



EL INTERVALO FUZZY Y SU MV-TOPOLOGÍA

Lina Marcela Martínez Vallejo

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2023

EL INTERVALO FUZZY Y SU MV-TOPOLOGÍA

Lina Marcela Martínez Vallejo

Trabajo de grado presentado como requisito
para optar al título de Matemática.

Directora:
Luz Victoria De la Pava, Ph.D.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2023

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mis padres Luz Belia, Diana Isabel y Carlos Tulio por su amor, apoyo incondicional, por inculcarme tantos valores y por haberme guiado hasta donde estoy. A mis hermanos, Nicolás y Carlos por ser un motivo más para seguir adelante y cumplir mis sueños. Son el motor de mi vida.

A los profesores del departamento, en especial a la profesora Luz Victoria por proponerme realizar este trabajo con ella. Su dedicación, confianza y orientación hicieron que esto fuera posible. Gracias por nunca dejar de creer en mí.

A Alexander por su amor, paciencia y por motivarme siempre a dar lo mejor de mí.

A mis compañeros y amigos que estuvieron en los momentos buenos y no tan buenos, con los cuales tengo gratos recuerdos.

Índice general

Resumen	V
Introducción	VII
I Preliminares	1
1. MV-álgebras	3
1.1. Conceptos básicos	3
1.2. Estructura reticular de una MV-álgebra	5
1.3. Homomorfismos e ideales	7
II MV-topología y el Intervalo Fuzzy	11
2. MV-topología	13
2.1. Conjuntos fuzzy	13
2.1.1. Conceptos básicos	13
2.1.2. Operaciones en conjuntos fuzzy	16
2.2. Topología fuzzy	18
2.2.1. Bases y funciones continuas	20
2.2.2. Algunos funtores entre espacios topológicos clásicos y fuzzy	21
2.2.3. Fuzzy compacidad y conexidad	22
2.3. Espacios MV-topológicos	26
2.3.1. Bases, subbases y funciones continuas	27
2.3.2. Compacidad	29
3. Espacio de Helly	31
3.1. Un subespacio de I^I	31
3.2. Propiedades topológicas	33
4. Intervalo fuzzy	35
4.1. Construcción del intervalo fuzzy	35
4.2. MV-topología en $\mathfrak{F}(I)$	39
4.3. Propiedades MV-topológicas en $\mathfrak{F}(I)$	42
4.4. Lema de Urysohn	44
Conclusiones	47

Bibliografía	49
Índice alfabético	50

Resumen

En este trabajo nos centramos en el estudio del intervalo fuzzy y su MV-topología. Los espacios MV-topológicos, introducidos por Ciro Russo en [15], son tipos particulares de espacios topológicos fuzzy, que además aprovechan las operaciones de las MV-álgebras; éstas son álgebras que resultan ser una buena extensión de las álgebras booleanas. Los espacios MV-topológicos extienden muy bien a los espacios topológicos clásicos, en el sentido de que gran parte de los resultados que se tienen para espacios MV-topológicos se han obtenido como una adaptación natural de los resultados para espacios topológicos clásicos. De esta manera, la motivación de este trabajo es estudiar el intervalo fuzzy y su MV-topología, con el fin de describir las propiedades MV-topológicas de este, así como estudiar las propiedades topológicas análogas que tiene el intervalo real unitario $[0, 1]$ desde la topología clásica. En particular, estudiamos las propiedades topológicas fuzzy de compacidad y conexidad.

PALABRAS CLAVE: Topología fuzzy, conjunto fuzzy, MV-álgebra, MV-topología, espacio de Helly, intervalo fuzzy.

Introducción

En 1965, en un artículo titulado *Fuzzy sets* [18], Lofti Zadeh introduce el concepto de *conjunto fuzzy* con el fin de representar matemáticamente la imprecisión de ciertas categorías de objetos. Esta publicación abrió paso al desarrollo de variadas y distintas ramas en las matemáticas como la teoría de conjuntos fuzzy, la lógica fuzzy, la topología fuzzy, entre otras. Tres años después de los trabajos de Zadeh, en 1968, Chang introdujo el concepto de topología fuzzy, como una extensión de la topología clásica [2]. Desde entonces, múltiples trabajos e investigaciones sobre nociones y resultados de topología fuzzy, se han establecido. En 1975, [6], Hutton demuestra el Lema de Uryshon para espacios topológicos fuzzy, define normalidad y el concepto de intervalo fuzzy. Este intervalo tiene un comportamiento y propiedades análogas a las que tiene el intervalo real unitario en la topología clásica.

Este trabajo se organiza en dos partes: la primera parte consta de un capítulo de preliminares que contiene algunas definiciones y resultados de MV-álgebras; la segunda parte consta de tres capítulos en los que desarrollamos los principales resultados de la tesis.

El capítulo 2 se reparte así: en la sección 2.1 estudiamos los conjuntos fuzzy para luego introducir el concepto de topología fuzzy en 2.2 y sus resultados más importantes; introducimos los funtores ι y ω los cuales permiten pasar tanto de un espacio topológico fuzzy a uno clásico y viceversa, estos funtores serán de gran importancia en el capítulo 4. En la última sección de este capítulo introducimos los espacios MV-topológicos y presentamos sólo algunos conceptos y resultados que se obtienen como una generalización de los conceptos dados en la sección 2.2.

En el capítulo 4 introducimos el intervalo fuzzy, algunos resultados, y desarrollamos alguna teoría adicional. Veremos que el intervalo fuzzy se obtiene como un conjunto cociente, de este modo, antes de estudiar este intervalo, estudiamos el espacio de Helly en el capítulo 3, el cual es un espacio que es homeomorfo al espacio que se considera para formar el espacio cociente del intervalo fuzzy. Esto se hizo con el fin de estudiar las propiedades topológicas del espacio de Helly para luego aprovechar el homeomorfismo y así poder conservar dichas propiedades.

Parte I

Preliminares

Capítulo 1

MV-álgebras

En 1958, [1], Chang introduce las MV-álgebras con el fin de estudiar la contraparte algebraica de la lógica multivaluada de *Jan Łukasiewicz*. Las MV-álgebras son a la lógica proposicional de Łukasiewicz lo que las álgebras booleanas¹ son al cálculo proposicional clásico. En este capítulo presentamos algunos resultados de MV-álgebras que serán útiles para comprender algunos aspectos de 2.3 los espacios MV-topológicos, los cuales serán definidos en el capítulo 2. En la sección 1.1 se encuentran algunas definiciones y ejemplos; en 1.2 vemos que cada MV-álgebra tiene un orden reticular y en 1.3 se presentan los conceptos de homomorfismos e ideales para MV-álgebras.

1.1. Conceptos básicos

Las siguientes definiciones y resultados se pueden encontrar en [3].

Definición 1.1.1. *Una MV-álgebra es una estructura algebraica $\langle A, \oplus, *, \mathbf{0} \rangle$ con una operación binaria $\oplus$, una operación unaria $*$ y una constante $\mathbf{0}$, tal que para todo $x, y \in A$ se satisfacen las siguientes propiedades:*

MV1. $\langle A, \oplus, \mathbf{0} \rangle$ es un monoide conmutativo,

MV2. $(x^*)^* = x$,

MV3. $x \oplus \mathbf{0}^* = \mathbf{0}^*$,

MV4. $(x^* \oplus y)^* \oplus y = (y^* \oplus x)^* \oplus x$.

Intuitivamente, $\oplus$ es un tipo de suma y $*$ un tipo de negación. En cada MV-álgebra se define la constante $\mathbf{1}$ y las operaciones $\odot$ y $\ominus$ de la siguiente manera:

- $\mathbf{1} = \mathbf{0}^*$
- $x \odot y = (x^* \oplus y^*)^*$
- $x \ominus y = x \odot y^*$.

Denotamos una MV-álgebra $\langle A, \oplus, *, \mathbf{0} \rangle$ por su universo A . Una MV-álgebra es trivial si su universo es un singleton² y, es no trivial si y sólo si su universo contiene más de un elemento.

¹Un álgebra booleana es un álgebra $\langle B, \vee, \wedge, *, 0, 1 \rangle$ con dos operaciones binarias y una operación unaria tal que $\langle B, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo distributivo y se cumple que: $x \wedge 0 \approx 0$, $x \vee 1 \approx 1$, $x \vee x^* \approx 1$ y $x \wedge x^* \approx 0$.

²Se le conoce como conjunto singleton a cualquier conjunto que contenga solamente un elemento.

Proposición 1.1.2. *En toda MV-álgebra A se satisfacen las siguientes identidades:*

1. $x \oplus y = (x^* \odot y^*)^*$,
2. $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$,
3. $x \oplus x^* = 1$.

Demostración.

1. $(x^* \odot y^*)^* = [(x^{**} \oplus y^{**})^*]^* = (x \oplus y)^{**} = x \oplus y$.
2. De acuerdo a como se define $\ominus$, entonces $(x \ominus y) \oplus y = (x \odot y^*) \oplus y = (x^* \oplus y)^* \oplus y$, del mismo modo, $(y \ominus x) \oplus x = (y \odot x^*) \oplus x = (y^* \oplus x)^* \oplus x$. Luego, por (MV4) se tiene que $(x \ominus y) \oplus y = (y \ominus x) \oplus x$.
3. Haciendo $y = 1^*$ en (MV4):

$$x \oplus x^* = x \oplus (x \oplus 0)^* = x \oplus (x \oplus 1^*)^* = 1 \oplus (x^* \oplus 1)^* = 1.$$

□

Ejemplo 1.1.1.

1. Toda álgebra booleana es una MV-álgebra. En particular, $\{0, 1\}$ es una MV-álgebra y, en este caso $\oplus = \vee$ y $\odot = \wedge$.
2. El conjunto de funciones $\{0, 1\}^X$ es un álgebra Booleana, con las operaciones definidas puntualmente, y por tanto es también una MV-álgebra.
3. El intervalo unidad $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, en donde la operación binaria y unaria están definidas por: $x \oplus y = \min(1, x + y)$, $x^* = 1 - x$, para cada $x, y \in [0, 1]$ y la constante 0 es el número real cero.
4. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es una subálgebra de $[0, 1]$ con las operaciones inducidas por el ejemplo anterior.
5. Para cada entero $n \geq 2$, el conjunto de n elementos $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ es también una subálgebra de $[0, 1]$.
6. Para cada conjunto no vacío X , el conjunto de funciones $[0, 1]^X$ es una MV-álgebra, en donde las operaciones están definidas puntualmente: $(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x)$ y $f^*(x) = f(x)^*$, para cada $f, g : X \rightarrow [0, 1]$. La constante 0 es la función constante $0 : X \rightarrow [0, 1]$.
7. El conjunto de funciones continuas de $[0, 1]$ en $[0, 1]$ forman una subálgebra de la MV-álgebra $[0, 1]^{[0, 1]}$.

Observación 1.1.3. Sea $\wp(X)$ el conjunto de subconjuntos de X . La función

$$\varphi : \wp(X) \rightarrow \{0, 1\}^X, \text{ tal que } \varphi(A) = 1_A,$$

que envía a cada subconjunto A de X en su función característica 1_A , es biyectiva. De este modo, podemos identificar $\wp(X)$ con el conjunto de funciones $\{0, 1\}^X$. La utilidad de esta identificación será explícita más adelante.

1.2. Estructura reticular de una MV-álgebra

Proposición 1.2.1. *Sea A una MV-álgebra y sean $x, y \in A$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $x^* \oplus y = \mathbf{1}$,
2. $x \odot y^* = \mathbf{0}$,
3. $y = x \oplus (y \ominus x)$,
4. existe un elemento $z \in A$ tal que $x \oplus z = y$.

Demostración.

- (1) $\rightarrow$ (2) $x \odot y^* = (x^* \oplus y^{**})^* = (x^* \oplus y)^* = \mathbf{1}^* = \mathbf{0}$.
- (2) $\rightarrow$ (3) $x \oplus (y \ominus x) = y \oplus (x \ominus y) = y \oplus (x \odot y^*) = y \oplus \mathbf{0} = y$.
- (3) $\rightarrow$ (4) Considerando $z = y \ominus x$.
- (4) $\rightarrow$ (1) $x^* \oplus y = x^* \oplus x \oplus z = \mathbf{1} \oplus z = \mathbf{1}$.

□

Se define la relación binaria $\leq$ en la MV-álgebra A por $x \leq y$, si y solo si x e y satisfacen las condiciones equivalentes mencionadas anteriormente. Se tiene que $\leq$ es un orden reticular, llamado el orden natural de A .

Observación 1.2.2. *Una MV-álgebra donde el orden natural es total, es llamada una MV-cadena .*

Proposición 1.2.3. *El orden natural en cada MV-álgebra A satisface las siguientes propiedades:*

1. $x \leq y$ si y sólo si $y^* \leq x^*$,
2. si $x \leq y$ entonces $x \oplus z \leq y \oplus z$ y $x \odot z \leq y \odot z$,
3. $x \odot y \leq z$ si y sólo si $x \leq y^* \oplus z$,

Demostración.

1. Si $x \leq y$ entonces $x^* \oplus y = \mathbf{1}$. Ya que $x^* \oplus y = y^{**} \oplus x^*$ se concluye por la proposición 1.2.1(i) que $y^* \leq x^*$.
2. La monotonía de $\oplus$ es una consecuencia inmediata de la proposición 1.2.1(iv). Ahora, si $x \leq y$ entonces por (i) $y^* \leq x^*$, luego, por la monotonía de $\oplus$ se tiene que $y^* \oplus z^* \leq x^* \oplus z^*$, así, $x \odot z = (x^* \oplus z^*)^* \leq (y^* \oplus z^*)^* = y \odot z$.
3. $x \odot y \leq z$ si y sólo si $(x \odot y)^* \oplus z = \mathbf{1}$ si y sólo si $x^* \oplus y^* \oplus z = \mathbf{1}$ si y sólo si $x \leq y^* \oplus z$.

□

Definición 1.2.4. *Sea A una MV-álgebra y sean $x, y \in A$. El join y el meet están dados, respectivamente, por:*

1. $x \vee y = (x \odot y^*) \oplus y = (x \ominus y) \oplus y$,
2. $x \wedge y = (x^* \vee y^*)^* = x \odot (x^* \oplus y)$.

Proposición 1.2.5. *Sea A una MV-álgebra y $x, y \in A$. La siguiente desigualdad siempre se cumple*

$$x \odot y \leq x \wedge y \leq x \vee y \leq x \oplus y.$$

Demostración. Por definición, es claro que $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$. Para probar las otras dos desigualdades hacemos uso de la proposición 1.2.1(i). De este modo,

$$\begin{aligned} (x \wedge y) \oplus (x \odot y)^* &= x \odot (x^* \oplus y) \oplus (x \odot y)^* = x \odot (x^* \oplus y) \oplus x^* \oplus y^* \\ &= (x \odot (x^* \oplus y) \oplus x^*) \oplus y^* \\ &= (x^* \oplus y \oplus (x^* \odot x \odot y)) \oplus y^* \\ &= (x^* \oplus y \oplus (0 \odot y)) \oplus y^* \\ &= (x^* \oplus y) \oplus y^* \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus (x \vee y)^* &= x \oplus y \oplus ((x \odot y^*) \oplus y)^* = x \oplus y \oplus (x \oplus (y \odot x^*))^* \\ &= x \oplus y \oplus (x^* \odot (y^* \oplus x)) \\ &= y \oplus (x \oplus x^* \odot (y^* \oplus x)) \\ &= y \oplus y^* \oplus x \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.6. *Las siguientes identidades se cumplen en cada MV-álgebra:*

1. $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$,
2. $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$,

Demostración.

1. Es evidente que $x \odot y \leq x \odot (y \vee z)$ y $x \odot z \leq x \odot (y \vee z)$. Ahora supongamos que $x \odot y \leq t$ y $x \odot z \leq t$, entonces por la proposición 1.2.1(iii) $y \leq x^* \oplus t$ y $z \leq x^* \oplus t$, así, $y \vee z \leq x^* \oplus t$, nuevamente por la proposición 1.2.1(iii) $(y \vee z) \odot x \leq t$. Es decir, $(y \vee z) \odot x$ es el menor de las cotas superiores para $x \odot z$ y $x \odot y$, esto es, $(y \vee z) \odot x = x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$.
2. Es una consecuencia inmediata de (1) usando la proposición 1.2.1(iv).

□

Lema 1.2.7. *Sea A una MV-álgebra y sean $x, y \in A$. Si $x \wedge y = 0$ entonces para cada entero $n \geq 0$, $nx \wedge ny = 0$.*

Demostración. Si $x \wedge y = 0$ entonces por la monotocidad y distributividad, se tiene que $x = x \oplus (x \wedge y) = (x \oplus x) \wedge (x \oplus y) \geq 2x \wedge y$, de donde $0 = x \wedge y \geq 2x \wedge y$. Se sigue que $0 = 2x \wedge 2y = 4x \wedge 4y = \dots$. De este modo, $nx \wedge ny \leq 2^n x \wedge 2^n y = 0$, esto es, $nx \wedge ny = 0$. □

1.3. Homomorfismos e ideales

Definición 1.3.1. Sean A y B MV-álgebras. Un **homomorfismo** de MV-álgebras es una función $h : A \longrightarrow B$ que satisface las siguientes condiciones, para cada $x, y \in A$:

1. $h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
2. $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$,
3. $h(x^*) = h(x)^*$.

El kernel de un homomorfismo $h : A \longrightarrow B$ es el conjunto

$$\ker(h) = h^{-1}(\mathbf{0}) = \{x \in A : h(x) = \mathbf{0}\}.$$

Definición 1.3.2. Un **ideal** de un MV-álgebra A es un subconjunto I de A que satisface las siguientes condiciones:

1. Si $x \in I, y \in A$ y $y \leq x$ entonces $y \in I$,
2. Si $x, y \in I$ entonces $x \oplus y \in I$.

Un ideal I es *propio* si no coincide con la MV-álgebra entera, esto es $I \neq A$. Un ideal I de un MV-álgebra A es *primo* si el ideal es propio y satisface la siguiente condición:

- Para cada $x, y \in A$ se tiene $(x \odot y^*) \in I$ ó $(y \odot x^*) \in I$.

Un ideal M de una MV-álgebra A es llamado *maximal* si es propio y ningún ideal propio de A contiene estrictamente a M , es decir, para cada ideal $J \neq M$, si $M \subseteq J$ entonces $J = A$.

Las siguientes son algunas consecuencias de la definición 1.3.2:

- $\mathbf{0} \in I$ para cualquier ideal I de A ,
- $\{\mathbf{0}\}$ y A son ideales,
- para cada $x, y \in I$, se tiene que $x \odot y, x \oplus y, x \vee y, x \wedge y \in I$,
- Un ideal I es propio si y sólo si $\mathbf{1} \notin I$,
- La intersección de cualquier familia de ideales de A es también un ideal de A .

Para cada subconjunto $Z \subseteq A$, la intersección de todos los ideales $I \supseteq Z$ es llamado *ideal generado por Z* , y es denotado por $\langle Z \rangle$.

Lema 1.3.3. Sea W un subconjunto de una MV-álgebra A . Si $W = \emptyset$ entonces $\langle W \rangle = \{\mathbf{0}\}$. Si $W \neq \emptyset$ entonces

$$\langle W \rangle = \{x \in A : x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k, \text{ para } w_1, \dots, w_k \in W\}.$$

Demostración. Sea $I = \{x \in A : x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \text{ para algunos } w_1, \dots, w_k \in W\}$. Si $x \in I$ entonces $x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k$ para algunos $w_1, \dots, w_k \in W$; sea $y \in A$ tal que $y \leq x$, esto implica que $y \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k$, esto es $y \in I$. Ahora, si $x, y \in I$ entonces $x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k$ y del mismo modo $y \leq s_1 \oplus \cdots \oplus s_k$ para algunos $w_1, \dots, w_k, s_1, \dots, s_k \in W$, por lo tanto $x \oplus y \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \oplus s_1 \oplus \cdots \oplus s_k$, esto es, $x \oplus y \in I$. En consecuencia, I es un ideal de A . Supongamos ahora que existe un ideal J de A , tal que $W \subseteq J$. De este modo, si $x \in I$ entonces $x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k$ para algunos $w_1, \dots, w_k \in W \subseteq J$. Ahora, como J es un ideal entonces se tiene que $w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \in J$, por lo tanto $x \in J$, en consecuencia $I \subseteq J$. Es decir I es el menor de los ideales de A que contienen a W :

$$\langle W \rangle = \{x \in A : x \leq w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \text{ para algunos } w_1, \dots, w_k \in W\}.$$

□

En particular, un ideal generado por un elemento single es llamado *ideal principal*, para cada $z \in A$,

$$\langle z \rangle = \{x \in A : x \leq nz \text{ para } n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que $\langle 0 \rangle = \{0\}$ y $\langle 1 \rangle = A$. Además, para cada ideal I de una MV-álgebra A y cada $z \in A$ se tiene lo siguiente

$$\langle I \cup \{z\} \rangle = \{x \in A : x \leq nz \oplus a, \text{ para algun } n \in \mathbb{N} \text{ y } a \in I\}.$$

En el siguiente lema se resumen algunas relaciones sencillas entre ideales y núcleos de homomorfismos.

Lema 1.3.4. Sean A, B MV-álgebras y $h : A \longrightarrow B$ un homomorfismo. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cada ideal J de B el conjunto $h^{-1}(J) = \{x \in A : h(x) \in J\}$ es un ideal de A . En particular, $\ker(h)$ es un ideal de A .
2. $h(x) \leq h(y)$ si y sólo si $x \ominus y \in \ker(h)$.
3. h es inyectivo si y sólo si $\ker(h) = \{0\}$.
4. $\ker(h) \neq A$ si y sólo si B es no trivial.

Demostración.

1. Notemos que $h(0) = 0$, por lo tanto $0 \in h^{-1}(J)$. Sean $x, y \in A$ tal que $y \leq x$ y $x \in h^{-1}(J)$, esto es $h(x) \in h(h^{-1}(J)) \subseteq J$, como h es un homomorfismo entonces se sigue que $h(y) \leq h(x)$ y por lo tanto existe un $z \in h(A)$ tal que $h(y) + z = h(x)$, como $h(x) \in J$, entonces $h(y) + z \in J$, de este modo se tiene que $h(y) \in J$, esto es $y \in h^{-1}(J)$. Ahora, si $x, y \in h^{-1}(J)$ entonces $h(x), h(y) \in h(h^{-1}(J)) \subseteq J$. Como $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y)$ entonces $h(x \oplus y) \in J$, esto es $x \oplus y \in h^{-1}(J)$. En consecuencia, $h^{-1}(J)$ es un ideal de A .

Veamos ahora que $\ker(h)$ es un ideal de A . Es claro que $0 \in \ker(h)$. Sean $x, y \in A$ tal que $y \leq x$ y $x \in \ker(h)$, como $y \leq x$ entonces $h(y) \leq h(x)$, de este modo $h(y) = h(x) = 0$, esto es $y \in \ker(h)$. Luego, si $x, y \in \ker(h)$ entonces $h(x) = h(y) = 0$ y por lo tanto, $h(x \oplus y) = h(x) \oplus h(y) = 0 \oplus 0 = 0$, esto es $x \oplus y \in \ker(h)$, así $\ker(h)$ es un ideal de A .

2. Si $h(x) \leq h(y)$ entonces se tiene que $\neg h(x) \oplus h(y) = 1$, esto es $h(\neg x \oplus y) = 1$, notemos que $h(\neg(\neg x \oplus y)) = \neg h(\neg x \oplus y) = \neg 1 = 0$, es decir, $h(x \ominus y) = 0$. En consecuencia $x \ominus y \in \ker(h)$. La otra implicación es inmediata.
3. Sea h inyectiva y $x \in \ker(h)$, esto es $h(x) = h(0) = 0$, por lo tanto $x = 0$, y así $\ker(h) = \{0\}$. Por el contrario, sea $\ker(h) = \{0\}$ y sean $x, y \in A$ tales que $h(x) = h(y)$, como h es un homomorfismo $h(d(x, y)) = d(h(x), h(y)) = 0$ (donde $d(x, y)$ denota la distancia entre x e y). Ahora, como $\ker(h) = \{0\}$, si $h(d(x, y)) = 0$ entonces $d(x, y) = 0$, eso es $x = y$. En consecuencia, h es inyectiva.
4. Si $\ker(h) \neq A$ entonces existe al menos un $x \in A$ tal que $x \notin \ker(h)$, así $h(x) \neq 0$, es decir, B es no trivial. Por el contrario, si B es no trivial entonces existe $x \in A$ tal que $h(x) \neq 0$, esto es $x \notin \ker(h)$ y por lo tanto $\ker(h) \neq A$.

□

Parte II

MV-topología y el Intervalo Fuzzy

Capítulo 2

MV-topología

Daremos inicio a este capítulo con la definición de conjunto fuzzy, el cual permitirá introducir el concepto de topología fuzzy. Enseguida se presenta la definición de MV-topología con algunos conceptos y propiedades importantes, las cuales se obtienen como una generalización o adaptación natural de los conceptos de topología clásica.

2.1. Conjuntos fuzzy

En 1965, [18], Lofti Zadeh introduce el concepto de conjunto fuzzy con el fin de representar matemáticamente la imprecisión de ciertas categorías de objetos. La representación matemática de un conjunto fuzzy se basa en el hecho de que cualquier conjunto clásico A se puede representar por su función característica $1_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, donde:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

En este sentido, tener $1_A(x) = 1$ significa que el elemento x pertenece a A , y si $1_A(x) = 0$ significa que x no pertenece a A . Sin embargo, en muchos casos las clases de objetos que se encuentran en el mundo físico no tienen criterios de pertenencia precisos. Esta noción se generaliza de tal forma que la pertenencia de los elementos de un conjunto pueda tomar más de dos valores, e incluso un continuo de valores, en lugar de tomar solo dos valores en el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. De este modo, Zadeh definió los conjuntos fuzzy como clases de objetos con grados de pertenencia sobre el intervalo real $[0, 1]$. Así, la teoría de conjuntos fuzzy es una generalización de la teoría de conjuntos clásica.

2.1.1. Conceptos básicos

A continuación presentamos algunas definiciones básicas, las cuales se pueden encontrar en [18].

Definición 2.1.1. Sea X un conjunto. Se define un **subconjunto fuzzy**¹ de X como una función $\alpha : X \rightarrow [0, 1]$. En este sentido, α es llamada la función de pertenencia y $\alpha(x)$ se interpreta como el grado de pertenencia de un punto $x \in X$ en un conjunto fuzzy α . El conjunto de subconjuntos fuzzy de X se denota por $[0, 1]^X$.

¹En este trabajo utilizaremos el concepto *fuzzy* aunque en muchas ocasiones, en la literatura se hace uso del concepto *difuso*.

Si el valor de esta función es 0, $x \notin \alpha$. Si es 1, entonces $x \in \alpha$ totalmente, y si $0 < \alpha(x) < 1$ entonces x pertenece a α de una manera parcial.

Observación 2.1.2. Como se mostró en el ejemplo 1.1.1, el conjunto de subconjuntos fuzzy de X , $[0, 1]^X$ constituye una MV-álgebra.

Los conjuntos fuzzy que sólo toman los valores de 0 o 1 se llaman *conjuntos fuzzy característicos* o conjuntos *crisp*, en especial, el conjunto fuzzy que toma el valor de 1 para todo $x \in X$ se denota por $\mathbf{1}$, y el conjunto fuzzy que para todo $x \in X$ toma el valor de 0 se denota por $\mathbf{0}$. En otras palabras, son las funciones constantes tales que $\mathbf{1}(x) = 1$ y $\mathbf{0}(x) = 0$ para todo $x \in X$.

En general, para cada $r \in [0, 1]$, denotamos por $\mathbf{r}$ a la función constante $\mathbf{r}(x) = r$ para todo $x \in X$.

Definición 2.1.3. Para cada subconjunto fuzzy α se define su **sopORTE** mediante

$$\{x \in X : \alpha(x) > 0\},$$

denotado por $\text{supp}(\alpha)$.

Los conjuntos fuzzy permiten formalizar expresiones lingüísticas² que normalmente contienen algún grado de ambigüedad, es decir, proveen un método para expresar matemáticamente conceptos tales como “joven”, “alto”, “frío” etc., que son bastamente usados, pero que por esencia no son totalmente precisos. A continuación presentamos algunos ejemplos de conjuntos fuzzy.

Ejemplo 2.1.1. Considere los habitantes de un país. Cada individuo de ésta población se puede asociar a un número real correspondiente a su edad. Considere todo el universo como las edades dentro del intervalo $U = [0, 100]$ donde $x \in U$ se interpreta como la edad de un individuo determinado. Se podría modelar el concepto fuzzy “joven” por las siguientes dos funciones de pertenencia J_1 y J_2 según diferentes expertos. Uno de esos modelos, decidido por un adolescente, podría ser

$$J_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 20 \\ \frac{40-x}{20} & \text{si } 20 \leq x < 40 \\ 0 & \text{si } 40 \leq x \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a $J_1(x)$ se presenta en la figura 2.1

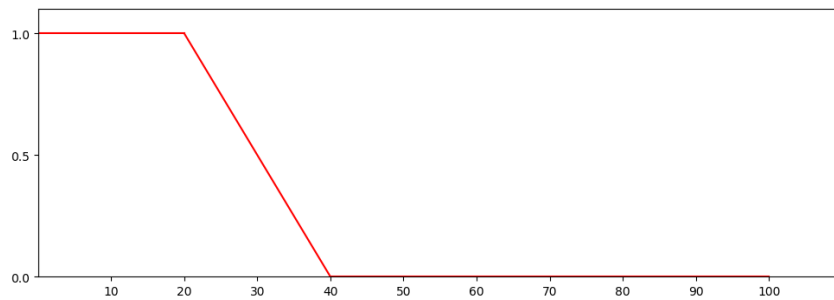


Figura 2.1: Una función de pertenencia para “joven”

²Una expresión lingüística es una variable cuyos valores son palabras o sentencias (no números).

Mientras que un modelo decidido por una persona de 28 años, podría ser

$$J_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 35 \\ \frac{70-x}{35} & \text{si } 35 \leq x < 50 \\ \frac{2(60-x)}{35} & \text{si } 50 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{si } 60 \leq x \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a $J_2(x)$ se presenta en la figura 2.1

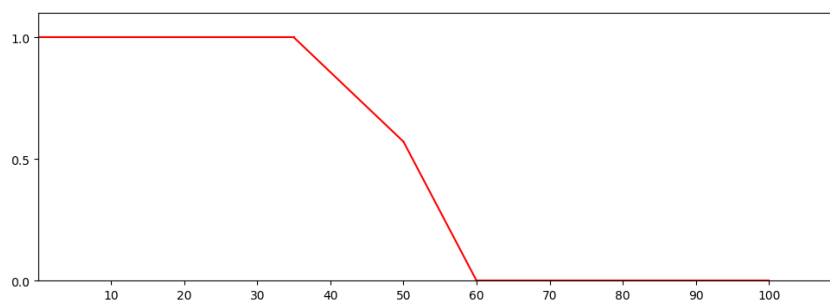


Figura 2.2: Otra función de pertenencia para “joven”

Ejemplo 2.1.2. Supongamos que queremos modelar la noción de “ingresos altos” con un conjunto fuzzy. De nuevo, considere todo el universo como los ingresos diarios dentro del intervalo $U = [0, 100]$ donde $x \in U$ se interpreta como el ingreso diario de un individuo determinado. La función de pertenencia I permite modelar este concepto.

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 35 \\ \frac{x-35}{35} & \text{si } 35 \leq x < 70 \\ 1 & \text{si } 70 \leq x \end{cases}$$

La gráfica correspondiente a $I(x)$ se presenta en la figura 2.3.

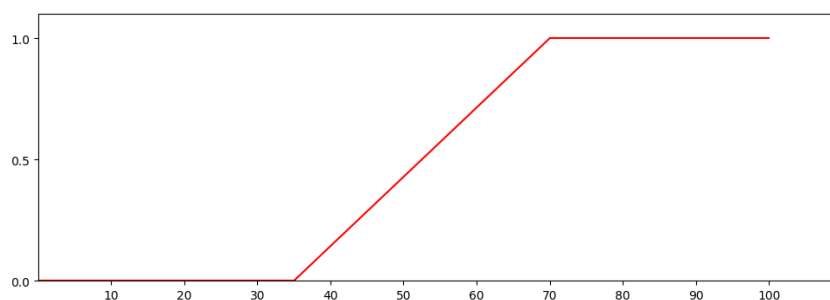


Figura 2.3: Una función de pertenencia para “ingresos altos”

Notemos que en este modelo un ingreso diario inferior a los \$35.000 no es considerado alto, mientras que los ingresos superiores a \$70.000 sí lo son. Además, los ingresos que se encuentran entre los \$35.000 y los \$70.000 no son considerados ni del todo bajos, ni del todo altos.

2.1.2. Operaciones en conjuntos fuzzy

Sean α, β subconjuntos fuzzy de X , por las operaciones unión e intersección nos referimos al ínfimo y supremo, respectivamente:

$$\begin{aligned}(\alpha \vee \beta)(x) &= \max\{\alpha(x), \beta(x)\} = \alpha(x) \vee \beta(x) \\(\alpha \wedge \beta)(x) &= \min\{\alpha(x), \beta(x)\} = \alpha(x) \wedge \beta(x)\end{aligned}$$

y por el complemento,

$$\alpha^*(x) = 1 - \alpha(x).$$

De este modo, si $\mathcal{A} = \{\alpha_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos fuzzy en X , entonces nos referimos respectivamente a su supremo e ínfimo por $\bigvee \mathcal{A} = \bigvee\{\alpha_i : i \in I\}$ y $\bigwedge \mathcal{A} = \bigwedge\{\alpha_i : i \in I\}$.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el conjunto fuzzy $J_1(x)$ del ejemplo 2.1.1 y el conjunto fuzzy $I(x)$ del ejemplo 2.3 dados por las siguientes fórmulas:

$$J_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 20 \\ \frac{40-x}{20} & \text{si } 20 \leq x < 40 \\ 0 & \text{si } 40 \leq x \end{cases} \quad I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 35 \\ \frac{x-35}{35} & \text{si } 35 \leq x < 70 \\ 1 & \text{si } 70 \leq x \end{cases}$$

Las funciones de pertenencia y las gráficas para $J_1 \vee I$, $J_1 \wedge I$, J_1^* y I^* son las siguientes.

$$(J_1 \vee I)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 20, \ x \geq 70 \\ \frac{40-x}{20} & \text{si } 20 \leq x < \frac{2100}{55} \\ \frac{x-35}{35} & \text{si } \frac{2100}{55} \leq x < 70 \end{cases}$$

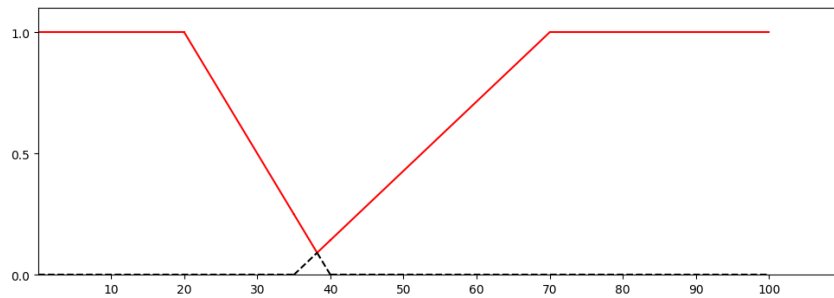
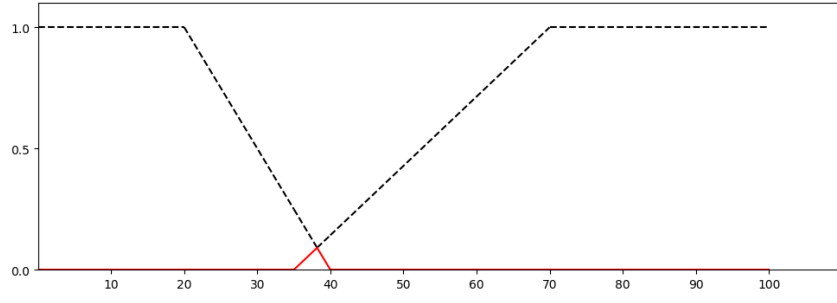
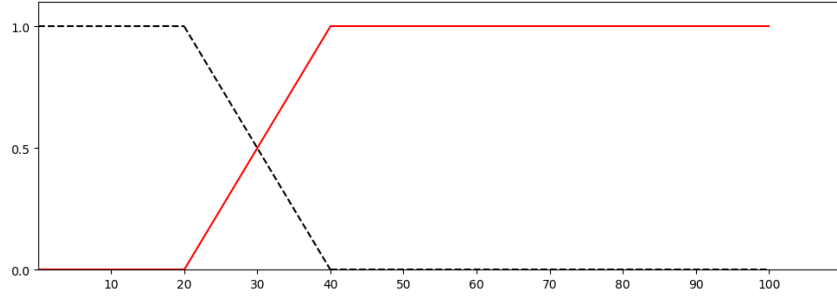


Figura 2.4: La función de pertenencia $J_1 \vee I$

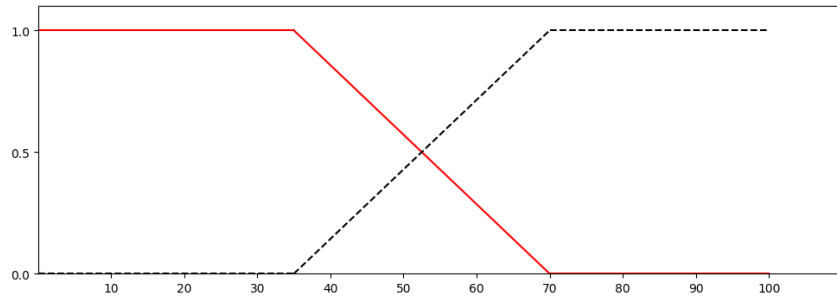
$$(J_1 \wedge I)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 35, \ x \geq 40 \\ \frac{x-35}{35} & \text{si } 35 \leq x < \frac{2100}{55} \\ \frac{40-x}{20} & \text{si } \frac{2100}{55} \leq x < 40 \end{cases}$$


 Figura 2.5: La función de pertenencia $J_1 \wedge I$

$$J_1^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 20 \\ 1 - \left(\frac{40-x}{20}\right) & \text{si } 20 \leq x < 40 \\ 1 & \text{si } 40 \leq x \end{cases}$$


 Figura 2.6: La función de pertenencia J_1^*

$$I^*(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 35 \\ 1 - \left(\frac{x-35}{35}\right) & \text{si } 35 \leq x < 70 \\ 0 & \text{si } 70 \leq x \end{cases}$$


 Figura 2.7: La función de pertenencia I^*

Como para cada conjunto no vacío X , el conjunto de funciones $[0, 1]^X$ es una MV-álgebra con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas puntualmente, entonces podemos realizar las gráficas correspondientes a estas operaciones entre las funciones de pertenencia de J_1 e I . De este

modo:

$$\begin{aligned}(J_1 \oplus I)(x) &= J_1(x) \oplus I(x) = \min\{J_1(x) + I(x), 1\}, \\ (J_1 \odot I)(x) &= J_1(x) \odot I(x) = \max\{J_1(x) + I(x) - 1, 0\},\end{aligned}$$

así,

$$(J_1 \oplus I)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 20, \ x \geq 70 \\ \frac{40-x}{20} & \text{si } 20 \leq x < 35 \\ \frac{40-x}{20} + \frac{x-35}{35} & \text{si } 35 \leq x < 40 \\ \frac{x-35}{35} & \text{si } 40 \leq x < 70 \end{cases}$$

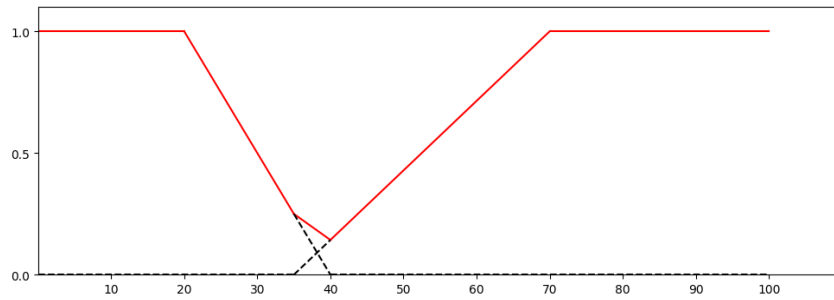


Figura 2.8: La función de pertenencia $J_1 \oplus I$

Como $J_1(x) + I(x) \leq 1$ para todo $x \in U$ entonces se tiene que

$$(J_1 \odot I)(x) = \max\{J_1(x) + I(x) - 1, 0\} = 0,$$

por tanto, su gráfica corresponde es la función constante $\mathbf{0}$. Notemos que

$$J_1 \odot I \leq J_1 \wedge I \leq J_1 \vee I \leq J_1 \oplus I,$$

como era de esperarse.

2.2. Topología fuzzy

En 1968, tres años después de Zadeh introducir el concepto de conjunto fuzzy, Chang define los espacios topológicos fuzzy, como una extensión de los espacios topológicos clásicos, [2]. También desarrolló algunas nociones topológicas básicas para estos espacios, las cuales serán presentadas en esta sección. En 1974, Lowen publicó un artículo [10] en donde presentó los funtores ω y ι de los cuales hablaremos en la sección 2.2.2; estos funtores serán de gran importancia en el desarrollo de este trabajo, pues son los que nos permitirán establecer algunas propiedades topológicas en nuestro conjunto de interés: el intervalo fuzzy.

En lo que sigue presentamos algunos resultados que pueden ser encontrados en [2] y [4].

Definición 2.2.1. Una **topología fuzzy** es una familia τ de subconjuntos fuzzy de X , esto es, $\tau \subseteq [0, 1]^X$, que satisface las siguientes condiciones:

1. $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \tau$,

2. Si $\alpha, \beta \in \tau$, entonces $\alpha \wedge \beta \in \tau$,
3. Si $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in \tau$.

Se llama *espacio topológico fuzzy* o *fts* a todo par (X, τ) donde X es un conjunto y τ una topología fuzzy de X . Cada miembro de una topología fuzzy τ de X es llamado *conjunto fuzzy τ -abierto*, o simplemente fuzzy abierto. Todo conjunto complementario de un subconjunto abierto, es decir, cada elemento en τ^* se llama subconjunto cerrado en $[0, 1]^X$. El conjunto $\tau^* = \{\alpha^* : \alpha \in \tau\}$ verifica las siguientes propiedades:

- $0, 1 \in \tau^*$,
- para todo $\beta_1, \beta_2 \in \tau^*$, $\beta_1 \vee \beta_2 \in \tau^*$,
- si $\{\beta_i\}_{i \in I} \subseteq \tau^*$, entonces $\bigwedge_{i \in I} \beta_i \in \tau^*$.

En 1976 [10], Lowen dio una definición de espacio topológico fuzzy que incluye las condiciones de espacio topológico de Chang, y agrega todas las funciones constantes a la familia de conjuntos fuzzy abiertos; esto con el fin de que las funciones constantes entre espacios topológicos fuzzy sean continuas, pues con la definición 2.2.1 esta condición de continuidad no necesariamente se satisface.

Definición 2.2.2. El par (X, τ) se denomina *espacio topológico fuzzy laminado* si y sólo si:

1. para todo $r \in [0, 1]$, $r \in \tau$,
2. si $\alpha, \beta \in \tau$, entonces $\alpha \wedge \beta \in \tau$,
3. si $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in \tau$.

Así como en la topología clásica, en la topología fuzzy también podemos establecer cuándo dos topologías son comparables: si τ_1 y τ_2 son topologías fuzzy de X , entonces decimos que τ_1 es más gruesa que τ_2 , o que τ_2 es más fina que τ_1 , si $\tau_1 \subseteq \tau_2$. En otras palabras, τ_1 es más gruesa que τ_2 , si cada conjunto fuzzy τ_1 -abierto es τ_2 -abierto. Sin embargo, puede que dos topologías fuzzy no sean comparables, es decir, puede que no haya una más fina que la otra. Aún así, existe una topología fuzzy más fina y una más gruesa llamadas topología fuzzy discreta y topología fuzzy trivial, respectivamente.

A continuación se presentan algunos ejemplos de espacios topológicos fuzzy. En particular, el ejemplo número 3 es clave en el estudio de esta rama, ya que permite ver cómo a partir de cualquier topología clásica se puede construir una fuzzy.

Ejemplo 2.2.1. Sea X un conjunto no vacío.

1. Sea $\tau = \{1_\emptyset, 1_X\} \subseteq [0, 1]^X$, entonces τ es claramente una topología fuzzy en X . Llamamos a ésta, la topología fuzzy trivial en X , y llamamos a (X, τ) el espacio topológico fuzzy trivial o simplemente fts trivial.
2. Sea $\tau = [0, 1]^X$, entonces τ es una topología fuzzy en X , llamada topología fuzzy discreta en X , y llamamos a (X, τ) el espacio topológico fuzzy discreto.
3. Si τ_u es una topología en X , entonces $\tau = \{1_G : G \in \tau_u\}$ es una topología fuzzy de X y por tanto, (X, τ) es un espacio topológico fuzzy.

4. Sea $\tau = \{r : r \in [0, 1]\} \subseteq [0, 1]^X$, entonces τ es una topología fuzzy en X .

Veamos un caso particular del ejemplo número 3:

- Sea $X = \mathbb{R}$ y τ_u la topología usual sobre $\mathbb{R}$ (topología generada por la base de intervalos abiertos), de este modo:

$$\tau_u = \{G \subseteq \mathbb{R} : G \text{ es abierto}\},$$

entonces

$$\tau = \{1_G : G \in \tau_u\}$$

es una topología fuzzy de $\mathbb{R}$.

Verifiquemos que se cumplen las condiciones para que τ sea una topología fuzzy de $\mathbb{R}$:

1. Como $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos, entonces $\mathbb{R}, \emptyset \in \tau_u$, luego se tiene que $1_X, 1_\emptyset \in \tau$.
2. Si $1_{G_1}, 1_{G_2} \in \tau$, entonces por definición, $G_1, G_2 \in \tau_u$, luego, como la intersección de dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ es un abierto de $\mathbb{R}$, se tiene que $G_1 \cap G_2 \in \tau_u$, por lo tanto, $1_{G_1 \cap G_2} = 1_{G_1} \wedge 1_{G_2} \in \tau$.
3. Si $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, entonces por definición, para todo $i \in I$ se tiene que $G_i \in \tau_u$, y como la unión de una familia de abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$, entonces $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau_u$, por lo tanto $1_{\bigcup_{i \in I} G_i} = \bigvee_{i \in I} 1_{G_i} \in \tau$. con lo cual se ha verificado la cerradura para supremos arbitrarios.

En conclusion, $\tau = \{1_G : G \in \tau_u\}$ es una topología fuzzy de $\mathbb{R}$.

2.2.1. Bases y funciones continuas

Los conceptos definidos en esta sección son válidos tanto para espacios topológicos fuzzy como para espacios laminados. Sin embargo, sólo nos referiremos a fts. Primero, veamos la definición de base y subbase.

Definición 2.2.3. Dado un espacio topológico fuzzy (X, τ) , un subconjunto B de τ se llama una **base** para τ si todo conjunto abierto de τ es supremo de elementos de B .

Ejemplo 2.2.2.

1. Para todo espacio topológico fuzzy (X, τ) la topología fuzzy τ es una base.
2. Si (X, τ) es un espacio topológico y β es una base de τ , entonces la familia $B = \{1_Y : Y \in \beta\}$ es una base fuzzy de la topología fuzzy $\tau = \{1_Y : Y \in \tau\}$.

Definición 2.2.4. Dado un espacio topológico fuzzy (X, τ) , un subconjunto B de τ se llama una **subbase** para τ si la colección de ínfimos de subfamilias finitas de B forma una base para (X, τ) .

Para cualquier función $f : X \longrightarrow Y$ definimos también una función $f^\rightarrow : [0, 1]^X \longrightarrow [0, 1]^Y$ estableciendo, para todo $\alpha \in [0, 1]^X$ y para todo $y \in Y$,

$$f^\rightarrow(\alpha)(y) = \bigvee_{f(x)=y} \alpha(x), \quad (2.1)$$

La función $f^\rightarrow$ se llama *imagen directa* de los subconjuntos fuzzy de X . La función f también define naturalmente lo que sería la *preimagen* de los subconjuntos de Y :

$$\begin{aligned} f^\leftarrow : [0, 1]^Y &\longrightarrow [0, 1]^X \\ \alpha &\longrightarrow \alpha \circ f, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Definición 2.2.5. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) fts, una función $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es una aplicación fuzzy **continua** si la aplicación inversa mapea cada subconjunto abierto de (Y, τ_Y) como un abierto en (X, τ_X) , es decir, para todo $\alpha \in \tau_Y$, $f^\leftarrow(\alpha) \in \tau_X$.

Definición 2.2.6. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios topológicos fuzzy. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es llamada:

- **abierta**, si mapea cada subconjunto abierto en (X, τ_X) como uno abierto en (Y, τ_Y) , es decir, para todo $\alpha \in \tau_X$, $f^\rightarrow(\alpha) \in \tau_Y$.
- **cerrada**, si mapea cada subconjunto cerrado en (X, τ_X) como uno cerrado en (Y, τ_Y) , es decir, para todo $\omega \in \tau_X^*$, $f^\rightarrow(\omega) \in \tau_Y^*$.
- **homeomorfismo**, si es biyectivo y tanto f como f^{-1} son continuas.

Los espacios topológicos fuzzy, con funciones continuas, forman una categoría que denotamos por $\mathcal{Fuz}$. Además, la categoría de espacios topológicos fuzzy laminados y sus funciones continuas se denota por $\mathcal{LFuz}$. A continuación se presentan algunos funtores relevantes entre la categoría de los espacios topológicos clásicos, denotada por $\mathcal{Top}$ y los fuzzy, estos serán de gran importancia a la hora de describir las propiedades MV-topológicas del intervalo unidad fuzzy, el cual será se presenta más adelante.

2.2.2. Algunos funtores entre espacios topológicos clásicos y fuzzy

En [9], Lowen define los funtores $\iota : \mathcal{Fuz} \longrightarrow \mathcal{Top}$ y $\omega : \mathcal{Top} \longrightarrow \mathcal{LFuz}$ de la siguiente manera:

1. $\iota(X, \tau) = (X, \iota(\tau))$ donde $\iota(\tau)$ es la topología generada por la subbase

$$B = \{\mu^{-1}(r, 1] : \mu \in \tau, r \in [0, 1)\} = \{x \in X : \mu(x) > r\}_{\mu \in \tau, r \in [0, 1)}.$$

Además, para $\alpha \neq 1$ se tiene que:

$$\iota_\alpha(\tau) = \{\mu^{-1}(\alpha, 1] : \mu \in \tau\},$$

entonces $\iota_\alpha(\tau)$ es una topología en X y claramente

$$\iota(\tau) = \bigcup_{\alpha \in I \setminus \{1\}} \iota_\alpha(\tau).$$

2. $\omega(X, \tau) = (X, \omega(\tau))$ donde $\omega(\tau)$ es el conjunto de las funciones semicontinuas inferiormente ³ de (X, τ) en $[0, 1]$ equipado con la topología usual.

$$\omega(\tau) = \bigcup_{r \in [0, 1)} C(X, I_r) = \bigcup_{r \in [0, 1)} \{f : X \longrightarrow I_r \mid f \text{ es continua}\},$$

³Dado un espacio topológico (X, τ) , una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es semicontinua inferior si para todo $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq t\}$ es un conjunto abierto.

donde $I_r = (r, 1]$.

Un espacio topológico fuzzy (X, δ) cuya topología fuzzy es de la forma $\delta = \omega(\tau)$ para una topología τ en X es llamado *topológicamente generado* o *inducido*.

De manera natural se definen los funtores $e : \mathcal{Top} \longrightarrow \mathcal{Fuz}$ y $j : \mathcal{Fuz} \longrightarrow \mathcal{Top}$ de la siguiente manera,

3. $e(X, \tau) = (X, e(\tau))$, donde

$$e(\tau) = \{1_U : U \in \tau\}.$$

4. $j(X, \tau) = (X, j(\tau))$, donde

$$j(\tau) = \tau \cap 2^X.$$

Note que $j(\tau)$ es la topología más grande contenida en τ .

Definición 2.2.7. *Un espacio topológico fuzzy (X, τ) se dice que es **débilmente inducido** si para cada $t \in [0, 1)$ y para cada $\alpha \in \tau$, la función característica $\alpha_t \in \tau$, donde*

$$\alpha_t = \{x \in X : \alpha(x) > t\}.$$

A continuación, presentamos algunas propiedades de estos funtores (ver [10]).

Proposición 2.2.8.

1. Para todo (X, τ) en $\mathcal{Top}$, $\iota(\omega(\tau)) = \tau$.
2. ι es una sobreyección, ω es una inyección y para cada $\tau_1 \subseteq \tau_2$, $\iota(\tau_1) \subseteq \iota(\tau_2)$ y $\omega(\tau_1) \subseteq \omega(\tau_2)$.
3. τ es topológicamente generado si y sólo si $\omega(\iota(\tau)) = \tau$.
4. $\omega(\iota(\tau))$ es la topología fuzzy topológicamente generada más pequeña que contiene τ .

2.2.3. Fuzzy compacidad y conexidad

En [2], Chang introduce el concepto de compacidad para espacios topológicos fuzzy, la cual formalmente es la misma definición que para espacios topológicos clásicos. A pesar de que esta definición ha sido utilizada en varios artículos, con esta definición no se tiene el hecho de que si (X, τ) es un compacto, entonces $(X, \omega(\tau))$ también lo es. De acuerdo a lo anterior, en [9] y [10], Lowen introduce no sólo los funtores ι y ω , sino que también introduce algunos conceptos de compacidad fuzzy como una generalización de la compacidad en topología clásica. Dos años después, en 1978, Gantner y Steinlage publican el artículo [5] en donde dan una nueva definición de espacio topológico fuzzy compacto. En el mismo año, Lowen publica el artículo [11] en donde realiza una comparación entre las diferentes definiciones de compacidad establecidas hasta el momento y muestra cuáles de ellas son buenas extensiones, además de mostrar cuáles de estas definiciones satisfacen el teorema de Tychonoff. A continuación presentamos algunas de estas definiciones junto con algunos resultados que pueden ser encontrados en [11].

Definición 2.2.9. (I) (X, τ) es **cuasi-fuzzy compacto** si y solo si para cada familia $\Gamma \subseteq \tau$ tal que $\bigvee_{\mu \in \Gamma} \mu = 1$, existe una subfamilia finita $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subseteq \Gamma$ tal que $\bigvee_{i=1}^n \mu_i = 1$. [2]

Definición 2.2.10. (II) Sea $0 \leq \alpha < 1$. (X, τ) es **α -compacto** si y solo si cada familia α -shading⁴ en τ tiene una subfamilia finita α -shading. [5]

Definición 2.2.11. (III) Sea $0 \leq \alpha \leq 1$. (X, τ) es **α^* -compacto** si y solo si cada familia α^* -shading en τ tiene una subfamilia finita α^* -shading. [5]

De la definición de α -shading se tiene la siguiente observación.

Observación 2.2.12. Notemos que una familia de conjuntos fuzzy Γ es α -shading (resp. α^* -shading) si y sólo si

$$\bigcup_{\mu \in \Gamma} \mu^{-1}(\alpha, 1] = X \quad \left(\text{resp. } \bigcup_{\mu \in \Gamma} \mu^{-1}[\alpha, 1] = X. \right)$$

Definición 2.2.13. (IV) (X, τ) es **fuertemente compacto** si y solo si es α -compacto para cada $\alpha \in I \setminus \{1\}$. [11]

Definición 2.2.14. (V) (X, τ) es **ultracompacto** si y solo si $(X, \iota(\tau))$ es compacto. [11]

Definición 2.2.15. (VI) (X, τ) es **fuzzy compacto** si para cada familia $\Gamma \subseteq \tau$ y para cada $\alpha \in I$ tal que $\bigvee_{\mu \in \Gamma} \mu \geq \alpha$ y para cada $\epsilon > 0$ existe una familia finita $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\bigvee_{\mu \in \Gamma_0} \mu \geq \alpha - \epsilon$. [10]

Los siguientes dos teoremas de topología clásica serán relevantes en las sucesivas demostraciones:

Teorema 2.2.16. Si $\tau' \subseteq \tau$ y (X, τ) es compacto entonces (X, τ') es compacto.

Demostración. Sea $\Gamma = \{\alpha_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X por τ' , es decir, para todo $i \in I$ $\alpha_i \in \tau'$. De este modo, $\alpha_i \in \tau$ y como (X, τ) es compacto, existe un subcubrimiento finito $\{\alpha_j\}_{j \in J} \subseteq \Gamma$ tal que

$$\bigcup_{j \in J} \alpha_j \supseteq X,$$

en consecuencia (X, τ') es compacto. □

Teorema 2.2.17. Si $\tau' \subseteq \tau$ y (X, τ) es conexo entonces (X, τ') es conexo.

Demostración. Supongamos que (X, τ') no es conexo, es decir, existen abiertos $\alpha, \beta \in \tau' \subseteq \tau$ tal que $\alpha \cap \beta = \emptyset$ y $\alpha \cup \beta = X$. Luego (X, τ) no es conexo, lo cual contradice la hipótesis y en consecuencia, (X, τ') es conexo. □

Proposición 2.2.18. (X, τ) es α -compacto (resp. α^* -compacto) si y sólo si $(X, \iota_\alpha(\tau))$ (resp. $(X, \iota_{\alpha^*}(\tau))$) es compacto.

⁴Una familia de subconjuntos fuzzy $\beta \subseteq [0, 1]^X$ es llamada α -shading (resp. α^* -shading) si y sólo si para todo $x \in X$ existe $\mu \in \beta$ tal que $\mu(x) > \alpha$ (resp. $\mu(x) \geq \alpha$).

Demostración. Si (X, τ) es α -compacto, entonces cada familia α -shading en τ tiene una subfamilia finita α -shading. De este modo, sea $\beta \subseteq [0, 1]^X$ una familia α -shading de τ , así por la observación 2.2.12 se tiene que

$$\bigcup_{\mu \in \beta} \mu^{-1}(\alpha, 1] = X,$$

es decir, $\mu^{-1}(\alpha, 1]$ es un cubrimiento de X . Ahora, consideremos la subfamilia α -shading $\beta_0 \subseteq \beta$, por tanto,

$$\bigcup_{\mu \in \beta_0} \mu^{-1}(\alpha, 1] = X.$$

Así, para todo cubrimiento abierto de X , existe un subcubrimiento finito del mismo. Como $\iota_\alpha(\tau)$ es la topología generada por la subbase $\{\mu^{-1}(\alpha, 1] : \mu \in \tau, \alpha \in [0, 1]\}$ entonces se concluye que $(X, \iota_\alpha(\tau))$ es compacto. Ahora, si $(X, \iota_\alpha(\tau))$ es compacto, entonces sea $\{\mu^{-1}(\alpha, X)\}_{\mu \in \beta}$ ($\alpha \neq 1$) un cubrimiento abierto de X y sea $\{\mu^{-1}(\alpha, X)\}_{\mu \in \beta_0}$ un subcubrimiento finito del mismo, de este modo, para todo $x \in X$ existe $\mu \in \beta_0 \subseteq \beta$ tal que $\mu(x) > \alpha$ y, en consecuencia (X, τ) es α -compacto. La demostración del caso α^* -compacto es análoga. $\square$

Proposición 2.2.19. *El siguiente esquema siempre se cumple.*

$$\begin{array}{ccccc} (V) & \longrightarrow & (IV) & \longrightarrow & (II) \\ & & \downarrow & & \\ & & (VI) & & \end{array}$$

Demostración. Si (X, τ) es ultracompacto entonces $(X, \iota(\tau))$ es compacto y como para todo $\alpha \in I \setminus \{1\}$, $\iota_\alpha(\tau) \subset \iota(\tau)$, entonces $(X, \iota_\alpha(\tau))$ es compacto para todo $\alpha \in I \setminus \{1\}$, luego, por la proposición 2.2.18 se tiene que (X, τ) es α -compacto para todo $\alpha \in I \setminus \{1\}$ y en consecuencia es fuertemente compacto.

Si (X, τ) es fuertemente compacto, entonces por definición es α -compacto para cualquier $\alpha \in I \setminus \{1\}$. Además, sea $\alpha_0 > 0$ y $\beta \subseteq \tau$ tal que $\bigvee_{\mu \in \beta} \mu(x) \geq \alpha_0$ y tome $\alpha_0 > \epsilon > 0$. Ahora, por la densidad de I podemos tomar $\alpha \in I$ tal que $\alpha_0 > \alpha \geq \alpha_0 - \epsilon$. De este modo, para todo $x \in X$ se tiene que $\bigvee_{\mu \in \beta} \mu(x) \geq \alpha_0 > \alpha$, de modo que β es un α -shading. Ahora, como (X, τ) es fuertemente compacto, entonces existe una subfamilia finita α -shading $\beta_0 \subseteq \beta$ y entonces $\bigvee_{\mu \in \beta_0} \mu(x) > \alpha \geq \alpha_0 - \epsilon$, esto prueba que (X, τ) es fuzzy compacto. $\square$

Diremos que una propiedad topológica fuzzy P' es una buena extensión de una propiedad topológica P si para cada topología τ en X : (X, τ) tiene la propiedad P si y sólo si $(X, \omega(\tau))$ tiene la propiedad P' .

Teorema 2.2.20. *Las definiciones (II), (IV), (V) y (VI) son buenas extensiones de compacidad.*

Demostración. Que (II) sea una buena extensión se debe al hecho de que si (X, τ) es un espacio topológico, entonces para todo $\alpha \in I \setminus \{1\}$ se tiene que $\iota_\alpha(\omega(\tau)) \subseteq \tau$: en efecto, sabemos que $\iota(\omega(\tau)) = \tau$ (ver proposición 2.2.8) y ya que $\iota(\omega(\tau)) = \bigcup_{\alpha \in I} \iota_\alpha(\omega(\tau))$ entonces se tiene que $\iota_\alpha(\omega(\tau)) \subseteq \iota(\omega(\tau)) = \tau$. De este modo, si (X, τ) es un espacio topológico compacto, entonces por la proposición 2.2.16 se tiene que $(X, \iota_\alpha(\omega(\tau)))$ es

compacto para todo $\alpha \in I \setminus \{1\}$, luego, por la proposición 2.2.18 $(X, \omega(\tau))$ es α -compacto, esto muestra que (II) es una buena extensión de compacidad. Por la definición 2.2.13, para (IV) es una consecuencia inmediata del hecho que (II) sea una buena extensión. Para (V) se sigue de que si (X, τ) es compacto, entonces $(x, \iota(\omega(\tau)))$ también lo es (ya que $\iota(\omega(\tau)) = \tau$), luego, por la definición 2.2.14 se tiene que $(X, \omega(\tau))$ es ultracompacto. Para (VI) se sigue de que si (X, τ) es compacto, entonces $(X, \omega(\tau))$ es fuertemente compacto, luego, por la proposición 2.2.19 se concluye que $(X, \omega(\tau))$ es también fuzzy compacto. $\square$

El siguiente contraejemplo muestra que (I) no es una buena extensión de compacidad, este contraejemplo se puede encontrar en [10].

Contraejemplo 2.2.1. Sea (X, τ) el intervalo unitario I con la topología usual. Entonces para todo $x \in I$, $x \neq 0, x \neq 1$ y sea α_x el conjunto fuzzy definido por:

$$\begin{aligned} \alpha_x(x) &= 1, \\ \alpha_x(y) &= 0, \quad \forall y \in \left[0, \frac{x}{2}\right] \cup \left[\frac{1+x}{2}, 1\right], \\ \alpha_x &\text{ es lineal en } \left[\frac{x}{2}, x\right] \text{ y en } \left[x, \frac{1+x}{2}\right]. \end{aligned}$$

Para

$$\begin{aligned} x = 0, \quad \alpha_0(y) &= -y + 1 \quad \forall y \in I, \\ x = 1, \quad \alpha_1(y) &= y \quad \forall y \in I. \end{aligned}$$

De este modo, $\forall x \in I, \alpha_x \in \omega(\tau)$, y $\bigvee_{x \in I} \alpha_x = 1$, pero no tiene una subfamilia finita con esta propiedad.

De acuerdo a los resultados presentados anteriormente, la ultracompacidad no sólo es una buena extensión de compacidad, sino que también implica otras buenas extensiones, en este sentido, un espacio topológico fuzzy que sea ultracompacto es también fuertemente compacto, α -compacto y fuzzy compacto. De este modo, entre las que son buenas extensiones de compacidad, la ultracompacidad es la más fuerte.

Tomando como referencia la definición de ultracompacto, se tiene la siguiente definición:

Definición 2.2.21. Un espacio topológico fuzzy (X, τ) es llamado **ultraconexo** si $(X, \iota(\tau))$ es conexo.

Proposición 2.2.22. Ultraconexidad es una buena extensión de conexidad.

Demostración. Si (X, τ) es un espacio topológico conexo, entonces $(x, \iota(\omega(\tau)))$ también lo es (ya que $\iota(\omega(\tau)) = \tau$), luego, por la definición 2.2.21 se tiene que $(X, \omega(\tau))$ es ultraconexo. $\square$

En este trabajo estamos interesados en demostrar que el intervalo fuzzy es ultracompacto y ultraconexo, ya que estas son buenas extensiones de los conceptos de compacidad y conexidad, respectivamente. Sin embargo, presentamos la definición de α -conexo, la cual se puede encontrar en [13].

Definición 2.2.23. Un espacio topológico fuzzy (X, τ) es llamado α -**conexo** (resp. α^* -conexo) si no existen abiertos $u, v \in \tau \setminus \{0, 1\}$ tales que $u \wedge v = 0$ y $u \vee v > \alpha^*$ (resp. $\geq \alpha^*$) para $\alpha \in I$.

Proposición 2.2.24. Cada espacio topológico fuzzy ultraconexo es 1-conexo.

Demostración. Sea (X, τ) un espacio topológico fuzzy ultraconexo, como $\iota_0(\tau) \subseteq \iota(\tau)$ entonces $(X, \iota_0(\tau))$ es conexo (ver proposición 2.2.17). Supongamos que (X, τ) no es 1-conexo, esto es, existen abiertos $u, v \in \tau \setminus \{0, 1\}$ tales que $u \wedge v = 0$ y $u \vee v > 0$. Ahora, sea $U = u^{-1}(0, 1]$ y $V = v^{-1}(0, 1]$, esto es

$$\begin{aligned} U &= \{x \in X : u(x) > 0\}, \\ V &= \{x \in X : v(x) > 0\}, \end{aligned}$$

claramente $U, V \neq \emptyset$ y $U \cup V = X$. Además, como $u \wedge v = 0$ entonces $U \cap V = \emptyset$, en consecuencia $(X, \iota_0(\tau))$ no es conexo. $\square$

2.3. Espacios MV-topológicos

Los espacios MV-topológicos son tipos particulares de espacios topológicos fuzzy, los cuales aprovechan además las operaciones de las MV-álgebras, estudiadas en el capítulo 1. El concepto de MV-topología fue introducido por Ciro Russo en [15], con el fin de demostrar una extensión de la dualidad que hay entre las álgebras booleanas y los espacios de Stone, la cual se conoce como *dualidad de Stone*. En esta sección denotaremos a la categoría de los espacios MV-topológicos por ${}^{MV}\mathcal{Top}$.

Las definiciones y resultados presentados a continuación se pueden encontrar en [4] y [15].

Definición 2.3.1. Sea X un conjunto, A la MV-álgebra $[0, 1]^X$ y $\tau \subseteq A$. Decimos que τ es una **MV-topología** en X , si para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \tau$ se satisface lo siguiente:

1. $0, 1 \in \tau$,
2. $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \tau$,
3. $\alpha_1 \odot \alpha_2 \in \tau$,
4. $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \in \tau$,
5. para cualquier familia $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ de elementos de τ , $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in \tau$.

El par (X, τ) es llamado *espacio MV-topológico* y los elementos de τ son los *MV-subconjuntos abiertos* de X , mientras que $\tau^* = \{\alpha^* : \alpha \in \tau\}$ es el conjunto de *MV-subconjuntos cerrados* de X . Diremos que un espacio MV-topológico (X, τ) es *laminado* si todas las funciones constantes en X son elementos de τ , dichos espacios forman una subcategoría de ${}^{MV}\mathcal{Top}$, que será denotada por ${}^{LMV}\mathcal{Top}$.

Proposición 2.3.2. Sea (X, τ) un espacio MV-topológico. Para cualquier $Y \subseteq X$, el par (Y, τ_Y) es un espacio MV-topológico, en donde

$$\tau_Y = \{\alpha|_Y : \alpha \in \tau\}.$$

Demostración. Si (X, τ) es un espacio MV-topológico, entonces $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in \tau$, como $\tau_Y = \{\alpha|_Y : \alpha \in \tau\}$ entonces $\mathbf{0}|_Y, \mathbf{1}|_Y \in \tau_Y$. Ahora, si $\alpha|_Y, \beta|_Y \in \tau_Y$ entonces $\alpha, \beta \in \tau$ y por tanto $\alpha \wedge \beta \in \tau$, así, $(\alpha \wedge \beta)|_Y \in \tau_Y$. Finalmente, si $\{\alpha_{i|_Y}\}_{i \in I} \subset \tau_Y$ entonces $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset \tau$, luego $\bigvee_{i \in I} \alpha_i \in \tau$ y por tanto $\bigvee_{i \in I} \alpha_{i|_Y} \in \tau_Y$. En consecuencia (Y, τ_Y) es un espacio MV-topológico. $\square$

Para cualquier subconjunto Y de X , el par (Y, τ_Y) es llamado **MV-subespacio** de (X, τ) .

Ejemplo 2.3.1.

1. $(X, \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\})$ y $(X, [0, 1]^X)$ son espacios MV-topológicos.
2. Sea $\tau = \{r : r \in [0, 1]\} \subseteq [0, 1]^X$, entonces τ es una MV-topología en X .
3. Si A es una subálgebra de $[0, 1]$, entonces A^X es una MV-topología. En particular:
 - a) $\{0, 1\}^X$ es una MV-topología, y si τ es una topología clásica sobre X , luego de la identificación de $\wp(X)$ con $\{0, 1\}^X$ (ver observación 1.1.3) tenemos que τ es también una MV-topología.
 - b) L_n^X es una MV-topología, donde L_n es el conjunto presentado en el ejemplo 1.1.1.

2.3.1. Bases, subbases y funciones continuas

Definición 2.3.3. Dado un espacio MV-topológico (X, τ) , un subconjunto B de $[0, 1]^X$ se denomina **base** de τ si $B \subseteq \tau$ y todo conjunto abierto de τ es unión de elementos de B .

Definición 2.3.4. Dado un espacio MV-topológico (X, τ) , un subconjunto S de $[0, 1]^X$ se denomina **subbase** de τ si para todo $\alpha \in \tau$, existe una familia $\{t_i\}_{i \in I}$ de términos en el lenguaje $\{\oplus, \odot, \wedge\}$, tal que

$$\alpha = \bigvee_{i \in I} t_i(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in_i}), \quad (2.3)$$

para todo $i \in I$, $n_i < \omega$ y $\{\beta_{ij}\}_{j=1}^{n_i} \subseteq S$.

Observación 2.3.5. Si S es una subbase para una MV-topología, el conjunto B_S definido por las siguientes condiciones es obviamente una base para la misma MV-topología:

1. $S \subseteq B_S$,
2. si $\alpha, \beta \in B_S$ entonces $\alpha \bullet \beta \in B_S$, para $\bullet \in \{\oplus, \odot, \wedge\}$.

Sean X y Y conjuntos. En 2.2.1 definimos $f^\leftarrow$ para una función $f : X \rightarrow Y$ como sigue:

$$\begin{aligned} f^\leftarrow : [0, 1]^Y &\rightarrow [0, 1]^X \\ \alpha &\rightarrow f^\leftarrow(\alpha) = \alpha \circ f, \end{aligned}$$

si vemos los conjuntos $[0, 1]^X$ y $[0, 1]^Y$ como MV-álgebras, tenemos que $f^\leftarrow(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Además, si $\alpha, \beta \in [0, 1]^Y$, tenemos

$$f^\leftarrow(\alpha \oplus \beta)(x) = (\alpha \oplus \beta)(f(x)) = \alpha(f(x)) \oplus \beta(f(x)) = f^\leftarrow(\alpha)(x) \oplus f^\leftarrow(\beta)(x),$$

análogamente, $f^\leftarrow(\alpha^*) = f^\leftarrow(\alpha)^*$. De este modo, $f^\leftarrow$ es un homomorfismo de MV-álgebras (ver definición 1.3.1) y lo llamaremos **MV-preimagen** de f .

Observación 2.3.6. Las definiciones de aplicación MV-continua, MV-abierta, MV-cerrada y MV-homeomorfismo son las mismas que se presentaron en la sección 2.2.1 para espacios topológicos fuzzy.

Lema 2.3.7. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios MV-topológicos y sea B una base para τ_Y . Se dice que una función $f : X \rightarrow Y$ es continua si y solo si $f^\leftarrow[B] \subseteq \tau_X$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Trivial, ya que B es una familia de conjuntos abiertos.

$(\Leftarrow)$ Asumamos que $f^\leftarrow[B] \subseteq \tau_X$. Sea $\alpha = \bigvee \Gamma$ cualquier conjunto de elementos de τ_Y donde $\Gamma \subseteq B$. Como vimos anteriormente, $f^\leftarrow$ es un homomorfismo de MV-álgebras, por lo tanto $f^\leftarrow(\alpha) = f^\leftarrow(\bigvee \Gamma) = \bigvee f^\leftarrow[\Gamma]$, es decir, $f^\leftarrow(\alpha)$ es el supremo de conjuntos abiertos de τ_X y por tanto es abierto. En consecuencia, f es continua. $\square$

Lema 2.3.8. Sean (X, τ_X) y (Y, τ_Y) dos espacios MV-topológicos y sea B_s una subbase para τ_Y . Se dice que una función es continua si y solo si $f^\leftarrow[B_s] \subseteq \tau_X$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Al ser B_s una familia de conjuntos abiertos esta implicación es trivial.

$(\Leftarrow)$ Asumamos que $f^\leftarrow[B_s] \subseteq \tau_X$. Sea α un conjunto abierto de τ_Y tal que

$$\alpha = \bigvee_{i \in I} t_i(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in})$$

donde $n < \omega$ y $\{\beta_{ij}\}_{j=1}^n \subseteq B_s$. Como $f^\leftarrow$ es un homomorfismo de MV-álgebras, tenemos

$$\begin{aligned} f^\leftarrow(\alpha) &= f^\leftarrow\left(\bigvee_{i \in I} t_i(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in})\right) = \bigvee_{i \in I} f^\leftarrow(t_i(\beta_{i1}, \dots, \beta_{in})) \\ &= \bigvee_{i \in I} (t_i(f^\leftarrow(\beta_{i1}), \dots, f^\leftarrow(\beta_{in}))) \end{aligned}$$

como $f^\leftarrow(\beta_{ij}) \in \tau_X$ para todo $i \in I$, $i \in \{1, \dots, n\}$ $n < \omega$ entonces

$$t_i(f^\leftarrow(\beta_{i1}), \dots, f^\leftarrow(\beta_{in})) \in \tau,$$

y en consecuencia $f^\leftarrow(\alpha) \in \tau$. $\square$

A continuación veremos un resultado sobre el funtor ω definido en la sección 2.2.2 cuando es restringido a ${}^{MV}\mathcal{Top}$ tanto en el dominio como en el codominio.

Proposición 2.3.9. Si (X, τ) es un espacio topológico entonces $\omega(\tau)$ es una MV-topología, por lo que el codominio del funtor ω es en realidad la categoría ${}^{LMV}\mathcal{Top}$.

Demostración. Recordemos que $\omega(\tau)$ es la topología fuzzy dada por,

$$\omega(\tau) = \bigcup_{r \in [0,1)} C(X, I_r) = \bigcup_{r \in [0,1)} \{f : X \rightarrow I_r \mid f \text{ es continua}\},$$

donde $I_r = (r, 1]$. Veamos que $\omega(\tau)$ es cerrado para las operaciones $\oplus$ y $\odot$ definidas puntualmente. Sean $f : X \rightarrow I_r$ y $g : X \rightarrow I_s$ elementos de $\omega(\tau)$, entonces $f \oplus g : X \rightarrow I_{\min(r,s)}$ está dada por:

$$(f \oplus g)(x) = f(x) \oplus g(x) = \min(1, f(x) + g(x)),$$

la cual es una aplicación continua. Análogamente $f \odot g : X \rightarrow [0, 1]$ está dada por:

$$(f \odot g)(x) = f(x) \odot g(x) = \max(0, f(x) + g(x) - 1),$$

la cual es continua. $\square$

2.3.2. Compacidad

Un *cubrimiento* de X es cualquier subconjunto Γ de $[0, 1]^X$ tal que $\bigvee \Gamma = 1$, mientras que un *cubrimiento aditivo* ($\oplus$ -cubrimiento) es una familia finita $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ de elementos de $[0, 1]^X$, $n < \omega$, tales que

$$\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n = 1.$$

Es importante mencionar que dicha familia puede tener repeticiones, en otras palabras, un cubrimiento aditivo es un subconjunto finito $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de $[0, 1]^X$, junto con números $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_1 \alpha_1 \oplus \cdots \oplus n_k \alpha_k = 1.$$

Proposición 2.3.10. *Para cualquier conjunto X , un cubrimiento de subconjuntos fuzzy de X que sea cerrado bajo $\oplus, \odot$ y $\wedge$ es una base para una MV-topología en X .*

Demostración. Sea $\Gamma \subseteq [0, 1]^X$ un cubrimiento cerrado bajo $\oplus, \odot$ y $\wedge$. Sea

$$\tau = \left\{ \bigvee G \mid G \subseteq \Gamma \right\},$$

por la definición de cubrimiento se tiene que $\mathbf{1} \in \tau$ y como $\emptyset \subseteq \Gamma$ entonces $\mathbf{0} = \bigvee \emptyset \in \tau$. Por otro lado, τ es cerrado para combinaciones arbitrarias y $\oplus, \odot$, y $\wedge$ distribuyen cualquier combinación. Entonces, dado $\alpha_1, \alpha_2 \in \tau$ tal que $\alpha_1 = \bigvee_{i \in I} \alpha_i$ y $\alpha_2 = \bigvee_{j \in J} \beta_j$ con $\{\alpha_i\}_{i \in I}, \{\beta_j\}_{j \in J} \subseteq \Gamma$, se tiene que:

$$\alpha_1 \bullet \alpha_2 = \left(\bigvee_{i \in I} \alpha_i \right) \bullet \left(\bigvee_{j \in J} \beta_j \right) = \bigvee_{i \in I} \left(\alpha_i \bullet \bigvee_{j \in J} \beta_j \right) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J} (\alpha_i \bullet \beta_j),$$

para $\bullet \in \{\oplus, \odot, \wedge\}$. En consecuencia, τ es una MV-topología en X y Γ es una base para ella. $\square$

Definición 2.3.11. *Un MV-espacio (X, τ) es llamado **compacto** si cualquier cubrimiento abierto de X contiene un subcubrimiento aditivo. Además, se llama **cuasi-compacto** si algún cubrimiento abierto contiene un subcubrimiento finito.*

Es claro que cuasi-compacidad implica compacidad, debido a que si $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es un subcubrimiento finito, entonces $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n = 1$, luego por la proposición 1.2.5 $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n \leq \alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n$, así que $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \cdots \oplus \alpha_n = 1$, en consecuencia $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ es un subcubrimiento aditivo. Sin embargo, compacidad no implica cuasi-compacidad, como se muestra en el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 2.3.1. *Sea X un conjunto no vacío y τ el conjunto de todos los subconjuntos fuzzy constantes de X , que es claramente una MV-topología. Para cada $r \in [0, 1)$ sea $\mathbf{r}$ el conjunto fuzzy constantemente igual a r . Entonces, para cualquier familia $\{r_i\}_{i \in I} \subseteq [0, 1)$ tal que $\bigvee_{i \in I} r_i = 1$, el conjunto $\{\mathbf{r}_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X y todos los cubrimientos que no contengan la función constante $\mathbf{1}$ son de esta forma. Notemos que todos estos cubrimientos contienen subcubrimientos aditivos, pero no subcubrimientos finitos.*

El contraejemplo presentado en 2.2.1 también permite ver que la compacidad no implica cuasi-compacidad. Pues habíamos visto que a pesar de que $\bigvee_{x \in I} \alpha_x = 1$, no había un subcubrimiento finito con esta propiedad. Sin embargo, sí se tiene un subcubrimiento

aditivo, pues basta con considerar los subconjuntos fuzzy $\alpha_0(y), \alpha_1(y) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definidos en 2.2.1 por:

$$\begin{aligned}\alpha_0(y) &= -y + 1 & \forall y \in I, \\ \alpha_1(y) &= y & \forall y \in I.\end{aligned}$$

Así, $\alpha_0(y) \oplus \alpha_1(y) = (\alpha_0 \oplus \alpha_1)(y) = \min(y + (-y + 1), 1) = 1$. Notemos que si Γ es un cubrimiento abierto, entonces $\alpha_0(y), \alpha_1(y) \in \Gamma$. La figura 2.9 muestra que a pesar de que $\alpha_0(y) \oplus \alpha_1(y) = 1$, $\alpha_0(y) \vee \alpha_1(y) < 1$.

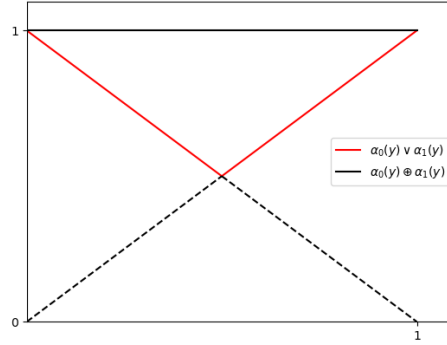


Figura 2.9: Gráficas de $\alpha_0(y) \oplus \alpha_1(y)$ y $\alpha_0(y) \vee \alpha_1(y)$

Teorema 2.3.12. *Todo espacio MV-topológico (X, τ) es compacto si, y sólo si, es ultracompacto en el sentido de Lowen [11], es decir, si el espacio topológico $(X, \iota(\tau))$ es compacto.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que $(X, \iota(\tau))$ es un espacio topológico compacto y que $\{\alpha_i : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto de (X, τ) . Recordemos que $\beta_t = \{x \in X : \beta(x) > t\}$ para cada $\beta \in \tau$ y $t \in [0, 1]$. Ya que la familia $\{(\alpha_i)_{\frac{1}{2}} : i \in I\}$ es un cubrimiento abierto del espacio topológico $(X, \iota(\tau))$, entonces existe una subfamilia finita $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$ que cubre a X . Esto significa que $\{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_m}\}$ es un subcubrimiento aditivo de (X, τ) . En consecuencia, (X, τ) es compacto. $\square$

El estudio de la propiedad topológica de ser Hausdorff no es abordada en este trabajo. Sin embargo, para el lector interesado, presentamos la definición de ser Hausdorff para espacios MV-topológicos:

Definición 2.3.13. *Sea (X, τ) un espacio MV-topológico. X se llama **espacio Hausdorff** (o separado) si, para todo $x \neq y \in X$, existen $\alpha_x, \alpha_y \in \tau$ tales que*

1. $\alpha_x(x) = \alpha_y(y) = 1$,
2. $\alpha_x \wedge \alpha_y = 1_\emptyset$.

Capítulo 3

Espacio de Helly

Con el fin de estudiar el intervalo unidad fuzzy, se presenta a continuación un espacio de gran importancia en el desarrollo de este trabajo, conocido como el espacio de Helly, el cual denotaremos por H . Este espacio surge como un contraejemplo en topología de un espacio compacto no metrizable. En este capítulo presentamos algunas propiedades topológicas que tiene el espacio de Helly tomando como referencia [17], aprovecharemos estas propiedades y el homeomorfismo que hay entre este espacio y el espacio $F_I(\mathbb{R})$ que será presentado en el capítulo 4, para poder establecer algunas propiedades MV-topológicas del intervalo fuzzy; pues veremos que el intervalo fuzzy se obtiene como un conjunto cociente de $F_I(\mathbb{R})$.

3.1. Un subespacio de I^I

Sea $I = [0, 1]$ el intervalo real unitario con la topología usual. Así, el espacio I^I es exactamente el espacio de funciones $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, tal que para todo $0 \leq x \leq 1$ tenemos $0 \leq f(x) \leq 1$.

Notése que podemos formar este espacio tomando el producto cartesiano incontable de intervalos cerrados:

$$I^I = \prod_{i \in I} I_i.$$

De este modo, el espacio I^I está dotado de la topología producto, que es aquella que tiene como una subbase a los conjuntos de la forma $\pi_x^{-1}(U_x)$ donde cada U_x es un abierto de I_x , y π_x es la proyección sobre el factor correspondiente,

$$\pi_x : \prod_{x \in I} I_x \longrightarrow I_x. \quad (3.1)$$

Como resultados de topología clásica, sabemos que el intervalo real unitario $I = [0, 1]$ con la topología inducida por la distancia usual es un espacio compacto, Hausdorff y conexo. El teorema de Tychonoff establece que producto de espacios compactos es un espacio compacto, esto también sucede para productos de espacios Hausdorff y espacios conexos. De este modo, I^I con la topología inducida por la topología producto es también compacto, Hausdorff y conexo.

El *espacio de Helly* es el subespacio $H \subset I^I$ formado por todas las funciones no decrecientes (si $x \leq y$, entonces $f(x) \leq f(y)$). De este modo, denotaremos por $\mathcal{H}$ a la topología en H inducida por la topología producto.

Las siguientes gráficas corresponden a algunos ejemplos de estas funciones.

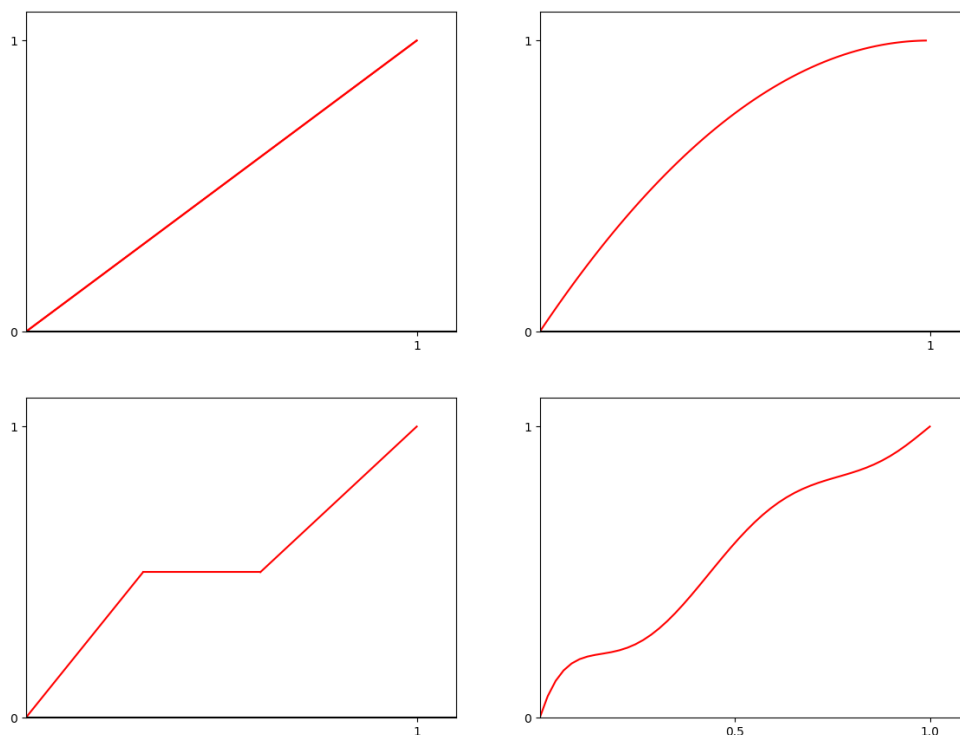


Figura 3.1: Algunas funciones de H

Notemos que las gráficas presentadas en la figura 3.1 son todas continuas, sin embargo, hay funciones discontinuas que también pertenecen a este espacio, como se muestra a continuación.

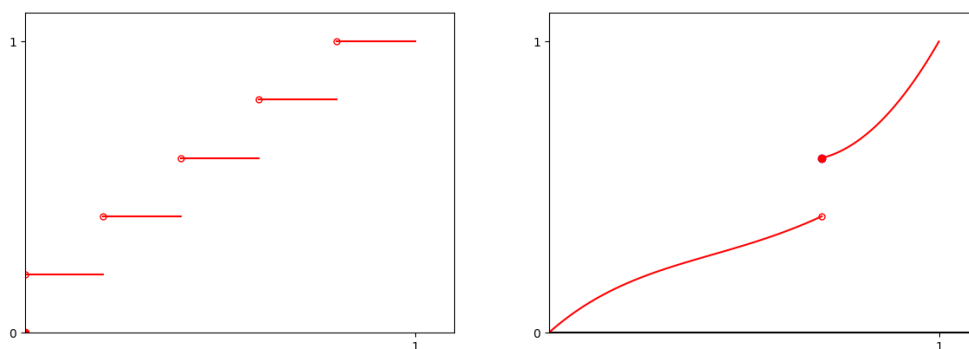


Figura 3.2: Algunas funciones discontinuas de H

Es importante notar que estas gráficas presentan una discontinuidad de salto¹, ya que es el único tipo de discontinuidad que pueden presentar las funciones pertenecientes a H . En

¹Una discontinuidad de salto es cuando el límite bilateral no existe porque los límites unilaterales no son iguales.

caso de haber una discontinuidad puntual² en al menos un punto del dominio, la función ya no sería no decreciente; veamos un caso particular.

Consideremos una función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cuya gráfica esté determinada por la figura 3.3, notemos que para $x < t$ no siempre se cumple que $f(x) \leq f(t)$, pues existen valores de x en el intervalo $[0, t]$ tales que $f(x) > f(t)$, en consecuencia $f \notin H$.

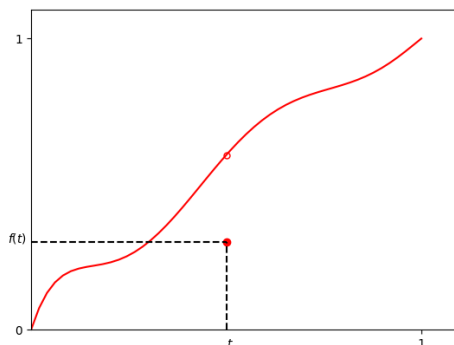


Figura 3.3: Una función que no pertenece a H

3.2. Propiedades topológicas

En esta sección presentaremos algunas propiedades topológicas del espacio de Helly, las cuales serán de gran utilidad en el capítulo 5.

Teorema 3.2.1. *El espacio topológico $(H, \mathcal{H})$ es compacto.*

Demostración. Veamos primero que H es cerrado. Si $f \in I^I - H$, entonces f no es no decreciente. De este modo, existen puntos $x, y \in I$ tales que $x < y$ pero $f(x) > f(y)$. Si $\epsilon < \frac{1}{2}[f(x) - f(y)]$, y si $U_x = B_\epsilon(f(x))$ y $U_y = B_\epsilon(f(y))$ entonces, teniendo en cuenta que π_x es la proyección sobre el factor correspondiente (3.1) se tiene lo siguiente

$$f \in \pi_x^{-1}(U_x) \iff \pi_x(f) \in B_\epsilon(f(x)) \iff f(x) \in B_\epsilon(f(x)),$$

del mismo modo

$$f \in \pi_x^{-1}(U_y) \iff \pi_x(f) \in B_\epsilon(f(y)) \iff f(y) \in B_\epsilon(f(y)).$$

Por lo tanto,

$$f \in \pi_x^{-1}(U_x) \cap \pi_x^{-1}(U_y) \iff f(x) \in B_\epsilon(f(x)) \text{ y } f(y) \in B_\epsilon(f(y)),$$

ahora, como $x < y$ implica que $f(x) > f(y)$, entonces $f \notin H$ y en consecuencia

$$(\pi_x^{-1}(U_x) \cap \pi_x^{-1}(U_y)) \cap H = \emptyset,$$

es decir, $\pi_x^{-1}(U_x) \cap \pi_x^{-1}(U_y)$ es una vecindad de f disjunta de H . Luego, $I^I - H$ es abierto. Por lo tanto, H es un subespacio cerrado del espacio compacto I^I y en consecuencia, H es compacto. $\square$

²Una discontinuidad puntual o removible en un punto es cuando el límite bilateral existe pero no es igual al valor de la función.

Teorema 3.2.2. *El espacio topológico $(H, \mathcal{H})$ es conexo.*

Demostración. Ver [14] Capítulo 11, pag 297. □

Teorema 3.2.3. *El espacio topológico $(H, \mathcal{H})$ es de Hausdorff.*

Demostración. Ser de Hausdorff es una propiedad topológica hereditaria³, luego, H es de Hausdorff. □

³Una propiedad topológica $\mathcal{P}$ es hereditaria si, cuando un espacio topológico X cumple $\mathcal{P}$, entonces todos sus subespacios cumplen $\mathcal{P}$.

Capítulo 4

Intervalo fuzy

En 1975, [6], Hutton define el concepto de intervalo unidad L -fuzzy, siendo L un retículo completo distributivo. Hutton usa este concepto para dar una versión fuzzy del Lema de Urysohn, el cual será presentado en la sección 4.4. En este capítulo realizaremos un estudio detallado de este intervalo, tomando $L = I := [0, 1]$ y veremos que es evidente que este es el sustituto apropiado en topología fuzzy del intervalo real unitario $[0, 1]$, pues este intervalo tendrá un comportamiento y propiedades análogas a los que tiene el intervalo real unitario en la topología clásica. Además, desarrollamos alguna teoría adicional.

4.1. Construcción del intervalo fuzzy

Denotaremos por $F_I(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones monótonas decrecientes $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tales que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ para todo } x < 0, \\ f(x) &= 0 \text{ para todo } x > 1, \end{aligned}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

En lo que sigue vamos a restringir el dominio de las funciones de $F_I(\mathbb{R})$ simplemente al intervalo $[0, 1]$, de este modo, la topología en $F_I(\mathbb{R})$ es también la inducida por la topología producto, la cual denotamos por $\mathcal{H}$. Con esta restricción, obtenemos un espacio homeomorfo¹ al espacio de Helly enviando cada $f \in F_I(\mathbb{R})$ a $1 - f$ (como vimos en 3.1, el espacio de Helly es el subespacio de I^I que consiste de todas las funciones no decrecientes). Este homeomorfismo es de gran importancia en el desarrollo de este trabajo ya que nos permite aprovechar las propiedades topológicas² que tiene $(H, \mathcal{H})$ y que fueron estudiadas en 3.2. En este sentido, el espacio topológico $(F_I(\mathbb{R}), \mathcal{H})$ es compacto, conexo y Hausdorff.

Observación 4.1.1. *Notemos que en $F_I(\mathbb{R})$ pueden haber tanto funciones continuas como discontinuas, la única condición es que las discontinuidades sean solamente de salto y no puntuales, ya que en el caso de las puntuales sucedería lo mismo que en el espacio de Helly.*

¹un homeomorfismo es una función de un espacio topológico a otro, que cumple con ser una función biyectiva, continua y cuya inversa es continua. En este caso, los dos espacios topológicos se dicen homeomorfos.

²Si dos espacios son homeomorfos entonces tienen exactamente las mismas propiedades topológicas.

Para entender con claridad la observación anterior, consideremos las siguientes funciones $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$:

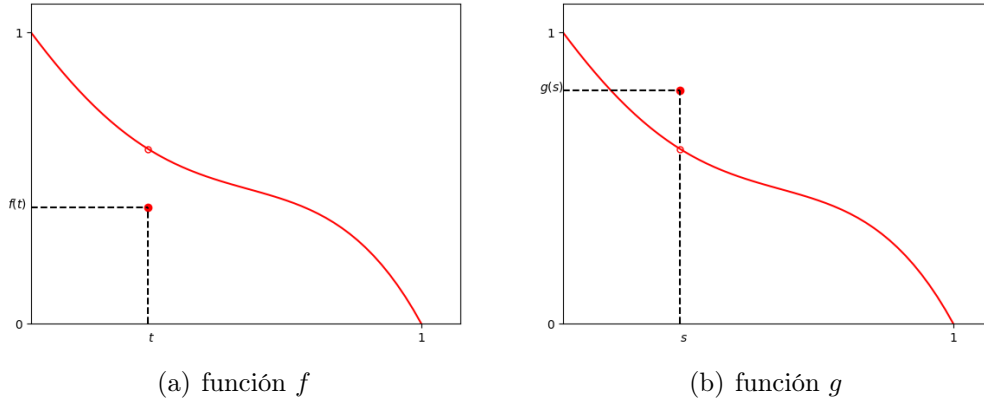


Figura 4.1: Algunas funciones que no pertenecen a $F_I(\mathbb{R})$

Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cuya gráfica está determinada por la figura 4.1(a), notemos que para $x > t$ no siempre se cumple que $f(t) \geq f(x)$, ya que existen valores x en el intervalo $[t, 1]$ tales que $f(t) < f(x)$ y, en consecuencia $f \notin F_I(\mathbb{R})$. Consideremos ahora la función $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que se muestra en la figura 4.1(b), del mismo modo, $g \notin F_I(\mathbb{R})$ ya que existen $x \in [0, s]$ tales que $g(x) < g(s)$, es decir, g no es monótona decreciente.

La siguiente construcción se puede encontrar en [16].

Definición 4.1.2. Sea $f \in F_I(\mathbb{R})$, para cada $x \in \mathbb{R}$ se definen las funciones $f(x+)$ y $f(x-)$ como sigue:

$$f(x+) = \bigvee_{t>x} f(t)$$

$$f(x-) = \bigwedge_{t<x} f(t)$$

con $f(1+) = 0$ y $g(0-) = 1$.

Note que si $f, g \in F_I(\mathbb{R})$, entonces:

- $f(x+) \leq f(x) \leq f(x-)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Si $f \leq g$ entonces $f(x+) \leq g(x+)$ y $f(x-) \leq g(x-)$.

Para $f, g \in F_I(\mathbb{R})$, Hutton introduce en [6] la siguiente relación de equivalencia:

$$\begin{aligned} f \sim g &\iff f(x+) = g(x+) \\ &\iff f(x-) = g(x-), \end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición 4.1.3. El conjunto cociente $\mathfrak{F}(I) = F_I(\mathbb{R}) / \sim$ es llamado el intervalo unidad fuzzy.

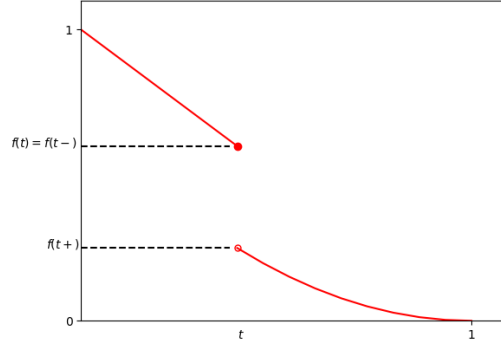
Introducimos un orden parcial en $\mathfrak{F}(I)$ por:

$$[f] \leq [g] \iff f(x+) \leq g(x+),$$

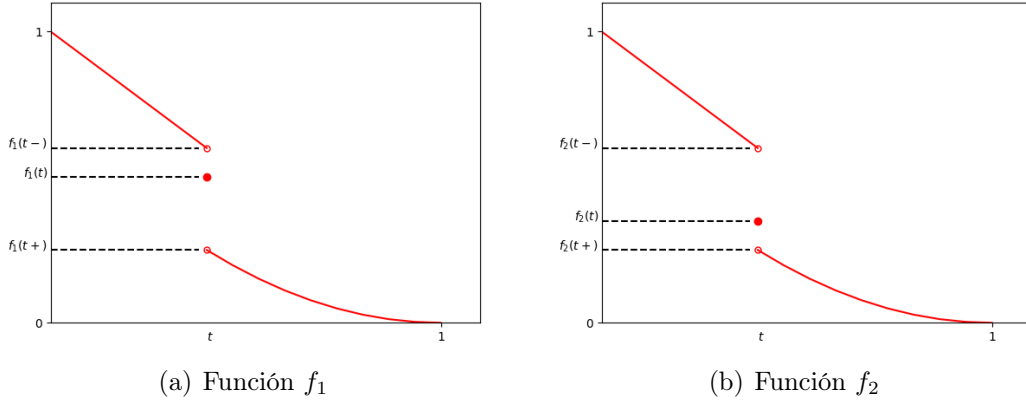
para cada $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 4.1.1.

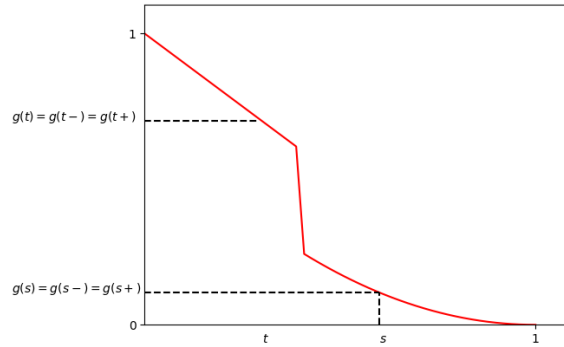
1. Consideremos la función $f \in F_I(\mathbb{R})$ cuya gráfica está determinada por la figura 4.2.


 Figura 4.2: Una función $f \in F_I(\mathbb{R})$

Teniendo en cuenta la relación de equivalencia definida para el conjunto cociente $\mathfrak{F}(I) = F_I(\mathbb{R}) / \sim$, las siguientes gráficas corresponden a funciones que pertenecen a la clase de f .


 Figura 4.3: Algunas funciones que pertenecen a $[f]$

2. Consideremos ahora la función a trozos $g \in F_I(\mathbb{R})$ cuya gráfica se presenta en la figura 4.4.


 Figura 4.4: Función $g \in F_I(\mathbb{R})$

Notemos que la función g es una función continua y que para cualquier $x \in [0, 1]$ se cumple que

$$g(x) = \bigvee_{t > x} g(t) = \bigwedge_{t < x} g(t), \quad (4.2)$$

esto es, $g(x) = g(x+) = g(x-)$ para todo $x \in I$. De este modo, encontrar alguna función $g_1 \in F_I(\mathbb{R})$ tal que $g_1 \in [g]$ no sería posible a menos de que $g_1 = g$ para todo $x \in I$, pues basta con que las funciones difieran en al menos un punto $t \in I$ para tener $g_1(t+) \neq g(t+)$ ó $g_1(t-) \neq g(t-)$. Este resultado se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.4. *Si f es continua, entonces f sólo se relaciona con sí misma.*

Demostración. Supongamos que existe al menos una función $g \in F_I(\mathbb{R})$ tal que $f \sim g$. Analicemos los siguientes casos:

- Si g es una función continua entonces se cumple que $g(t+) = g(t-) = g(t)$, para todo $t \in I$. Como $g \sim f$ entonces

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t+) = g(t+) \\ &= f(t-) = g(t-) = g(t), \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Luego $f = g$.

- Si g es una función discontinua entonces la discontinuidad debe ser de salto ya que $g \in F_I(\mathbb{R})$. Por lo tanto, existe al menos un valor $t_1 \in I$ tal que $f(t_1+) \neq g(t_1+)$ y, basta con un valor en el cual no se cumpla la igualdad 4.1 para que las funciones f y g no se relacionen.

En consecuencia, f sólo se relaciona con sí misma. Esto es, $[f] = \{f\}$. □

Observación 4.1.5. *Del ejemplo 4.1.1 es evidente notar que si $t \leq s$ entonces siempre se cumple que*

$$f(s+) \leq f(s) \leq f(s-) \leq f(t+) \leq f(t) \leq f(t-), \quad (4.3)$$

esta desigualdad permite establecer algunos resultados importantes en las siguientes secciones.

Antes de estudiar la MV-topología en el intervalo fuzzy $\mathfrak{F}(I)$, es importante para el desarrollo de este trabajo, saber cuál es la topología natural clásica en $\mathfrak{F}(I)$, pues esta permitirá a través de los funtores ι y ω establecer la ultracompacidad y ultraconexidad del intervalo fuzzy. En este sentido, teniendo en cuenta que el intervalo fuzzy es definido por el cociente $F_I(\mathbb{R})/\sim$ y que $\mathcal{H}$ es la topología en $F_I(\mathbb{R})$ inducida por la topología producto, entonces la topología natural $\mathcal{F}$ en $\mathfrak{F}(I)$ es definida por la topología cociente $\mathcal{H}/\sim$.

Como resultados de topología clásica tenemos que si X es un espacio compacto y además $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y sobreyectiva, entonces Y es compacto. En consecuencia, si $\sim$ es una relación de equivalencia en X , entonces la continuidad de la proyección canonica $\pi : X \rightarrow X/\sim$ garantiza la compacidad del espacio cociente $X/\sim$ siempre que X sea compacto. Del mismo modo, también se tiene que el espacio cociente de un espacio conexo es también conexo. Esto abre paso a la siguiente proposición.

Proposición 4.1.6. *El intervalo fuzzy con la topología clásica natural $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{F})$ es compacto y conexo.*

Demostración. Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente y que $F_I(\mathbb{R})$ es compacto y conexo, entonces al considerar la aplicación cociente p entre espacios topológicos dada por:

$$p : (F_I(\mathbb{R}), \mathcal{H}) \longrightarrow (F_I(\mathbb{R}) / \sim, \mathcal{H} / \sim),$$

como $\mathfrak{F}(I) = F_I(\mathbb{R}) / \sim$ y $\mathcal{F} = \mathcal{H} / \sim$, se concluye entonces que $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{F})$ es compacto y conexo. $\square$

4.2. MV-topología en $\mathfrak{F}(I)$

En [6], Hutton define la topología fuzzy natural $\mathcal{U}$ en $\mathfrak{F}(I)$ la cual está determinada por la subbase que consta de la familia de conjuntos fuzzy $\{R_t, L_t : t \in \mathbb{R}\}$, donde $R_t, L_t : \mathfrak{F}(I) \longrightarrow [0, 1]$ son definidas por:

$$\begin{aligned} L_t[f] &= f(t-)^*, \\ R_t[f] &= f(t+), \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ y $[f] \in \mathfrak{F}(I)$.

En particular, $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{U})$ es un espacio MV-topológico ya que se verifica que para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, $\alpha \odot \beta \in \mathcal{U}$ y $\alpha \oplus \beta \in \mathcal{U}$.

Proposición 4.2.1. *Las funciones L_t, R_t con $t \in \mathbb{R}$ satisfacen las siguientes propiedades:*

1. Si $t \leq s$, $L_t \leq L_s$,
2. Si $t \leq s$, $R_s \leq R_t$,
3. Si $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente, $\bigvee_{t \in A} L_t = L_{\bigvee A}$,
4. Si $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente, $\bigvee_{t \in A} R_t = R_{\bigwedge A}$,
5. $R_t \wedge R_s = R_{t \vee s}$,
6. $L_t \wedge L_s = L_{t \wedge s}$,
7. Si $t < s$, $R_t \oplus L_s = 1$,
8. Si $t \geq s$, $R_t^* \oplus L_s^* = 1$,
9. Si $t \geq s$, $R_t \odot L_s = 0$. En particular, $R_t \odot L_t = 0$,
10. $L_t \oplus L_s \leq 2L_{t \oplus s}$,
11. $L_{t \odot s} \leq L_t \oplus L_s$,
12. $L_t \odot L_s \leq L_{t \oplus s}$,
13. $R_t \odot R_s \leq R_{t \odot s}$,
14. $R_{t \oplus s} \leq R_t \oplus R_s$.

Demostración.

1. Si $t \leq s$, entonces para toda $[f] \in \mathfrak{F}(I)$ se cumple que $f(s-) \leq f(t-)$, de este modo, $1 - f(s-) \geq 1 - f(t-)$, esto es, $L_t[f] = f(t-)^* \leq f(s-)^* = L_s[f]$.
2. Si $t \leq s$, entonces para toda $[f] \in \mathfrak{F}(I)$ se cumple que $f(s+) \leq f(t+)$, es decir, $R_s[f] \leq R_t[f]$.
3. Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente, podemos suponer que $\bigvee A = s \in \mathbb{R}$. De este modo, $t \leq s$ para todo $t \in A$ luego, por (1) L_t es monótonamente creciente con respecto a $t \in \mathbb{R}$, así $L_t \leq L_s$ para todo $t \in A$ y, en consecuencia se tiene que $\bigvee_{t \in A} L_t \leq L_s = L_{\bigvee A}$. Vamos a probar ahora que $L_s \leq \bigvee_{t \in A} L_t$.

Como $\bigvee A = s$, entonces para todo $r < s$, existe un $t_r \in A$ tal que $r < t_r$ y por la densidad de A se tiene que $r < \frac{r+t_r}{2} < t_r$. Ahora notemos que para toda $f \in \mathfrak{F}(I)$ por ser f un función monótona decreciente se tiene $f(t_r) \leq f(\frac{r+t_r}{2}) \leq f(r)$. Por lo tanto:

$$L_s[f] = f(s-)^* = \left(\bigwedge_{r < s} f(r) \right)^* = \bigvee_{r < s} f(r)^*.$$

Como $f(\frac{r+t_r}{2}) \leq f(r)$, entonces $f(r)^* \leq f(\frac{r+t_r}{2})^*$. Además, como $\frac{r+t_r}{2} < t_r$ entonces también se tiene que $f(t_r) \leq f(t_r-) \leq f(\frac{r+t_r}{2})$ (ver desigualdad 4.3) y por tanto $f(\frac{r+t_r}{2})^* \leq f(t_r-)^*$. Así:

$$\begin{aligned} L_s[f] &= \bigvee_{r < s} f(r)^* \leq \bigvee_{r < s} f\left(\frac{r+t_r}{2}\right)^* \\ &\leq \bigvee_{r < s} f(t_r-)^* \\ &\leq \bigvee_{t \in A} f(t-)^* \\ &= \bigvee_{t \in A} L_t[f]. \end{aligned}$$

Con lo cual queda comprobado que $\bigvee_{t \in A} L_t = L_{\bigvee A}$.

4. Si $A \subset \mathbb{R}$ es no vacío y acotado inferiormente, podemos suponer que $\bigwedge A = s \in \mathbb{R}$. De este modo, $s \leq t$ para todo $t \in A$ luego, por (2) R_t es monótonamente decreciente con respecto a $t \in \mathbb{R}$, así $R_t \leq R_s$ para todo $t \in A$ y, en consecuencia se tiene que $\bigvee_{t \in A} R_t \leq R_s$. Vamos a probar ahora que $R_s \leq \bigvee_{t \in A} R_t$.

Notemos que para todo $r > s$, existe un $t_r \in A$ tal que $r > t_r$ (ya que $s = \bigwedge A$), nuevamente por la densidad de A se tiene que $t_r < \frac{r+t_r}{2} < r$. Ahora notemos que para toda $f \in \mathfrak{F}(I)$ se tiene que $f(r) \leq f(\frac{r+t_r}{2}) \leq f(t_r)$. Por lo tanto:

$$R_s[f] = f(s+) = \bigvee_{r > s} f(r) \leq \bigvee_{r > s} f\left(\frac{r+t_r}{2}\right)$$

Como $t_r < \frac{r+t_r}{2}$ y f es monótona decreciente, entonces $f(\frac{r+t_r}{2}) \leq f(t_r+) \leq f(t_r)$ y así:

$$\begin{aligned} R_s[f] &\leq \bigvee_{r>s} f\left(\frac{r+tr}{2}\right) \\ &\leq \bigvee_{r>s} f(t_r+) \\ &\leq \bigvee_{t \in A} f(t+) \\ &= \bigvee_{t \in A} R_t[f]. \end{aligned}$$

En consecuencia $\bigvee_{t \in A} R_t = R_{\bigwedge A}$.

5. Es claro que $s, t \leq t \vee s$. Por tanto, $R_{t \vee s} \leq R_t, R_s$, de donde $R_{t \vee s} \leq R_t \wedge R_s$. Ahora, notemos que $R_{t \vee s} = R_t$ ó $R_{t \vee s} = R_s$, por lo tanto se concluye que $R_t \wedge R_s \leq R_{t \vee s}$.
6. Si $t \leq s$ entonces $L_{t \wedge s} = L_t \wedge L_s = L_t$. De igual forma si $s \leq t$.
7. Primero notemos que si $t < s$ entonces $f(s-) < f(t+) < f(t-)$ para toda $[f] \in \mathfrak{F}(I)$. Ahora,

$$\begin{aligned} (R_t \oplus L_s)[f] &= R_t[f] \oplus L_s[f] \\ &= f(t+) \oplus f(s-)^* \\ &= \min\{1, f(t+) + f(s-)^*\} \\ &= \min\{1, f(t+) + 1 - f(s-)\} \\ &= \min\{1, 1 + f(t+) - f(s-)\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

En particular, si $s = t$ lo anterior no se cumple, pues en este caso se tiene:

$$(R_t \oplus L_t)[f] = \min\{1, 1 + f(t+) - f(t-)\} = 1 + f(t+) - f(t-) < 1.$$

8. Si $t \geq s$ entonces $f(t+) \leq f(s+) \leq f(s-)$ para toda $[f] \in \mathfrak{F}(I)$. Ahora,

$$\begin{aligned} (R_t^* \oplus L_s^*)[f] &= R_t^*[f] \oplus L_s^*[f] \\ &= f(t+)^* \oplus f(s-)^{**} \\ &= \min\{1, f(t+)^* + f(s-)\} \\ &= \min\{1, 1 - f(t+) + f(s-)\} \\ &= \min\{1, 1 + f(s-) - f(t+)\} \\ &= 1. \end{aligned}$$

9. Notemos que $R_t \odot L_s = (R_t^* \oplus L_s^*)^*$. Por (8), si $t \geq s$ entonces $R_t \odot L_s = 1^* = 0$.

10. Es claro que $t, s \leq t \oplus s$. Así, $L_t, L_s \leq L_{t \oplus s}$ esto es, $L_t \oplus L_s \leq 2L_{t \oplus s}$.

11. Notemos que $s \odot t \leq s, t$. Por lo tanto, $L_{s \odot t} \leq L_s, L_t$ y en consecuencia,

$$L_{s \odot t} \leq L_s \ominus L_t.$$

12. $L_t \odot L_s \leq L_t, L_s \leq L_{t \oplus s}$.
13. Como $s \odot t \leq s, t$, entonces $R_t, R_s \leq R_{s \odot t}$ por lo tanto $R_t \odot R_s \leq R_{s \odot t}$.
14. Como $s, t \leq t \oplus s$, entonces $R_{t \oplus s} \leq R_t, R_s \leq R_t \oplus R_s$.

□

4.3. Propiedades MV-topológicas en $\mathfrak{F}(I)$

Como se ha mencionado anteriormente, nuestro interés principal es estudiar las propiedades MV-topológicas de compacidad y conexidad en $\mathfrak{F}(I)$, de este modo, en esta sección se presenta uno de los resultados más importantes de este trabajo: el intervalo fuzzy con la MV-topología dada por las funciones R_t y L_t es ultracompacto y ultraconexo. El siguiente lema es el que permite establecer este resultado.

Lema 4.3.1. $\mathcal{U} \subset \omega(\mathcal{F})$ y equivalentemente $\iota(\mathcal{U}) \subset \mathcal{F}$.

Demostración. Para demostrar que $\mathcal{U} \subset \omega(\mathcal{F})$ se debe comprobar que cada abierto de $\mathcal{U}$ es también un abierto de $\omega(\mathcal{F})$; como $\mathcal{U}$ es la MV-topología determinada por la subbase conformada por las funciones R_t, L_t entonces vamos a probar que $R_t, L_t \in \omega(\mathcal{F})$ para todo $t \in I$, es decir, que $R_t q, L_t q : (F_I(\mathbb{R}), \mathcal{H}) \rightarrow I$ son funciones semicontinuas inferiormente, en donde

$$\begin{aligned} q : F_I(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{F}(I) \\ f &\longrightarrow q(f) = [f], \end{aligned}$$

es la función del cociente natural. De este modo, las composiciones $R_t q$ y $L_t q$ están dadas por:

$$R_t q, L_t q : F_I(\mathbb{R}) \xrightarrow{q} \mathfrak{F}(I) \xrightarrow{R_t, L_t} I$$

así,

$$\begin{aligned} R_t q : F_I(\mathbb{R}) &\longrightarrow I \\ f &\longrightarrow R_t q(f) = R_t[f] = f(t+), \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} L_t q : F_I(\mathbb{R}) &\longrightarrow I \\ f &\longrightarrow L_t q(f) = L_t[f] = f(t-)^*, \end{aligned} \tag{4.5}$$

Veamos entonces que $R_t q, L_t q : (F_I(\mathbb{R}), \mathcal{H}) \rightarrow I$ son funciones semicontinuas. Si $s, t \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned} (R_t q)^{-1}(s, 1] &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : R_t q(f) > s\} \\ &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : f(t+) > s\} \\ &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigvee_{u>t} f(u) > s\} \end{aligned}$$

Notemos que si $p_u : F_I(\mathbb{R}) \subset I^I \rightarrow I$ denota la proyección sobre el factor correspondiente u , es decir, $p_u(f) = f(u)$ entonces

$$\{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigvee_{u>t} f(u) > s\} = \bigcup_{u>t} \{f \in F_I(\mathbb{R}) : p_u(f) > s\},$$

para comprobar lo anterior basta con notar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 f \in \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigvee_{u>t} f(u) > s\} &\iff f \in F_I(\mathbb{R}) \wedge \bigvee_{u>t} f(u) > s \\
 &\iff f \in F_I(\mathbb{R}) \wedge \bigvee_{u>t} p_u(f) > s \\
 &\iff f \in F_I(\mathbb{R}) \wedge \exists u > t \text{ tal que } p_u(f) > s \\
 &\iff f \in \bigcup_{u>t} \{f \in F_I(\mathbb{R}) : p_u(f) > s\}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 (R_t q)^{-1}(s, 1] &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigvee_{u>t} f(u) > s\} \\
 &= \bigcup_{u>t} \{f \in F_I(\mathbb{R}) : p_u(f) > s\} \\
 &= F_I(\mathbb{R}) \cap \bigcup_{u>t} p_u^{-1}(s, 1],
 \end{aligned}$$

Note que si $t = 1$ se obtiene el conjunto vacío. En consecuencia $R_t q$ es semicontinua inferiormente ya que para todo $s \in I \setminus \{1\}$ el conjunto $\{f \in F_I(\mathbb{R}) : R_t q(f) > s\}$ es un conjunto abierto. Ahora, veamos que $L_t q$ es también semicontinua inferior. Similarmente, para $t \neq 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 (L_t q)^{-1}(s, 1] &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : L_t q(f) > s\} \\
 &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : f(t-)^* > s\} \\
 &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : 1 - f(t-) > s\} \\
 &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : 1 - s > f(t-)\} \\
 &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : f(t-) < 1 - s\} \\
 &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigwedge_{u<t} f(u) < 1 - s\} \\
 &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigwedge_{u<t} f(u) < s'\},
 \end{aligned}$$

donde $s' = 1 - s$. Notemos ahora lo siguiente

$$\begin{aligned}
 f \in \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigwedge_{u<t} f(u) < s'\} &\iff f \in F_I(\mathbb{R}) \wedge \bigwedge_{u<t} f(u) < s' \\
 &\iff f \in F_I(\mathbb{R}) \wedge \bigwedge_{u<t} p_u(f) < s' \\
 &\iff f \in F_I(\mathbb{R}) \wedge \exists u < t \text{ tal que } p_u(f) < s' \\
 &\iff f \in \bigcup_{u<t} \{f \in F_I(\mathbb{R}) : p_u(f) < s'\},
 \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 (L_t q)^{-1}(s, 1] &= \{f \in F_I(\mathbb{R}) : \bigwedge_{u < t} f(u) < s'\} \\
 &= \bigcup_{u < t} \{f \in F_I(\mathbb{R}) : p_u(f) < s'\} \\
 &= F_I(\mathbb{R}) \cap \bigcup_{u < t} p_u^{-1}[0, s'),
 \end{aligned}$$

claramente lo anterior es si $t \neq 0$, pues para $t = 0$ se obtiene que $(L_t q)^{-1}(s, 1] = \emptyset$. En consecuencia, $L_t q$ es semicontinua inferiormente. Como hemos probado que la subbase de $\mathcal{U}$ está contenida en $\omega(\mathcal{F})$, entonces $\mathcal{U} \subset \omega(\mathcal{F})$. De este modo, como ι es monótona y $\iota(\omega(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ (ver proposición 2.2.8) entonces se concluye que $\iota(\mathcal{U}) \subset \iota(\omega(\mathcal{F}))$, esto es, $\iota(\mathcal{U}) \subset \mathcal{F}$. $\square$

Teorema 4.3.2. $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{U})$ es ultracompacto y ultraconexo.

Demostración. Por la proposición 4.1.6 tenemos que $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{F})$ es compacto y conexo. Además, por el lema anterior $\iota(\mathcal{U}) \subset \mathcal{F}$. De este modo, $(\mathfrak{F}(I), \iota(\mathcal{U}))$ es también compacto y conexo (ver teoremas 2.2.16 y 2.2.17) con lo cual se concluye que $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{U})$ es ultracompacto y ultraconexo. $\square$

Lema 4.3.3. $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{U})$ es 1-conexo.

Demostración. Es inmediata por el teorema anterior y la proposición 2.2.19. $\square$

Lema 4.3.4. $(\mathfrak{F}(I), \mathcal{U})$ es α -compacto, fuertemente compacto y fuzzy compacto.

Demostración. Es inmediata por el teorema anterior y la proposición 2.2.24. $\square$

4.4. Lema de Urysohn

En [6], Hutton da la primera definición de normalidad para espacios topológicos fuzzy. También demuestra el Lema de Uryshon para estos espacios en donde hace uso del intervalo fuzzy. En esta sección presentamos esa definición y sus respectivas consecuencias para los espacios MV-topológicos, estas consecuencias se pueden encontrar en [4].

Definición 4.4.1. Un espacio topológico fuzzy (X, τ) es **normal** si para todo conjunto cerrado $\alpha \in \tau^*$ y conjunto abierto $\beta \in \tau$ tal que $\alpha \leq \beta$, existe $\gamma \in \tau$ tal que

$$\alpha \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \beta. \quad (4.6)$$

Proposición 4.4.2. Un espacio MV-topológico (X, τ) es normal si y solo si para cada par de conjuntos fuzzy cerrados α y β tales que $\alpha \odot \beta = 0$ existen $\gamma, \delta \in \tau$ tales que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$ y $\gamma \odot \delta = 0$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea (X, τ) un espacio MV-topológico normal y sea $\alpha, \beta \in \tau^*$ tal que $\alpha \odot \beta = 0$. Por tanto, $\alpha \in \tau^*$, $\beta^* \in \tau$ y $\alpha \leq \beta^*$. Como (X, τ) es normal, existe un conjunto $\gamma \in \tau$ tal que $\alpha \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \beta^*$, es decir, $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \bar{\gamma}^*$ donde $\gamma, \bar{\gamma}^* \in \tau$ satisfacen $\gamma \odot \bar{\gamma}^* = 0$.

$(\Leftarrow)$ Sea $\alpha \in \tau^*$, $\beta \in \tau$ y $\alpha \leq \beta$, es decir, $\alpha, \beta^* \in \tau^*$ tal que $\alpha \odot \beta^* = 0$, entonces existen $\gamma, \delta \in \tau$ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta^* \leq \delta$ y $\gamma \odot \delta = 0$, esto es, $\gamma \leq \delta^*$ con $\delta^* \in \tau^*$ entonces $\gamma \leq \bar{\gamma} \leq \delta^*$ y así $\alpha \leq \gamma \leq \bar{\gamma} \leq \delta^* \leq \beta$. En consecuencia, (X, τ) es normal. $\square$

Teorema 4.4.3 (Lemma tipo-Urysohn). *Un espacio MV-topológico (X, τ) es normal si y solo si para todo $\beta \in \tau^*$ cerrado y conjunto abierto $\alpha \in \tau$, con $\beta \leq \alpha$, existe una función continua $f : X \rightarrow \mathfrak{F}(I)$ tal que para todo $x \in X$,*

$$\beta(x) \leq f(x)(1-) \leq f(x)(0+) \leq \alpha(x).$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Como (X, τ) es normal, entonces para cada $\alpha \in \tau$ y $\beta \in \tau^*$ tal que $\beta \leq \alpha$, existe una familia de subconjuntos fuzzy $\{\gamma_r : r \in (0, 1)\}$ tal que $\beta \leq \gamma_r \leq \alpha$ para todo $r \in (0, 1)$. De hecho, si $0 < r < s < 1$ entonces $\gamma_s \leq \overline{\gamma_s} \leq \gamma_r^\circ \leq \gamma_r$. Ahora, definamos una función $f : X \rightarrow \mathfrak{F}(I)$ tal que $f(x)(t) = \gamma_t(x)$. Notemos que para todo $x \in X$, $f(x)$ es decreciente y como $f(x)(1-) = \bigwedge_{s < 1} \gamma_s(x)$, $f(x)(0+) = \bigvee_{s > 0} \gamma_s(x)$ entonces

$$\beta(x) \leq f(x)(1-) \leq f(x)(0+) \leq \alpha(x).$$

Veamos ahora que f es continua, para ello vamos a mostrar que $f^\leftarrow(L_t)$ y $f^\leftarrow(R_t)$ son abiertos de (X, τ) para cada $t \in (0, 1)$, lo que equivale a mostrar que $f^\leftarrow(L_t^*) \in \tau^*$ y $f^\leftarrow(R_t) \in \tau$ para cada t . Tenemos entonces lo siguiente:

$$f^\leftarrow(R_t)(x) = R_t(f(x)) = f(x)(t+) = \bigvee_{s > t} f(x)(s) = \bigvee_{s > t} \gamma_s(x) = \bigvee_{s > t} \gamma_s^\circ(x),$$

y entonces $f^\leftarrow(R_t) = \bigvee_{s > t} \gamma_s^\circ \in \tau$. Del mismo modo,

$$f^\leftarrow(L_t^*)(x) = L_t^*(f(x)) = f(x)(t-) = \bigwedge_{s < t} f(x)(s) = \bigwedge_{s < t} \gamma_s(x) = \bigwedge_{s < t} \overline{\gamma_s}(x),$$

y entonces $f^\leftarrow(L_t^*) = \bigwedge_{s < t} \overline{\gamma_s} \in \tau^*$.

$(\Leftarrow)$ Sea $\alpha, \beta \in \tau^*$ tal que $\beta \odot \alpha = \mathbf{0}$, es decir, $\beta \leq \alpha^*$. Por hipótesis existe una función continua $f : X \rightarrow \mathfrak{F}(I)$ tal que para todo $x \in X$,

$$\beta(x) \leq f(x)(1-) \leq f(x)(0+) \leq \alpha^*(x),$$

entonces tenemos que para cada $t \in (0, 1)$, y para cada $x \in X$,

$$\beta(x) \leq f(x)(t+) \leq f(x)(t-) \leq \alpha^*(x).$$

Por otro lado, notemos que para cada $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x)(t+) &= R_t(f(x)) = (R_t \circ f)(x) = f^\leftarrow(R_t)(x), \\ f(x)(t-) &= L_t^*(f(x)) = (L_t^* \circ f)(x) = f^\leftarrow(L_t^*)(x), \end{aligned}$$

entonces,

$$\beta(x) \leq f^\leftarrow(R_t)(x) \leq f^\leftarrow(L_t^*)(x) \leq \alpha^*(x),$$

esto es,

$$\beta \leq f^\leftarrow(R_t) \leq f^\leftarrow(L_t^*) \leq \alpha^*.$$

Dado que $\{R_t, L_t : t \in I\}$ es una subbase para la MV-topología de $\mathfrak{F}(I)$ y f es continua, entonces tenemos que $f^\leftarrow(R_t)$ y $f^\leftarrow(L_t)$ son abiertos de (X, τ) . Además, como $f^\leftarrow$ es MV-homomorfismo, entonces $(f^\leftarrow(L_t^*)(x))^* = f^\leftarrow(L_t)(x)$ y entonces $\beta \leq f^\leftarrow(R_t)$ y $\alpha \leq f^\leftarrow(L_t)$ y $f^\leftarrow(R_t) \odot f^\leftarrow(L_t) = \mathbf{0}$ ya que $f^\leftarrow(R_t) \leq f^\leftarrow(L_t^*)$. En consecuencia (X, τ) es normal por la proposición 4.4.2. $\square$

Definición 4.4.4. *Un espacio topológico fuzzy es **perfectamente normal** si para cada conjunto cerrado $\beta \in \tau^*$ y cada conjunto abierto $\alpha \in \tau$ tal que $\beta \leq \alpha$, existe una función continua $f : X \rightarrow \mathfrak{F}(I)$ tal que para todo $x \in X$,*

$$\beta(x) = f(x)(1-) \leq f(x)(0+) = \alpha(x).$$

Conclusiones

En este trabajo hemos desarrollado resultados importantes del intervalo fuzzy y hemos mostrado que este espacio tiene un buen comportamiento en topología fuzzy, lo cual es coherente con las constantes menciones en la literatura, de que el intervalo fuzzy es a la topología fuzzy lo que el intervalo real unitario es a la topología clásica.

Aunque la mayoría de resultados que se obtienen en topología fuzzy se presentan como una extensión de los obtenidos en topología clásica, encontrar una buena extensión de los conceptos de compacidad y conexidad no fue una tarea sencilla. En particular, ilustramos que para ciertos tipos de compacidad, no se tiene el hecho de que si (X, τ) es compacto, entonces $(X, \omega(\tau))$ es un fuzzy compacto; es decir, no son buenas extensiones de compacidad. Debido a esto, se han establecido distintas definiciones de compacidad y conexidad; en el capítulo 2 estudiamos esas definiciones y vimos cuáles de ellas son buenas extensiones en topología fuzzy. En este sentido, decidimos escoger la mejor de las buenas extensiones y se demostró que el intervalo fuzzy con la MV-topología dada por la subbase que consta de las funciones $\{R_t, L_t : t \in I\}$ es ultracompacto y ultraconexo. En la sección 2.2.3 se han completado con todo detalle las pruebas de las proposiciones 2.2.18, 2.2.19 y del teorema 2.2.20. Estos resultados contribuyeron en gran parte al desarrollo de este trabajo.

Estudiar el espacio de Helly (H), en el capítulo 3, también contribuyó de una manera significativa. El conjunto subyacente al intervalo fuzzy se obtiene como un cociente de un espacio homeomorfo al espacio de Helly; en este sentido, estudiar este homeomorfismo permitió aprovechar las propiedades topológicas de H . Estas propiedades junto los resultados establecidos en la sección 2.2.3 son aquellos que permitieron establecer la ultracompacidad y ultraconexidad del intervalo fuzzy, que corresponde al resultado principal de este trabajo.

En el capítulo 4 evidenciamos que el intervalo fuzzy satisface propiedades topológicas análogas a las del intervalo real unitario, pues no solo es MV-compacto y MV-conexo, sino que también juega un papel muy importante en la construcción de los espacios topológicos fuzzy, al permitir establecer una versión fuzzy para el Lema de Urysohn. Ya que en la literatura se encuentra muy poca información de este intervalo y con el ánimo de una mejor comprensión de los resultados que presentamos, este trabajo de grado es, en su mayoría, autocontenido. En este sentido, los ejemplos, el resultado presentado en el teorema 4.1.4 y algunas desigualdades establecidas contribuyen a una mejor comprensión del objeto de estudio, el intervalo fuzzy. Además, se completaron los detalles de las demostraciones correspondientes al lema 4.3.1 y de las propiedades presentadas en la proposición 4.2.1.

Bibliografía

- [1] Chang, C. C.; Algebraic analysis of many valued logic. *Trans. Amer. Math. Soc.* **88** (1958), 467–490. [3](#)
- [2] Chang, C. L.; Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **24**/1 (1968), 182–190. [VII](#), [18](#), [22](#), [23](#)
- [3] Cignoli R. L. O., D'Ottaviano I. M. L., Mundici D., *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Trends in Logic, **7**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. [3](#)
- [4] De La Pava, L. V. On MV-topologies. Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas. Universidad del Valle. (2018) [18](#), [26](#), [44](#)
- [5] Gantner, T. E. and Steinlage, R. C. ; Compactness in Fuzzy Topological Spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **62** (1978), 547–562. [22](#), [23](#)
- [6] Hutton, B.; Normality in fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **50** (1975), 74–79. [VII](#), [35](#), [36](#), [39](#), [44](#)
- [7] Hutton, B.; Uniformities on fuzzy topological spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **58** (1977), 559–571.
- [8] Kubiak, T.; The fuzzy unit interval and the Helly space. *Math. Japonica*, **33**/2 (1988), 253-259.
- [9] Lowen, R. (1974). Topologies floues. *CR Acad. Sci. Paris*, 278, 925-928. [21](#), [22](#)
- [10] Lowen, R.; Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *J. Math. Anal. Appl.* **56** (1976), 621–633. [18](#), [19](#), [22](#), [23](#), [25](#)
- [11] Lowen, R.; A comparison of different compactness notions in fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. Appl.* **64** (1978), 446–454. [22](#), [23](#), [30](#)
- [12] Lowen, R. ; Connectedness in fuzzy topological spaces. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **11**/3 (1981), 427-433.
- [13] Rodabaugh, S. E. Connectivity and the L-fuzzy unit interval. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, (1982), 113-121. [25](#)
- [14] Rodabaugh, S. E., Klement, E. P., & Höhle, U. (Eds.) Applications of category theory to fuzzy subsets **14**.(2012) Springer Science & Business Media. [34](#)
- [15] Russo, C., An extension of Stone duality to fuzzy topologies and MV-algebras. *Fuzzy Sets and Systems*, **303** (2016), 80–96. [V](#), [26](#)

- [16] Šostak, A. P.; Two decades of fuzzy topology: basic ideas, notions, and results. *Uspekhi Mat. Nauk.* **44**/6 (1989), 99–147. **36**
- [17] Steen, L. A. and Seebach, J. A. ; Counterexamples in topology (Vol. 1, p. 8) (1978), 127–128. **31**
- [18] Zadeh L. A., Fuzzy sets, *Inform. and Control*, **8**, 338–353, 1965. **VII**, **13**

Índice alfabético

- Base, 20
- Categorías, 21
 - $\mathcal{Fuz}$, 21
 - $\mathcal{LFuz}$, 21
 - $\mathcal{Top}$, 21
 - $^{LMV}\mathcal{Top}$, 26
 - $^{MV}\mathcal{Top}$, 26
- Compacidad fuzzy, 22
 - α -compacto, 23
 - α^* -compacto, 23
 - cuasi-fuzzy compacto, 23
 - Fuertemente compacto, 23
 - Fuzzy compacto, 23
 - Ultracompacto, 23
- Conexidad fuzzy, 22
 - α -conexo, 26
 - α^* -conexo, 26
 - Ultraconexo, 25
- Conjunto fuzzy, 13
- Espacio de Helly, 31
- Espacio laminado, 19
- Funtores, 21
 - ι , 21
 - ω , 21
 - e , 22
- Homomorfismo, 7
- Ideal, 7
- Intervalo fuzzy, 35
- Lema de Urysohn, 44
- MV-cadena, 5
- MV-topología, 13
 - Base, 27
 - Compacidad fuerte, 29
 - cubrimiento aditivo, 29
 - Espacio MV-topológico, 26
 - MV-compacidad, 29
 - MV-continua, 28
 - MV-homeomorfismo, 28
 - MV-preimagen, 27
 - MV-subespacio, 27
 - Subbase, 27
- MV-álgebra, 3
- MV-álgebras, 3
- Normalidad, 44
- Soporte, 14
- Subbase, 20
- Topología fuzzy, 18
 - Espacio débilmente inducido, 22
 - Fuzzy continua, 21