Teoría de la relatividad general desde una perspectiva de teoria de calibración.

Carlos Andrés Palechor Ipia

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2011

Teoría de la relatividad general desde una perspectiva de teoria de calibración.

Carlos Andrés Palechor Ipia

Trabajo de grado presentado al Programa Academico de Física
como requisito para optar al título de Físico

Director

Hernan Ocampo
D. Rer. Nat.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2011

Carlos Andrés Palechor Ipia, 1988

Teoría de la relatividad general desde una perspectiva de teoria de calibración.

Materias o Temas:
Relatividad General
Teoria de campos clásicos
Haces fibrados

Nota de Aprobación

El trabajo de grado titulado: " Teoría de la relatividad general desde una perspectiva de teoria de calibración", Carlos Andrés Palechor Ipia, para optar por el título de Físico, fue revisado por el jurado y calificado como:

Aprobado

______________________-

Director

____

Jurado

DEDICATORIA

A mi MADRE que sin su esfuerzo, apoyo y sacrificio, nada de lo que soy ahora, pudiera haber sido posible.

AGRADECIMIENTOS

A

La universidad del valle por todo su apoyo que me brindó cuando mas lo necesitaba.

El doctor Gonzalo García por sus seminarios, enseñanzas, infinito apoyo, comprensión y amistad.

Mis compañeros Alberto, Diana, Diego por los momentos de discusión y por todo el apoyo que me brindaron.

EL doctor Hernán Ocampo por su orientación y enseñanzas en el transcurso de mi formación.

RESUMEN

Se realizó una revisión de la teoría de calibración, la cual es una teoría basada en el concepto de simetría del lagrangiano, ya sea global o local, que permiten introducir los campos de calibración. Se introduce la teoría de haces fibrados, los conceptos de conexión, curvatura y se muestran algunos ejemplos relevantes. Posteriormente, se indica la relación entre ciertos objetos físicos de la teoría de calibración y haces fibrados, esta identificación se hace entre: el campo de calibración con la 1-forma local de conexión, el tensor de esfuerzos con la 2-forma local de curvatura, y los campos de materia con secciones de un haz asociado. Finalmente se realizó una revisión de la interacción gravitacional desde el punto de vista geométrico, por medio del haz de marcos cuyo grupo estructural es el grupo de Lorentz $SO(3,1)$ y el haz tangente, como el haz asociado al haz de marcos.

Índice general

INTRODUCCIÓN

La relatividad general es una moderna teoría geométrica de la gravedad y que simultáneamente establece un modelo matemático del espacio-tiempo. En esta teoría física aparece el concepto de conexión y curvatura, objetos matemáticos exclusivamente geométricos que permitían describir fenómenos gravitacionales.
Antes de la formulación de la relatividad general, Maxwell había postulado sus ecuaciones de campo electromagnético, que exhibían una extraña simetría, conocida hoy en día como invarianza de calibración [1]. Esta simetría no fue tomada en cuenta debido a que no tenía una interpretación física; solo hasta años después, cuando la formulación de la mecánica cuántica se había desarrollado se observó que dicha simetría poseía implicaciones físicas relevantes [2]. Así inició el estudio de una simetría de la naturaleza antes desconocida.

La historia de la invarianza de calibración comienza con los trabajos de Yang, Mills [3] y Utiyama [4], en los cuales asumiendo invarianza local, lograron hacer una generalización al caso electromagnético, dando origen a lo que se conoce como teorías de calibración no abelianas. El principal postulado de las teorías de calibración tienen como requisito que todas la cantidades descritas por acciones y ecuaciones de movimiento deben ser invariantes de calibración, por consiguientes, invariantes bajo las correspondientes transformaciones de calibración [5]; este principio es satisfecho en el caso electromagnético, por lo tanto, la electrodinámica es el ejemplo mas simple de una teoría de calibración.
Independientemente a esta teoría física, en matemáticas se había desarrollado una teoría geométrica conocida con el nombre de haces fibrados, que al igual que en la teoría de relatividad estaba presente el concepto de curvatura y conexión, además estaba íntimamente relacionada con las teorías de

calibración; esta relación fue encontrada por Yang en 1979 [6]. Este logro permite formular la teoría de calibración con base en los haces fibrados, ya que es una construcción matemática que combina el espacio interno y el espacio tiempo, para formar un objeto geométrico unificado que exhibe la simetría de calibración [7].

En el marco de la teoría cuántica de campos, muchas de las teorías de calibración tienen la propiedad importante de ser renormalizables [8]. Esto es un regalo inesperado del principio de calibración, puesto que la invarianza de calibración no fue introducida para resolver el problema de renormalización, sino como una manera sistemática en donde las interacciones debían respetar una simetría dada. Por lo tanto, la invarianza de calibración parece ser un ingrediente crucial en la construcción de teorías físicas medibles o verificables (renormalizables) [9], además los principios de calibración no son solamente útiles en la construcción de acciones funcionales, sino que en ocasiones son suficientes para asegurar la viabilidad de construir una teoría cuántica a partir de una acción clásica. Por estas razones las teorías de calibración son exhaustivamente estudiadas.
Muchas de las teorías físicas que describen nuestra naturaleza, son teorías de calibración, tales como la teoría unificada de Weinberg-Salam de las interacciones electromagnética y débil, la cromodinámica cuántica(Teoría de las interacciones fuertes) y la teoría unificada de las interacciones electrodébil y fuerte. Esto motiva a considerar la posibilidad de dar una formulación de teoría de calibración para la gravedad, en analogía a las otras teorías.

Este trabajo de grado se organiza en el siguiente orden:

En el capitulo 1 se presenta la formulación de las teorías de calibración, las cuales están basadas en un principio de invarianza global o local de la acción, mostrando explícitamente la transformación de los campos y las leyes de conservación asociadas a estas invarianzas o simetrías. Adicionalmente se dan los fundamentos matemáticos necesarios de haces fibrados para ver la relación existente entre haces fibrados y teorías de calibración. Dichos fundamentos son introducidos por medio de definiciones, teoremas y ejemplos.
En el capitulo 2 se interpreta la interacción gravitacional como una teoría de calibración desde el punto de haces fibrados, asumiendo invarianza local del grupo de Lorentz.

Capítulo 1

PRELIMINARES

En este capítulo se presentan los conceptos básicos sobre teorías de calibración y de geometría diferencial. Además, se encontrará la relación existente entre estas dos teorías. Esta relación será usada, para dar una interpretación de la interacción gravitacional como una teoría de calibración.

1.1. Teorías de calibración

El punto de partida del análisis para teorías de calibración [4] es considerar un lagrangiano

$$\mathcal{L}(\varphi_k, \partial_\mu \varphi_k),$$

que depende de múltiples campos φ_k y sus primeras derivadas, *globalmente* invariante bajo un grupo G ("transformaciones gauge de primera clase") con n parámetros independientes θ^a. Se supone que G es un grupo de Lie compacto. Si f^{abc} denotan las constantes de estructura de G [10] y T^a los generadores del álgebra $\mathfrak{g}$, entonces las reglas de conmutación estan dadas por:

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c, \quad \text{con} \quad f^{abc} = -f^{bac},$$

y la identidad de Jacobi :

$$f^{abd} f^{dce} + f^{bcd} f^{dae} + f^{cad} f^{dbe} = 0 \tag{1.1}$$

se satisface para las constantes. De tal forma que los T^a pueden ser escogidos de tal manera que f^{abc} sean antisimétricos en los tres índices. Esto significa

que la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ es semi-simple [11]. Cerca a la identidad, un elemento $g \in G$ es de la forma $\exp(T^a\theta^a)$.
Si la invarianza se extiende a un grupo $G(x)$ (de " transformaciones gauge de segunda clase ") dependiendo de los parámetros locales $\theta^a(x)$, de tal forma que un nuevo lagrangiano $\mathcal{L}(\varphi_k, \partial_\mu\varphi_k, A)$ sea invariante bajo la clase de transformaciones determinada unívocamente.
Para la invarianza global se tiene que

$$\delta\varphi_k(x) = T^a_{kl}\varphi_l(x)\theta^a; \tag{1.2}$$

y para la invarianza local

$$\delta\varphi_k(x) = T^a_{kl}\varphi_l(x)\theta^a(x), \tag{1.3}$$

para $1 \leq a \leq n$. Esta última transformación en general no deja invariante a $\mathcal{L}$. Debido a la invarianza global supuesta inicialmente tenemos que

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_k}\,\delta\varphi_k + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_k)}\,\delta\,\partial_\mu\varphi_k, \tag{1.4}$$

donde ahora, para invarianza local

$$\begin{aligned}\delta\,\partial_\mu\varphi_k = \partial_\mu\,\delta\varphi_k = T^a_{kl}\partial_\mu\varphi_l(x)\theta^a(x)\\ + T^a_{kl}\varphi_l(x)\partial_\mu\theta^a(x).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Al observar las ecuaciones (1.4) y (1.5), se puede ver que

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_k)}T^a_{kl}\varphi_l(x)\partial_\mu\theta^a(x) \neq 0. \tag{1.6}$$

Entonces es necesario introducir nuevos campos A'_p, con $p = 1, \ldots, M$ en el Lagrangiano, el cual se escribe como

$$\mathcal{L}(\varphi_k, \partial_\mu\varphi_k) \longrightarrow \mathcal{L}'(\varphi_k, \partial_\mu\varphi_k, A'_p).$$

introducidos estos campos, surgen las siguientes preguntas:

- ¿Qué nuevo campo $A(x)$ debe ser introducido?
- ¿Cómo transforma $A(x)$ bajo $G(x)$?
- ¿Cuál es la forma de la interacción y el nuevo lagrangiano?

- ¿Cuáles son las ecuaciones de campo permitidas para $A(x)$?

Se asumirán no solo términos de la forma de (1.5) sino también términos de las derivadas de $\theta^a(x)$. De hecho, el último será necesario para compensar el lado derecho de (1.6):

$$\delta A'_p = U^a_{pq} A'_q \theta^a + C^{a\mu}_p \partial_\mu \theta^a \tag{1.7}$$

o equivalente a

$$A \longrightarrow h^{-1}(x) \cdot A \cdot g(x) + h^{-1} \cdot dh(x), \qquad h \in G \tag{1.8}$$

Aquí $C^{a\mu}_p$ y las U^a_{pq} son matrices constantes, por el momento desconocidas. La condicción de invarianza implica que

$$0 = \delta\mathcal{L}' = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi_k}\,\delta\varphi_k + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\varphi_k)}\,\partial_\mu\delta\varphi_k + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'_p}\,\delta A'_p,$$

es de la forma

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}' = &\left[\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\varphi_k}T^a_{kl}\varphi_l + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\varphi_k)}T^a_{kl}\partial_\mu\varphi_l + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'_p}U^a_{pq}A'_q\right]\theta^a \\ &+ \left[\frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu\varphi_k)}T^a_{kl}\varphi_l + \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial A'_p}C^{a\mu}_p\right]\partial_\mu\theta^a = 0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Los coeficientes deben anularse separadamente, ya que θ^a y sus derivadas son arbitrarias. Los coeficientes de $\partial_\mu\theta^a$ dan $4n$ ecuaciones que involucran a A'_p, y por lo tanto para determinar la dependencia de A' solamente se necesitan $M = 4n$ componentes. Además, la matriz $C^{a\mu}_p$ debe ser no singular. De tal manera que:

$$C^{a\mu}_p {C^{-1}}^a_{\mu q} = \delta_{pq}; \qquad {C^{-1}}^a_{\mu p} C^{b\nu}_p = \delta^\nu_\mu \delta^{ab}.$$

Definiendo el campo (potencial) gauge

$$A^a_\mu = \frac{1}{g}{C^{-1}}^a_{\mu p} A'_p, \quad \text{con inversa} \quad A'_p = g C^{a\mu}_p A^a_\mu. \tag{1.10}$$

Antes de continuar, se puede ver que (1.7) y (1.10) implican

$$\delta A^a_\mu = \left({C^{-1}}^a_{\mu p} U^c_{pq} C^{b\nu}_q\right) A^b_\nu \theta^c + \frac{\partial_\mu\theta^a}{g} =: (S^a_\mu)^{cb\nu} A^b_\nu \theta^c + \frac{\partial_\mu\theta^a}{g},$$

donde $(S^a_\mu)^{cb\nu} = C^{-1}{}^a_{\mu p} U^c_{pq} C^{b\nu}_q$. De igual forma, de (1.9) se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \varphi_k)} T^a_{kl}\varphi_l + \frac{1}{g}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A^a_\mu} = 0.$$

Al definir la denominada derivada covariante como:

$$D_\mu \varphi_k := \partial_\mu \varphi_k - g T^a_{kl}\varphi_l A^a_\mu,$$

solamente un término de esta aparece en el lagrangiano $\mathcal{L}'(\varphi_k, \partial_\mu\varphi_k, A'_p)$, y este se puede reescribir como:

$$\mathcal{L}'(\varphi_k, \partial_\mu\varphi_k, A'_p) \longrightarrow \mathcal{L}''(\varphi_k, D_\mu\varphi_k).$$

Identificando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \varphi_k} &= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \varphi_k} - g\frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(D_\mu \varphi_l)} T^a_{lk} A^a_\mu; \\
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \varphi_k)} &= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(D_\mu \varphi_k)}; \\
\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial A'_p} &= -\frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(D_\mu \varphi_k)} T^a_{kl}\varphi_l C^{-1}{}^a_{\mu p}.
\end{aligned}$$

Ahora los coeficientes que aparecen en $\delta\mathcal{L}'$ en (1.9) desaparecen. Usando el último conjunto de ecuaciones obtenemos la invarianza de $\delta\mathcal{L}''$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \varphi_k} T^a_{kl}\varphi_l - g\frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(D_\mu \varphi_m)} T^b_{mk} T^a_{kl} A^b_\mu \varphi_l \\
&+ \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial D_\mu \varphi_k} T^a_{kl}\partial_\mu\varphi_l - g\frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(D_\mu \varphi_m)} T^c_{ml}\varphi_l C^{-1}{}^c_{\mu p} U^a_{pq} C^{b\nu}_q A^b_\nu \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial \varphi_k} T^a_{kl}\varphi_l + \frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial D_\mu \varphi_k} T^a_{kl} D_\mu\varphi_l \\
&- g\frac{\partial \mathcal{L}''}{\partial(D_\mu \varphi_m)} \big[T^b_{mk} T^a_{kl} A^b_\mu \varphi_l - T^a_{mk} T^b_{kl} A^b_\mu \varphi_l \\
&+ T^c_{ml} (S^c_\mu)^{ab\nu} A^b_\nu \varphi_l\big].
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Aquí se llega a un punto crucial del desarrollo (y delicado). Se observa que los dos primeros términos en (1.11) se anulan uno con otro por invarianza global, si se identifica

$$\mathcal{L}''(\varphi_k, D_\mu\varphi_k) = \mathcal{L}(\varphi_k, D_\mu\varphi_k).$$

Según Utiyama [4] esta particular escogencia de $\mathcal{L}''$ es debido a la condición de que cuando los campos A son nulos, se debe obtener el lagrangiano original. Al desaparecer el último en (1.11) podemos encontrar que

$$(S^c_\mu)^{ab\nu} = f^{abc}\delta^\nu_\mu.$$

Esto implica entonces

$$\delta A^a_\mu = f^{cba}A^b_\mu\theta^c + \frac{\partial_\mu\theta^a}{g}. \tag{1.12}$$

Como una consecuencia obtenemos que $D_\mu\varphi_k$ es una cantidad covariante, en el sentido de (1.5):

$$\begin{aligned}
&\delta(D_\mu\varphi_k) = \delta(\partial_\mu\varphi_k - gT^a_{kl}A^a_\mu\varphi_l) = \partial_\mu(T^a_{kl}\theta^a\varphi_l)\\
&- gf^{cba}T^a_{km}A^b_\mu\theta^c\varphi_m - T^a_{kl}\partial_\mu\theta^a\varphi_l - gT^b_{kl}T^c_{lm}A^b_\mu\theta^c\varphi_m\\
&= T^a_{kl}\theta^a\partial_\mu\varphi_l - gT^c_{kl}T^b_{lm}A^b_\mu\theta^c\varphi_m\\
&= T^a_{kl}\theta^a(D_\mu\varphi_l).
\end{aligned}$$

Lagrangiano del campo de Gauge

El lagrangiano encontrado anteriormente describe la interacción entre los campos de materia y los campos gauge. La parte que falta por hacer para completar el desarrollo del lagrangiano, es encontrar el lagrangiano permitido para el campo libre A e investigar de que tipo es. Este lagrangiano está dado por $\mathcal{L}_0(A^a_\nu, \partial_\mu A^a_\nu)$. Además, este lagrangiano debe ser invariante bajo el grupo local (simetría interna) y de acuerdo con (1.12) tenemos que:

$$\begin{aligned}
0 = &\left[\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^a_\nu}f^{cba}A^b_\nu + \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)}f^{cba}\partial_\mu A^b_\nu\right]\theta^c\\
&+ \left[\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)}f^{cba}A^b_\nu + \frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial A^c_\mu}\right]\partial_\mu\theta^c\\
&+ \frac{1}{g}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^c_\nu)}\,\partial_\mu\partial_\nu\theta^c.
\end{aligned}$$

como los θ^c de nuevo son arbitrarios, se puede concluir que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^a_\nu} f^{cba} A^b_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} f^{cba} \partial_\mu A^b_\nu = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} f^{cba} A^b_\nu + \frac{1}{g} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^c_\mu} = 0, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} + \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\nu A^a_\mu)} = 0. \tag{1.15}$$

Introduciendo la cantidad provisional dada por :

$$\mathcal{A}^a_{\mu\nu} := \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu.$$

Entonces (1.14) es reescrita como

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^c_\mu} + g \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathcal{A}^a_{\mu\nu})} f^{cba} A^b_\nu = 0.$$

Esto indica que la única combinación que aparece en el lagrangiano es

$$\mathcal{F}^c_{\mu\nu} := \mathcal{A}^c_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g f^{abc} (A^a_\mu A^b_\nu - A^a_\nu A^b_\mu), \tag{1.16}$$

donde $\mathcal{F}^c_{\mu\nu}$ es conocido como el campo de esfuerzos.
Entonces se puede escribir que

$$\mathcal{L}_0(A^a_\nu, \partial_\mu A^a_\nu) = \mathcal{L}'_0(\mathcal{F}^a_{\mu\nu}).$$

Además podemos ver que

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} + \mathcal{F}^a_{\nu\mu} = 0.$$

Identificamos a,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial(\partial_\mu A^a_\nu)} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial \mathcal{F}^a_{\mu\nu}}; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial A^b_\mu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial \mathcal{F}^c_{\mu\nu}} f^{abc} A^a_\nu.$$

Ahora por el uso de (1.1), y la formula (1.13), encontramos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial \mathcal{F}^c_{\mu\nu}} f^{abc} \mathcal{F}^a_{\mu\nu} = 0, \tag{1.17}$$

Para $1 \leq b \leq n$. Haciendo uso de la identidad de Jacobi se puede ver fácilmente que

$$\delta \mathcal{F}^{c}_{\mu\nu} = f^{abc} \mathcal{F}^{b}_{\mu\nu} \theta^{a}. \tag{1.18}$$

o equivalente a

$$\delta \mathcal{F}_{\mu\nu} = h^{-1}(x) \cdot \mathcal{F}_{\mu\nu} \cdot h(x), \qquad h \in G. \tag{1.19}$$

Por lo tanto el lagrangiano completo del sistema esta dado por $\mathcal{L}(\varphi_k, D_\mu \varphi_k) + \mathcal{L}'_0(\mathcal{F}^{a}_{\mu\nu})$. Asociado a esta simetría existen unas corrientes conservadas dadas por

$$\mathcal{J}^{a}_{\mu} = -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \, D_\mu \varphi^m} \, \mathrm{T}^{a}_{mk} \, \varphi_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{F}^{c}_{\mu\nu}} f^{acb} A^{b}_{\nu} \right). \tag{1.20}$$

1.2. Geometría Diferencial

En este capítulo se darán definiciones y demostraciones de algunos teoremas relevantes, que serán utilizados posteriormente para el desarrollo del trabajo.

1.2.1. Haces Fibrados

Antes de definir haces fibrados, se definirá el concepto de acción de un grupo de Lie sobre una variedad suave.

Definición 1.2.1 (Acción de un grupo) *suponga que N es una variedad m-dimensional suave, y G un grupo de Lie r-dimensional. Si existe una aplicación suave $\tau : N \times G \longrightarrow N$, denotada por*

$$\tau(x, g) = x \cdot g, \qquad (x, g) \in N \times G, \tag{1.21}$$

Que satisface las siguientes condiciones:

1). *Si e es la identidad del grupo G, entonces para cualquier $x \in N$ se tiene que*

$$x \cdot e = x; \tag{1.22}$$

2). *Si $g_1, g_2 \in G$, entonces para cualquier $x \in N$ se tiene que*

$$(x \cdot g_2) \cdot g_1 = x \cdot (g_2 \cdot g_1), \tag{1.23}$$

entonces se dirá que G actúa sobre N (Por derecha).

Si para cualquier $g \neq e$ y cualquier $x \in N$ se tiene que $x \cdot g \neq x$, entonces se dice que la acción de G es libre o simplemente que actúa libremente sobre N.

Haz vectorial

Definición 1.2.2 *Suponga que E,M son dos variedades suaves, y $\pi : E \longrightarrow M$ una aplicación sobreyectiva y suave. Considere de que $V = R^q$ sea un espacio vectorial de dimensión q. Si $\{U,W,Z,..\}$ es un recubrimiento abierto de M y un conjunto de aplicaciones $\{\varphi_U, \varphi_W, \varphi_Z...\}$ satisfaciendo las siguientes condiciones, entonces (E, M, π) es llamado un **haz vectorial** sobre M de dimensión q, donde E es llamado el **espacio haz**, M es llamado el **espacio base**, π es llamada la **proyección del haz**, y $V = R^q$ es llamada la **fibra típica**:*

1). Cada aplicación φ_U es un difeomorfismo de $U \times R^q$ a $\pi^{-1}(U)$, tal que para cada $p \in U$, $y \in R^q$,

$$\pi \circ \varphi_U(p, y) = p. \tag{1.24}$$

2). Para cualquier p fijo en U, sea

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y), \qquad y \in R^q. \tag{1.25}$$

Entonces $\varphi_{U,p} : R^q \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ es un homeomorfismo. Cuando $U \cap W \neq \varnothing$, para cualquier $p \in U \cap W$,

$$g_{UW}(p) = \varphi^{-1}_{W,p} \circ \varphi_{U,p} : R^q \longrightarrow R^q. \tag{1.26}$$

es un automorfismo lineal de $V = R^q$, por lo tanto $g_{UW}(p) \in GL(V)$.

3). Cuando $U \cap W \neq \varnothing$, la aplicación $g_{UW}(p) : U \cap W \longrightarrow GL(V)$ es suave.

Para cualquier $p \in M$, se define $E_p = \pi^{-1}(p)$ y es denominada la **fibra** del haz vectorial en el punto p. si U es una coordenada que contiene a M. Entonces la estructura lineal de la fibra típica V puede ser transportada a la fibra E_p a través de la aplicación $\varphi_{U,p}$, lo cual hace que la fibra E_p sea un espacio vectorial. Por la condición 2), la estructura lineal es independiente de la escogencia de U y de $\varphi_{U,p}$.

La aplicación $g_{UW} : U \cap W \longrightarrow GL(V)$ definida en la condición 2) satisface las siguientes condiciones de compatibilidad:

1). para cada $p \in U$,
$$g_{UU}(p) = id : V \longrightarrow V; \tag{1.27}$$

2). si $p \in U \cap W \cap Z \neq \varnothing$, entonces
$$g_{UW}(p) \cdot g_{WZ}(p) \cdot g_{ZU}(p) = id : V \longrightarrow V. \tag{1.28}$$

El conjunto $\{g_{UW}\}$ es llamado la familia de **funciones de transición** del haz vectorial (E, M, π).

Ejemplo 1.2.1 *Suponga que M es una variedad m-dimensional suave, T_p y T_p^* son el espacio tangente y cotangente de M en p. Entonces existe el espacio tensorial del tipo (r,s)*

$$T_s^r(p) = \bigotimes_s^r T_p = \underbrace{T_p \otimes T_p \cdots \otimes T_p}_{r-veces} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes T_p^* \cdots \otimes T_p^*}_{s-veces} \tag{1.29}$$

de M en p el cual es un espacio vectorial m^{r+s}-dimensional. Sea

$$T_s^r = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p). \tag{1.30}$$

*Se puede introducir una topología sobre T_s^r que lo hace un espacio de Hausdorff con base numerable, entonces definir una estructura diferenciable C^∞ y hace a T_s^r una variedad suave. A T_s^r se le llama un **haz tensorial tipo (r,s)** sobre M.*
Considere $(\mathbb{R}^m)_s^r = \bigotimes_s^r \mathbb{R}^m$ represente el espacio de todos los tensores de tipo (r,s) sobre $\mathbb{R}^m$ cuya base es

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{*j_1} \otimes \cdots \otimes e^{*j_s}, \qquad 1 < i_k, j_l < m. \tag{1.31}$$

Sea U una vecindad coordenada sobre M con coordenadas $u^1 ... u^m$. Entonces para cualquier $p \in U$, existen bases naturales

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u^1} \right)_p, ..., \left(\frac{\partial}{\partial u^m} \right)_p \right\} \quad y \quad \{(du^m)_p, ..., (du^m)_p\} \tag{1.32}$$

en T_p y T_p^* respectivamente. Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_r}}\right)_p \otimes (du^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (du^{j_s})_p,$$
$$1 < i_k, j_l < m \tag{1.33}$$

es una base de $T_s^r(p)$. Se define la aplicación

$$\varphi_U : U \times (\mathbb{R}^m)_s^r \longrightarrow \bigcup_{p \in U} T_s^r(p), \tag{1.34}$$

tal que para cualquier $p \in U$, $y \in (\mathbb{R}^m)_s^r$, $\varphi_U(p, y)$ es un elemento de $T_s^r(p)$ y las componentes de $\varphi_U(p, y)$ con respecto a (1.33) son las mismas de y con respecto a (1.31). Por lo tanto φ_U es una aplicación inyectiva. Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento de M y suponga que las aplicaciones correspondientes a (1.34) son $\{\varphi_{U_i}\}$. El conjunto de imágenes de todos los subconjuntos abiertos de $U_i \times (\mathbb{R}^m)_s^r$ bajo la aplicación $\{\varphi_{U_i}\}$ son una base para la topología de T_s^r. Tal topología hace a T_s^r un espacio topológico de hausdorff con base numerable y ademas cada aplicación definida por (1.34) es un homeomorfismo.
Fijando un punto $p \in U$, se puede definir la siguiente apicación $\varphi_{U,p} : (\mathbb{R}^m)_s^r \longrightarrow T_s^r(p)$ tal que

$$\varphi_{U,p}(y) = \varphi_U(p, y), \qquad y \in (\mathbb{R}^m)_s^r. \tag{1.35}$$

Por la defínción de φ_U. φ_{Up} es un isomorfismo lineal entre los espacios vectoriales $(\mathbb{R}^m)_s^r$ y $T_s^r(p)$.
Si W es otra vecindad coordenada de M que contiene a p con coordenadas locales $w^1, ..., w^m$. Considere

$$g_{UW}(p) : \varphi_{W,p}^{-1} \circ \varphi_{U,p} : (\mathbb{R}^m)_s^r \longrightarrow (\mathbb{R}^m)_s^r. \tag{1.36}$$

Entonces $g_{UW}(p)$ es un automorfismo del espacio vectorial $(\mathbb{R}^m)_s^r$, es decir $g_{UW}(p) \in \mathcal{GL}((\mathbb{R}^m)_s^r)$. Considere que la acción de $\mathcal{GL}((\mathbb{R}^m)_s^r)$ sobre $(\mathbb{R}^m)_s^r$ es por la derecha. Una condición necesria y suficiente para que cualquier $y, y' \in (\mathbb{R}^m)_s^r$ que satisfaga

$$\varphi_U(p, y) = \varphi_W(p, y') \tag{1.37}$$

es

$$y' = y \cdot g_{UW}(p). \tag{1.38}$$

Para cualquier dos vecindades U, W de M, tal que $U \cap W \neq \varnothing$.Entonces la aplicación

$$g_{UW} : U \cap W \longrightarrow \mathcal{GL}((\mathbb{R}^m)^r_s), \tag{1.39}$$

definida por (1.35) *es suave. Por lo tanto T^r_s es una variedad suave.*
Por la estructura topológica de T^r_s, $\{\varphi_{U_i}(U_i \times (\mathbb{R}^m)^r_s)\}$ constituye un recubrimiento de T^r_s numerable. Las coordenadas de un punto $\varphi_U(p, y)$ en la vecindad coordenada $\varphi_U(U \times (\mathbb{R}^m)^r_s)$ son

$$(u^i(p), y^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}), \tag{1.40}$$

donde u^i son las coordenadas locales de la vecindad coordenada U y $y^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}$ son las componentes de $y \in (\mathbb{R}^m)^r_s$ con respecto a la base (1.31). *Es decir, que T^r_s es una variedad $(m + m^{r+s})$-dimensional. La proyección π esta dada por*

$$\pi : T^r_s \longrightarrow M, \tag{1.41}$$

que coge elementos en $T^r_s(p)$ a el punto $p \in M$. Por lo tanto (T^r_s, π, M) es un haz vectorial de dimensión m^{r+s}, con fibra típica $(\mathbb{R}^m)^r_s$.
Si r=1, s=0, se obtiene el ***haz tangente*** de M, *denotado por TM. Si r=0. s=1 se obtiene el* ***haz cotangente****, denotado por T^*M.*

Haz principal

Definición 1.2.3 *Suponga que M y P son dos variedades suaves, y sea G un grupo de Lie r-dimensional actuando sobre P por la derecha. Si*

1). G actua libremente sobre P por la derecha ($R_g p \in P$);

2). M es el espacio cociente de la variedad P con respecto a la relación de equivalencia definida por la acción del grupo G, y la aplicación $\pi : P \longrightarrow M$ es sobreyectiva suave; y

3). P es Localmente trivial, es decir, para cada punto $x \in M$ existe una vecindad de x tal que $\pi^{-1}(U)$ es isomorfo a $U \times G$, lo que significa que existe un difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ (tambien conocido como trivialización local) tal que

$$\begin{aligned} \psi : & \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G \\ & p \longrightarrow (\pi(p), \varphi(p)), \end{aligned} \tag{1.42}$$

tal que para cualquier $g \in G$ se tiene que la aplicación $\varphi|_{\pi^{-1}(p)}$: $\pi^{-1}(p) \longrightarrow G$ satisface

$$\varphi(g \cdot p) = g \cdot \varphi(p), \tag{1.43}$$

*entonces se dice que P es un **haz principal** sobre M con grupo estructural G. El haz principal es denotado como $P(M, G)$ y es llamado un **G-haz principal** sobre M.*
*De manera análoga que en el haz vectorial, se define la familia $\{g_{UW}\}$ de **funciones de transición** del G-haz principal $P(M, \pi, G)$ reemplazando a V por el grupo de lie G en las condiciones de compatibilidad dadas por las ecuaciones* (1.27),(1.28).

La fibra $\pi^{-1}(x)$ con $x \in M$ es la orbita

$$G \cdot p = \{R_g(p) : g \in G\} \tag{1.44}$$

del grupo de Lie G sobre P en un punto $p \in \pi^{-1}(x)$. Debido a que G actúa libremente, cada orbita es homeomorfa a G.

Ejemplo 1.2.2 *Suponga que M es una variedad m-dimensional suave. Un **marco** es una combinación de la forma $(p; e_1, ..., e_m)$, donde $p \in M$ y $e_1, ..., e_m$ son m vectores linealmente independientes en p. Se denotará al conjunto de todos los marcos en p como $F(M)_p$ y sea $F := F(M) = \bigcup_{p \in M} F(M)_p$.*
Se introducirá una estructura diferenciable sobre F similar a la del haz tensorial. Suponga que (U) sea una vecindad con coordenadas locales (u^i) sobre M.
Entonces existe un campo de marcos naturales $\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, ..., \frac{\partial}{\partial u^m}\right)$ sobre U. Por lo tanto, cualquier marco sobre U puede ser escrito como

$$e_i = \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right)_p X_i^k, \qquad 1 \leq i \leq m, \tag{1.45}$$

donde (X_i^k) es una matriz invertible $m \times m$, por lo tanto un elemento de $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$. Se define la aplicación $\varphi_U : U \times \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que para cualquier $p \in U$ y $(X_i^k) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$ se tiene que

$$\varphi_U\left(p, X_i^k\right) = (p; e_1, \ldots, e_m), \tag{1.46}$$

donde e_i es dada por (1.45). *la aplicación φ_U es inyectiva.*
Sea $\{U, W, Z...\}$ un recubrimiento de M con las correspondientes aplicaciones

definidas por (1.46) *denotadas por* $\varphi_U, \varphi_W, \varphi_Z$.. *Las imágenes de todos los abiertos en la topología producto* $U \times \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$ *bajo* φ_U *forman una base topológica para* F. *Con respecto a esta estructura topológica de* F, *la aplicación*

$$\varphi_U : U \times \mathcal{GL}\left(\mathbb{R}^m\right) \longrightarrow \pi^{-1}(U) \tag{1.47}$$

en un homeomorfismo.

A través de la aplicación φ_U, $\pi^{-1}(U)$ *es una vecindad coordenada en* F, *con coordenadas locales* (u^i, X_i^k). *Si* $U \cap W \neq \varnothing$, *entonces* M *tiene cambio de coordenadas locales en* $U \cap W$:

$$w^i = w^i(u^1, \ldots, u^m), \quad 1 \leq i \leq m. \tag{1.48}$$

Las correspondientes bases naturales están relacionadas por:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial w^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial w^j}. \tag{1.49}$$

Si $(p; e_1, \ldots, e_m)$ *es un marco en* $U \cap W$, *entonces sus coordenadas* (u^i, X_i^k) *y* (w^i, Y_i^k) *bajo los dos sistemas de coordenadas satisfacen la siguiente relación*

$$\varphi_U \left(u^i, X_i^k\right) = \varphi_W \left(\omega^i, Y_i^k\right), \tag{1.50}$$

que es la relación de u^i *y* w^i *dada por* (1.48), *y*

$$\frac{\partial}{\partial u^k} \cdot X_i^k = \frac{\partial}{\partial \omega^k} \cdot Y_i^k, \tag{1.51}$$

o

$$Y_i^k = \frac{\partial \omega^k}{\partial u^j} \cdot X_i^k. \tag{1.52}$$

Por lo tanto, las ecuaciones (1.48) *y* (1.52) *constituyen la transformación de coordenadas para la variedad* F. *Es claro que* w^i *y* Y_i^k *son funciones suaves de* u^i *y* X_k^i. *Por consiguiente* F *es una variedad suave* $(m + m^2)$*-dimensional y la proyección* $\pi : F(M) \longrightarrow M$ *dada por* $\pi(p; e_1, ..., e_m) = p$ *es una aplicación suave sobreyectiva.*

La ecuación (1.46) *indica que la aplicación* φ_U *provee a* F *de una estructura local, es decir, que* $\pi^{-1}(U)$ *es difeomorfo al producto local* $U \times \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$. *Para cualquier* $p \in U$, *considere*

$$\varphi_{U,p}(X) = \varphi_U(p, X), \qquad X \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m). \tag{1.53}$$

Entonces $\varphi_{U,p} : \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ *es un homeomorfismo.*
Si $U \cap W \neq \varnothing$*, para* $p \in U \cap W$*, la aplicación* $\varphi^{-1}_{W,p} \circ \varphi_{U,p} : \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$ *es un homeomorfismo. Por* (1.52)*, se tiene que* $\varphi^{-1}_{W,p} \circ \varphi_{U,p}$ *es la acción a izquierda de la matriz Jacobiana* $J_{UW} = (\partial w^k/\partial u^j)$ *sobre* $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$.
Entonces $F(M, \pi, \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m))$ *es un haz principal, cuya fibra y grupo estructural es* $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$*. A* $F(M, \pi, \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m))$ *se le llama* ***Haz de marcos*** *sobre* M*.*
En este caso $\{J_{UW}\}$ *forma una familia de funciones de transición sobre el haz de marcos.*
El grupo estructural $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$ *actúa sobre el haz de marcos de forma natural y forma un grupo de homeomorfismo sobre* P*. Suponga que* $a = (a^i_j) \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$*.*
La acción R_a *de* a *sobre* F *se define como*

$$R_a(p; e_1, \ldots, e_m) = (p; e'_1, \ldots, e'_m), \tag{1.54}$$

donde

$$e'_i = e_j \cdot a^j_i. \tag{1.55}$$

Se puede observar que para cada R_a *es un homeomorfismo de* F *asi mismo, y preserva las fibras, es decir,*

$$\pi \circ R_a = \pi : P \longrightarrow M. \tag{1.56}$$

Haz asociado

Definición 1.2.4 *Sea* $P(M, \pi, G)$ *un* G*-haz principal, y* F *una variedad sobre la cual* G *actúa por la izquierda. Considere una acción izquierda de* G *sobre* $Z = P \times F$ *como*

$$\begin{aligned} \varepsilon :&G \times Z \longrightarrow Z \\ :&(g, p, f) \longrightarrow (p \cdot g, g^{-1} \cdot f). \end{aligned} \tag{1.57}$$

Defina el espacio cociente $Z_G = P \times F/G = P \times_G F$ *por medio de la siguiente relación de equivalencia* $(p, v) \sim (q, w)$ *si existe un* $g \in G$ *tal que* $q = p \cdot g$ *y* $w = g^{-1} \cdot v$ *y defina la aplicación* $\pi_Z : Z_G \longrightarrow M$ *por* $\pi_Z([p, v]) = \pi(p)$*. Entonces* (Z_G, π_Z, M) *es un haz fibrado con fibra* F*. Este es llamado* ***haz fibrado asociado*** *a* P *por* G*. Además para cada* $x \in M$*,* $\pi^{-1}(x)$ *es homeomorfo a* F

Si $F = V$ es un espacio vectorial de dimensión k y G actua sobre F por medio de una representación lineal $\varrho : G \longrightarrow, \mathcal{GL}(V)$, entonces $(Z_\varrho = P \times_\varrho V, \pi_Z, M)$

es un haz vectorial sobre M de dimensión k asociado a P por ϱ. Las Funciones de transición del haz vectorial Z_ϱ asociado a P, están dadas por $\varrho(g_{UV})$ donde g_{UV} son las funciones de transición del haz P.

Ejemplo 1.2.3 *Suponga M una variedad suave m-dimensional, y $F = F(M)$ el haz de marcos sobre M. Suponga que $\varrho_m : \mathcal{GL}_m(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$ denota la representación estándar y considere el espacio $E = F \times \mathbb{R}^m$. Debido a que todo espacio vectorial de dimensión m es isomorfo a $\mathbb{R}^m$, para cada $p \in M$, el espacio tangente T_pM puede ser identificado con $\mathbb{R}^m$. Un elemento de $F\times\mathbb{R}^m$ es un par de la forma $(\widetilde{p}, v)$, donde $\widetilde{p} = (p; e_1, \ldots, e_m)$ es un marco en p y $v = (v^1, \ldots, v^m)^T$ es ahora identificado con un vector tangente a p, cuyas componentes relativas a $(e_1, \ldots, e_m)$ son $v^1, \ldots, v^m$ $(v = v^i e_i)$. La acción de $\mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)$ sobre $F \times \mathbb{R}^m$ está dada por*

$$g \cdot (\widetilde{p}, v) = (\widetilde{p} \cdot g, g^{-1} \cdot v), \tag{1.58}$$

donde $\varrho_m(g^{-1}) = g^{-1}$.
Ahora, $\widetilde{p} \cdot g$ es otro marco en p dado por

$$\widetilde{p} \cdot g = (e'_1, \ldots, e'_m) = (e_1, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} g^1_1 & \cdots & g^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ g^1_n & \cdots & g^n_n \end{pmatrix},$$

y $g^{-1} \cdot v$ esta dado por

$$\begin{pmatrix} v'^1 \\ \vdots \\ v'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^1_1 & \cdots & g^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ g^1_n & \cdots & g^n_n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

Se puede observar de que $v'^1, \ldots, v'^m$ son precisamente las componentes de $v = v^i e_i$ relativas a $(e'_1, \ldots, e'_m)$, entonces

$$v'^j e'_j = \left(g^j_k v^k\right)(g^i_j e_i) = (g^j_k g^i_j) v^k e_i = \delta^i_k v^k e_i = v^i e_i = v$$

Por lo tanto, una clase de equivalencia

$$[\widetilde{p}, v] = \{(\widetilde{p} \cdot g, g^{-1} \cdot v) : \widetilde{p} \in F, v \in \mathbb{R}^m, g \in \mathcal{GL}(\mathbb{R}^m)\} \tag{1.59}$$

es el conjunto de todas las descripciones posibles de algún vector fijo tangente a p, por consiguiente el espacio cociente $E_{\varrho_m} = F \times_{\varrho_m} \mathbb{R}^m = TM$. Entonces *el haz vectorial asociado al haz de marcos F es el haz tangente TM con proyección inducida por el haz de marcos $\pi_E([\widetilde{p}, v]) = \pi(\widetilde{p})$.*

Similarmente, si ϱ_m^* denote la representación dual ($\varrho_m^*(g) = \rho_m(g^{-1})^t$), Entonces

$$T^*M = F \times_{\varrho_m^*} \mathbb{R}^m \quad y \quad T_s^r = F \times_{\bigotimes_s^r \varrho_m} \bigotimes_s^r \mathbb{R}^m, \tag{1.60}$$

son haz cotangente y tangente haz tensorial sobre de M respectivamente, donde $\bigotimes_s^r \rho_m$ es la representacion producto tensorial inducida [14, pag 94].

Definición 1.2.5 *Suponga que $S : M \longrightarrow N$ es una aplicación suave. Si*

$$\pi \circ S = id : M \longrightarrow M, \tag{1.61}$$

*entonces S es llama una **sección global suave** sobre el haz fibrado N.*
*Sea U un abierto de N, una **seccion local suave** $S : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ tal que*

$$\pi \circ S = id : U \longrightarrow U. \tag{1.62}$$

El conjunto de todas las secciones suaves sobre un haz N se denota como $\Gamma(N)$.

En el caso de haces principales, se pueden construir trivializaciones locales $\psi : U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ a través de secciones locales de la siguiente manera. Sea $S(x)$ una sección local sobre U, para $p \in \pi^{-1}(x)$, $x \in U$, hay un único elemento $g_p \in G$ tal que $p = S(x) \cdot g_p$. Se define ψ como $\psi(p) = (x, g_p)$. En esta trivialización local, la sección $S(x)$ puede ser expresada como

$$S(x) = \psi^{-1}(x, e) \tag{1.63}$$

Esta trivialización es llamada **trivialización local canónica**.

1.2.2. Conexión y curvatura sobre haces fibrados.

Haz vectorial

Supongamos que E es un haz vectorial q-dimensional sobre M, y $\Gamma(E)$ es el conjunto de secciones suaves sobre M.

Definición 1.2.6 *Una **conexión** sobre un haz vectorial E es una aplicación*

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E), \tag{1.64}$$

la cual satisface las siguientes condiciones:

1). Para cualquier $S_1, S_2 \in \Gamma(E)$,

$$\nabla(S_1 + S_2) = \nabla S_1 + \nabla S_2.$$

2). Para $S \in \Gamma(E)$ y $\alpha \in C^\infty(M)$,

$$\nabla(\alpha S) = d\alpha \otimes S + \alpha \nabla S.$$

Suponga que X es un campo vectorial suave sobre M y $S \in \Gamma(E)$. consideremos

$$\nabla_X S = \langle X, \nabla S \rangle, \tag{1.67}$$

entonces $\nabla_X S$ es una sección suave de E, llamada diferencial absoluta o covariante de la sección a lo largo de X.
Por (1.67) podemos observar que ∇ como una aplicación bivalente es un operador lineal de $\Gamma(TM) \times \Gamma(E)$ en $\Gamma(E)$ y que satisface las siguientes propiedades. Suponga que X, Y son dos campos vectoriales suaves sobre M, $S, S_1, S_2 \in \Gamma(E)$ y $\alpha \in C^\infty(M)$. Entonces

1). $\nabla_{X+Y} S = \nabla_X S + \nabla_Y S$;

2). $\nabla_{\alpha X} S = \alpha \nabla_X S$;

3). $\nabla_X (S_1 + S_2) = \nabla_X S_1 + \nabla_X S_2$;

4). $\nabla_X (\alpha S) = (X\alpha) S + \alpha \nabla S$.

Una conexión está determinada localmente por un conjunto de 1-formas. Suponga que U es una vecindad coordenada de M con coordenadas locales $u^i, 1 \leq i \leq m$. Escogiendo q secciones suaves $S_\alpha (1 \leq \alpha \leq q)$ de E sobre U tal que ellos son linealmente independiente en todo punto. A este conjunto de q secciones es denominado un **campo de marcos locales**. Por lo tanto para cada $p \in U, \{du^i \otimes S_\alpha, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq m\}$ forma una base del espacio tensorial $T_p^* \otimes E_p$.

Puesto que ∇S_α es una sección local sobre U del haz $T^*M \otimes E$, esta se puede escribir como

$$\nabla S_\alpha = \sum_{i,\beta} \Gamma^\beta_{\alpha i} du^i \otimes S_\beta, \tag{1.68}$$

donde $\Gamma^\beta_{i\alpha}$ son funciones suaves sobre U. Denotemos

$$\omega^\beta_\alpha = \sum_i \Gamma^\beta_{\alpha i} du^i \tag{1.69}$$

Entonces por (1.68)

$$\nabla S_\alpha = \sum_\beta \omega^\beta_\alpha \otimes S_\beta. \tag{1.70}$$

Si se denota $\widetilde{S}$ como la matriz columna formada por los campos de marcos locales y ω denota la matriz con elementos ω^β_α, llamada **matriz conexión**. Entonces (1.70) puede escribirse como

$$\nabla\widetilde{S} = \omega \otimes \widetilde{S}. \tag{1.71}$$

Sea $\{U_i\}$ un recubrimiento de M. Para cada $\{U_i\}$ fijo hay un campo de marcos locales sobre E y una matriz de conexión w_{U_i} de 1-formas diferenciales.

Teorema 1.2.1 *Sean U y V dos vecindades coordenadas, tal que $U \cap W \neq \varnothing$, A_{WU} la matriz de cambio de base de los marcos locales en U y W, tal que A_{WU} es una matriz $k \times k$ funciones suaves sobre $U \cap W$ con $det(A_{WU}) \neq 0$. Entonces*

$$\omega_W = A_{WU} \cdot \omega_U \cdot A^{-1}_{WU} + dA_{WU} \cdot A^{-1}_{WU}. \tag{1.72}$$

Demostración: ver [12, pag 105]

Definición 1.2.7 (Matriz de Curvatura) *Se define la **matriz de curvatura** de la conexión ∇ sobre U como*

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega \tag{1.73}$$

Bajo un cambio de marcos locales en U y W, la matriz de conexión transforma como

$$\Omega_W = A_{WU}\Omega_U A_{WU}^{-1} \tag{1.74}$$

Calculemos las componentes de la matriz de curvatura en función de las coeficientes de la conexión. se tiene que

$$\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j du^k \tag{1.75}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\Omega_i^j &= d\omega_i^j - \omega_i^h \wedge \omega_h^j \\
&= \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial u^l} du^l \wedge du^k - \Gamma_{kl}^h \Gamma_{hi}^j du^l \wedge du^k \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{kl}^j}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{kl}^h \Gamma_{hi}^j - \Gamma_{ki}^h \Gamma_{hl}^j\right) du^k \wedge du^l \\
&= \frac{1}{2} R_{kli}^j du^k \wedge du^l,
\end{aligned} \tag{1.76}$$

donde

$$R_{kli}^j = \frac{\partial \Gamma_{kl}^j}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial u^l} + \Gamma_{kl}^h \Gamma_{hi}^j - \Gamma_{ki}^h \Gamma_{hl}^j, \tag{1.77}$$

es el llamado **tensor de curvatura** de la conexión ∇.

Definición 1.2.8 (Operador Curvatura) *Suponga que X, Y son dos campos vectoriales arbitrarios y suaves sobre M. Se define el **operador curvatura** $R(X,Y) : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E)$ como*

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \tag{1.78}$$

Una conexión ∇ de una haz vectorial induce una conexión (También denotada por ∇) sobre el haz vectorial dual E^*. Suponga que $S \in \Gamma(E)$, $S^* \in \Gamma(E^*)$, y el par $\langle S, S^* \rangle$ es una función suave sobre M. Entonces la conexión inducida ∇ sobre E^* es determinada por la ecuación

$$d\langle S, S^* \rangle = \langle \nabla S, S^* \rangle + \langle S, \nabla S^* \rangle. \tag{1.79}$$

Encontremos la matriz de la conexion inducida sobre E^*. Supongamos que $S_a (1 \leq \alpha \leq q)$ es una campo de marcos locales sobre E, y el campo de marcos locales dual sobre E^* es $S^{*\beta} (1 \leq \beta \leq q)$, por lo tanto

$$\langle S_a, S^{*\beta} \rangle = \delta^\beta_\alpha. \tag{1.80}$$

consideremos

$$\nabla S^{*\beta} = \sum_\gamma \omega^{*\beta}_\gamma \otimes S^{*\gamma}. \tag{1.81}$$

Entonces de (1.79) tenemos que

$$\begin{aligned} \omega^\beta_\alpha &= \langle \nabla S_\alpha, S^{*\beta} \rangle = -\langle S_\alpha, \nabla S^{*\beta} \rangle \\ &= -\omega^{*\beta}_\alpha \end{aligned} \tag{1.82}$$

Por lo tanto

$$\nabla S^{*\beta} = -\sum_\gamma \omega^\beta_\gamma \otimes S^{*\gamma}. \tag{1.83}$$

Supongamos que ∇^1 y ∇^2 son conexiones sobre el haz vectorial E_1 y E_2 respectivamente. si $S_1 \in \Gamma(E_1)$ y $S_2 \in \Gamma(E_1)$. Entonces $S_1 \otimes S_2$ es una sección de $E_1 \otimes E_2$.Consideremos

$$\nabla(S_1 \otimes S_2) = \nabla^1(S_1) \otimes S_2 + S_1 \otimes \nabla^2(S_2). \tag{1.84}$$

Entonces la ecuación anterior determina una conexión sobre $E_1 \otimes E_2$, llamada **conexión inducida** sobre $E_1 \otimes E_2$.

Haz principal

Definición 1.2.9 *Considere que $P(M, G)$ es un haz principal. Una* ***conexión*** *sobre P es una separación única del espacio tangente T_qP en dos espacios, un espacio tangente vertical V_qP y un espacio horizontal H_qP tal que*

- *$T_qP = H_qP \oplus V_qP$.*
- *Un campo vectorial suave X sobre P se puede descomponer en dos campos vectoriales suaves $X^H \in H_qP$ y $X^V \in V_qP$ tal que $X = X^H + X^V$.*
- *$H_{qg}P = (R_g)_* H_qP$ para cualquier $u \in P$ y $g \in G$.*

Para cálculos, se introduce una 1-forma con valores en el álgebra de Lie $\omega \in T^*P \otimes \mathfrak{g}$ llamada **1-forma de conexión** que permite realizar la separación de T_qP en V_qP y H_qP.

Definición 1.2.10 *Una **1-forma de conexión** $T^*P \otimes \mathfrak{g}$ es una proyección de T_qP en la componente vertical $V_qP \backsimeq \mathfrak{g}$. Sea $g \in G$ y $A \in \mathfrak{g}$. La proyección satisface las siguientes condiciones*

1). $\omega(A^{\#}) = A$.

2). $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$,

donde $A^{\#}$ esta definido de la siguiente forma. Sea $A \in \mathfrak{g}$ y G_q la fibra en $p = \pi(q)$, por acción a derecha sobre P se tiene que $R_{exp(tA)}q = q \cdot exp(tA)$ es una curva a través q definida en P. Entonces esta curva esta en G_q, ya que $\pi(q \cdot exp(tA)) = \pi(q) = p$.
Se define el vector $A^{\#} \in T_qP$ como $A^{\#}f(q) = \frac{d}{dt} f(q \cdot exp(tA))|_{=0}$, donde $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función suave.
El subespacio horizontal $H_qP \subset T_qP$ se define como el núcleo de ω,

$$H_uP := \{X \in T_qP : \omega(X) = 0\}. \tag{1.85}$$

El vector $A^{\#}$ es tangente a P en q y $A^{\#} \in V_qP$. El isomorfismo de espacios vectoriales está dado por $\sharp : \mathfrak{g} \longrightarrow V_qP$ dado por $A \longrightarrow A^{\#}$.

Definición 1.2.11 (Forma local de conexión) *Considere que $\{U_i\}$ es un recubrimiento abierto de M y sea σ_i una sección local en cada U_i. Se puede introducir una 1-forma $\mathcal{A}_i$ con valores en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre U_i dada por*

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^*\omega \in \Omega(U_i) \otimes \mathfrak{g}. \tag{1.86}$$

Reciprocamente, dado una -forma con valores en el álgebra de Lie $\mathcal{A}_i$ sobre U_i, se puede reconstruir una 1-forma de conexión ω tal que $\sigma_i^*\omega = \mathcal{A}_i$.

Las 1-formas locales $\mathcal{A}_i$, tienen una peculiar propiedad de transformación, semejante a la transformación de la matriz de conexión de un haz vectorial dada por la ecuación (1.72), usando el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2 *Sea $P(M,G)$ un G-haz; σ_i y σ_j secciones locales sobre U_i y U_j respectivamente, tal que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Para $X \in T_pM$ con $p \in U_i \cap U_j$ se tiene que*

$$\sigma_{j*}X = R_{g_{ij}*}(\sigma_{i*}X) + (g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X))^{\#}, \tag{1.87}$$

donde $g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ son las funciones de transición.

Demostración : ver [15].

Aplicando la 1-forma de conexión ω a la ecuación (1.87) obtenemos la siguiente relación de compatibilidad

$$\begin{aligned} \omega(\sigma_{j*}X) &= \omega(R_{g_{ij}*}(\sigma_{i*}X)) + \omega(g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X))^{\#} \\ \sigma_j^*\omega(X) &= R_{g_{ij}}^*(\omega(\sigma_{i*}(X)) + g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X) \\ \sigma_j^*\omega(X) &= g_{ij}^{-1}(\omega(\sigma_{i*}(X))g_{ij} + g_{ij}^{-1}dg_{ij}(X) \end{aligned} \tag{1.88}$$

Usando la definición de la 1-forma local de conexión se obtiene que estas transforman como

$$\mathcal{A}_j = g_{ij}^{-1}\mathcal{A}_i g_{ij} + g_{ij}^{-1}dg_{ij}. \tag{1.89}$$

De manera análoga, si σ_1 y σ_2 son secciones locales sobre una vecindad coordenada U de M, tal que $\sigma_2(p) = \sigma_1(p)g(p)$ con $p \in M$. Entonces las correspondientes formas locales estan relacionadas por $\mathcal{A}_2 = g^{-1}\mathcal{A}_1 g + g^{-1}dg$ donde $g \in G$.

Definición 1.2.12 *Considere que P(M,G) es un G-haz y $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva suave sobre M. Una curva $\widetilde{\gamma} : [0,1] \longrightarrow P$ se dice que es un **levantamiento horizontal** de γ si $\pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ y el vector tangente a $\widetilde{\gamma}(t)$ pertenece a $H_{\widetilde{\gamma}(t)}P$.*

La condición anterior sobre los vectores tangentes a γ es equivalente a decir que si $\widetilde{X}$ es tangente a $\widetilde{\gamma}(t)$, entonces $\omega(\widetilde{X}) = 0$. Por lo tanto, el teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza la existencia y unicidad de levantamientos horizontales.

Teorema 1.2.3 *considere que $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva suave sobre M y considere $q_0 = \pi^{-1}(\gamma(0))$. Entonces existe un único levantamiento horizontal $\widetilde{\gamma}(t)$ en P tal que $\widetilde{\gamma}(0) = q_0$,*

Demostración: Sea U_i una vecindad coordenada tal que $\gamma(t) \subset U_i$ y sea σ_i una sección sobre U_i. Construyamos un levantamiento horizontal de γ de la siguiente manera $\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(\gamma(t)) \cdot g_i(t)$ donde $g_i(t) = g_i(\gamma(t)) \in G$, tal que

$\sigma_i(\gamma(0)) = q_0$ y $g_i(0) = e$. Sea X un vector tangente a $\gamma(t)$ en $\gamma(0)$. Entonces $\widetilde{X} = \gamma_* X$ es tangente a $\widetilde{\gamma}$ en $\widetilde{\gamma}(0) = q_0$. Usando el mismo argumento del teorema 1.2.1, se puede deducir de que $\widetilde{X} = g_i^{-1}(t)\sigma_{i*}(X)g_i(t) + (g^{-1}(t)dg_i(t))^{\#}$. Entonces $\widetilde{X}$ es horizontal si $\omega(\widetilde{X}) = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\omega(\widetilde{X}) &= g_i^{-1}(t)(\omega\sigma_{i*}(X))g_i(t) + \omega(g^{-1}(t)dg_i(X))^{\#} = 0\\ &= g_i^{-1}(t)(\sigma_i^*\omega(X))g_i(t) + g^{-1}(t)dg_i(X) = 0.\end{aligned} \tag{1.90}$$

Entonces de la ecuación anterior se obtiene una ecuación diferencial para g_i con condición inicial $g_i(0) = e$,

$$\frac{dg_i(t)}{dt} = -\sigma_i^*\omega(X)g_i(t) = -\mathcal{A}_i(X)g_i(t). \tag{1.91}$$

Por el teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias, esta ecuación tiene solución y es única. La solución de esta ecuación esta dada por

$$\begin{aligned}g_i(\gamma(t)) &= \mathcal{P}exp\left(-\int_0^t \mathcal{A}_{i\mu}\frac{du^\mu}{dt}dt\right),\\ &= \mathcal{P}exp\left(-\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \mathcal{A}_{i\mu}(\gamma(t))du^\mu\right),\end{aligned} \tag{1.92}$$

donde u^μ son las coordenadas de U.

Definición 1.2.13 *Sea $\zeta \in \Omega^r(P) \otimes V$ una r-forma con valores en V y $X_1....X_{r+1} \in T_qP$. La **derivada covariante** $D : \Omega^r(P)\otimes V \longrightarrow \Omega^{r+1}(P)\otimes V$ tal que*

$$D\zeta(X_1...X_{r+1}) := d_P\zeta(X_1^H...X_{r+1}^H), \tag{1.93}$$

donde $d_P : \Omega^r(P) \longrightarrow \Omega^{r+1}(P)$ es la derivada exterior. Si $\{e_\alpha\}$ y $\{\zeta^\beta\}$ son bases de V y $\Omega^r(P)$ respectivamente. Entonces $\{\zeta^\beta \otimes e_\alpha\}$ es una base de $\Omega^r(P) \otimes V$ y $\zeta = a^\alpha_\beta\zeta^\beta \otimes e_\alpha$. Por lo tanto $d_P\zeta = d_P(a^\alpha_\beta\zeta^\beta) \otimes e_\alpha$.

Definición 1.2.14 (2-forma de curvatura) *La **2-forma de curvatura** es la derivada covariante de la 1-forma ω,*

$$\Omega := D\omega \in \Omega^2 \otimes \mathfrak{g}. \tag{1.94}$$

Teorema 1.2.4 *Sea X,$Y\in T_qP$. Entonces la 2-forma de conexión satisface que*

$$\Omega(X,Y) = d_P\Omega(X,Y) + [\omega(X),\omega(Y)], \tag{1.95}$$

que también puede reescribirse como

$$\Omega = d_P\omega + \omega\wedge\omega. \tag{1.96}$$

Demostración : ver [16, pag 272].

Definición 1.2.15 (Forma local de la curvatura) *Sea σ una sección local sobre $U\subset M$. Se define la **2-forma local de curvatura** $\mathcal{F}$, como una 2-forma con valores en el álgebra de Lie sobre U dada por*

$$\mathcal{F} := \sigma^*\Omega \in \Omega^2(U)\times\mathfrak{g}. \tag{1.97}$$

La 2-forma local $\mathcal{F}$ puede ser expresada en función de la 1-forma local $\mathcal{A} = \sigma^*\omega$ utilizando el teorema 1.2.4

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sigma^*(d_P\omega + \omega\wedge\omega)\\ &= d\sigma^*\omega + \sigma^*\omega\wedge\sigma^*\omega\\ &= d\mathcal{A} + \mathcal{A}\wedge\mathcal{A},\end{aligned} \tag{1.98}$$

donde d es la derivada exterior sobre M y $d\sigma^* = \sigma^*d_P$, $\sigma^*\omega\wedge\sigma^*\omega = \sigma^*(\omega\wedge\omega)$. La acción de $\mathcal{F}$ sobre TM esta determinada por

$$\mathcal{F}(X,Y) = d\mathcal{A}(X,Y) + [\mathcal{A}(X),\mathcal{A}(Y)]. \tag{1.99}$$

Se puede encontrar las componentes de $\mathcal{F}$ sobre una vecindad coordenada U con coordenadas u^i. considere que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mu du^\mu$. Si $\mathcal{F} = \frac{1}{2}\mathcal{F}_{\mu\nu}du^\mu\wedge du^\nu$, se puede mostrar de que

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{A}_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial\mathcal{A}_\mu}{\partial u^\nu} + [\mathcal{A}_\mu,\mathcal{A}_\nu]. \tag{1.100}$$

Debido a que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ y $\mathcal{A}_\mu$ son funciones con valores en $\mathfrak{g}$, estas pueden ser expresadas en términos de los generadores $\{T_a\}$ del algebra de Lie $\mathfrak{g}$ como

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}^a_\mu T_a \qquad F_{\mu\nu} = \mathcal{F}^a_{\mu\nu}T_a. \tag{1.101}$$

Los generadores $\{T_a\}$ satisfacen las relaciones de conmutación $[T_a, T_b] = f^c_{ab}T_c$, donde las constantes de estructura satisfacen $f^c_{ab} = -f^c_{ba}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^a_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{A}^a_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}^a_\mu}{\partial u^\nu} + f^a_{bc}\mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^c_\nu, \\ &= \frac{\partial \mathcal{A}^a_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial \mathcal{A}^a_\mu}{\partial u^\nu} + \frac{1}{2} f^a_{bc}(\mathcal{A}^b_\mu \mathcal{A}^c_\nu - \mathcal{A}^b_\nu \mathcal{A}^c_\mu)\end{aligned} \tag{1.102}$$

Teorema 1.2.5 *Considere de que U_i y U_j son dos vecindades coordenadas con 2-formas locales de curvatura dadas por $\mathcal{F}_i$ y $\mathcal{F}_j$ repectivamente.*
Si $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, entonces

$$\mathcal{F}_j = g^{-1}_{ij}\mathcal{F}_i g_{ij}, \tag{1.103}$$

donde g_{ij} son las funciones de transición sobre $U_i \cap U_j$.

Demostración : ver [15]

Haz asociado

Una 1-forma ω sobre un haz principal $P(M, G)$ permite definir la derivada covariante en haces asociados a P de manera natural.
Sea $P(M, G)$ un G-haz con proyección π_P y $\sigma_i \in \Gamma(P)$ una sección local sobre $U_i \subset M$ y se toma un trivialización canónica $\sigma_i(p) = \psi_i^{-1}(p, e)$, donde $p \in U$ y $e \in G$. Consideremos que $\widetilde{\gamma}$ un levantamiento horizontal de la curva $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U_i$, tal que $\gamma(0) = p_0$, $\widetilde{\gamma}(0) = q_0$ y X un vector tangente a $\gamma(t)$ en p_0. Sea $Z = P \times_\varrho V$ un haz vectorial asociado a P con proyección π_Z y $S \in \Gamma(E)$ una sección sobre M. Los elementos de E son clases de equivalencia dados por $[(u, v)] = \{(u \cdot g, \varrho(g)^{-1}v) : u \in P, v \in V, g \in G\}$(se omitirá ϱ para simplificar la notación). Entonces $S(p)$

$$S(p) = [(\sigma(p), \chi(p))]. \tag{1.104}$$

Si $f \in C^\infty(M)$, se define el producto $f \cdot S(p)$ como

$$f(p) \cdot S(p) = f(p) \cdot [(\sigma(p), \chi(p))] = [(\sigma(p), f(p) \cdot \chi(p))] \tag{1.105}$$

Definición 1.2.16 *Sea E un haz vectorial asociado a $P(M,G)$ y $S \in \Gamma(E)$. A traves de la curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ se tiene que $S(t) = [(\widetilde{\gamma}(t)), \chi(\gamma(t))]$, donde $\widetilde{\gamma}(t)$ es un levantamiento horizontal arbitrario de $\gamma(t)$.* ***La derivada covariante*** *de $S(t)$ a lo largo de $\gamma(t)$ en $p_0 = \gamma(0)$ esta definida por*

$$\nabla_X S = \left[\left(\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\chi(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right], \tag{1.106}$$

donde X es un vector tangente a $\gamma(t)$ en p_0.

Debemos mostrar que la derivada covariante esta bien definida, es decir que si S y S_1 son dos representantes de una misma clase de equivalencia, las derivadas covariantes $\nabla_X S$ y $\nabla_X S_1$ son las mismas. Por lo tanto no dependen del representante de dicha clase.
Sea $\widetilde{\gamma}'(t) = \widetilde{\gamma}(t)a$, $a \in G$, otro levantamiento horizontal. Por la relación de equivalencia se tiene que

$$[\widetilde{\gamma}(t), \chi(\gamma(t))] = [\widetilde{\gamma}'(t)a^{-1}, \chi(\gamma(t))] = [\widetilde{\gamma}'(t), a^{-1}\chi(\gamma(t))]. \tag{1.107}$$

Si escogemos el representante $S_2 = [(\widetilde{\gamma}'(t), \varrho(a)^{-1}\chi(\gamma(t))]$, la derivada covariante es

$$\left[\left(\widetilde{\gamma}'(0), \frac{d}{dt}\{a^{-1}\chi(\gamma(t))\} \Big|_{t=0} \right) \right] = \left[\left(\widetilde{\gamma}'(0)a^{-1}, \frac{d}{dt}\chi(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \right) \right]. \tag{1.108}$$

Por lo tanto, por la relación dada por la ecuación (1.107) se tiene que $\nabla_X S = \nabla_X S_1$. Para la realización de cálculos, es necesario expresar la derivada covariante en coordenadas locales. Considere que $P(M,G)$ es un G-haz y $E = P \times_\varrho V$ su haz vectorial asociado. Tomemos una sección σ_i local sobre U_i con coordenadas u^μ y la trivialización canónica $\sigma_i(p) = \psi_i^{-1}(p,e)$. Se toma una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ una curva sobre U_i con levantamiento horizontal $\widetilde{\gamma}$, el cual puede ser escrito como

$$\widetilde{\gamma}(t) = \sigma_i(t)g_i(t), \tag{1.109}$$

donde $g_i(t) := g_i(\gamma(t)) \in G$. Sea $e_r := [(\sigma_i(p), e_r^0)]$ de E, donde e_r^0 es la r-ésima componente de la base vectorial de V. Entonces

$$e_r(t) = [(\widetilde{\gamma}(t) \cdot g_i^{-1}(t), e_r^0)] = [(\widetilde{\gamma}(t) \cdot g_i(t)^{-1}, e_r^0)] = [(\widetilde{\gamma}(t), g_i^{-1}(t)e_r^0)]. \tag{1.110}$$

Aquí $g_i^{-1}(t)$ actúa sobre e_r^0 para compensar el cambio de la base a lo largo de γ. La derivada covariante está dada por

$$\begin{aligned}\nabla_X e_r &= \left[\left(\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\{g_i^{-1}(t)e_r^0)\}\bigg|_{t=0}\right)\right] \\ &= \left[\left(\widetilde{\gamma}(0), \{-g_i^{-1}(t)\cdot\frac{d}{dt}g_i(t)\cdot g_i^{-1}(t)e_r^0\})\bigg|_{t=0}\right)\right] \\ &= \left[\left(\widetilde{\gamma}(0)g_i^{-1}(0), \mathcal{A}_i(X)e_r^0\right)\right], \end{aligned} \tag{1.111}$$

donde se ha usado la ecuación (1.91) para obtener la última linea. Debido a que $\mathcal{A}_i$ es una-forma con valores en el álgebra de Lie $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_{i\mu}du^\mu = \mathcal{A}_{i\mu b}^a du^\mu$ con $\mathcal{A}_{i\mu b}^a := \mathcal{A}_{i\mu}^c (T_c)_b^a$, donde $(T_c)_b^a$ son los generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, que actúan sobre V por medio de una representación. Por lo tanto

$$\mathcal{A}_i(X)e_r^0 = \frac{du^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i\mu r}^n e_n^0. \tag{1.112}$$

Entonces la expresión local para la derivada covariante es

$$\nabla_X e_r = \left[\left(\sigma(p), \frac{du^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i\mu r}^n e_n^0\right)\right] = \frac{du^\mu}{dt}\mathcal{A}_{i\mu r}^n e_n, \tag{1.113}$$

donde $e_n = [(\sigma(p), e_n^0)]$. En particular, para la curva $u^\mu(t)$, se tiene que

$$\nabla_{\partial_\mu} e_r = \mathcal{A}_{i\,\mu r}^{\,n} e_n, \tag{1.114}$$

donde $\frac{\partial}{\partial u^\mu} \equiv \partial_\mu$. Considere $S(p)$ una sección arbitraria de E, entonces $S(p) = \lambda_i^r(p)e_r = [(\sigma_i(p), \lambda_i(p))] =$, donde $\lambda_i = \lambda_i^r e_r^0$. La derivada covariante se $S(p)$

esta dada por

$$
\begin{aligned}
\nabla_X S &= \left[\left(\widetilde{\gamma}(0), \frac{d}{dt}\{g_i^{-1}(t)\lambda_i)\}\bigg|_{t=0}\right)\right], \\
&= \left[\left(\widetilde{\gamma}(0), g_i^{-1}(t)\frac{d}{dt}\{\lambda_i\}|_{t=0} + \frac{d}{dt}\{g_i^{-1}(t)\}\lambda_i\bigg|_{t=0}\right)\right], \\
&= \left[\left(\widetilde{\gamma}(0)g_i^{-1}(0), \frac{d}{dt}\{\lambda_i\}|_{t=0} + \mathcal{A}_i(X)\lambda_i\bigg|_{t=0}\right)\right], \\
&= \left[\left(\sigma_i(p), \frac{du^\mu}{dt}\frac{\partial\lambda_i^r}{\partial u^\mu}e_r^0 + \frac{du^\mu}{dt}\mathcal{A}^n_{i\mu r}\lambda_i^r e_n^0\right)\right], \\
&= \left[\left(\sigma_i(p), \left\{\frac{du^\mu}{dt}\frac{\partial\lambda_i^r}{\partial u^\mu} + \frac{du^\mu}{dt}\mathcal{A}^r_{i\mu n}\lambda_i^n\right\} e_r^0\right)\right], \\
&= \left\{\frac{du^\mu}{dt}\frac{\partial\lambda_i^r}{\partial u^\mu} + \frac{du^\mu}{dt}\mathcal{A}^r_{i\mu n}\lambda_i^n\right\}\left[\left(\sigma_i(p), e_r^0\right)\right], \\
&= \frac{du^\mu}{dt}\left\{\frac{\partial\lambda_i^r}{\partial u^\mu} + \mathcal{A}^r_{i\mu n}\lambda_i^n\right\} e_r. \qquad (1.115)
\end{aligned}
$$

Usando la definición dada para la derivada covariante, es posible mostrar que esta satisface las siguientes propiedades:

1). $\nabla_{X+Y}S = \nabla_X S + \nabla_Y S$;

2). $\nabla_{fX}S = f\nabla_X S$;

3). $\nabla_X(S_1 + S_2) = \nabla_X S_1 + \nabla_X S_2$;

4). $\nabla_X(fS) = (Xf)S + f\nabla S$,

donde $f \in C^\infty(M)$ y $S_1, S_2 \in \Gamma(E)$. Se puede observar que estas propiedades son las mismas que se introdujeron para la derivada absoluta de la conexión de un haz vectorial.

De la forma en que se ha construido la derivada covariante esta es independiente de la trivialización local. Considere dos secciones locales σ_i, σ_i sobre U_i y U_j respectivamente, tal que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. Entonces $\sigma_j(p) = \sigma_i(p)g_{ij}$. La derivada covariante usando la trivialización σ_j canónica es

$$\begin{aligned}
\nabla_X S &= \left[\left(\sigma_i(p), \frac{d}{dt}\{\lambda_i\}|_{t=0} + \mathcal{A}_i(X)\lambda_i\Big|_{t=0}\right)\right], \\
&= \left[\left(\sigma_j(p)g_{ij}^{-1}, \frac{d}{dt}\{g_{ij}\lambda_j\}|_{t=0} + \mathcal{A}_i(X)g_{ij}\lambda_j\Big|_{t=0}\right)\right], \\
&= \left[\left(\sigma_j(p), \frac{d}{dt}\{\lambda_j\}|_{t=0} + \mathcal{A}_j(X)\lambda_j\Big|_{t=0}\right)\right], \qquad (1.116)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la ecuación (1.89) para obtener la última línea. Este resultado implica que la derivada covariante es independiente de las trivializaciones locales, es decir que $\nabla_X s$ es una seccion bien definida sobre E.

1.2.3. Geometría Riemanniana

Suponga que M es una variedad diferenciable m-dimensional, y $\mathbb{G}$ es un campo tensorial covariante simétrico de rango 2 sobre M. Si (U, u^i) es un sistema coordenado en M, entonces el campo tensorial $\mathbb{G}$ puede ser expresado como

$$\mathbb{G} = g_{ij}du^i \otimes du^j. \qquad (1.117)$$

sobre U, donde $g_{ij} = g_{ji}$ es una función suave en U. $\mathbb{G}$ induce una aplicación bilineal sobre T_pM en cada punto $p \in M$. si $X = X^i\frac{\partial}{\partial u^i}$ y $Y = Y^i\frac{\partial}{\partial u^i}$, entonces

$$\mathbb{G}(X, Y) = g_{ij}X^iY^j. \qquad (1.118)$$

Se dice que el tensor $\mathbb{G}$ es no degenerado en un punto p si, $X \in T_pM$ y

$$\mathbb{G}(X, Y) = 0$$

para todo $Y \in T_pM$, entonces $X = 0$, es decir si $\det(g_{ij}) \neq 0$.

Definición 1.2.17 *Si M es una variedad m-dimensional, donde existe un tensor covariante simétrico de rango 2 no degenerado,$\mathbb{G}$, entonces a M se le denomina una **variedad Riemanniana generalizada**, y a $\mathbb{G}$ se le llama **tensor fundamental** o **tensor métrico** de M. Si $\mathbb{G}$ es definida positiva, entonces M es llamada una variedad Riemanniana.*

Para una variedad Riemanniana generalizada M, la ecuación (1.118) especifica un producto interno sobre el espacio tangente T_pM en cada $p \in M$. Para cualquier $X, Y \in T_pM$. Considere

$$X \cdot Y = \mathbb{G}(X, Y) = g_{ij} X^i X^j. \tag{1.120}$$

Por medio del tensor fundamental, se puede identificar el espacio tangente con el espacio cotangente, y por lo tanto un vector covariante y un vector contravariante pueden ser vistos como expresiones diferentes de un mismo vector. Suponga que $X \in T_pM$, considere

$$\alpha_X(Y) = \mathbb{G}(X, Y), \qquad Y \in T_pM. \tag{1.121}$$

Entonces α_X es una funcional lineal sobre T_pM, por lo tanto $\alpha_X \in T_p^*M$. Debido a que $\mathbb{G}$ es no degenerado, cualquier elemento de T_p^*M puede ser expresado en la forma α_X. Por consiguiente α establece un isomorfismo entre T_pM y T_p^*M. Escrito en componentes es

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \qquad \alpha_X = X_i du^i, \tag{1.122}$$

entonces de (1.121) se obtiene

$$X^i = g_{ij} X^j, \qquad X_j = g^{ij} X_i. \tag{1.123}$$

En general, si (t^i_{jk}) es un tensor de tipo (1,2). entonces

$$t_{ijk} = g_{il} t^l_{jk}, \qquad t^{ij}_k = g^{jl} t^i_{lk} \tag{1.124}$$

son tensores de tipo (0,3) y (2,1) respectivamente.

Definición 1.2.18 *Suponga que $(M, \mathbb{G})$ es una variedad Riemanniana generalizada m-dimensional, y ∇ es una conexión en TM. Si*

$$\nabla(\mathbb{G}) = 0, \tag{1.125}$$

entonces se dice de que ∇ es una ***conexión compatible con la métrica*** *sobre $(M, \mathbb{G})$.*

Si la matriz de conexión de ∇ bajo las coordenadas locales u^i es $\omega = (\omega_i^k)$, entonces

$$\begin{aligned} \nabla \mathbb{G} &= (dg_{ij} - \omega_i^k g_{kj} - \omega_j^k g_{ki}) \otimes \ du^i \otimes du^j \\ &= \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} - \Gamma_{li}^k g_{kj} - \Gamma_{lj}^k g_{ki} \right) du^l \otimes \ du^i \otimes du^j \end{aligned} \tag{1.126}$$

entonces (1.125) es equivalente a

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} - \Gamma_{li}^k g_{kj} - \Gamma_{lj}^k g_{ki} = 0. \tag{1.127}$$

El significado geométrico de conexiones compatibles con la métrica es que las translaciones paralelas preservan el producto interno. De manera que si $X(t), Y(t)$ son campos vectoriales paralelos a lo largo de la curva $C : u^i(t)(i \leq i \leq m)$ con respecto a la conexión compatible con la métrica, entonces

$$\begin{cases} \frac{dX^i}{dt} + \Gamma_{kj}^i X^j \frac{du^k}{dt} = 0, \\ \\ \frac{dY^i}{dt} + \Gamma_{kj}^i Y^j \frac{du^k}{dt} = 0. \end{cases} \tag{1.128}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(g_{ij} X^i Y^j\right) =& \frac{dg_{ij}}{dt} X^i Y^j + g_{ij} \frac{dX^i}{dt} Y^j + g_{ij} X^i \frac{dY^j}{dt} \\ =& \left(\frac{dg_{ij}}{dt} - g_{ik} \Gamma_{hj}^k \frac{du^h}{dt} - g_{jk} \Gamma_{hi}^k \frac{du^h}{dt} \right) X^i Y^j = 0. \end{aligned} \tag{1.129}$$

Usando la ecuacion (1.127) se tiene que la ultima igualdad de arriba. Por consiguiente, a lo largo de la curva C, se tiene que

$$g_{ij} X^i Y^j = constante. \tag{1.130}$$

Teorema 1.2.6 (Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana.) *Suponga que M es una variedad Riemanniana generalizada suave m-dimensional. Entonces existe una única conexión sobre M, libre de torsión y compatible con la métrica, llamada la **conexión de Levi-Civita** sobre M o la **conexión Riemanniana** sobre M. Los coeficientes para esta conexión están dados por*

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \left(\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial u^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial u^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial u^{\rho}} \right). \tag{1.131}$$

Demostración : ver [12, pag 128]

El concepto de variedad Riemanniana puede ser generalizado al concepto de haces vectoriales Riemannianos. Suponga que (E, M, π) es un haz vectorial real. Si para cada p, se puede definir una aplicación bilineal simétrica $\mathbb{G}$ sobre la fibra $\pi^{-1}(p)$. Además si X,Y son secciones suaves de E, y la función $\mathbb{G}(X,Y)$ es suave sobre M, entonces E es llamado un haz **vectorial Riemanniano Generalizado**. Si $\mathbb{G}$ es definida positiva, entonces es llamado un **haz vectorial Riemanniano**.

Sea ∇ una conexión sobre E. Se dice que ∇ es **compatible con al métrica**, si para cada $X, Y \in \Gamma(E)$ se tiene que

$$d[\mathbb{G}(X,Y)] = \mathbb{G}(\nabla X, Y) + \mathbb{G}(X, \nabla Y). \tag{1.132}$$

Dada una métrica en TM y un marco ortonormal $\{\hat{e}_k\}$ tal que $\mathbb{G}(\hat{e}_a, \hat{e}_b) = \delta_{ab}$. El grupo estructural es tomado como $SO(n)$, siendo n la dimensión de la fibra. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$ es un espacio vectorial de matrices anti-simétricas y la 1-forma local de conexión satisface

$$\omega^m_n = -\omega^n_m \tag{1.133}$$

Teorema 1.2.7 *considere que E es un haz vectorial Riemanniano Generalizado con métrica $\mathbb{G}$. sea ∇ la derivada covariante asociado con el haz de marcos ortonormal. Entonces ∇ es compatible con la métrica.*

Demostración: Debemos mostrar que

$$d[\mathbb{G}(s,s')] = \mathbb{G}(\nabla s, s') + \mathbb{G}(s, \nabla s'), \tag{1.134}$$

para $s = f\hat{e}_a$ y $f'\hat{e}_b$, donde $f, f' \in C^\infty(M)$. En la lado izquierdo se tiene que $d[\mathbb{G}(f\hat{e}_a, f'\hat{e}_b)] = d[ff'\delta_{ab}]$ mientras que del lado derecho se tiene

$$\begin{aligned}
&\mathbb{G}(\nabla f\hat{e}_a, f'\hat{e}_b) + \mathbb{G}(f\hat{e}_a, \nabla f'\hat{e}_\beta) && (1.135)\\
&\quad = \mathbb{G}(df\hat{e}_a + f\hat{e}_r\omega^r_a, f'\hat{e}_b) + \mathbb{G}(f\hat{e}_a, df'\hat{e}_b + f'\hat{e}_r\omega^r_b) && (1.136)\\
&\quad = dff'\delta_{ab} + ff'\omega^r_a\delta_{rb} + fdf'\delta_{ab} + ff'\omega^r_b\delta_{ar} && (1.137)\\
&\quad = d(ff')\delta_{ab}, && (1.138)
\end{aligned}$$

donde se ha usado la ecuacion (1.133) para obtener la última igualdad.

1.3. Teorías de calibración y haces fibrados

En esta sección se encontrará la relación que existe entre las teorías de calibración y haces fibrados.
En el desarrollo se definió el concepto de campo gauge, que era introducido para exigir invarianza en el lagrangiano. Se mostró que estos transforman bajo el grupo de Lie por la ecuación (1.8) y que son la misma transformación para las 1-formas locales de conexión dadas por (1.89). Posteriormente, por medio de la invarianza local, se permitió acoplar los campos de materia al campo de gauge, definiendo el concepto de derivada covariante. Desde el punto de los haces fibrados, se introdujo de manera independiente este mismo concepto en haces vectoriales asociados. Finalmente, se introdujo en la teoría, el campo de esfuerzos con sus respectivas transformaciones, las cuales coinciden con las transformaciones de la 2-forma local de curvatura, estas transformaciones están dadas por la ecuaciones (1.19) y (1.103) respectivamente.
De lo anterior, las teorías de calibración pueden ser modeladas por medio de haces fibrados, haciendo las siguientes identificaciones. En primer lugar se identificará los potenciales gauge con las 1-formas locales de conexión, el campo de esfuerzos con la 2-forma local de curvatura. El acople mínimo estará dado, por la definición de una derivada covariante inducida por la 1-forma local de conexión sobre haces vectoriales asociados. Finalmente los campos de materia pueden ser identificados como secciones de los haces vectoriales asociados.

Capítulo 2

INTERACCIÓN GRAVITACIONAL Y TEORÍA DE CALIBRACIÓN

2.1. Invarianza local de Lorentz y la interacción gravitacional.

En este capítulo se dará una interpretación de la interacción gravitacional como una teoría de calibración, descrita desde el punto de vista geométrico.

Se supondrá que M es la variedad espacio tiempo 4-dimensional diferenciable pseudo-Riemanniana, con tensor métrico $\mathbb{G}$, con signatura (1,3), es decir con 1 valor propio negativo y 3 positivos. Además se supondrá que el espacio tangente en $p \in M$ es isomorfo al espacio de Minkowski.
En una vecindad coordenada U, según (1.117) podemos escribir a $\mathbb{G}$ como

$$\mathbb{G} = g_{\mu\nu} du^{\mu} \otimes du^{\nu}.$$

Sean $\{\hat{e}_k, 0 \leq k \leq 3\}$ vectores linealmente independientes en TU (marco sobre U). Existe una relación entre los vectores $\{\partial_\mu\}$ y $\{\hat{e}_k\}$ dada por

$$\hat{e}_k = X_k^\mu \frac{\partial}{\partial u^\mu}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial u^\mu} = X_\mu^k \hat{e}_k. \tag{2.3}$$

Tal que $X_\mu^k X_k^\nu = \delta_\mu^\nu$ y $X_\mu^k X_l^\mu = \delta_l^k$. A los X_μ^k se les denomina campos **tetrad** o **vierbeins**.
Se exige que $\{\hat{e}_k\}$ sea un conjunto ortonormal en el sentido de Minkowski, es decir para cada $p \in U$

$$\mathbb{G}(\hat{e}_k, \hat{e}_l) = \eta_{kl} = g_{\mu\nu} X_k^\mu X_l^\nu, \tag{2.4}$$

donde η_{kl} es la métrica de Minkowski.
Debido a que las componentes del tensor métrico en esta base son constantes, a los índices latinos se les denomina planos o de Lorentz y a los índices griegos se les denomina curvos o de mundo.
Se puede observar claramente que

$$det((g_{\mu\nu})) = det((\eta_{\mu\nu} X_\mu^k X_\nu^l)) = -\left[det((X_\mu^k))\right]^2. \tag{2.5}$$

Asociado al marco $\{\hat{e}_k\}$, existe un comarco $\{\theta^k\}, 0 \leq k \leq 3$ en U tal que

$$\theta^k = X_\nu^k du^\nu, \tag{2.6}$$

$$\theta^k(e_l) = \delta_l^k. \tag{2.7}$$

Puesto que los campos físicos están dados por objetos matemáticos llamados campos tensoriales o secciones de un haz, a continuación se estudiarán estos campos y algunas de sus propiedades.

Sea un tensor $T_s^r(p)$ de rango (r, s) con $p \in U$, escrito en las bases coordenadas se tiene que es de la forma

$$T_s^r(p) = T_{\nu_1 .... \nu_s}^{\mu_1 ... \mu_r} \partial_{\mu_1} \otimes ... \otimes \partial_{\mu_r} \otimes du^{\nu_1} ... \otimes du^{\nu_s}, \tag{2.8}$$

sin embargo, escrito en la base definida en (2.2) y (2.6) se tiene

$$T_s^r(p) = T_{b_1 .... b_s}^{a_1 ... a_r} \hat{e}_{a_1} \otimes ... \otimes \hat{e}_{a_r} \otimes \theta^{b_1} ... \otimes \theta^{b_s}, \tag{2.9}$$

debido a que $\hat{e}_{a_1} = X^{\mu_1}_{a_1}\partial_{\mu_1}$ y $\theta^{b_1} = X^{b_1}_{\nu_1}du^{\nu_1}$, la regla de transformación para las componentes del tensor es

$$T^{\mu_1....\mu_r}_{\nu_1.....\nu_s} = T^{a_1....a_r}_{b_1.....b_s} X^{\mu_1}_{a_1}..X^{\mu_k}_{a_r} X^{b_1}_{\nu_1}..X^{b_s}_{\nu_s}. \tag{2.10}$$

Como sobre T_pM existen infinitas bases, podemos escoger una arbitraria $\{\hat{e}_{a'}\}$, pero exigiendo que sea ortonormal, es decir $\mathbb{G}(\hat{e}_{a'}, \hat{e}_{b'}) = \eta_{a'b'}$. Sabemos que las transformaciones de $\{\hat{e}_{a'}, \hat{e}_{b'}\}$ a $\{\hat{e}_a, \hat{e}_b\}$ que dejan invariante la métrica de Minkowski son las de Lorentz, entonces

$$\hat{e}_{a'} = \Lambda^{a}_{a'}(p)\hat{e}_a, \quad \text{con} \quad p \in U \tag{2.11}$$

$$\theta^{a'} = \Lambda^{a'}_{a}(p)\theta^a. \tag{2.12}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{G}(\hat{e}_{a'}, \hat{e}_{b'}) &= \eta_{a'b'}, \\ g_{\mu\nu}X^{\mu}_{a}X^{\nu}_{b}\Lambda^{a}_{a'}\Lambda^{b}_{b'} &= \eta_{a'b'}, \\ \eta_{ab}\Lambda^{a}_{a'}\Lambda^{b}_{b'} &= \eta_{a'b'}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De manera similar, se pueden relacionar las componentes de un tensor escrito en diferentes bases de índices planos, dado por

$$T^{a'_1....a'_k}_{b'_1.....b'_s} = T^{a_1....a_k}_{b_1.....b_s}\Lambda^{a'_1}_{a_1}..\Lambda^{a'_r}_{a_r}\Lambda^{b_1}_{b'_1}..\Lambda^{b_s}_{b'_s}. \tag{2.14}$$

Desde el punto de vista de la teoría de los haces fibrados, el haz fibrado en que se esta trabajando en este caso es $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{F} \xrightarrow{\pi} \mathbf{M}$, donde el grupo de acción sobre **F**(haz de marcos) es el grupo lineal general $\mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$, **F** es la variedad haz y la variedad base es **M**(espacio-tiempo). Si se impone que el grupo deje invariante la métrica de Minkowski, este haz se reduce a uno del tipo **SO(3,1)** $\longrightarrow$ **F** $\xrightarrow{\pi}$ **M** y en este caso el grupo de acción sobre **F** es el grupo de Lorentz **SO(3,1)**.

Una condición adicional que se le impondrá a M, es que tenga conexión ∇ sobre el haz tangente TM, que es el haz fibrado asociado al haz de marcos P. Dado un sistema coordenado (U, u^{μ}) de M, tenemos que la base natural $\{S_{\mu} = \partial_{\mu}, 0 \leq \mu \leq 3\}$ forma un campo de marcos locales del haz tangente TM sobre U. De esta forma asumamos que

$$\nabla(\partial_{\mu}) = \omega^{\nu}_{\mu} \otimes \partial_{\nu} = \Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}du^{\sigma} \otimes \partial_{\nu}, \tag{2.15}$$

$$\langle \partial_{\mu}, \nabla\partial_{\nu} \rangle = \nabla_{\partial_{\mu}}\partial_{\nu} \equiv \nabla_{\mu}\partial_{\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\partial_{\sigma}, \tag{2.16}$$

donde $\Gamma^{\nu}_{\sigma\mu}$ son funciones suaves sobre U, denominado los coeficientes de la conexión ∇ con respecto a las coordenadas locales u^{μ}. En este caso como estamos trabajando en la teoría de la relatividad General, la conexión ∇ es libre de torsión y compatible con la métrica. Por el teorema fundamental de la geometría Riemanniana, esta coincide con la ***conexión de Levi-Civita*** de M. Los coeficientes de esta conexión están dados por

$$\Gamma^{\nu}_{\sigma\mu} = \frac{1}{2} g^{\nu\rho} \left(\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial u^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial u^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial u^{\rho}} \right). \tag{2.17}$$

De igual manera $\{\hat{e}_k, 0 \leq k \leq 4\}$ forma un campo de marcos locales del haz tangente T(M) sobre U, en este caso tenemos que

$$\nabla(\hat{e}_l) = -A^m_{nl}\theta^n \otimes \hat{e}_m, \tag{2.18}$$

$$\langle \hat{e}_k, \nabla \hat{e}_l \rangle = \nabla_{\hat{e}_k} \hat{e}_l \equiv \nabla_k \hat{e}_l = -A^m_{kl}\hat{e}_m, \tag{2.19}$$

donde los coeficientes A^m_{nl} de la conexión en la base de índices planos es conocida en la literatura como la **conexión spin**.
Existe una forma de relacionar las diferenciales absolutas en los dos marcos usando la ecuación (2.2) y sus propiedades, estas relaciones están dadas por

$$\begin{aligned} \nabla_k \partial_\mu &= \nabla_{\hat{e}_k} \partial_\mu = \nabla_{X^{\nu}_k \partial_\nu} \partial_\mu = X^{\nu}_k \nabla_{\partial_\nu} \partial_\mu, \\ \nabla_k \partial_\mu &= X^{\nu}_k \nabla_\nu \partial_\mu = X^{\nu}_k \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \partial_\sigma. \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \hat{e}_k &= \nabla_{\partial_\mu} \hat{e}_k = \nabla_{X^l_\mu \hat{e}_l} \hat{e}_k = X^l_\mu \nabla_{\hat{e}_l} \hat{e}_k, \\ \nabla_\mu \hat{e}_k &= X^l_\mu \nabla_l \hat{e}_k = -X^l_\mu A^m_{lk} \hat{e}_m = A^m_{\mu k} \hat{e}_m, \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $X^l_\mu A^m_{lk} = A^m_{\mu k}$.
Como se indicó en capítulo 1, existe una conexión sobre el haz $T^*(M)$, en el abierto U es

$$\nabla(du^\mu) = -\Gamma^{\mu}_{\sigma\rho} du^\sigma \otimes du^\rho; \quad \nabla_\nu(du^\mu) = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} du^\rho. \tag{2.22}$$

$$\nabla\theta^l = A^l_{mn}\theta^m \otimes \theta^n; \quad \nabla_k \theta^l = A^l_{kn}\theta^n. \tag{2.23}$$

Además, debido a la relación dada por la ecuación (1.84), sobre el haz tensorial $T^r_s(M)$ existe una conexión inducida por las conexiónes de los haces tensoriales $T^*(M)$ y $T(M)$. Por ejemplo, si $Q \in T^2M$, entonces en la base $\{\hat{e}_k\}$ puede ser escrito como

$$Q = Q^{kl}\hat{e}_k \otimes \hat{e}_l. \tag{2.24}$$

Si se calcula $\nabla(Q)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla Q &= \nabla(Q^{kl}\hat{e}_k \otimes \hat{e}_l), \\
&= dQ^{kl} \otimes \hat{e}_k \otimes \hat{e}_l + Q^{kl}\nabla(\hat{e}_k) \otimes \hat{e}_l + Q^{kl}\hat{e}_k \otimes \nabla(\hat{e}_l), \\
&= \frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^\mu} du^\mu \otimes \hat{e}_k \otimes \hat{e}_l + Q^{kl}\nabla(\hat{e}_k) \otimes \hat{e}_l + Q^{kl}\hat{e}_k \otimes \nabla(\hat{e}_l). \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Entonces, para calcular $\nabla_\mu Q$ se utiliza la expresión (2.21) asi

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu Q &= \frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^\mu}\hat{e}_k \otimes \hat{e}_l + Q^{kl}\nabla_\mu(\hat{e}_k) \otimes \hat{e}_l + Q^{kl}\hat{e}_k \otimes \nabla_\mu(\hat{e}_l), \\
&= \left(\frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^\mu} - X^n_\mu A^k_{nm} Q^{ml} - X^n_\mu A^l_{nm} Q^{km}\right)\hat{e}_k \otimes \hat{e}_l, \\
&= \left(\frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^\mu} - A^k_{\mu m} Q^{ml} - A^l_{\mu m} Q^{km}\right)\hat{e}_k \otimes \hat{e}_l, \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Es decir, la derivada covariante de Q^{kl} en la base de índices planos, esta dada por

$$\nabla_\mu Q^{kl} = \frac{\partial Q^{kl}}{\partial u^\mu} - A^k_{\mu m} Q^{ml} - A^l_{\mu m} Q^{km}. \qquad (2.27)$$

De igual forma podemos escribir el tensor Q en una base constituida por indices planos y curvos de la siguiente forma

$$Q = Q^{k\nu}\hat{e}_k \otimes \partial_\nu, \qquad (2.28)$$

de la misma manera se puede calcular $\nabla(Q)$

$$\begin{aligned}
\nabla Q &= \nabla(Q^{k\nu}\hat{e}_k \otimes \partial_\nu) \\
&= dQ^{k\nu} \otimes \hat{e}_k \otimes \partial_\nu + Q^{k\nu}\nabla(\hat{e}_k) \otimes \partial_\nu + Q^{k\nu}\hat{e}_k \otimes \nabla(\partial_\nu) \\
&= \frac{\partial Q^{k\nu}}{\partial u^\mu} du^\mu \otimes \hat{e}_k \otimes \partial_\nu + Q^{k\nu}\nabla(\hat{e}_k) \otimes \partial_\nu + Q^{k\nu}\hat{e}_k \otimes \nabla(\partial_\nu). \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Ahora usando las ecuaciones (2.21) y (2.16) para calcular $\nabla_\mu Q$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu Q &= \frac{\partial Q^{k\nu}}{\partial u^\mu}\hat{e}_k \otimes \partial_\nu + Q^{k\nu}\nabla_\mu(\hat{e}_k) \otimes \partial_\nu + Q^{k\nu}\hat{e}_k \otimes \nabla_\mu(\partial_\nu), \\
&= \left(\frac{\partial Q^{k\nu}}{\partial u^\mu} - X^l_\mu A^k_{lm} Q^{m\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} Q^{k\rho}\right)\hat{e}_k \otimes \partial_\nu, \\
&= \left(\frac{\partial Q^{k\nu}}{\partial u^\mu} - A^k_{\mu m} Q^{m\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} Q^{k\rho}\right)\hat{e}_k \otimes \partial_\nu. \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

En este caso la derivada covariante en la base de índices combinados, $\nabla_\mu Q^{k\nu}$ esta dada por

$$\nabla_\mu Q^{k\nu} = \frac{\partial Q^{k\nu}}{\partial u^\mu} - A^k_{\mu m} Q^{m\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho} Q^{k\rho}. \tag{2.31}$$

Por lo tanto, dependiendo en qué base este escrito un tensor, aparecerán en la derivada covariante los coeficientes de la conexión de Levi-Civita o la conexión spin.
Se puede encontrar una forma de relacionar las componentes de la conexión en las bases de índices latinos y curvos de la siguiente manera, consideremos que $Y \in T_pM$, entonces en U tenemos que

$$Y = Y^\mu \partial_\mu, \tag{2.32}$$
$$Y = Y^a \hat{e}_a, \tag{2.33}$$

calculando la conexión sobre este campo en las diferentes bases obtenemos que

$$\begin{aligned}\nabla(Y^\mu \partial_\mu) &= dY^\mu \otimes \partial_\mu + Y^\mu \nabla(\partial_\mu)\\ &= \frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu} du^\nu \otimes \partial_\mu + \Gamma^\nu_{\rho\mu} Y^\mu du^\rho \otimes \partial_\nu\\ &= \left(\frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} Y^\sigma\right) du^\nu \otimes \partial_\mu\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\nabla(Y^a \hat{e}_a) &= dY^a \otimes \hat{e}_a + Y^a \otimes \nabla \hat{e}_a,\\ &= \frac{\partial Y^a}{\partial u^\nu} du^\nu \otimes \hat{e}_a - A^m_{\rho a} Y^a du^\rho \otimes \hat{e}_m,\\ &= \frac{\partial Y^a}{\partial u^\nu} du^\nu \otimes X^\mu_a \partial_\mu - A^m_{\rho a} X^a_\mu Y^\mu du^\rho \otimes X^\nu_m \partial_\nu,\\ &= \left(X^\mu_a \frac{\partial Y^a}{\partial u^\nu} - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m Y^\rho\right) du^\nu \otimes \partial_\mu,\end{aligned} \tag{2.35}$$

igualando las ecuaciones (2.34) y (2.35)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} Y^\rho &= X^\mu_a \frac{\partial Y^a}{\partial u^\nu} - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m Y^\rho, \\
&= X^\mu_a \frac{\partial (X^a_\rho Y^\rho)}{\partial u^\nu} - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m Y^\rho, \\
&= X^\mu_a X^a_\rho \frac{\partial Y^\rho}{\partial u^\nu} + \frac{\partial X^a_\rho}{\partial u^\nu} X^\mu_a Y^\rho - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m Y^\rho, \\
&= \frac{\partial Y^\mu}{\partial u^\nu} + \left(\frac{\partial X^a_\rho}{\partial u^\nu} X^\mu_a - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m \right) Y^\rho. \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial X^a_\rho}{\partial u^\nu} X^\mu_a - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m \quad \text{ó} \quad \nabla X^a_\rho = 0. \qquad (2.37)
$$

Dado el tensor métrico $\mathbb{G}$ con componente $g_{\mu\nu}$, es posible inducir un tensor $\mathbb{G}^*$ contravariante simétrico de rango 2

$$
\mathbb{G}^* = g^{\mu\nu} \partial_\mu \otimes \partial_\nu = g^{\mu\nu} X^a_\mu X^b_\nu \hat{e}_a \otimes \hat{e}_b = \eta^{ab} \hat{e}_a \otimes \hat{e}_b, \qquad (2.38)
$$

tal que $g_{\nu\mu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$.
Teniendo en cuenta que la conexión es compatible con la métrica dada por la ecuación (2.27) aplicada a η^{ab}

$$
\begin{aligned}
\nabla_\mu \eta^{ab} &= \frac{\partial \eta^{ab}}{\partial u^\mu} - A^a_{\mu m} \eta^{mb} - A^b_{\mu m} \eta^{am} = 0 \\
&= -A^a_{\mu m} \eta^{mb} - A^b_{\mu m} \eta^{am} = 0 \\
&= -A^{ab}_\mu - A^{ba}_\mu = 0, \qquad (2.39)
\end{aligned}
$$

por lo tanto, se puede observar que la conexión spin es antisimétrica en los índices latinos, es decir $A^{ab}_\mu = -A^{ba}_\mu$.
Es posible relacionar las derivadas covariantes de Q^{kl} y $Q^{\sigma\rho}$ escritas en las diferentes bases (Ver apéndice)

$$
\nabla_\mu (Q^{\sigma\rho}) = X^\sigma_k X^\rho_l \nabla_\mu (Q^{kl}). \qquad (2.40)
$$

Este resultado puede ser generalizado para tensores de mayor orden, tal que

$$
\nabla_\mu (Q^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s}) = X^{\mu_1}_{a_1} \ldots X^{\mu_r}_{a_r} X^{b_1}_{\nu_1} \ldots X^{b_s}_{\nu_s} \nabla_\mu (Q^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}). \qquad (2.41)
$$

Por lo tanto, según el desarrollo que se ha hecho, siempre es posible pasar de índices curvos a índices planos por medio de los campos tetrad, además en cada $p \in M$ el espacio tangente es isomorfo al espacio de Minkowski en el cual las leyes físicas son invariante Lorentz, en correspondencia al principio de equivalencia. Cada una de las transformaciones de Lorentz dependen de cada punto $p \in M$, es decir, una simetría local como ya se ha mostrado anteriormente. Recordemos que la teoría de campos esta bien definida en un espacio-tiempo plano, es decir en el espacio-tiempo de Minkowski donde la teoría es invariante Lorentz, por este motivo los tetrad son de vital importancia para el desarrollo de esta teoría.

Como se mencionó antes, la formulación de las teorías de calibración desde el punto de vista geométrico esta basado en haces principales y haces asociados, donde los campos que describen la materia son secciones de un haz fibrado asociado en particular. Mostraremos explícitamente en este caso como los campos de materia, descritos por secciones del haz tangente se acoplan a los potenciales. En lenguaje matemático, esto significa que dada una 1-forma de conexión en el haz principal, podemos inducir una derivada covariante en el haz tangente. Para el caso donde los campos de materia estén descritos por tensores este acople se puede extender. Donde la derivada covariante sobre el haz tensorial es inducida por medio de la conexión en el haz tangente, como se mostró anteriormente.

En el haz de marcos P considere una conexión o lo que es equivalente, una 1-forma de conexión ω con valores en $\mathfrak{g}$ (Algebra de lie de SO(3,1)) sobre T^*P. Sea U una vecindad coordenada conexa de M y sea $\sigma : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ una sección local de P, entonces la 1-forma local de conexión para este haz $\sigma^*(\omega) = \mathcal{A} \in \mathfrak{g} \otimes T^*U$.

Es posible construir haces asociados al haz de marcos. Consideremos el siguiente haz vectorial, asociado al haz de marcos. Sea $E = F(M) \times_{SO(3,1)} V$, donde V es un espacio vectorial. Puesto que nuestra variedad es el espacio-tiempo de dimensión 4, $V = \mathbb{R}^4$. Por lo tanto el haz asociado, será el haz tangente $TM = F(M) \times_{SO(3,1)} \mathbb{R}^4$, donde $SO(3,1)$ es el grupo de Lorentz.

Sea $\{\hat{e}_k; 0 \leq k \leq 3\}$ un campo de marcos locales y ortonormal en el sentido de Minkowski para cada $p \in U$, tal que σ en p es

$$\sigma(p) = \widetilde{p} = (p; e_0, e_1, e_2, e_3). \tag{2.42}$$

La existencia de este conjunto ha sido probado en [13, pag 317] en el caso Riemanniano, pero este resultado puede ser extendido a métricas Riemannianas generalizadas o pseudo-Riemannianas [7, pag 182].
Considere la base canónica de $\mathbb{R}^4$

$$v_k = (0, \ldots 1 \ldots, 0)^T; \qquad 0 \leq k \leq 3, \tag{2.43}$$

donde la k-esima componente es uno.
Una sección $E_k \in \Gamma(TM)$ del haz tangente, esta dada por

$$E_k = [(\sigma(p), v_k)] = (v_k)^a \hat{e}_a = \delta^a_k \hat{e}_a = \hat{e}_k, \tag{2.44}$$

donde $(v_k)^a$ denota la a-esima componente del vector v_k. Note que esta construcción se ha hecho por medio de la identificación de las componente del vector v_k en la base $\{\hat{e}_k\}$, como se hizo en el ejemplo 1.2.3. Por lo tanto, se puede definir la derivada covariante como se mostró en el capitulo anterior, dado por la ecuación

$$\nabla_{\partial_\mu} \hat{e}_k = \mathcal{A}^r_{\mu k} \hat{e}_r = \frac{1}{2} A^{ml}_\mu (T_{ml})^r_k \hat{e}_r, \tag{2.45}$$

donde $A^{ml}_\mu = -A^{lm}_\mu$ y $(T_{ml})^r_k$ es la representación del álgebra de Lie canónica dada por [17, pag 309],[18]

$$(T_{ml})^r_k = \delta^r_m \eta_{lk} - \delta^r_l \eta_{mk}, \tag{2.46}$$

entonces la ecuación (2.45) se transforma en

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_\mu} \hat{e}_k = A^r_{\mu k} \hat{e}_r &= \frac{1}{2} A^{ml}_\mu (\delta^r_m \eta_{lk} - \delta^r_l \eta_{mk}) \hat{e}_r \\
&= \frac{1}{2} \left(A^{ml}_\mu \eta_{lk} \hat{e}_m - A^{ml}_\mu \eta_{mk} \hat{e}_l \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(-A^{lm}_\mu \eta_{lk} \hat{e}_m - A^{ml}_\mu \eta_{mk} \hat{e}_l \right) \\
&= -A^{lm}_\mu \eta_{lk} \hat{e}_m \\
&= -A^m_{\mu k} \hat{e}_m.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Para una sección mas general $S = S^k(p)\hat{e}_k$ la derivada covariante esta dada por

$$\nabla_\mu S = \left\{ \frac{\partial S^r}{\partial u^\mu} - A^r_{\mu n} S^n \right\} \hat{e}_r \tag{2.48}$$

Si asumimos que la derivada covariante para un vector de mundo ∂_μ esta dada por $\nabla_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho$. Debido a la relación que existe entre la base de índices planos (Lorentz) e índices curvos (mundo) dada por la ecuación (2.2), se puede obtener una relación entre los coeficientes $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ y $A^m_{\mu k}$ de la ecuación (2.47)

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_\mu}(X^\nu_k \partial_\nu) &= -A^m_{\mu k} X^\rho_m \partial_\rho \\
(\partial_\mu X^\nu_k)\partial_\nu + X^\nu_k \nabla_{\partial_\mu}(\partial_\nu) &= -A^m_{\mu k} X^\rho_m \partial_\rho \\
(\partial_\mu X^\rho_k)\partial_\rho + X^\nu_k \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho &= -A^m_{\mu k} X^\rho_m \partial_\rho \\
(\partial_\mu X^\rho_k + X^\nu_k \Gamma^\rho_{\mu\nu})\partial_\rho &= -A^m_{\mu k} X^\rho_m \partial_\rho
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Entonces

$$\partial_\mu X^\rho_k + X^\nu_k \Gamma^\rho_{\mu\nu} = -A^m_{\mu k} X^\rho_m \quad \text{ó} \quad \Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{\partial X^a_\rho}{\partial u^\nu} X^\mu_a - A^m_{\nu a} X^a_\rho X^\mu_m. \tag{2.50}$$

Haciendo una modificación del teorema 1.2.7, reemplazando a δ_{ab} por η_{ab}, se tiene que la conexión ∇ es compatible con la métrica Lorentziana $\mathbb{G}$ dada por

$$\nabla_\mu(g^{\sigma\rho}) = X^\sigma_k X^\rho_l \nabla_\mu(\eta^{kl}) = 0, \tag{2.51}$$

donde se ha usado la ecuación (2.40). Se asumirá que los coeficientes $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$.

Las ecuaciones (2.47),(2.50) son idénticas a las (2.16),(2.37) respectivamente. Por lo tanto se puede identificar $A^m_{\mu k}$ como la conexión spin y $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ como los coeficientes de la conexión de Levi-Civita dados por la ecuación (2.17).
Entonces, el teorema 1.2.7 y la ecuación (2.39) indican que la antisimetría de la conexión spin A^{kl}_ν implica que la conexión ∇ es compatible con la métrica y que el reciproco también es válido.

Dada la 1-forma de conexión con valores en el álgebra de Lie, podemos calcular la 2-forma local de curvatura del haz de marcos dada por

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu} = \frac{\partial A^a_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A^a_\mu}{\partial u^\nu} + \frac{1}{2} f^a_{bc}(A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu), \tag{2.52}$$

Para el álgebra de Lorentz esta ecuación es reescrita como

$$\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu} = \frac{\partial A^{kl}_{\nu}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial A^{kl}_{\mu}}{\partial u^{\nu}} + \frac{1}{4} f_{cd}{}^{kl}{}_{mn} (A^{cd}_{\mu} A^{mn}_{\nu} - A^{cd}_{\nu} A^{mn}_{\mu}), \tag{2.53}$$

donde las $f_{cd}{}^{kl}{}_{mn}$ son las constantes de estructura del álgebra de Lorentz. El álgebra de Lorentz satisface la siguiente relación de conmutación

$$[T_{cd}, T_{mn}] = -\eta_{cm} T_{dn} - \eta_{dn} T_{cm} + \eta_{cn} T_{dm} + \eta_{dm} T_{cn}, \tag{2.54}$$

por lo tanto, las constantes de estructura están dadas por

$$f_{cd}{}^{kl}{}_{mn} = \eta_{dm} \delta^k_c \delta^l_n - \eta_{cm} \delta^k_d \delta^l_n - \eta_{dn} \delta^k_c \delta^l_m + \eta_{cn} \delta^k_d \delta^l_m. \tag{2.55}$$

entonces (Ver apéndice)

$$\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu} = \frac{\partial A^{kl}_{\nu}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial A^{kl}_{\mu}}{\partial u^{\nu}} + \eta_{dm} A^{kd}_{\mu} A^{ml}_{\nu} - \eta_{dm} A^{kd}_{\nu} A^{ml}_{\mu} \tag{2.56}$$

$\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu}$, esta relacionado con el tensor de curvatura $R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu}$ del haz tangente (Ver apéndice), debido a la relación entre $A^{m}_{\mu l}$ y $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ dada por

$$\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu} = \eta^{lm} X^{\lambda}_{m} X^{k}_{\alpha} R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} \tag{2.57}$$

donde

$$R^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}}{\partial u^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}}{\partial u^{\mu}} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\nu} \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}. \tag{2.58}$$

CONCLUSIONES

En este trabajo de grado se formuló el principio de equivalencia estableciendo que en cada punto del espacio tiempo los observadores, que están identificados por un marco $\{\hat{e}_k\}$, satisfacen la condición que $\mathbb{G}(\hat{e}_k, \hat{e}_l) = \eta_{kl}$ es decir que cada espacio tangente es isomorfo al espacio de Minkowski.
Puesto que las leyes de la física deben ser las mismas en todos los marcos de referencia,denominado principio de covarianza, se introdujo el grupo de Lorentz local que son aquellas transformaciones que dejan la métrica invariante frente a un cambio de marco $\{\hat{e}'_k\}$, este principio esta dado por la ecuación (2.12). Por lo tanto se dedujo que se podía modelar por medio de un haz principal, específicamente en el haz de marcos, donde el grupo estructural es el grupo de Lorentz $SO(3,1)$ y cuya variedad base es el espacio tiempo.

Posteriormente se introdujo una conexión sobre el haz tangente en diferentes bases, lo que permitió definir la derivada covariante para tensores. Además se introdujeron los Tetrad, que permitieron relacionar índices curvos con índices planos, lo cual es útil para definir los campos de materia que están dados en términos de los últimos índices. Esto es de especial interés para nosotros puesto que es aquí donde están bien definidos.

Finalmente se halló una relación entre el haz tangente y el haz de marcos que permite acoplar los campos de materia con los potenciales de forma natural. Es decir, dada una 1-forma en el haz marcos, se encontró la derivada covariante al haz vectorial asociado, en este caso el haz tangente. Además encontramos que esta derivada covariante era la misma que se inducia por la conexión en el haz tangente. Se corroboró la relación entre la 2-forma local de curvatura del haz de marcos y el tensor de curvatura del haz tangente, logrando así completar el formalismo geométrico de la teoría de calibración.

Por lo tanto, según la construcción que se hizo, se puede afirmar que la interacción gravitacional puede ser descrita como una teoría de calibración, la cual reproduce los mismos resultados encontrados en el formalismo lagrangiano descrito en [4].

Apéndice

- **Relación entre la derivada covariante de las componentes de un tensor con índices planos y curvos.**

La derivada covariante para las componentes de un tensor con índices curvos esta dado por

$$\nabla_\mu(Q^{\sigma\rho}) = \partial_\nu(Q^{\sigma\rho}) + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}Q^{\lambda\rho} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}Q^{\lambda\sigma}. \tag{2.59}$$

Dado que $Q^{\sigma\rho} = X^\sigma_k X^\rho_l Q^{kl}$ y $\Gamma^\mu_{\nu\rho} = X^\mu_a\partial_\nu X^a_\rho - A^m_{\nu a}X^a_\rho X^\mu_m$,
Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu(Q^{\sigma\rho}) &= \partial_\mu(X^\sigma_k X^\rho_l Q^{kl}) + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda}X^\lambda_k X^\rho_l Q^{kl} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}X^\lambda_l X^\sigma_k Q^{kl},\\
&= X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^\sigma_k + X^\sigma_k Q^{kl}\partial_\mu X^\rho_l + X^\sigma_k X^\rho_l\partial_\mu Q^{kl} +\\
&+ (X^\sigma_a\partial_\mu X^a_\lambda - A^m_{\mu a}X^a_\lambda X^\sigma_m)X^\lambda_k X^\rho_l Q^{kl} +\\
&+ (X^\rho_a\partial_\mu X^a_\lambda - A^m_{\mu a}X^a_\lambda X^\rho_m)X^\lambda_l X^\sigma_k Q^{kl},\\
&= X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^\sigma_k + X^\sigma_k Q^{kl}\partial_\mu X^\rho_l + X^\sigma_k X^\rho_l\partial_\mu Q^{kl} + X^\sigma_a X^\lambda_k X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^a_\lambda -\\
&- A^m_{\mu a}X^a_\lambda X^\sigma_m X^\lambda_k X^\rho_l Q^{kl} + X^\rho_a X^\lambda_l X^\sigma_k Q^{kl}\partial_\mu X^a_\lambda - A^m_{\mu a}X^a_\lambda X^\rho_m X^\lambda_l X^\sigma_k Q^{kl}.
\end{aligned}$$

Como $X^r_\omega X^\gamma_r = \delta^\gamma_\omega$, entonces $\partial_\mu(X^r_\omega X^\gamma_r) = 0$, se obtiene que

$$X^r_\omega\partial_\mu X^\gamma_r = -X^\gamma_r\partial_\mu X^r_\omega \tag{2.60}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(Q^{\sigma\rho}) &= X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^\sigma_k + X^\sigma_k Q^{kl}\partial_\mu X^\rho_l - X^\sigma_a X^a_\lambda X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^\lambda_k - \\ &- X^\rho_a X^a_\lambda X^\sigma_k Q^{kl}\partial_\mu X^\lambda_l + X^\sigma_k X^\rho_l \partial_\mu Q^{kl} - \delta^a_k A^m_{\mu a} X^\sigma_m X^\rho_l Q^{kl} - \\ &- \delta^a_l A^m_{\mu a} X^\rho_m X^\sigma_k Q^{kl} \\ &= X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^\sigma_k + X^\sigma_k Q^{kl}\partial_\mu X^\rho_l - \delta^\sigma_\lambda X^\rho_l Q^{kl}\partial_\mu X^\lambda_k - \\ &- \delta^\rho_\lambda Q^{kl}\partial_\mu X^\lambda_l + X^\sigma_k X^\rho_l \partial_\mu Q^{kl} - X^\sigma_m X^\rho_l \delta^a_k A^m_{\mu a} Q^{kl} - \\ &- X^\rho_m X^\sigma_k \delta^a_l A^m_{\mu a} Q^{kl}\end{aligned} \tag{2.61}$$

El primer y tercer término del lado derecho se cancelan, al igual que el segundo y cuarto termino. Entonces

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(Q^{\sigma\rho}) &= X^\sigma_k X^\rho_l \partial_\mu Q^{kl} - X^\sigma_m X^\rho_l \delta^a_k A^m_{\mu a} Q^{kl} - X^\rho_m X^\sigma_k \delta^a_l A^m_{\mu a} Q^{kl} \\ &= X^\sigma_k X^\rho_l (\partial_\mu Q^{kl} - A^k_{\mu r} Q^{rl} - A^l_{\mu r} Q^{kr}) \\ &= X^\sigma_k X^\rho_l \nabla_\mu (Q^{kl})\end{aligned} \tag{2.62}$$

Este calculo puede ser generalizado para tensores de mayor orden, tal que

$$\nabla_\mu(Q^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s}) = X^{\mu_1}_{a_1} \ldots X^{\mu_r}_{a_r} X^{b_1}_{\nu_1} \ldots X^{b_s}_{\nu_s} \nabla_\mu (Q^{a_1 \ldots a_r}_{b_1 \ldots b_s}) \tag{2.63}$$

- **Calculo de la 2-forma local de curvatura.**

La 2-forma local de curvatura está dada por

$$\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu} = \frac{\partial A^{kl}_\nu}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A^{kl}_\mu}{\partial u^\nu} + \frac{1}{4} f_{cd}{}^{kl}{}_{mn}(A^{cd}_\mu A^{mn}_\nu - A^{cd}_\nu A^{mn}_\mu), \tag{2.64}$$

donde

$$f_{cd}{}^{kl}{}_{mn} = \eta_{dm}\delta^k_c \delta^l_n - \eta_{cm}\delta^k_d \delta^l_n - \eta_{dn}\delta^k_c \delta^l_m + \eta_{cn}\delta^k_d \delta^l_m. \tag{2.65}$$

En primer lugar calculemos

$$f_{cd}{}^{kl}{}_{mn}(A^{cd}_\mu A^{mn}_\nu - A^{cd}_\nu A^{mn}_\mu) =$$

dado por

$$
\begin{aligned}
&f_{cd\ \ mn}^{\ \ kl}(A_\mu^{cd}A_\nu^{mn} - A_\nu^{cd}A_\mu^{mn}) = \\
=&(\eta_{dm}\delta_c^k\delta_n^l - \eta_{cm}\delta_d^k\delta_n^l - \eta_{dn}\delta_c^k\delta_m^l + \eta_{cn}\delta_d^k\delta_m^l)(A_\mu^{cd}A_\nu^{mn} - A_\nu^{cd}A_\mu^{mn}) \\
=&\eta_{dm}\delta_c^k\delta_n^l(A_\mu^{cd}A_\nu^{mn} - A_\nu^{cd}A_\mu^{mn}) - \eta_{cm}\delta_d^k\delta_n^l(A_\mu^{cd}A_\nu^{mn} - A_\nu^{cd}A_\mu^{mn}) - \\
&- \eta_{dn}\delta_c^k\delta_m^l(A_\mu^{cd}A_\nu^{mn} - A_\nu^{cd}A_\mu^{mn}) + \eta_{cn}\delta_d^k\delta_m^l(A_\mu^{cd}A_\nu^{mn} - A_\nu^{cd}A_\mu^{mn}) \\
=&\eta_{dm}(A_\mu^{kd}A_\nu^{ml} - A_\nu^{kd}A_\mu^{ml}) - \eta_{cm}(A_\mu^{ck}A_\nu^{ml} - A_\nu^{ck}A_\mu^{ml}) - \\
&- \eta_{dn}(A_\mu^{kd}A_\nu^{ln} - A_\nu^{kd}A_\mu^{ln}) + \eta_{cn}(A_\mu^{ck}A_\nu^{ln} - A_\nu^{ck}A_\mu^{ln}) \\
=&(\eta_{dm}A_\mu^{kd}A_\nu^{ml} - \eta_{cm}A_\mu^{ck}A_\nu^{ml} - \eta_{dn}A_\mu^{kd}A_\nu^{ln} + \eta_{cn}A_\mu^{ck}A_\nu^{ln}) - \\
&- (\eta_{dm}A_\nu^{kd}A_\mu^{ml} - \eta_{cm}A_\nu^{ck}A_\mu^{ml} - \eta_{dn}A_\nu^{kd}A_\mu^{ln} + \eta_{cn}A_\nu^{ck}A_\mu^{ln}) \\
=&4\eta_{dm}A_\mu^{kd}A_\nu^{ml} - 4\eta_{dm}A_\nu^{kd}A_\mu^{ml},
\end{aligned} \tag{2.66}
$$

donde en la penúltima se han reagrupado términos de la misma clase y se ha usado la propiedad $A_\rho^{ml} = -A_\rho^{lm}$ para obtener la última linea. Entonces, la ecuación (2.64) se transforma en

$$
\mathcal{F}_{\mu\nu}^{kl} = \frac{\partial A_\nu^{kl}}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A_\mu^{kl}}{\partial u^\nu} + \eta_{dm}A_\mu^{kd}A_\nu^{ml} - \eta_{dm}A_\nu^{kd}A_\mu^{ml} \tag{2.67}
$$

- **Relacion entre la 2-forma local de curvatura y el tensor de curvatura del haz tangente.**

La 2-forma local de curvatura está dada por

$$
\mathcal{F}_{\mu\nu}^{kl} = \underbrace{\frac{\partial A_\nu^{kl}}{\partial u^\mu}}_{1} - \underbrace{\frac{\partial A_\mu^{kl}}{\partial u^\nu}}_{2} + \underbrace{\eta_{dm}A_\mu^{kd}A_\nu^{ml}}_{3} - \underbrace{\eta_{dm}A_\nu^{kd}A_\mu^{ml}}_{4}
$$

Calculemos los términos 1,2,3,4 separadamente. Debido a la relación que existe entre A_μ^{la} y $\Gamma_\rho^{\mu\nu}$

$$
A_\mu^{la} = \eta^{ka}X_\rho^l\partial_\mu X_k^\rho + \eta^{ka}X_\rho^l X_k^\nu\Gamma_{\mu\nu}^\rho, \tag{2.68}
$$

se tiene que

1).

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu A_\nu^{kl} &= \partial_\mu(\eta^{ml}X_\rho^k\partial_\nu X_m^\rho + \eta^{ml}X_\rho^k X_m^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) \\
&= \eta^{ml}\partial_\mu X_\rho^k\partial_\nu X_m^\rho + \eta^{ml}X_\rho^k\partial_\mu\partial_\nu X_m^\rho + \eta^{ml}X_m^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\rho\partial_\mu X_\rho^k + \\
&+ \eta^{ml}X_\rho^k\Gamma_{\nu\sigma}^\rho\partial_\mu X_m^\sigma + \eta^{ml}X_\rho^k X_m^\sigma\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho.
\end{aligned}
$$

2).

$$
\begin{aligned}
\partial_\nu A^{kl}_\mu &= \partial_\nu(\eta^{ml} X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_m + \eta^{ml} X^k_\rho X^\omega_m \Gamma^\rho_{\mu\omega}) \\
&= \eta^{ml} \partial_\nu X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_m + \eta^{ml} X^k_\rho \partial_\nu \partial_\mu X^\rho_m + \eta^{ml} X^\omega_m \Gamma^\rho_{\mu\omega} \partial_\nu X^k_\rho + \\
&+ \eta^{ml} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\mu\omega} \partial_\nu X^\omega_m + \eta^{ml} X^k_\rho X^\omega_m \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\omega}.
\end{aligned}
$$

3).

$$
\begin{aligned}
\eta_{dm} A^{kd}_\mu A^{ml}_\nu &= \eta_{dm}(\eta^{sd} X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_s + \eta^{sd} X^k_\rho X^\sigma_s \Gamma^\rho_{\mu\sigma})(\eta^{nl} X^m_\gamma \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega}) \\
&= (\delta^s_d X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_s + \delta^s_d X^k_\rho X^\sigma_s \Gamma^\rho_{\mu\sigma})(\eta^{nl} X^m_\gamma \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega}) \\
&= (X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_m + X^k_\rho X^\sigma_m \Gamma^\rho_{\mu\sigma})(\eta^{nl} X^m_\gamma \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega}) \\
&= \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma \partial_\mu X^\rho_m \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega} \partial_\mu X^\rho_m + \\
&+ \eta^{nl} X^k_\rho X^\sigma_m X^m_\gamma \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^\sigma_m X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\gamma_{\nu\omega} \\
&= \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma \partial_\mu X^\rho_m \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega} \partial_\mu X^\rho_m + \\
&+ \eta^{nl} X^k_\rho \delta^\sigma_\gamma \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho \delta^\sigma_\gamma X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\gamma_{\nu\omega} \\
&= \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma \partial_\mu X^\rho_m \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega} \partial_\mu X^\rho_m + \\
&+ \eta^{nl} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\mu\gamma} \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\gamma} \Gamma^\gamma_{\nu\omega}
\end{aligned}
$$

4).

$$
\begin{aligned}
\eta_{dm} A^{kd}_\mu A^{ml}_\nu &= \eta_{dm}(\eta^{nl} X^m_\rho \partial_\mu X^\rho_n + \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\omega})(\eta^{rd} X^k_\sigma \partial_\nu X^\sigma_r + \eta^{rd} X^k_\sigma X^\gamma_r \Gamma^\sigma_{\nu\gamma}) \\
&= (\eta^{nl} X^m_\rho \partial_\mu X^\rho_n + \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\omega})(\delta^r_m X^k_\sigma \partial_\nu X^\sigma_r + \delta^r_m X^k_\sigma X^\gamma_r \Gamma^\sigma_{\nu\gamma}) \\
&= (\eta^{nl} X^m_\rho \partial_\mu X^\rho_n + \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\omega})(X^k_\sigma \partial_\nu X^\sigma_m + X^k_\sigma X^\gamma_m \Gamma^\sigma_{\nu\gamma}) \\
&= \eta^{nl} X^m_\rho X^k_\sigma \partial_\mu X^\rho_n \partial_\nu X^\sigma_m + \eta^{nl} X^m_\rho X^k_\sigma X^\gamma_m \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} \partial_\mu X^\rho_n + \\
&+ \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\omega} \partial_\nu X^\sigma_m + \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n X^k_\sigma X^\gamma_m \Gamma^\rho_{\mu\omega} \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} \\
&= \eta^{nl} X^m_\rho X^k_\sigma \partial_\mu X^\rho_n \partial_\nu X^\sigma_m + \eta^{nl} X^k_\sigma \delta^\gamma_\rho \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} \partial_\mu X^\rho_n + \\
&+ \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\omega} \partial_\nu X^\sigma_m + \eta^{nl} X^\omega_n X^k_\sigma \delta^\gamma_\rho \Gamma^\rho_{\mu\omega} \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} \\
&= \eta^{nl} X^m_\rho X^k_\sigma \partial_\mu X^\rho_n \partial_\nu X^\sigma_m + \eta^{nl} X^k_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\gamma} \partial_\mu X^\gamma_n + \\
&+ \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\omega} \partial_\nu X^\sigma_m + \eta^{nl} X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\gamma_{\mu\omega} \Gamma^\sigma_{\nu\gamma}
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu} = {} & \eta^{ml}\partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\rho_m + \eta^{ml} X^k_\rho \partial_\mu\partial_\nu X^\rho_m + \eta^{ml} X^\sigma_m \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\partial_\mu X^k_\rho + \\
& + \eta^{ml} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\partial_\mu X^\sigma_m + \eta^{ml} X^k_\rho X^\sigma_m \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \\
& - \eta^{ml}\partial_\nu X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_m - \eta^{ml} X^k_\rho \partial_\nu\partial_\mu X^\rho_m - \eta^{ml} X^\omega_m \Gamma^\rho_{\mu\omega}\partial_\nu X^k_\rho - \\
& - \eta^{ml} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\mu\omega}\partial_\nu X^\omega_m - \eta^{ml} X^k_\rho X^\omega_m \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\omega} \\
& + \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma \partial_\mu X^\rho_m \partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega}\partial_\mu X^\rho_m + \\
& + \eta^{nl} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\partial_\nu X^\gamma_n + \eta^{nl} X^k_\rho X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\omega} \\
& - \eta^{nl} X^m_\rho X^k_\sigma \partial_\mu X^\rho_n \partial_\nu X^\sigma_m - \eta^{nl} X^k_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\gamma}\partial_\mu X^\gamma_n - \\
& - \eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\omega}\partial_\nu X^\sigma_m - \eta^{nl} X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\gamma_{\mu\omega}\Gamma^\sigma_{\nu\gamma} \\
& \\
= {} & \underbrace{\eta^{ml}\partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\rho_m}_{(1)} + \underbrace{\eta^{ml} X^k_\rho \partial_\mu\partial_\nu X^\rho_m}_{(2)} + \underbrace{\eta^{ml} X^\sigma_m \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\partial_\mu X^k_\rho}_{(3)} + \\
& + \underbrace{\eta^{ml} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\nu\sigma}\partial_\mu X^\sigma_m}_{(4)} - \underbrace{\eta^{ml}\partial_\nu X^k_\rho \partial_\mu X^\rho_m}_{(5)} - \underbrace{\eta^{ml} X^k_\rho \partial_\nu\partial_\mu X^\rho_m}_{(6)} - \\
& - \underbrace{\eta^{ml} X^\omega_m \Gamma^\rho_{\mu\omega}\partial_\nu X^k_\rho}_{(7)} - \underbrace{\eta^{ml} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\mu\omega}\partial_\nu X^\omega_m}_{(8)} + \underbrace{\eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma \partial_\mu X^\rho_m \partial_\nu X^\gamma_n}_{(9)} + \\
& + \underbrace{\eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma X^\omega_n \Gamma^\gamma_{\nu\omega}\partial_\mu X^\rho_m}_{(10)} + \underbrace{\eta^{nl} X^k_\rho \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\partial_\nu X^\gamma_n}_{(11)} - \underbrace{\eta^{nl} X^m_\rho X^k_\sigma \partial_\mu X^\rho_n \partial_\nu X^\sigma_m}_{(12)} - \\
& - \underbrace{\eta^{nl} X^k_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\gamma}\partial_\mu X^\gamma_n}_{(13)} - \underbrace{\eta^{nl} X^m_\rho X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\rho_{\mu\omega}\partial_\nu X^\sigma_m}_{(14)} + \\
& + (\eta^{ml} X^k_\rho X^\sigma_m \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \eta^{ml} X^k_\rho X^\omega_m \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\omega} + \eta^{nl} X^k_\rho X^\omega_n \Gamma^\rho_{\mu\gamma}\Gamma^\gamma_{\nu\omega} - \eta^{nl} X^\omega_n X^k_\sigma \Gamma^\gamma_{\mu\omega}\Gamma^\sigma_{\nu\gamma}).
\end{aligned}
$$

Usando la relación dada por la ecuación (2.60) se ver que el término **(1)** se cancela con el término **(9)**

$$
\begin{aligned}
(1) + (9) = {} & \eta^{ml}\partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\rho_m + \eta^{nl} X^k_\rho X^m_\gamma \partial_\mu X^\rho_m \partial_\nu X^\gamma_n \\
= {} & \eta^{ml}\partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\rho_m - \eta^{nl} X^\rho_m X^m_\gamma \partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\gamma_n \\
= {} & \eta^{ml}\partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\rho_m - \eta^{nl} \delta^\rho_\gamma \partial_\mu X^k_\rho \partial_\nu X^\gamma_n = 0,
\end{aligned}
$$

el término **(3)** se cancela con el **(10)**

$$
\begin{aligned}
(3)+(10) =& \eta^{ml}X^{\sigma}_{m}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\partial_\mu X^{k}_{\rho} + \eta^{nl}X^{k}_{\rho}X^{m}_{\gamma}X^{\omega}_{n}\Gamma^{\gamma}_{\nu\omega}\partial_\mu X^{\rho}_{m} \\
=& \eta^{ml}X^{\sigma}_{m}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\partial_\mu X^{k}_{\rho} - \eta^{nl}X^{\rho}_{m}X^{m}_{\gamma}X^{\omega}_{n}\Gamma^{\gamma}_{\nu\omega}\partial_\mu X^{k}_{\rho} \\
=& \eta^{ml}X^{\sigma}_{m}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\partial_\mu X^{k}_{\rho} - \eta^{nl}\delta^{\rho}_{\gamma}X^{\omega}_{n}\Gamma^{\gamma}_{\nu\omega}\partial_\mu X^{k}_{\rho} = 0,
\end{aligned}
$$

el término **(5)** se cancela con el **(12)**

$$
\begin{aligned}
-(5)-(12) =& -\eta^{ml}\partial_\nu X^{k}_{\rho}\partial_\mu X^{\rho}_{m} - \eta^{nl}X^{m}_{\rho}X^{k}_{\sigma}\partial_\mu X^{\rho}_{n}\partial_\nu X^{\sigma}_{m} \\
=& -\eta^{ml}\partial_\nu X^{k}_{\rho}\partial_\mu X^{\rho}_{m} + \eta^{nl}X^{m}_{\rho}X^{\sigma}_{m}\partial_\mu X^{\rho}_{n}\partial_\nu X^{k}_{\sigma} \\
=& -\eta^{ml}\partial_\nu X^{k}_{\rho}\partial_\mu X^{\rho}_{m} + \eta^{nl}\delta^{\sigma}_{\rho}\partial_\mu X^{\rho}_{n}\partial_\nu X^{k}_{\sigma} = 0,
\end{aligned}
$$

el término **(7)** se cancela con el **(14)**

$$
\begin{aligned}
-(7)-(14) =& -\eta^{ml}X^{\omega}_{m}\Gamma^{\rho}_{\mu\omega}\partial_\nu X^{k}_{\rho} - \eta^{nl}X^{m}_{\rho}X^{\omega}_{n}X^{k}_{\sigma}\Gamma^{\rho}_{\mu\omega}\partial_\nu X^{\sigma}_{m} \\
=& -\eta^{ml}X^{\omega}_{m}\Gamma^{\rho}_{\mu\omega}\partial_\nu X^{k}_{\rho} + \eta^{nl}X^{m}_{\rho}X^{\omega}_{n}X^{\sigma}_{m}\Gamma^{\rho}_{\mu\omega}\partial_\nu X^{k}_{\sigma} \\
=& -\eta^{ml}X^{\omega}_{m}\Gamma^{\rho}_{\mu\omega}\partial_\nu X^{k}_{\rho} + \eta^{nl}\delta^{\sigma}_{\rho}X^{\omega}_{n}\Gamma^{\rho}_{\mu\omega}\partial_\nu X^{k}_{\sigma} = 0.
\end{aligned}
$$

Evidentemente se puede ver de que el término **(2)** se cancela con el **(6)**, el término **(4)** se cancela con el **(13)** y el término **(8)** se cancela con el **(11)**. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{kl}_{\mu\nu} &= \eta^{ml}X^{k}_{\rho}X^{\sigma}_{m}\partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \eta^{ml}X^{k}_{\rho}X^{\omega}_{m}\partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\mu\omega} + \eta^{nl}X^{k}_{\rho}X^{\omega}_{n}\Gamma^{\rho}_{\mu\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\nu\omega} - \eta^{nl}X^{\omega}_{n}X^{k}_{\sigma}\Gamma^{\gamma}_{\mu\omega}\Gamma^{\sigma}_{\nu\gamma} \\
&= \eta^{nl}X^{k}_{\rho}X^{\omega}_{n}(\partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\omega\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\omega\mu} + \Gamma^{\gamma}_{\omega\nu}\Gamma^{\rho}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\omega}\Gamma^{\rho}_{\gamma\nu}) \\
&= \eta^{nl}X^{k}_{\rho}X^{\omega}_{n}R^{\rho}_{\omega\mu\nu}, \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

donde

$$
R^{\rho}_{\omega\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^{\rho}_{\omega\nu} - \partial_\nu\Gamma^{\rho}_{\omega\mu} + \Gamma^{\gamma}_{\omega\nu}\Gamma^{\rho}_{\gamma\nu} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\omega}\Gamma^{\rho}_{\gamma\nu}, \qquad (2.70)
$$

es el tensor de curvatura de la conexión ∇ dado por la ecuación (1.77).

Bibliografía

[1] David J. Gross, *The role of symmetry in fundamental physics*,Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 93, pp. 14256-14259, December 1996.

[2] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115, 485 (1959); R.C. Chambers, Phys. Rev. Lett. 5, 3 (1960).

[3] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **96** (1954) 191.

[4] R. Utiyama, Phys. Rev. **101** (1956) 1597.

[5] Valery Rubako, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton, 2002.

[6] C.N. Yang, *Fiber Bundles of the Physics of the Magnetic Monopole*, in *The Chern Symposium 1979* (Springer-Verlag, New york, 1980), 247-253. Princeton, 2002.

[7] Naber, G.L.,*Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*, Springer-Verlag, 1997.

[8] G. 't Hooft and M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nuclear Physics B 44: 189-219 (1972).

[9] Jorge Zanelli. *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities*, arXiv:hep-th/0502193v4 (2008).

[10] W. Greiner and B. Muller, *Quantum Mechanics Symmetries*, Springer-Verlag, 1989.

[11] S. Weinberg, *The quantum theory of fields* II, CUP, Cambridge, 1996.

[12] S.S Chern, *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific, 1991.

[13] Naber, G.L.,*Topology, Geometry and Gauge Fields: Interactions*, Springer-Verlag, 2000.

[14] H.B Lawson, Jr, M-L Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, USA, (1989).

[15] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*, Second Edition (Graduate Student Series in Physics).

[16] Chris J Isham, *Modern Differential Geometry for physicists*, World Scientific, 1999.

[17] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, World Scientific, 1985.

[18] S. Weinberg, *The quantum theory of fields* I, CUP, Cambridge, 1995.

]