{D.26}$$

en el segundo término de (D.26) se conmuta γ^ν y γ^σ

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho) &= tr(\gamma^\mu(2\eta^{\nu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\nu)\gamma^\rho) \\ &= 2\eta^{\nu\sigma} tr(\gamma^\mu\gamma^\rho) - tr(\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho), \end{aligned} \tag{D.27}$$

en el segundo término de (D.27) se conmuta γ^μ y γ^σ

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\rho) &= tr((2\eta^{\mu\sigma} - \gamma^\sigma\gamma^\mu)\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= 2\eta^{\mu\sigma} tr(\gamma^\nu\gamma^\rho) - tr(\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= 2\eta^{\mu\sigma} tr(\gamma^\nu\gamma^\rho) - tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma). \end{aligned} \tag{D.28}$$

Reemplazando (D.28) en (D.27) y (D.27) en (D.26), y usando (D.25), se encuentra que

$$\begin{aligned} tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) &= \eta^{\rho\sigma} tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) - \eta^{\nu\sigma} tr(\gamma^\mu\gamma^\rho) + \eta^{\mu\sigma} tr(\gamma^\nu\gamma^\rho) \\ &= 16(\eta^{\rho\sigma}\eta^{\mu\nu} - \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}). \end{aligned} \tag{D.29}$$

Con este resultado tenemos entonces que

$$\begin{aligned} tr(\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma}) &= \frac{1}{4} tr((\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)) \\ &= \frac{1}{4}[tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) - tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho) - tr(\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) + tr(\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho)] \\ &= 16(\eta^{\mu\sigma}\eta^{\rho\nu} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\sigma\nu}) \\ &= 16\eta^{\mu[\sigma}\eta^{\rho]\nu}. \end{aligned} \tag{D.30}$$

- Cálculo de la identidad

$$\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu} = 2\eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho} + 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}. \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho) - \frac{1}{4}(\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho)(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu) \\ &= \frac{1}{4}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\sigma\gamma^\rho - \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu\gamma^\nu \\ &\quad + \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\nu\gamma^\mu + \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu), \end{aligned} \tag{D.32}$$

usando el conmutador (A.3) y agrupando términos de acuerdo con (4.15)

$$
\begin{aligned}
\gamma^{\mu\nu}\gamma^{\rho\sigma} - \gamma^{\rho\sigma}\gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(2\eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} + \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} \\
&\quad + \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} + 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} - 2\eta^{\sigma\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} + \gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} \\
&\quad + 2\eta^{\sigma\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} - \gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} - 2\eta^{\rho\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} \\
&\quad + \gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}) \\
&= \eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} + \frac{1}{4}(\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} \\
&\quad - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} \\
&\quad + \gamma^{\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}) \\
&= \eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - \eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma} + \frac{1}{4}(2\eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\sigma} - \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} \\
&\quad - 2\eta^{\rho\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu}\gamma^{\rho} + \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} + 2\eta^{\sigma\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} \\
&\quad - \gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} + 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho} - \gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\mu} - 2\eta^{\sigma\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\nu} \\
&\quad - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma} + \gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho}\gamma^{\mu} + 2\eta^{\rho\mu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\nu}) \\
&= 2\eta^{\nu\rho}\gamma^{\mu\sigma} - 2\eta^{\nu\sigma}\gamma^{\mu\rho} + 2\eta^{\mu\sigma}\gamma^{\nu\rho} - 2\eta^{\mu\rho}\gamma^{\nu\sigma}. \qquad \text{(D.33)}
\end{aligned}
$$

Obteniendo el resultado esperado.

Apéndice E

Método de Dirac para sistemas restringidos

En este apéndice se siguen los argumentos propuestos por Dirac en [33]. Adicionalmente se sigue como referencia a [42].

Para la acción

$$S = \int L \, dt \,, \tag{E.1}$$

los momentos canónicos están dados por

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \,, \tag{E.2}$$

si esta relación es invertible, las velocidades pueden ser expresadas en términos de los momentos. En caso contrario tenemos las restricciones

$$\phi_m(q, p) = 0 \,. \tag{E.3}$$

Estas condiciones son conocidas como restricciones primarias.

El Hamiltoniano de la teoría lo obtenemos de la transformación de Legendre

$$H = \dot{q}^n p_n - L \,, \tag{E.4}$$

debido a las restricciones (E.3), este Hamiltoniano no está determinado en forma única. El formalismo permanece inalterado si agregamos al Hamiltoniano una combinación de las restricciones, por lo cual el Hamiltoniano total está dado por

$$H_{tot} = H + u^m \phi_m \,, \tag{E.5}$$

donde los coeficientes u^m son multiplicadores de Lagrange que deben ser determinados.

Resulta conveniente escribir las restricciones (E.3) en la forma

$$\phi_m \approx 0 \,, \tag{E.6}$$

para enfatizar que están numéricamente restringidas a ser cero, pero su paréntesis de Poisson con las variables canónicas es diferente de cero. Dos variables dinámicas F y G se dicen débilmente iguales, $F \approx G$, si coinciden en la subvariedad definida por las restricciones (E.3). La evolución de una variable dinámica F está dada por

$$\dot{F} \approx \{F, H_{tot}\}. \tag{E.7}$$

Las restricciones de la teoría deben ser invariantes en el tiempo, lo cual lleva a las condiciones

$$\dot{\phi}_m \approx \{\phi_m, H\} + u^n\{\phi_m, \phi_n\} \approx 0\,, \tag{E.8}$$

estas condiciones permiten determinar los multiplicadores de Lagrange o conducen a nuevas restricciones conocidas como restricciones secundarias. De igual forma, la invariancia de las restricciones secundarias puede conducir a restricciones terciarias y así sucesivamente. La distinción entre restricciones primarias y secundarias no es importante, por lo cual, todas las restricciones se denotan como ϕ_j.

Estas restricciones se dividen en dos clases: Las restricciones cuyo paréntesis de Poisson con todas las restricciones (incluidas ellas mismas) se anula débilmente son conocidas como restricciones de primera clase. En caso contrario son restricciones de segunda clase. La presencia de restricciones primarias de primera clase implica que existan multiplicadores de Lagrange que no pueden ser determinados [42].

En [33] se demuestra que las restricciones de primera clase estan relacionadas con las invariancias de calibre de la teoría, las cuales pueden ser usadas para convertir las restricciones de primera clase en restricciones de segunda clase. Después de fijar las condiciones de calibre, las restricciones se denotan como ϕ_α.

Debido a que el paréntesis de Poisson entre las restricciones y las variables dinámicas no es necesariamente cero, se introduce el paréntesis de Dirac definido como

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \phi_\alpha\}C^{\alpha\beta}\{\phi_\beta, G\}, \tag{E.9}$$

donde

$$C_{\alpha\beta} = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}, \tag{E.10}$$

siendo $C^{\alpha\beta}$ la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$.

Con esta definición, el paréntesis de Dirac entre las restricciones y las variables dinámicas es cero. Después de la sustitución de los paréntesis de Poisson por los de Dirac, las restricciones pueden ser fijadas a cero. La cuantización de la teoría se lleva a cabo de la forma usual reemplazando los paréntesis de Dirac por conmutadores o anticonmutadores.

Bibliografía

[1] T. Hebbeker, Phys. Rep. 217 (1992) 69.

[2] J. Scherk y J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B81** (1974) 118.

[3] E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl.Phys. **B443** (1995) 85, arXiv:hep-th/9503124v2.

[4] J. Polchinski, E. Witten, *String theory dynamics in various dimensions*, Nucl.Phys. **B460** (1996) 525, arXiv:hep-th/9510169v1.

[5] E. Bergshoeff, C. M. Hull, T. Ortin, *Duality in the type II superstring effective action*, Nucl.Phys. **B451** (1995) 547, arXiv:hep-th/9504081v4.

[6] M. Serone, M. Trapletti, *A note on T-duality in heterotic string theory*, Phys. Lett. **B637** (2006) 331, arXiv:hep-th/0512272v2 .

[7] P. Ramond, Phys. Rev. **D3** (1971) 2415;
A. Neveu and J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B31** (1971) 86.

[8] M. B. Green y J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B181** (1981) 502; Phys. Lett. **B136** (1984) 367; Nucl. Phys. **B243** (1984) 285.

[9] N. Berkovits, *Super-Poincaré covariant quantization of the superstring*, JHEP **0004** (2000) 018, arXiv:hep-th/0001035.

[10] F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive, *Supergravity and the spinor dual model*, Phys. Lett. **65B** (1976) 282.

[11] Y. Oz, *The Pure Spinor Formulation of Superstrings*, (2009), arXiv:0910.1195v1 [hep-th].

[12] N. Berkovits y P. Howe, *Ten-Dimensional Supergravity Constraints from the Pure Spinor Formalism for the Superstring*, Nucl.Phys. **B635** (2002) 75, arXiv:hep-th/0112160.

[13] W. Siegel, *Hidden local supersymmetry in the superparticle action*, Phys. Lett. **128B** (1983) 397.

[14] M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1, Cambridge University Press (1987).

[15] N. Beisert, R. Ricci, A. A. Tseytlin y M. Wolf, *Dual Superconformal Symmetry from $AdS_5 \times S^5$ Superstring Integrability*, Phys. Rev. **D78** (2008) 126004, arXiv:0807.3228 [hep-th].

[16] N. Berkovits y J. Maldacena, *Fermionic T-Duality, Dual Superconformal Symmetry, and the Amplitude/Wilson Loop Connection*, JHEP **0809** (2008) 062, arXiv:0807.3196 [hep-th].

[17] O. Chandia, *A Note on T-dualities in the Pure Spinor Heterotic String*, JHEP **0904** (2009) 104, arXiv:0902.2729 [hep-th].

[18] I. Adam, A. Dekel y Y. Oz, *On Integrable Backgrounds Self-dual under Fermionic T-duality*, JHEP **0904** (2009) 120, arXiv:0902.3805 [hep-th].

[19] C.-g. Hao, B. Chen y X.-c. Song, *On Fermionic T-duality of Sigma models on AdS backgrounds*, JHEP **0912** (2009) 051, arXiv:0909.5485 [hep-th].

[20] I. Bakhmatov y D. S. Berman, *Exploring Fermionic T-duality*, Nucl. Phys. **B832** (2010) 89, arXiv:0912.3657 [hep-th].

[21] H. Godazgar y M. J. Perry, *Real fermionic symmetry in type II supergravity*, JHEP **1101** (2011) 032, arXiv:1008.3128 [hep-th].

[22] E. Chang-Young y H. Nakajima, *Fermionic T-duality and Morita Equivalence*, (2011), arXiv:1101.0473 [hep-th].

[23] T. H. Buscher, *Path Integral Derivation of Quantum Duality in Nonlinear Sigma Models*, Phys. Lett. B. **201** (1988) 466.

[24] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, Y. Lozano, *An introduction to T duality in string theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 41 (1995), arXiv:hep-th/9410237v2.

[25] K. Sfetsos, K. Siampos y D. C. Thompson, *Canonical pure spinor (Fermionic) T-duality*, (2010), arXiv:1007.5142 [hep-th] .

[26] K. Becker, M. Becker, J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory*, Cambridge University Press (2007).

[27] G. 't Hooft, *Introduction to String Theory*, http://www.staff.science.uu.nl/˜hooft101/lectures/stringnotes.pdf, consultado mayo de 2011.

[28] D. Lüst, S. Theisen, *Lectures in String Theory*, Lecture Notes in Physics Vol. 346, Springer (1989).

[29] P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, *An introduction to the covariant quantization of superstrings*, (2003), arXiv:hep-th/0302147v2.

[30] L. Mazzucato, *Superstrings in AdS*, (2011), arXiv:1104.2604v2 [hep-th].

[31] N. Berkovits, *ICTP Lectures on Covariant Quantization of the Superstring*, (2002), arXiv:hep-th/0209059v1.

[32] P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal, *Conformal field theory*, Springer (1997).

[33] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University (1964).

[34] W. Siegel, *Classical superstring mechanics*, Nucl. Phys. **B263** (1986) 93.

[35] J. Polchinski, *String theory*, Vol. 1, Cambridge University Press (1998).

[36] D. Friedan, E. Martinec, S. Schenker, *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.

[37] N. Berkovits, *Cohomology in the Pure Spinor Formalism for the Superstring*, JHEP **0009** (2000) 046, arXiv:hep-th/0006003.

[38] J.W. van Holten, *Aspects of BRST quantization*, (2002), arXiv:hep-th/0201124v1.

[39] A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, *Target space duality in string theory*, Phys. Rept. 244 (1994) 77, arXiv:hep-th/9401139v1.

[40] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, Y. Lozano, *A Canonical approach to duality transformations*, Phys. Lett. **B336** (1994) 183, arXiv:hep-th/9406206.

[41] P. Nath, R. M. Syed, *Couplings of Vector-Spinor Representation for* $SO(10)$ *Model Building*, JHEP **0602** (2006) 022, arXiv:hep-ph/0511172v1.

[42] M. Henneaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press (1992).