

Solución numérica de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes variables por el método de los elementos finitos

César R. Acosta

J. Alejandro Tapia

Universidad Autónoma de Yucatán

Universidad Autónoma de Yucatán

Maritza de Coss

Universidad Autónoma de Yucatán

Recibido Feb. 04, 2010

Aceptado Ene. 05, 2011

Abstract

In this work the concept of generalized functional is introduced, when the equation of Euler is applied to this functional, the differential equation is obtained. The variational method is imposed to this functional, being obtained a function that is a generalized solution of the differential equation, the solution is expressed as integrals defined by pieces, each one is represented as a straight line segment defined between two points $[y_i, y_{i+1}]$, these are contained in the total range $[a, b]$. When each segment is integrated in all over the range it is obtained a linear equation, and when the system of $(N - 1)$ equations with $(N - 1)$ unknowns is solved, the numerical solution of the given differential equation is obtained.

Keywords: Finite element method, Variational methods, Lagrange's equations

MSC(2000): 76M10, 70G75, 70H03

Resumen

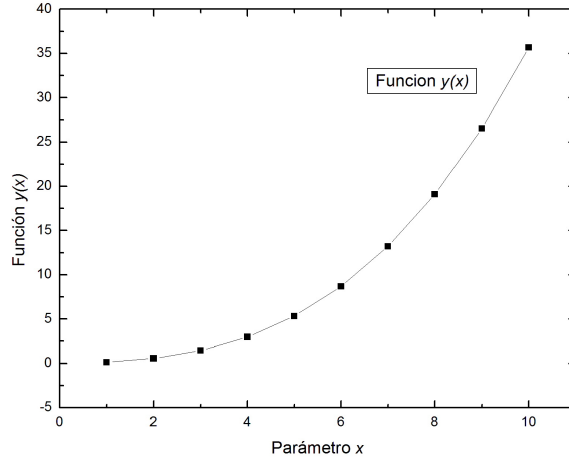
En este trabajo se introduce el concepto del funcional generalizado, al cual al aplicarle la ecuación de Euler se obtiene la ecuación diferencial a resolver. Se impone el método variacional al funcional, obteniéndose una función que es solución generalizada de la ecuación diferencial, la cual se expresa como integrales definidas por tramos, cada uno representa un segmento de recta definido entre dos puntos $[y_i, y_{i+1}]$, contenidos en el rango total $[a, b]$. Al integrar para cada segmento de recta en todo el rango se tiene una ecuación lineal, al resolver el sistema de $(N - 1)$ ecuaciones con $(N - 1)$ incógnitas se tiene la solución numérica de la ecuación diferencial dada.

Palabras y frases claves: Método de los elementos finitos, Metodos variacionales, Ecuación de Lagrange.

1 Introducción

Para resolver Ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) por el método de los elementos finitos, en donde se utilizan integrales definidas, primero obtendremos tales integrales a partir de un concepto que se conoce como el funcional, que se define como una función que toma funciones como su argumento; es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones [1], [2].

Para conocer las características de un funcional debemos conocer sus máximos y mínimos, pero al tratarse de varias funciones se habla de los extremales, es decir que puede tratarse de un minimal (mínimo de los mínimos) o de un maximal (máximo de los máximos). Este procedimiento de caracterización del funcional

Figura 1: Gráfica de x contra $y(x)$

se conoce como cálculo variacional, que utilizando el mismo principio del cálculo diferencial halla los extremales de dichos funcionales.

Dado que existe una diferencia conceptual entre la derivada de cálculo diferencial y las variaciones de cálculo variacional, también haremos una diferenciación en la notación. Mientras que en el cálculo diferencial una derivada se realiza respecto a una variable y se representa como dx , en el cálculo de variaciones una derivada es respecto de una función y se representará por δy en donde y es una función de la variable x es decir $y = y(x)$ [2].

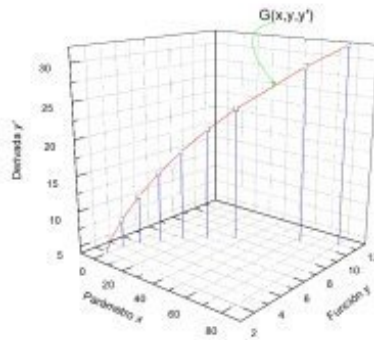
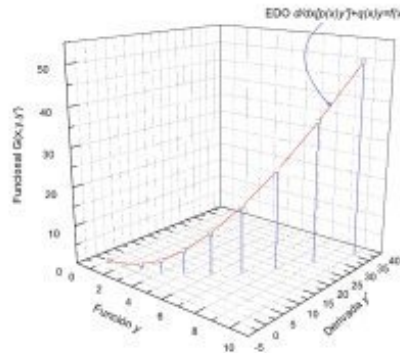
El modelo de ecuación diferencial lineal no homogénea de coeficientes variables unidimensional utilizado en el método de los elementos finitos es:

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + r(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x, y)$$

Para que este modelo pueda ser resuelto utilizando el método de Rayleigh-Ritz (método variacional) es necesario que el término del coeficiente variable de la primera derivada sea cero, es decir $r(x) = 0$ [3]. Sin embargo mediante un procedimiento iterativo pueden solucionarse ecuaciones con $r(x) \neq 0$. En este trabajo trataremos las primeras, es decir aquellas con $r(x) = 0$, por lo que el modelo a solucionar es:

$$\frac{d}{dx}[p(x)y'] + q(x)y = f(x, y) \quad (1)$$

y como siempre se requiere que la variable x sea continua en todo el rango $[a, b]$ donde se busca la solución de la EDO. Si hacemos una gráfica de la EDO de la variable x contra $y(x)$, de modo general obtenemos la figura (1): Si a esta gráfica le añadimos un eje en el que midamos el comportamiento de la primera derivada $y' = y'(x)$ se tiene la figura (2):

Figura 2: Gráfica de x contra $y(x)$ Figura 3: Gráfica de $y(x)$ contra, $y'(x)$

Dado que solo tenemos un parámetro la gráfica resultante es una línea en el espacio de tres dimensiones (3D), dada en forma paramétrica, en la que tal línea en el espacio es el funcional que llamaremos $G(x, y, y')$. Hay que tener presente que para poder realizar esta gráfica necesitamos conocer la forma de variación de cada una de las componentes que intervienen, eso es lo que representa el funcional. Si ahora quitamos el eje del parámetro x y lo sustituimos por un eje donde midamos el comportamiento del funcional $G(x, y, y')$, la línea en el espacio que se obtiene es la EDO que queremos encontrar y que se muestra en la figura (3). El problema es que no conocemos ni el funcional $G(x, y, y')$ ni la función $y(x)$, por lo que el objetivo principal es obtener mediante métodos numéricos la función $y(x)$.

2 Método variacional

Tomemos el funcional generalizado $G(x, y, y')$ definido de forma paramétrica en la figura (2) y proyectémoslo sobre el plano xy , además asumamos que existe una función $g(x)$ asociada a la solución $y(x)$, no al funcional $G(x, y, y')$; la proyección de dicho funcional en el plano xy , es la solución de la ecuación diferencial, por

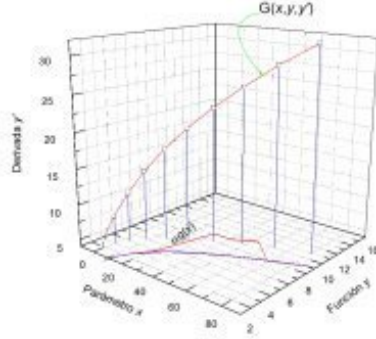


Figura 4: Proyección del funcional $G(x, y, y')$ en el plano xy , sobre la cual se ha añadido una función $g(x)$.

lo que el objetivo es minimizar esta variación $g(x)$. La función $g(x)$ tiene la característica de que se hace cero en los extremos del rango, es decir $g(a) = 0$ y $g(b) = 0$, en el espacio de las soluciones de la ecuación diferencial se tiene que:

$$y = y_1 + \alpha g(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta y}{\delta \alpha} = g(x).$$

Considerando al funcional como una medida del error [2] tenemos que la suma infinita de estos errores en todo el rango es:

$$I = \int_a^b G(x, y, y') dx.$$

Realicemos la variación de la función I respecto del parámetro α

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial y} \frac{\delta y}{\delta \alpha} + \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{\delta y'}{\delta \alpha} \right) dx = \int_a^b \left[\frac{\partial G}{\partial y} g(x) + \frac{\partial G}{\partial y'} \frac{\delta y'}{\delta \alpha} \right] dx = 0 \quad (2)$$

Integrando por partes el segundo término:

$$A = \int_a^b \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \frac{\delta y'}{\delta \alpha} \right) dx = \int_a^b \left[\frac{\partial G}{\partial y'} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta y}{\delta \alpha} \right) \right] dx = \int_a^b \left[\frac{\partial G}{\partial y'} \frac{dg(x)}{dx} \right] dx$$

Aplicando las reglas de la integración por partes y teniendo en cuenta:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial G}{\partial y'} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) dx \\ dv = \frac{dg(x)}{dx} dx \quad \Rightarrow \quad v = g(x) \end{array} \right\}$$

se obtiene

$$A = \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \left(\frac{\delta y}{\delta \alpha} \right) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) dx$$

Evaluando en los límites

$$A = - \int_a^b g(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) dx.$$

Nos queda que:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \left(\frac{\delta y'}{\delta \alpha} \right) \right] dx = - \int_a^b g(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) dx.$$

Sustituyendo en la ecuación (2), obtenemos:

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_a^b \left[\frac{\partial G}{\partial y} g(x) - g(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] dx = 0.$$

Factorizando la función $g(x)$:

$$\frac{\delta I}{\delta \alpha} = \int_a^b g(x) \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) \right] dx = 0.$$

Al ser $g(x) \neq 0$ obtenemos:

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) = 0. \quad (3)$$

Esta expresión se conoce como la ecuación de Euler (Lagrange) [4]. Así, para solucionar una EDO, es necesario encontrar un funcional $G(x, y, y')$ que representa la función de error al cual al aplicarle la ecuación de Euler reproduzca la EDO.

Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = f(x). \quad (4)$$

Multipliquemos en ambos lados por una función genérica $z(x)$ cuya característica principal es que se hace cero en los extremos del rango, es decir $z(a) = 0$; $z(b) = 0$ e integremos en dicho rango:

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} [p(x)y'] \right\} z(x) dx = \int_a^b [-q(x)y + f(x)] z(x) dx.$$

integrando por partes el lado izquierdo de la igualdad y teniendo en cuenta

$$B = \left\{ \begin{array}{ll} u = z(x) & \Rightarrow du = z'(x) dx \\ dv = \frac{d}{dx} [p(x)y'] dx & \Rightarrow v = p(x)y' \end{array} \right\},$$

obtenemos

$$B = \int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} [p(x)y'] \right\} z(x) dx.$$

Aplicando la integración por partes:

$$B = p(x)y'z(x) \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y'z'(x) dx,$$

al evaluar en los límites nos queda:

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} [p(x)y'] \right\} z(x) dx = - \int_a^b p(x)y'z'(x) dx$$

Retomando la igualdad

$$- \int_a^b p(x)y'z'(x) dx = \int_a^b [-q(x)y + f(x)]z(x) dx$$

En tanto que $z(x)$ sea diferente de $y(x)$ esta función nos dará en general una medida del error [5], [6], es decir:

$$I = \int_a^b [-p(x)y'z'(x) + q(x)yz(x) - f(x)z(x)] dx$$

Considerando que cuando se ha minimizado la diferencia entre $y(x)$ y $z(x)$ estas son aproximadamente la misma función nos queda que el funcional es:

$$I = \int_a^b [-p(x)(y')^2 + q(x)(y)^2 - 2f(x)y] dx$$

Quedando el funcional para este modelo de ecuación diferencial como:

$$G(x, y, y') = -p(x)(y')^2 + q(x)(y)^2 - 2f(x)y \quad (5)$$

En donde el coeficiente 2 de $f(x)$ es un factor de ajuste, el cual se justifica al aplicar la ecuación de Euler (3) al funcional (5).

$$\frac{\partial G(x, y, y')}{\partial y'} = -2p(x)(y')$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial y'} \right) = \frac{d}{dx} [-2p(x)(y')] = -2 \frac{d}{dx} [p(x)(y')]$$

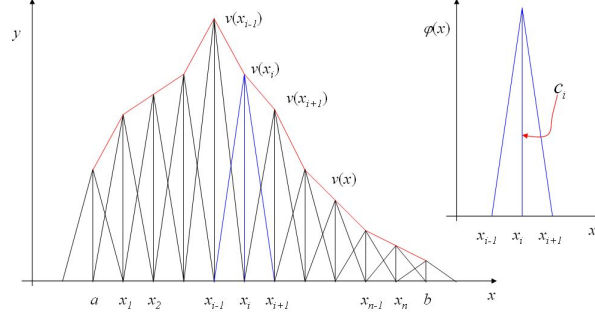


Figura 5: Proyección del funcional $G(x, y, y')$ en el plano xy , sobre la cual se ha añadido una función $g(x)$.

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 2q(x)(y) - 2f(x)$$

Sustituyendo en la ecuación de Euler obtenemos:

$$-2 \left\{ \frac{d}{dx} [p(x)(y')] + q(x)(y) - f(x) \right\} = 0$$

Que es la ecuación diferencial (4) de la cual partimos,

$$\frac{d}{dx} [p(x)y'] + q(x)y = f(x)$$

3 Aproximación de la solución por tramos rectos

El objetivo en el método de los elementos finitos es minimizar la función $z(x)$ a través de una aproximación, que es una combinación lineal de elementos de una base de funciones de corto rango, que valen cero fuera de ese intervalo [6]. Uno de los métodos más usuales para lograr la minimización del funcional es la realizada por tramos rectos, en donde la función genérica $z(x)$ está compuesta por rectas de la forma:

$$v = v_o + m(x - x_o),$$

en donde la suma de todos los tramos v es la función genérica $z(x)$.

$$z(x) = \sum_{i=1}^N v_i.$$

Dado que se estableció que la característica principal de $z(x)$ es que se haga cero en los extremos esto conduce a decir que v_o es cero. $v = m(x - x_o)$

La recta que va de $v(x_{i-1})$ a $v(x_i)$ se construye con la ecuación punto pendiente, y se escribe como:

$$v - v_{i-1} = m(x - x_{i-1}),$$

con

$$m = \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},$$

$$v - v_{i-1} = \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Con la condición de que la función v_{i-1} vale cero en la aproximación en x_i .

$$v = \frac{v_i}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}).$$

Así, podemos construir una función $z(x)$ de tal manera que sea una aproximación con segmentos rectos a la función original $y(x)$:

$$z(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x), \quad (6)$$

con

$$c_i = v_i \quad ; \quad h_i = x_i - x_{i-1},$$

en donde c_i representa la ordenada de la recta v_i o lo que es lo mismo, la altura de la función $y(x_i)$ y h_i se define como el “paso”.

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1}),$$

$$z(x) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{h_i}(x - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \approx y(x)$$

Una de las características de la función ϕ_i es que al ser evaluada en los extremos se hace cero. Otra característica deseable es que tenga un incremento h_i constante ($h_i = h$), de tal manera que su derivada es:

$$\frac{d\phi_i(x)}{dx} = \frac{1}{h_i} = \frac{1}{h}$$

4 Evaluación de integrales en los tramos rectos

Sustituyendo cada uno de estos tramos rectos en la función total $y(x)$, nos queda que las variables de las cuales depende la función I son c_i . La integral a minimizar que se plantea es:

$$I(c_i) = \int_a^b G(x, y, y') dx,$$

en donde $G(x, y, y')$ es un funcional que al ser integrado respecto de x se obtiene una función I , que depende de los parámetros c_i que son las aproximaciones z_i de los valores de la función $y(x)$ en el punto i .

El funcional a resolver está dado por la ecuación (5), que al ser aproximada por los tramos rectos dados en (6) obtenemos:

$$G(x, y, y') = -p_i \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi'_i(x) \right]^2 + q_i \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]^2 - 2f_i \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]. \quad (7)$$

Al estar conformadas por tramos rectos de diferentes pendientes se tienen las siguientes particularidades:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi'_i(x) \right]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n c_i \phi'_i(x) \sum_{j=1}^n c_j \phi'_j(x), \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi'_i(x) \right]^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \phi'_i(x) \phi'_j(x), \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]^2 &= 2 \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x), \\ \left[\sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x) \right]^2 &= 2 \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \phi_i(x) \phi_j(x). \end{aligned}$$

Es de observarse que cada uno de los tramos rectos solo tienen relación con los segmentos anterior y posterior, que se establece de la siguiente manera

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{i-1}) & \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ \frac{1}{h}(x_{i+1} - x) & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

$$\phi'_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \\ \frac{1}{h} & \text{si } x_{i-1} < x \leq x_i \\ -\frac{1}{h} & \text{si } x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0 & \text{si } x \geq x_{i+1} \end{cases}$$

Al multiplicar las derivadas de las dos funciones $\phi_i \phi_j$ se tiene que si $i = j$ se trata de la misma recta y por consiguiente de la misma pendiente, pero si $i \neq j$

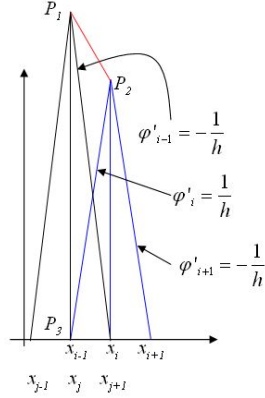


Figura 6: Descripción del cambio de la función $\phi_i(x)$ al pasar de los punto $P_1 - P_2$ a $P_3 - P_2$.

son dos ecuaciones con diferentes pendientes, dándose un cambio de signo. Así, al multiplicar las pendientes obtenemos

$$\phi'_i \phi'_i = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \quad ; \quad \phi'_i \phi'_{i-1} = -\left(\frac{1}{h}\right)^2$$

$$\phi'_i \phi'_{i+1} = -\left(\frac{1}{h}\right)^2$$

Puede observarse en la figura (6) que la ecuación de la recta $\phi_i(x)$, ya no representa al segmento que va de P_1 a P_2 , sino que describe a la línea que vá de P_3 a P_2 en donde la altura es unitaria es $\phi_i(x) = \frac{1}{h_i}(x - x_{i-1})$. La integral del funcional se plantea entonces como:

$$I(c_i) = \int_a^b \left(-2p_i \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \phi'_i \phi'_j + 2q_i \sum_{i,j=1}^n c_i c_j \phi_i \phi_j \right) dx + \int_a^b \left(-2f_i \sum_{i=1}^n c_i \phi_i \right) dx \quad (8)$$

Para minimizar esta integral derivemos respecto del parámetro c_i e igualemos a cero.

$$\frac{\partial I(c_i)}{\partial c_i} = \int_a^b \frac{\partial G(x, y, y')}{\partial c_i} dx = 0$$

$$\int_a^b \left[-p(x) \sum_{j=1}^n c_j \phi'_i(x) \phi'_j(x) + q(x) \sum_{j=1}^n c_j \phi_i(x) \phi_j(x) \right] dx + \int_a^b f(x) \left[\sum_{i=1}^n \phi_i(x) \right] dx = 0 \quad (9)$$

Hasta este punto hemos convertido la ecuación diferencial en una ecuación integro-diferencial. Siendo i un índice mudo, se puede sacar el parámetro de la integral. Al ser la sumatoria del lado izquierdo sobre j , en el lado derecho de la

igualdad se tiene únicamente una evaluación en las inmediaciones del punto i , por lo que se puede prescindir del signo de sumatoria sobre i .

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_a^b [-p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx \right\} c_j = \int_a^b f(x)\phi_i(x) dx \quad (10)$$

Esto es un sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas (c_j), que se representa por:

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} c_j = b_i$$

con $a_{i,j}$ dado por:

$$a_{i,j} = \int_a^b [-p(x)\phi'_i(x)\phi'_j(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_j(x)] dx$$

Los elementos de la diagonal principal $a_{i,i}$ son:

$$a_{i,i} = \int_a^b \{-p(x)[\phi'_i(x)]^2 + q(x)[\phi_i(x)]^2\} dx$$

$$a_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[-\left(\frac{1}{h}\right)^2 p(x) + \left(\frac{1}{h}\right)^2 (x - x_{i-1})^2 q(x) \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[-\left(-\frac{1}{h}\right)^2 p(x) + \left(\frac{1}{h}\right)^2 (x_{i+1} - x)^2 q(x) \right] dx$$

$$a_{i,i} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} [-p(x) + (x - x_{i-1})^2 q(x)] dx + \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [-p(x) + (x_{i+1} - x)^2 q(x)] dx$$

teniendo en cuenta que $x_{i+1} = x_i + h$; $x_{i-1} = x_i - h$

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i-h}^{x_i} [-p(x) + (x - x_i + h)^2 q(x)] dx \\ &+ \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i}^{x_i+h} [-p(x) + (x_i + h - x)^2 q(x)] dx \end{aligned} \quad (11)$$

Para la diagonal superior $a_{i,i+1}$ se tiene:

$$a_{i,i+1} = \int_a^b [-p(x)\phi'_i(x)\phi'_{i+1}(x)] dx + \int_a^b [q(x)\phi_i(x)\phi_{i+1}(x)] dx$$

$$a_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{1}{h}\right)^2 p(x) \right] dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(\frac{1}{h}\right)^2 (x_{i+1} - x)(x - x_i)q(x) \right] dx$$

$$a_{i,i+1} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i}^{x_i+h} [p_i + (x_i + h - x)(x - x_i)q(x)]dx \quad (12)$$

Para la diagonal inferior $a_{i,i-1}$ se tiene:

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= \int_a^b [-p(x)\phi'_i(x)\phi'_{i-1}(x) + q(x)\phi_i(x)\phi_{i-1}(x)]dx, \\ a_{i,i-1} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\left(\frac{1}{h}\right)^2 p(x) + \left(\frac{1}{h}\right)^2 (x_i - x)(x - x_{i-1})q(x) \right] dx, \\ a_{i,i-1} &= \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i-h}^{x_i} [p(x) + (x_i - x)(x - x_i + h)q(x)]dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Así, se tiene una matriz tridiagonal, ya que la función $\phi_i(x_i)$ solo puede ser evaluada dentro del rango $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$. Todos los elementos fuera de estas diagonales de la matriz son cero. Para el elemento b_i del otro lado de la igualdad

$$\begin{aligned} b_i &= \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx, \\ b_i &= \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})f(x)dx + \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - x)f(x)dx, \\ b_i &= \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i-h}^{x_i} (x - x_i + h)f(x)dx + \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i}^{x_i+h} (x_i + h - x)f(x)dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Por lo que se forma un sistema de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas, en donde todos los términos $a_{i,j}$ están multiplicados por el factor c_j , que es el valor de $y(x)$ en el punto x_i .

$$\begin{aligned} a_{1,0}c_0 + a_{1,1}c_1 + a_{1,2}c_2 &= b_1 \\ a_{2,1}c_1 + a_{2,2}c_2 + a_{2,3}c_3 &= b_2 \\ a_{3,2}c_2 + a_{3,3}c_3 + a_{3,4}c_4 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{i,i-1}c_{i-1} + a_{i,i}c_i + a_{i,i+1}c_{i+1} &= b_i \end{aligned} \quad (15)$$

5 Aplicación del método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos se puede utilizar en mecánica para modelar por ejemplo resortes tanto ideales como reales, movimientos de péndulos simples

y dobles, poleas, etc. Se utiliza también en termodinámica, mecánica cuántica, estado sólido y en general en todas aquellas aplicaciones que tengan una ecuación diferencial del tipo (1) [9].

Para resolver la siguiente ecuación diferencial por el método de los elementos finitos $-y'' + \pi^2 y = 2\pi^2 \text{sen}(\pi x)$; definida en el rango entre $0 \leq x \leq 1$ de tal manera que en los extremos se tiene que: $y(0) = 0$ y $y(1) = 0$, utilizaremos las simplificaciones del método variacional hechas para aproximar la solución por tramos rectos plasmada en las ecuaciones (11), (12), (13) y (14). Los elementos de la EDO que tomaremos para sustituir en lo que los elementos de las diagonales son: $p(x) = -1$, $q(x) = \pi^2$, $f(x) = 2\pi^2 \text{sen}(\pi x)$; $h = 0,1$, así para la diagonal principal sustituyendo los parámetros dados en la ecuación (11):

$$a_{i,i} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i-h}^{x_i} [1 + (x - x_i + h)^2 \pi^2] dx + \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i}^{x_i+h} [1 + (x_i + h - x)^2 \pi^2] dx$$

$$a_{i,i} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \left(h + \frac{\pi^2 h^3}{3} + h + \frac{\pi^2 h^3}{3} \right)$$

Para $h = 0,1$

$$a_{i,i} = \frac{2}{3h} (3 + \pi^2 h^2) = 20,658 \quad (16)$$

Para la diagonal superior se tiene por la ecuación (12):

$$a_{i,i+1} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i}^{x_i+h} [-1 + (x_i + h - x)(x - x_i) \pi^2] dx$$

$$a_{i,i+1} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \left(-h + \frac{\pi^2 h^3}{6} \right) = -9,8356 \quad (17)$$

Para la diagonal inferior:

$$a_{i,i-1} = \left(\frac{1}{h}\right)^2 \int_{x_i-h}^{x_i} [-1 + (x_i - x)(x - x_i + h) \pi^2] dx$$

$$a_{i,i-1} = \frac{1}{6h} (\pi^2 h^2 - 6) = -9,8356 \quad (18)$$

El término b_i es:

$$b_i = \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i-h}^{x_i} (x - x_i + h) f(x) dx + \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i}^{x_i+h} (x_i + h - x) f(x) dx$$

Para la función $f(x)$ se tiene:

$$f(x) = 2\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)$$

$$b_i = \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i-h}^{x_i} [(x-x_i)+h] [2\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)] dx + \left(\frac{1}{h}\right) \int_{x_i}^{x_i+h} [h-(x-x_i)] [2\pi^2 \operatorname{sen}(\pi x)] dx$$

$$b_i = \frac{4}{h} \operatorname{sen}(\pi x_i) [1 - \cos(\pi h)] \quad (19)$$

Así, vemos que b_i toma valores dependiendo de x_i , por lo que haremos una tabla:

N	x_i	$a_{i,i-1}$	$a_{i,i}$	$a_{i,i+1}$	b_i
1	0.1	-9.8355	20.658	-9.8355	0.60497473
2	0.2	-9.8355	20.658	-9.8355	1.15073032
3	0.3	-9.8355	20.658	-9.8355	1.5838444
3	0.4	-9.8355	20.658	-9.8355	1.86192076
5	0.5	-9.8355	20.658	-9.8355	1.95773935
6	0.6	-9.8355	20.658	-9.8355	1.86192076
7	0.7	-9.8355	20.658	-9.8355	1.5838444
8	0.8	-9.8355	20.658	-9.8355	1.15073032
9	0.9	-9.8355	20.658	-9.8355	0.60497473

Tabla 1: Tabla de valores de x_i y b_i mostrada en la ecuación (19)

Se forma entonces el siguiente sistema de $n-1$ ecuaciones con $n-1$ incógnitas

$$\begin{aligned} a_{1,0}c_0 + a_{1,1}c_1 + a_{1,2}c_2 &= b_1 \\ a_{2,1}c_1 + a_{2,2}c_2 + a_{2,3}c_3 &= b_2 \\ a_{3,2}c_2 + a_{3,3}c_3 + a_{3,4}c_4 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{9,8}c_8 + a_{9,9}c_9 + a_{9,10}c_{10} &= b_9 \end{aligned}$$

En donde c_0 y c_{10} son los valores de la función en los extremos del rango, es decir $y(a)$, $y(b)$. Por tanto los productos $a_{1,0}c_0$ y $a_{9,10}c_{10}$ son constantes y pasan al otro lado de la igualdad.

$$\begin{aligned} a_{1,1}c_1 + a_{1,2}c_2 &= b_1 - a_{1,0}c_0 \\ a_{2,1}c_1 + a_{2,2}c_2 + a_{2,3}c_3 &= b_2 \\ a_{3,2}c_2 + a_{3,3}c_3 + a_{3,4}c_4 &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{9,8}c_8 + a_{9,9}c_9 &= b_9 - a_{9,10}c_{10} \end{aligned}$$

En esta representación solo se han puesto los elementos diferentes de cero, pero la matriz que se forma es de 9×9 . Sustituyendo los valores de las diferentes constantes halladas

$$\begin{aligned} 20,658c_1 - 9,8355c_2 &= 0,6050 + 9,8355c_0 \\ -9,8355c_1 + 20,658c_2 - 9,8355c_3 &= 1,1507 \\ -9,8355c_2 + 20,658c_3 - 9,8355c_4 &= 1,5838 \\ &\vdots \\ -9,8355c_8 + 20,658c_9 &= 0,6050 + 9,8355c_{10} \end{aligned}$$

En donde c_0 y c_{10} adquiere los siguientes valores: $y(x=0) = c_0 = 0$,
 $y(x=1) = c_{10} = 0$

$$\begin{aligned} 20,658c_1 - 9,8355c_2 &= 0,6050 \\ -9,8355c_1 + 20,658c_2 - 9,8355c_3 &= 1,1507 \\ -9,8355c_2 + 20,658c_3 - 9,8355c_4 &= 1,5838 \\ &\vdots \\ -9,8355c_8 + 20,658c_9 &= 0,6050 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema tridiagonal de ecuaciones obtenemos:

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3103 \\ 0,5902 \\ 0,8123 \\ 0,9549 \\ 1,0041 \\ 0,9549 \\ 0,8123 \\ 0,5902 \\ 0,3103 \end{bmatrix} \quad (20)$$

La gráfica de los resultados obtenidos se muestra en la figura 7, en donde se incluyen también los puntos que resultan de evaluar la respuesta analítica de esta EDO, la cual es:

$$y(x) = \text{sen}(\pi x) \quad (21)$$

En la tercera columna de la tabla 1 se muestran los puntos de la evaluación de la ecuación (21).

6 Conclusiones

En este trabajo se ha presentado un esquema, en el espacio 3D de un funcional $G(x, y, y')$, que se aplica a ecuaciones diferenciales del tipo (4) y que al ser optimizado a través del procedimiento variacional nos dá la solución de la ecuación diferencial que se pretende hallar.

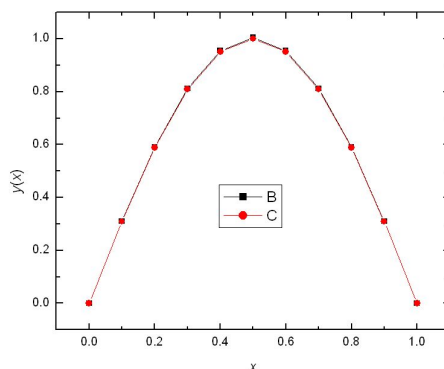


Figura 7: Gráfica de los resultados numéricos y analíticos de la EDO, se muestra una gran coincidencia entre ambos.

Cuadro 1: Evaluación de (21), aplicación del método (20), errores estimados.

N	x_i	$y(x_i)$	y_i	$y(x_i) - y_i$
0	0	0	0	0
1	0.1	0.3090	0.3103	1.3×10^{-3}
2	0.2	0.5878	0.5902	2.4×10^{-3}
3	0.3	0.8090	0.8123	3.28×10^{-3}
4	0.4	0.9511	0.9549	3.84×10^{-3}
5	0.5	1.0000	1.0041	4.1×10^{-3}
6	0.6	0.9511	0.9549	3.84×10^{-3}
7	0.7	0.8090	0.8123	3.28×10^{-3}
8	0.8	0.5878	0.5902	2.4×10^{-3}
9	0.9	0.3090	0.3103	1.3×10^{-3}
10	1.0	0	0	0
			Promedio	2.34×10^{-3}
			Varianza	2.054×10^{-6}

Se muestra que tal optimización del funcional se obtiene al aproximar por tramos rectos una función genérica $z(x)$ cuya mínima expresión es la solución de la ecuación diferencial.

Se esquematiza un método numérico en (15) como un sistema lineal de ecuaciones en función de c_i que representan las alturas $y(x_i)$, es decir la solución punto por punto de la ecuación diferencial.

Se aplica el proceso numérico a una ecuación diferencial particular, para lo cual se establece un “paso” fijo h obteniéndose, $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas. Puede observarse en la tabla (1) que la solución aproximada $y(x_i)$ y la evaluación en la solución analítica (21) son muy similares, lo cual se refleja en la última columna de la misma tabla.

Referencias

- [1] Joe D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists* (MARCEL DEKKER, INC. 1992).
- [2] Lev Elsgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y cálculo variacional* (MIR, 1969).
- [3] Endre Süli and David F. Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis* (Cambridge University Press, 2003).
- [4] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor , *The Finite Element Method* (Butterworth-Heinemann, 2005).
- [5] Erick B. Becker, F. Carey and J. Tinsley Oden, *Finite Element An Introduction* (Prentice-Hall, 1981).
- [6] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (Springer, 2008).
- [7] Dennis G. Zill, *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones al modelado* (Thomson, 1997).
- [8] Vidar Thomée, *Handbook of numerical Analysis* (Elsevier, 2003).
- [9] Murray R. Spiegel, *ecuaciones diferenciales aplicadas* (Prentice-Hall Hispanoamericana, 2003).
- [10] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis* (Oxford University Press, 2004).

Dirección de los autores

César R. Acosta — Departamento de Ingeniería Física, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida-México

e-mail: crenan@uady.mx

J. Alejandro Tapia — Departamento de Ingeniería Física, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida-México

e-mail: jorge.tapia@uady.mx

Maritza de Coss — Departamento de Ingeniería Física, Universidad Autónoma de Yucatán, Mérida-México

e-mail: dcgomez@uady.mx