

APLICACION DE UN MODELO DE CRECIMIENTO EN BIOLOGIA

*Jorge Rodríguez B.
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle*

RESUMEN

En este artículo se presenta la deducción matemática de la ecuación de crecimiento Von Bertalanffy junto con su interpretación biológica y se aplica al crecimiento en longitud del arenque del Pacífico (*Clupea Pallasii*), utilizando los métodos de Gulland Holt y Von Bertalanffy para la estimación de los parámetros l_{∞} , K y t_0 .

INTRODUCCION

El propósito de este artículo es presentar la ecuación del crecimiento de Von Bertalanffy, aplicada al crecimiento en longitud del Arenque del Pacífico.

Los biólogos y matemáticos pesqueros, Gulland, Beverton, Holt, Rickér y Pauly han destacado en sus trabajos la importancia de esta ecuación en el manejo y evaluación de recursos marinos ([1],[2],[3],[4]).

En los modelos biomatemáticos deseamos en general que ellos posean al menos algunas de las siguientes características:

1. Que los datos provenientes de los registros estadísticos sean fáciles de ajustar.
2. Que los parámetros que intervienen en el modelo sean pocos y que en lo posible tengan un significado biológico.
3. Que se puedan hacer extrapolaciones en rangos razonables (de acuerdo al problema biológico, objeto de estudio).

El modelo que veremos a continuación para el crecimiento en longitud del arenque del Pacífico tiene estas características.

LA ECUACION DE VON BERTALANFFY

Se dice que una magnitud variable $l = l(t)$, que varía con el tiempo t sigue una ley de crecimiento de Von Bertalanffy si satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dl}{dt} = k(l_{\infty} - l) \quad , \quad 0 \leq l \leq l_{\infty} \quad (1)$$

donde k y l_{∞} son constantes positivas.

Por el método de separación de variables se obtiene que la solución de la ecuación diferencial (1) con la condición inicial $l(t_0) = 0$ es la función definida para todo t por,

$$l = l_{\infty}(1 - e^{-k(t-t_0)}) \quad (2)$$

Esta solución satisface

$$0 \leq l_t < l_{\infty} \quad , \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} l_t = l_{\infty}$$

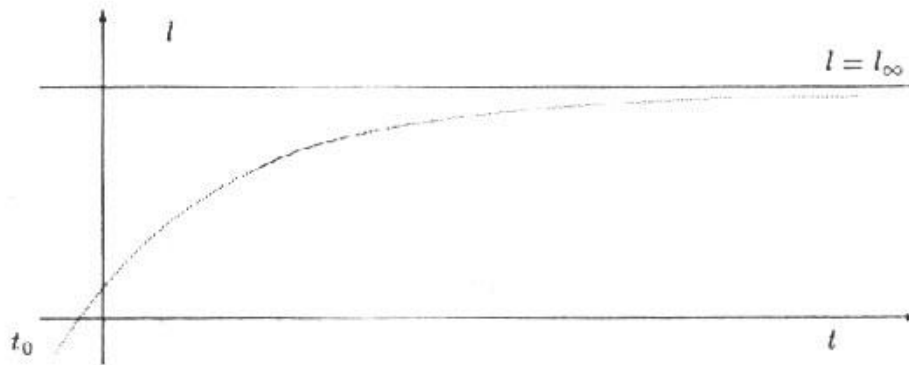


Figura 1: Curva de crecimiento de Von Bertalanffy.

Significado biológico

Supongamos en el proceso de crecimiento de un animal que la variable l representa longitud y la variable t edad. Entonces el parámetro l_{∞} , conocido como **longitud asintótica**, representa la máxima longitud alcanzada en el crecimiento. El parámetro t_0 representa aquella **edad virtual** en que el animal tendría una longitud cero, y el parámetro k es un índice de la rapidez de crecimiento, de forma que valores altos de k corresponden a crecimientos más rápidos.

ESTIMACION DE PARAMETROS

Para la estimación de los parámetros l_{∞} y k emplearemos el método de **Gulland-Holt**, con base en la regresión lineal:

$$\frac{dl}{dt} \text{ vs } l$$

Utilizaremos la aproximación $\frac{dl}{dt} \approx \frac{\Delta l}{\Delta t}$ con $\Delta t = 1$, pues para el caso del arenque los registros de longitud vs. edad se tienen por años.

Así la regresión lineal se simplifica a:

$$\Delta l \text{ vs } l$$

De la ecuación 2, obtenemos la relación lineal

$$\Delta l = l_{\infty}(1 - e^{-k}) - (1 - e^{-k})l \tag{3}$$

con $y = \Delta l$, $x = l$, el modelo lineal propuesto toma la forma $y = a + bx$, donde

$$a = l_{\infty}(1 - e^{-k}) \quad ; \quad b = -(1 - e^{-k})$$

En base a la siguiente estadística de *longitud vs edad*, tomada para el arenque del Pacífico en la costa occidental de Hokkaido, durante los años de 1910 a 1954, estimaremos los parámetros l_{∞} y k .

Edad t (años)	Longitud l (cms)	Δl	$-1/k \ln(\frac{l_{\infty}-l}{l_{\infty}-l_1})$	l	Error relativo % ²
3	25,70	2,70	5,20	22.17	13
4	28,40	1,75	6,36	25.23	11
5	30,15	1,50	7,30	27.70	8
6	31,65	1,20	8,31	29.67	6
7	32,85	0,80	9,32	31.26	5
8	33,65	0,79	10,14	32.53	3
9	34,44	0,53	11,13	33.55	3
10	34,97	0,59	11,93	34.35	2
11	35,56	0,36	13,04	35.03	1
12 ¹	35,92	1,01	13,89	35.56	1
13	36,93	0,11	17,68	35.98	3
14	37,04	0,66	18,38	36.32	3
15	37,70			36.59	3

(1) Este dato no se tuvo en cuenta en los cálculos de regresión.

(2) Error relativo : $\frac{|l-l_1|}{l} \times 100\%$.

Tabla 1: Longitudes Promedios 1910-1954. Arenque del Pacífico Costa occidental de Hokkaido. (Tomada de [4],pg. 46)

Presentamos a continuación el gráfico de regresión Δl vs l , y el cálculo de los parámetros a , b y r^2 -coeficiente de determinación-, que indica la bondad de ajuste del modelo.

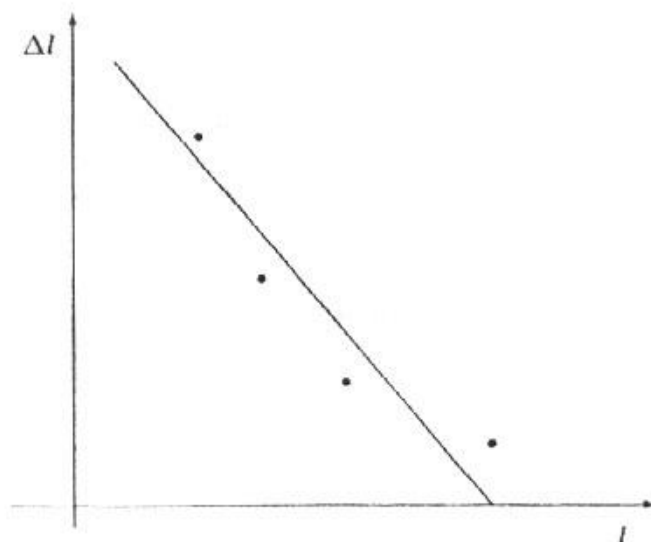


Figura 2: Regresión: Δl vs l . Arenque del Pacífico.

Calculos de regresión : Δl vs l

En la ecuación de regresión lineal, $y = a + bx$, es bien conocido que:

$$a = \frac{1}{n}[\sum y - b \sum x]$$

$$b = \frac{\sum xy - \frac{1}{n} \sum x \sum y}{\sum x^2 - \frac{1}{n} (\sum x)^2}$$

$$r^2 = \frac{a \sum y + b \sum xy - \frac{1}{n} (\sum y)^2}{\sum y^2 - \frac{1}{n} (\sum y)^2}$$

En el caso del Arenque con $\Delta l = y$, $l = x$; y los datos de la tabla 1, se obtiene

$$a = 7,54$$

$$b = -0,20$$

$$l_{\infty} = \frac{a}{b} = 37,7$$

$$\hat{k} = -\ln(1 + b) = -\ln 0,80 = 0,22$$

$$r^2 = 0,92$$

Estimación de t_0

Despejando t , de la ecuación:

$$l = l_{\infty}(1 - e^{-k(t - t_0)})$$

Obtenemos:

$$t = t_0 - \frac{1}{k} \ln \left(\frac{l_{\infty} - l}{l_{\infty}} \right) \quad (4)$$

Linealizando la ecuación 4, por medio de:

$$x = t, \quad y = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{l_{\infty} - l}{l_{\infty}} \right)$$

La regresión lineal de $y = a + bx$, permite estimar t_0 , de acuerdo a $\hat{t}_0 = -\frac{a}{b}$.

Los datos proporcionados en la tabla 1, aplicados a la línea de regresión,

$$y = -\frac{1}{k} \ln \left(\frac{l_{\infty} - l}{l_{\infty}} \right), \quad \text{vs.} \quad x = t$$

proporciona

$$\begin{aligned} a &= 1.21 \\ b &= 1.17 \\ r^2 &= 0.97 \\ \hat{t}_0 &= -\frac{a}{b} = -1.03 \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación de crecimiento en longitud estimada para el arenque del Pacífico, vendrá expresada aproximadamente por:

$$\hat{l} = 37,7(1 - e^{-0,22(t+1,03)}) \quad , \quad 3 \leq t \leq 15$$

l (cms) ; t (años) .

En esta aplicación al crecimiento en longitud promedio al arenque del pacifico, el error relativo nos muestra que la terna de parámetros l_{∞} , k , t_0 , ajustan adecuadamente a los datos empiricos reportados en [4].

Referencias

1. P. SPARRE; E. URSIN; S. VENEMA. *Introduction to tropical fish stock assessment part I*. Manual. FAO. Fisheries technical paper 306/1. Rome 1989.
2. CSIRKE, J. *Introducción a la dinámica de poblaciones de peces*. FAO Doc. Téc. Pesca. Roma 1980.
3. PAULY, D. *Some simple methods for the assessment of tropical fish stock*. FAO. Fish. Tech. pap. Rome 1983.
4. GULLAND, J.A. *Manual de Métodos para la Evaluación de las Poblaciones de Peces*. Editorial Acribia, Zaragoza (España). 1971.