



EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES A PARTIR
DE LOS SIGNIFICADOS COMO OPERADOR Y MEDIDA

RODOLFO OCTAVIO TASCÓN ORTIZ

COD. 201505290

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECCIÓN DE POSGRADOS

2017



EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES A PARTIR
DE LOS SIGNIFICADOS COMO OPERADOR Y MEDIDA

RODOLFO OCTAVIO TASCÓN ORTIZ

COD. 201505290

PROPUESTA DE PROFUNDIZACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECTORA DE TRABAJO DE GRADO

MAG. OFELIA ANGULO VALLEJO

UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECCIÓN DE POSGRADOS

2017

AGRADECIMIENTOS

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y por estar conmigo en cada paso que doy, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante todo el periodo de estudio.

A mis padres Henry y Luz marina, mis hermanos y familiares, quienes a lo largo de toda mi vida han apoyado y motivado mi formación académica, inculcando en mí, la tenacidad y lucha interminable por alcanzar mis metas.

A mi esposa Yuliana y mis hijos por brindarme cada día la motivación con su amor y fortaleza, para alcanzar las metas que me propongo.

A la rectora de la Institución Educativa Ateneo Hna. María Dolly Mora R. y a los estudiantes por la colaboración, compromiso y responsabilidad durante la etapa de implementación de este proyecto.

A mi tutora, Mg Ofelia Angulo Vallejo por su asesoría acertada, profesionalismo, compromiso y dedicación que me permitió la construcción de la propuesta.

A la Universidad del Valle, al Instituto de Educación y Pedagogía, a los profesores de la Maestría en Educación Énfasis en Educación Matemática y compañeros.

DEDICATORIA

A Dios,

a mis padres, Henry y Luz Marina

a mi esposa Yuliana,

mis hijos, mis hermanos y mi familia.

*“La educación es un mérito,
que pocos disfrutan con entusiasmo”*

RODOLFO OCTAVIO TASCÓN ORTIZ

TABLA DE CONTENIDO

	PAG
ÍNDICE DE TABLAS	1
RESUMEN	5
ABSTRACT.....	7
INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA PROPUESTA DE TRABAJO	13
1.1 Presentación del problema	13
1.2 Objetivos	23
1.2.1 Objetivo general	23
1.2.2 Objetivos específicos.....	23
1.3. Justificación	24
1.4 Marco contextual.....	31
1.5 Marco metodológico	32
1.5.1 Tipo de investigación.....	32
1.5.2 Participantes en el proceso	32
1.5.3 Etapas del proceso	33
1.5.4 Metodología de las sesiones de trabajo	33
1.5.5 Metodología empleada en la recolección de la información	34
1.5.5.1 <i>Etapas diagnosticas</i>	34
1.5.5.2 <i>Fase de implementación</i>	35
1.5.6 Procedimiento de análisis	35
CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA	36

2.1	Aspecto Curricular.....	36
2.1.1	Enfoque nacional	36
2.1.1.1	<i>Procesos generales</i>	<i>38</i>
2.1.1.2	<i>Conocimientos básicos.....</i>	<i>40</i>
2.1.1.3	<i>Contexto</i>	<i>43</i>
2.1.1.4	<i>Procesos relacionados con la propuesta</i>	<i>44</i>
2.2	Aspecto Matemático	50
2.2.1	Historia de los números racionales	50
2.2.2	Definición de número racional y sus términos asociados para la propuesta	54
2.2.2.1	<i>Número racional</i>	<i>54</i>
2.2.2.2	<i>Número fraccionario.....</i>	<i>56</i>
2.2.2.3	<i>Fracción.....</i>	<i>57</i>
2.3	Aspecto Didáctico	57
2.3.1	El aspecto didáctico del número racional	57
2.3.2	Significados del número racional en la representación como fracción	58
2.3.3	Número racional en la representación en fracción como operador y medida	61
2.3.4	Las fracciones, en una mirada en el contexto escolar.....	64
2.3.5	Las situaciones problema como herramienta en el aprendizaje	65
CAPÍTULO 3: EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES A PARTIR DE LOS SIGNIFICADOS COMO OPERADOR Y MEDIDA		71
3.1	Recolección de Información	71
3.1.1	Resultados y análisis de la información	72
3.2	Diseño de la propuesta de aula.....	84

3.2.1	Estructura de la propuesta de aula	88
3.2.2	Propuesta de aula	91
3.3	Análisis de resultados de la propuesta de aula	108
3.3.1	Resultados y Análisis de los resultados de la situación 1	109
3.3.2	Resultados y Análisis de los resultados de la situación 2	132
3.3.3	Resultados y Análisis de los resultados de la situación 3	137
3.4	Algunas Consideraciones y Conclusiones	152
	CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS	156
4.1	Conclusiones generales	156
4.2	Reflexiones didácticas	159
4.3	Referencias Bibliográficas	161
Anexo 1	Registro fotográfico de las estudiantes grado séptimo	165
Anexo 2	Recolección de información diagnóstico.....	166

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Competencias Evaluadas prueba Saber	15
Tabla 2 Componentes Evaluados Prueba Saber.....	16
Tabla 3 Resultados Prueba Saber 2015 grado quinto I.E Ateneo	17
Tabla 4 Resultados Prueba Saber 2015 grado noveno, I.E Ateneo	18
Tabla 5 Coherencia vertical Pensamiento numérico y sistemas numéricos	48
Tabla 6 Coherencia vertical Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos	49
Tabla 7 Coherencia vertical Pensamiento métrico y sistemas de medidas	49
Tabla 8 Coherencia horizontal grado sexto y séptimo.....	50
Tabla 9 Recolección de información pregunta 1(R1P1).....	73
Tabla 10 R1P2.....	74
Tabla 11 R1P3.....	76
Tabla 12 R1P4.....	77
Tabla 13 R1P5 Y R1P8.....	79
Tabla 14 R1P6.....	80
Tabla 15 R1P7.....	81
Tabla 16 R1P9 Y R1P10.....	83
Tabla 17 Estructura de la propuesta.....	89
Tabla 18 Estructura situación 1.....	90
Tabla 19 Estructura situación 2.....	90
Tabla 20 Estructura situación 3.....	91

Tabla 21 Juego Dominó de fracciones.....	105
Tabla 22 S1T1P1.....	110
Tabla 23 S1T1P2.....	112
Tabla 24 S1T1P3.....	114
Tabla 25 S1T1P4.....	116
Tabla 26 S1T2P1.....	118
Tabla 27 S1T2P2.....	119
Tabla 28 S1T3P1.....	121
Tabla 29 S1T3P2.....	123
Tabla 30 S1T3P3.....	125
Tabla 31 S1T4P1.....	127
Tabla 32 S1T4P2.....	128
Tabla 33 S1T5P1.....	130
Tabla 34 S2T1P1.....	132
Tabla 35 S2T1P2.....	134
Tabla 36 S2T1P3.....	135
Tabla 37 S3T1P1.....	138
Tabla 38 S3T1P4.....	140
Tabla 39 S3T2P1.....	141
Tabla 40 S3T2P2.....	143
Tabla 41 S3T2P3.....	145
Tabla 42 S3T3P1.....	146

Tabla 43 S3T3P2.....	148
Tabla 44 S3T3P3.....	150

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Símbolos de fracciones en los egipcios	51
Figura 2 Respuesta de estudiantes P1 Recolección de información	73
Figura 3 Respuesta estudiantes P2 Recolección de información	74
Figura 4 Respuesta de estudiantes P3 Recolección de información	75
Figura 5 Respuestas de estudiantes P4 Recolección de Información	77
Figura 6 Respuesta de Estudiantes P5 Recolección de Información	78
Figura 7 Respuesta de estudiantes P6 Recolección de información	80
Figura 8 Respuesta de estudiantes P7 Recolección de información	81
Figura 9 Respuestas de estudiantes P9 Recolección de información	82
Figura 10 Máquina mágica y operadores fraccionarios	94
Figura 11 Máquina mágica operador triplicador	95
Figura 12 Máquina mágica operador quinta parte	96
Figura 13 Máquina mágica y operador	96
Figura 14 Pared de fracciones.....	100
Figura 15 juego con fracciones	103
Figura 16 Juego con fracciones.....	108
Figura 17 Respuesta de estudiantes S1T1P1	109

Figura 18 Respuesta de estudiante S1T1P2	111
Figura 19 Respuesta de estudiante S1T1P3	114
Figura 20 Respuesta de estudiante S1T1P4	115
Figura 21 Respuesta de estudiante S1T2P1	117
Figura 22 Respuesta de estudiante S1T2P2	119
Figura 23 Respuesta de estudiante S1T3P1	120
Figura 24 Respuesta de estudiante S1T3P2	122
Figura 25 Respuesta de estudiante S1T3P3	124
Figura 26 Respuesta de estudiante S1T4P1	127
Figura 27 Respuesta de estudiante S1T5P1	130
Figura 28 Respuesta de estudiante S2T1P1	132
Figura 29 Respuesta de estudiante S2T1P2	134
Figura 30 Respuesta de estudiante S3T1P1	137
Figura 31 Respuesta de estudiantes S3T1P4	139
Figura 32 Respuesta de estudiantes S3T2P1	141
Figura 33 Respuesta de estudiante S3T2P2	143
Figura 34 Respuesta de estudiante S3T2P3	144
Figura 35 Respuesta de estudiante S3T3P1	146
Figura 36 Respuesta de estudiante S3T3P2	148
Figura 37 Respuesta de estudiante S3T3P3	150

RESUMEN

La propuesta: “El aprendizaje de los números racionales a partir de los significados como operador y medida”, en el marco de la línea de investigación en Didáctica de las matemáticas (DM), se implementó en la Institución Educativa (IE) Ateneo del municipio de Pradera Valle del Cauca; esta propuesta giró alrededor de los procesos de aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones, centrando la atención en dos de sus significados (operador y medida), a partir de los referentes teóricos: Vasco (1996), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (2005) Elguero (2009) y la utilización de situaciones problema para el estudiante como estrategia para la construcción de aprendizajes matemáticos. (Múnera 2006). Teniendo en cuenta estos referentes, se diseñó una propuesta de aula que permitió fortalecer el proceso de aprendizaje, generar interrogantes y reflexiones que conllevaron a procesos de construcción del conocimiento en los estudiantes del grado séptimo y reflexiones pedagógicas entorno a la práctica docente.

En el desarrollo de la experiencia se enfatizó en la importancia que tienen los números racionales en la representación como fracciones, desde diversas miradas e interpretaciones, teniendo en cuenta que llegar a la comprensión de los números racionales es un largo camino debido a sus múltiples significados, sin mencionar a las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano (S. Llinares y M. V. Sánchez 1997).

La propuesta de aula permitió abordar diferentes situaciones sobre los números racionales en la representación como fracción a través de los significados como operador y medida; las cuales

utilizaron actividades, tareas y juegos matemáticos que facilitó la asimilación del objeto matemático.

La implementación y análisis de los resultados se desarrolló bajo un enfoque cualitativo de tipo exploratorio, permitiendo conocer los puntos de vista e interpretaciones de los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen los estudiantes. La implementación de este enfoque en la propuesta de aula permitió inferir y conjeturar desde la visión de los estudiantes, ubicándolos como protagonistas de su aprendizaje.

Palabras claves: Número racional, fracción, operador, medida, propuesta de aula, situaciones problema.

ABSTRACT

The proposal: "The learning of the rational numbers from the meanings as operator and measure", within the framework of the research line in Mathematics Didactics (DM), was implemented in the Educational Institution (IE) Ateneo of the municipality of Pradera Valle del Cauca; this proposal revolved around the processes of learning rational numbers in representation as fractions, focusing on two of their meanings (operator and measure), based on the theoretical referents: Vasco (1996), Llinares and Sánchez (1997), Gairín (2005) Elguero (2009) and the use of problem situations for the student as a strategy for the construction of mathematical learning. (Múnera 2006). Taking into account these referents, a classroom proposal was designed to strengthen the learning process, generate questions and reflections that led to processes of knowledge construction in seventh grade students and pedagogical reflections around teaching practice.

In the development of the experience, emphasis was placed on the importance of rational numbers in representation as fractions, from different perspectives and interpretations, bearing in mind that reaching the understanding of rational numbers is a long way due to its multiple meanings, not to mention the already established from everyday language (S. Llinares and MV Sánchez 1997).

The classroom proposal allowed to address different situations about the rational numbers in the representation as a fraction through the meanings as operator and measure; which used handle material that facilitated the assimilation of the mathematical object.

The implementation and analysis of the results was developed under a qualitative approach of exploratory type, allowing to know the points of view and interpretations of the phenomena according to the meanings that the students have. The implementation of this approach in the classroom proposal allowed to infer and conjecture from the students' vision, placing them as protagonists of their learning.

Keywords: Rational number, fraction, operator, measure, classroom proposal, problem situations.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad diversas investigaciones sobre los números racionales en la representación como fracciones, reconocen que es uno de los contenidos con mayor dificultad de comprender por los estudiantes; este objeto matemático se contempla desde los primeros años de escolaridad por los Estándares Básicos de Competencia (EBC) en Matemáticas (2006), estableciendo que al terminar el tercer grado debe estar en capacidad de describir situaciones de medición utilizando fracciones comunes. Los EBC también contemplan que al terminar el quinto grado, los estudiantes deben interpretar las fracciones en diferentes contextos (situaciones de medición, parte todo, cociente, razones y proporciones), además de utilizar la notación decimal para expresar fracciones y relacionar estas dos notaciones con la de porcentajes; con ello se deduce la importancia de la comprensión de la fracción y sus significados por parte de los estudiantes, para acceder al conjunto de los números racionales.

De acuerdo a lo estipulado en Lineamientos curriculares (LC) y los Estándares básicos de competencias matemáticas (EBC), se espera que los estudiantes al terminar el grado séptimo resuelvan y formulen problemas en contextos de medida, utilizando números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes). A pesar de ello, cuando se propone ampliar al conjunto numérico de los racionales en el aula clase, se evidencian dificultades en la mayoría de estudiantes, en lo relativo con la comprensión de la representación como fracciones y los diferentes significados, lo cual no les permite una adecuada construcción del objeto matemático.

Teniendo en cuenta estos cuestionamientos se diseña una propuesta de aula que fortalezca el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a través de los significados como operador y medida desde los referentes teóricos de Vasco (1996), Llinares (1997), Sánchez (1997), Gairín (2005) y la utilización de situaciones problema como estrategia para la construcción de aprendizajes matemáticos (Múnera, 2006). Esta propuesta está conformada por situaciones sobre los números racionales en la representación como fracciones, en las que se utiliza actividades, tareas y juegos matemáticos, para facilitar la construcción del objeto matemático, permitiendo fortalecer el aprendizaje, generando interrogantes y reflexiones que conllevaran a la asimilación significativa del objeto matemático.

El aprendizaje escolar de conocimientos matemáticos, en general, y de los números racionales en su representación como fracciones, en particular, presupone que los estudiantes desarrollen su capacidad de establecer relaciones entre los conceptos, propiedades y algoritmos; a su vez, construyan una red de saberes relacionados entre sí, que posibilite construcción de nuevos conocimientos, cada vez más amplios y complejos, basándose en los conocimientos previos, y así, construir una estructura de conocimiento matemático.

La propuesta de aula para el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a través de los significados como operador y medida, se implementó en el grado séptimo de la I.E. Ateneo del municipio de Pradera Valle del Cauca. A continuación se describen el contenido de cada uno de los capítulos que conforman este trabajo.

En el primer capítulo se presentan los aspectos generales de la propuesta, la cual está compuesta por: Presentación del problema, Objetivos, Justificación, Marco contextual y Marco metodológico.

En la presentación del problema se exponen las principales dificultades que presentan los estudiantes para el aprendizaje de conocimientos matemáticos en general y de los números racionales en su representación como fracciones en particular, posteriormente se plantea el objetivo general y los objetivos específicos para continuar con la justificación, establecida desde el marco legal en relación a las directrices del Ministerio de Educación Nacional (MEN). A continuación se desarrolla el marco contextual que incluye los aspectos más relevantes del entorno relacionados con la situación local, asuntos institucionales relacionados con el contexto que aporta la IE Ateneo, para finalmente abordar el marco metodológico que se empleó en el estudio: el tipo de investigación, los participantes, instrumentos utilizados y el proceso de recolección de información y análisis de datos.

El segundo capítulo corresponde al marco de referencia que fundamentan la problemática, está conformado por tres componentes: aspecto curricular, aspecto matemático y aspecto didáctico. El aspecto curricular, hace énfasis en los Lineamientos Curriculares (LC) y los EBC en Matemáticas, el aspecto matemático hace referencia a la historia de los números racionales y la definición de número racional y los términos asociados y el aspecto didáctico trata sobre las fracciones en el contexto escolar, significados del número racional en su representación como fracción, el número racional como operador y medida y las situaciones problema como estrategia para la construcción de aprendizajes matemáticos. Estos tres aspectos se articulan en el diseño e implementación de la

propuesta de aula para el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a partir de los significados como operador y medida para el grado séptimo, que se contemplan en el capítulo 3 de este trabajo.

En el tercer capítulo se presenta la propuesta de aula en toda su extensión, iniciando con la recolección de información, los resultados y análisis de la información, continúa con el diseño de la propuesta, la esquematización y la descripción de cada uno de sus componentes, muestra las situaciones que la conforman, las cuales son diseñadas a partir del marco de referencia. Posteriormente se encuentra una amplia exhibición del proceso de implementación de la propuesta mediante los análisis cualitativos de los resultados de la implementación realizada; finaliza este capítulo con algunas consideraciones, conclusiones y reflexiones sobre esta fase de implementación.

Por último, en el capítulo cuatro, se plantean las conclusiones generales que pretenden valorar los objetivos planteados a la luz de los resultados de la implementación de la propuesta de aula y en términos de los logros alcanzados por los estudiantes durante este proceso considerando también las dificultades más frecuentes durante esta fase, adicionalmente se exponen reflexiones didácticas como aportes a los docentes en formación y en ejercicio interesados en la enseñanza de los números racionales en la representación como fracciones y finaliza este capítulo con las referencias bibliográficas.

CAPÍTULO 1: ASPECTOS GENERALES DE LA PROPUESTA DE TRABAJO

Este capítulo presenta los aspectos generales de la propuesta de trabajo, compuesta por: la presentación del problema, los objetivos, la justificación, el marco contextual y el marco metodológico. En la presentación del problema se exponen las principales dificultades que presentan los estudiantes para el aprendizaje de conocimientos matemáticos en general, y de los números racionales en su representación como fracción en particular; posteriormente se plantea el objetivo general y los objetivos específicos para continuar con la justificación, establecida desde el marco legal en relación a las directrices del MEN. A continuación se desarrolla el marco contextual que incluye los aspectos más relevantes del entorno relacionados con la situación local, asuntos institucionales relacionados con el contexto que aporta la IE Ateneo, para finalmente abordar el marco metodológico que lo orienta.

1.1 Presentación del problema

La Aritmética es una rama de las matemáticas, en la cual se estudia el número y las operaciones que se hacen con ellos, desarrollando propiedades, habilidades y competencias que permiten su utilización en procesos algorítmicos y de la vida cotidiana. Cuando se aborda la Aritmética en las aulas de clase, uno de los contenidos que no logra una comprensión adecuada por parte de los estudiantes, son los números racionales en su expresión como fracciones, esta representación matemática a pesar de ser un estándar de competencia en el pensamiento numérico, que se profundiza desde los primeros grados de escolaridad, no se convierte en un aprendizaje conocido

por los estudiantes, conllevando a la confusión en la Básica Secundaria, en procesos algorítmicos, dificultad para representar en diferentes contextos y dar solución a situaciones problema; por tales razones es pertinente generar procesos reflexivos hacia el cambio en las prácticas educativas y en consecuencia implementar propuestas de aula que fortalezcan la construcción del aprendizaje en el educando y reflexiones pedagógicas en los docentes.

Colombia no es ajena a esta realidad frente al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en donde los resultados de las pruebas Saber en estudiantes de Básica Secundaria así lo demuestran; estas pruebas evalúan las competencias en los estudiantes de los grados tercero, quinto, séptimo y noveno en los procesos de Resolución y planteamiento de problemas, Razonamiento, Comunicación, Modelación y Elaboración, comparación de procedimientos, a través de los pensamientos y sistemas: pensamiento numérico y los sistemas numéricos; pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos; pensamiento espacial y los sistemas geométricos; pensamiento métrico y los sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y los sistemas de datos.

A continuación se presentan en las tablas 1 y 2 las competencias y componentes evaluados en la prueba Saber en el área de matemáticas. De acuerdo con el ICFES, estos elementos corresponden a los procesos propios de la actividad matemática y a los conocimientos matemáticos presentes en los EBC y en los LC.

Tabla 1 Competencias Evaluadas prueba Saber

Competencias		
Resolución de problemas	Razonamiento y argumentación	Comunicación, representación y modelación
La formulación y solución de problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los estudiantes. También, se aborda la aplicación de diferentes estrategias y la elección de métodos e instrumentos para la solución de problemas.	Las preguntas relacionadas esta competencia exigen al estudiante percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones y respuestas posibles y adoptarlas o rechazarlas con argumentos y razones para dar solución a un problema.	La comunicación hace referencia a las habilidades de leer, escribir e interpretar significados en matemáticas, lo cual implica reconocer el lenguaje propio de estas y usar sus nociones y procesos en la comunicación de ideas matemáticas o de otras áreas modeladas mediante las matemáticas. También supone comprender, interpretar y transformar información en distintas representaciones como tablas, diagramas de barras, gráficas, entre otras, con el objetivo de extraer información relevante para presentar argumentos y conclusiones.

(Tomado y adaptado de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional - MEN. Bogotá, 2006)

Tabla 2 Componentes Evaluados Prueba Saber

Componentes		
Númérico y variacional	Espacial y métrico	Aleatorio
Las preguntas asociadas a este componente abordan la comprensión de los números, sus propiedades y operaciones, el reconocimiento de regularidades y patrones, la comprensión de funciones y sus representaciones, la identificación de variables, y la descripción de fenómenos de cambio y dependencia.	Las preguntas asociadas a este componente abordan la comprensión de las características de los objetos geométricos que se abordan en la educación básica y media, las relaciones entre estos, sus transformaciones; además de los procesos de medición de distintas magnitudes y sus respectivas unidades y sistema de medida.	Las preguntas asociadas a este componente abordan la comprensión e interpretación de datos en distintas representaciones, la formulación de inferencias y argumentos utilizando medidas de tendencia central y de dispersión; además del estudio de fenómenos aleatorios.

(Tomado y adaptado de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional - MEN. Bogotá, 2006)

La prueba Saber aplicada en la I.E. Ateneo, a los estudiantes de Básica Primaria y Secundaria, evidencia dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes en el área de matemáticas. Es por ello, que al trazar planes de mejoramiento, es necesario intervenir en el aula reforzando los conocimientos en los estudiantes, a través de propuestas acordes a sus necesidades y que permitan una adecuada construcción del objeto matemático.

A continuación se presentan en las figuras 3 y 4 los resultados obtenidos por IE Ateneo en la prueba Saber 2015, en los grados quinto y noveno.

Tabla 3 Resultados Prueba Saber 2015 grado quinto I.E Ateneo



MinEducación
Ministerio de Educación Nacional

PROSPERIDAD
PARA TODOS

Establecimiento educativo: ATENEO COMERCIAL FEMENINO

Código DANE: 176563000024

Fecha de actualización de datos: martes 08 de septiembre 2015

2. Componentes evaluados. matemáticas - quinto grado



Lectura de resultados

En comparación con los establecimientos educativos con puntajes promedio similares en el área y grado, su establecimiento es, relativamente:

- Débil en el componente Numérico-variacional
- Débil en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación
- Muy fuerte en el componente Aleatorio

Tabla 4 Resultados Prueba Saber 2015 grado noveno, I.E Ateneo



MinEducación
Ministerio de Educación Nacional

PROSPERIDAD
PARA TODOS

Establecimiento educativo: ATENEO COMERCIAL FEMENINO

Código DANE: 176563000024

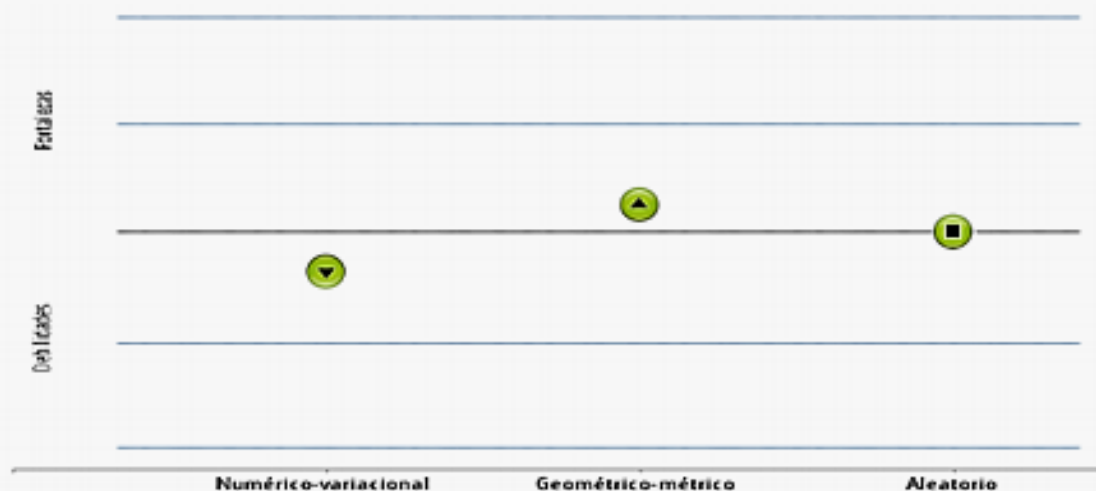
Fecha de actualización de datos: martes 08 de septiembre 2015

Resultados de noveno grado en el área de matemáticas

En comparación con los establecimientos educativos que presentan puntajes promedio similares, en el área y grado evaluado, el establecimiento es relativamente:

- Fuerte en Razonamiento y argumentación
- Débil en Comunicación, representación y modelación
- Similar en Planteamiento y resolución de problemas

3.2. Componentes evaluados. matemáticas - noveno grado



Lectura de resultados

En comparación con los establecimientos educativos con puntajes promedio similares en el área y grado, su establecimiento es, relativamente:

- Débil en el componente Numérico-variacional
- Fuerte en el componente Geométrico-métrico, representación y modelación
- Similar en el componente Aleatorio

Los resultados de la prueba Saber aplicada en la IE Ateneo del municipio de Pradera Valle del Cauca, en el año 2015 en los grados quinto y noveno, evidenciaron dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, en el componente matemático numérico – variacional, lo cual incide en los resultados de pruebas externas.

En este orden de ideas, uno de los contenidos con mayor dificultad en el proceso de aprendizaje de los estudiantes es el conjunto de números racionales, por tanto se selecciona este contenido como el objeto principal de intervención en el aula, se focaliza el grado séptimo, debido a que en este grado los estudiantes deben utilizar números racionales en sus distintas representaciones para resolver y formular problemas según los EBC. La intervención en el grado séptimo, fortalece los conocimientos adquiridos sobre las fracciones en años anteriores y permiten la construcción del objeto matemático como punto de partida para un trabajo posterior con los números reales.

Los estudiantes del grado séptimo se encuentran alrededor de los 11 a 13 años de edad, en ellos, se han ido presentando algunos cambios en su desarrollo evolutivo que los caracterizan como personas en la etapa de transición de lo concreto a lo formal, es decir desde lo manipulable hacia lo abstracto (Serrano, 2008), y según los EBC en Matemáticas (MEN, 2006), deben poseer las aptitudes necesarias con relación a los números racionales, que permitan su utilización en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes), para resolver problemas en contextos de medida. A pesar de ello, en el trabajo de aula los estudiantes presentan dificultades de conocimientos básicos, que impiden enfrentar situaciones en las que se les exige el reconocimiento y uso de propiedades, la modelación y resolución de problemas matemáticos,

generando con ello, un malestar constante que se convierte en mala disposición hacia las matemáticas en su vida escolar.

En este sentido para el investigador, la práctica como maestro de aula, ha presentado evidencias de las dificultades tanto en la interpretación de situaciones que involucran los números racionales como en la solución de problemas que requieren de los conocimientos básicos sobre las fracciones. Una de las dificultades encontradas por el investigador en los estudiantes al abordar los números racionales en la representación como fracción, se presenta al tratar con una fracción impropia $\left(\frac{7}{3}\right)$, cuya representación de fraccionamiento, muestra que el número de partes tomadas es mayor que el número de partes divididas; al respecto, en el aula de clase comúnmente se referencia que el número de arriba (numerador) representa cuántas partes se debe tomar del todo o unidad y el de abajo (denominador) en cuántas partes se va a dividir la unidad. De esta forma, se reafirma la comprensión de la fracción en términos de la fusión de dos acciones: dividir/tomar. Esta apreciación conlleva a la confusión del estudiante, al recibir un modelo conceptual parte-todo e implementar un conocimiento sobre la fracción que aparece como parte de cosas que no son números (Zarzar, 2013).

Según Zarzar (2013), estas dificultades son un obstáculo para los estudiantes en su proceso de aprendizaje, como cuando se les enseña la relación parte – todo y deben resolver sumas de fracciones con denominador diferentes, en este caso los estudiantes cometen errores sistemáticos derivados de la fracción como parte-todo. El autor citado menciona “¿Cómo podemos hablar de un algo que es mayor de lo que tenemos?”, es por ello que se infiere entonces que el entendimiento

de fracciones como parte de un todo, no posibilita el entendimiento adecuado y crea una dependencia con los objetos concretos.

Los autores Escolano y Gairín (2005) citado por Zarzar (2013), en el documento “El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes”, creen que el significado de fracción como parte- todo fue creado por necesidades del proceso de enseñanza y aprendizaje, provocando una serie de obstáculos didácticos como los que fueron mencionados con anterioridad. Además para estos autores, la relación parte-todo dificulta la noción de número racional y obstaculiza la formación de ideas abstractas. Teniendo en cuenta lo anterior, la comparación de fracciones, la equivalencia de fracciones, la representación de la fracción en la recta numérica, son un problema para los estudiantes, puesto que necesitan los demás significados de la fracción para poder llegar a una adecuada comprensión al acceder al conjunto de los números racionales.

Llinares (2003) considera que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de los números racionales, radica básicamente en que están relacionados con diferentes tipos de situaciones (situaciones de medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón, y como un operador). Además, pueden representarse de varias maneras: $\frac{3}{4}$: fracciones, $\frac{75}{100}$: fracciones decimales, 0.75: expresiones decimales, 75%: porcentajes. Por consiguiente la comprensión de los números racionales, depende de la claridad con que se entienda cada representación, es por ello que es importante tener claro lo que representa cada uno. Al respecto el autor citado menciona

que: “Llegar a la comprensión de los números racionales es un largo camino debido a sus múltiples interpretaciones, sin mencionar las ya establecidas desde el lenguaje cotidiano, cuestión que suele estar presente en los procesos de aprendizaje de estos temas” (S. Llinares y M. V. Sánchez 1997, p.189).

El documento EBC en Matemáticas (MEN, 2006, p. 59), afirma que el paso del concepto de número natural al concepto de número racional necesita una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida en un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes.

En este sentido, en el estudio de los números racionales, se deben tener en cuenta que al abordar las fracciones de forma inadecuada, genera en los estudiantes una visión de los números racionales en la representación como fracciones como símbolos sin sentido o tomando el numerador y denominador como números separados, en lugar de comprenderlos como un todo unificado, generando dificultades que se evidencian en la construcción del conocimiento matemático. Las anteriores reflexiones sobre el proceso de aprendizaje de los números racionales en su representación como fracción a través de los diferentes significados y la forma adecuada de abordar el objeto matemático en el aula, dan origen a la pregunta:

¿Cómo favorecer el proceso de aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones, a partir de una propuesta de aula que integre los significados como operador y medida en situaciones problema para los estudiantes de grado 7° de la IE Ateneo?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Favorecer el proceso de aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones en los estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo, a partir de una propuesta de aula que integre los significados como operador y medida en situaciones problema.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar mediante una prueba diagnóstica las dificultades que afectan el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones en los estudiantes del grado séptimo en la IE Ateneo.
- Integrar en una propuesta de aula los significados como operador y medida en situaciones problema, que favorezca el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones, en los estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo

- Validar el aporte de la propuesta de aula en el proceso de aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a partir de su implementación en un grupo de 12 estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo.

1.3. Justificación

Los números racionales en su representación como fracciones, son uno de los conocimientos que no logra un aprendizaje adecuado por parte de los estudiantes, pues a pesar de ser abordado desde los primeros grados de escolaridad, no se convierte en un aprendizaje significativo, generando en su proceso de aprendizaje la confusión en procesos algorítmicos, dificultad para representar en diferentes contextos y dar solución a situaciones problema.

Freudenthal (1983) afirma que la fracción es el recurso fenomenológico del número racional, para lo que propone modelos didácticos propios para la enseñanza de las fracciones, en particular, enfatizando los modelos de área y longitud como medios naturales para visualizar magnitudes y aconsejando que su uso se dé de manera práctica y con manipulación de material.

El estudio del conjunto de los números racionales es un propósito planteado en el pensamiento numérico de los EBC en Matemáticas (MEN, 2006), los cuales establecen que el estudiante al terminar la Básica Primaria debe estar en capacidad de interpretar las fracciones en diferentes contextos utilizando situaciones de medición a través de los diferentes significados de la fracción (parte todo, cociente, razones, operador) y proporciones. Lo que infiere que los estudiantes deben

construir un conocimiento adecuado alrededor de las fracciones y sus significados que les permitan acceder al conjunto de los números racionales. Igualmente los EBC establecen que el estudiante que se encuentra finalizando el grado séptimo debe estar en capacidad de resolver y formular problemas en contextos sobre medidas relativas y de variaciones en las medidas, así mismo utilizar números racionales en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. Es por ello, que al abordar el conjunto de los números racionales en la escuela debe tenerse en cuenta una adecuada comprensión de la fracción y sus diferentes interpretaciones, permitiendo una coherencia en el aprendizaje; esto significa que para comprender el objeto matemático se debe abordar cada significado de la fracción, permitiendo al estudiante una adecuada construcción de su conocimiento, facilitando posteriormente la comprensión de los números racionales y sus representaciones como fracciones, razones, expresiones decimales y proporciones.

El quehacer pedagógico y los resultados de la prueba Saber para la IE Ateneo (ver tabla No. 3 y 4), han mostrado al investigador que los estudiantes presentan debilidad en el componente numérico - variacional, en relación con situaciones matemáticas con números racionales en la representación como fracciones, ocasionados por una inadecuada construcción del conocimiento matemático. Por lo tanto, es pertinente intervenir en el aula, a través de herramientas didácticas que consoliden el proceso de aprendizaje en los estudiantes.

Las anteriores razones sumadas a las de la perspectiva del investigador como maestro de aula y el interés de mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes a través de herramientas

didácticas que consoliden el concepto matemático, generó la inquietud de diseñar una propuesta de aula con el propósito de reforzar el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracción a través de los significados como operador y medida, con el fin de que los estudiantes construyan una base sólida, que les permitan comprender y acceder al conjunto de los números racionales en sus diferentes representaciones.

Se resalta que esta propuesta de aula considera los significados como operador y medida que son poco investigados, puesto que la mayoría de referentes teóricos como Kieren (1980), Llinares y Sánchez (1997) y Obando (2003) entre otros, hacen énfasis en el significado como parte todo. Los significados como operador y medida requieren un tipo de razonamiento matemático diferente, puesto que cumplen la función de transformar una cantidad o magnitud; es por ello que son herramientas potentes para la construcción del conocimiento matemático a la luz de los EBC en Matemáticas para el grado séptimo.

La representación de fracción como medida aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Esta relación permite al estudiante medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad, realizar comparaciones con la unidad, entre otros. En los números racionales la representación como medida, se centra la atención sobre la partición sucesiva de la unidad, identificándose con la enseñanza de la recta numérica, en la cual se muestra el número de partes iguales en que se puede dividir la unidad. (Clarke y Roche 2009, Charalambous y Pitta-Pantazi 2005).

De acuerdo con Elguero (2009), basándose en los trabajos de Escolano y Gairín (2005), se identifican cuatro significados o subconstructos de la fracción, teniendo en cuenta la pluralidad de situaciones y contexto donde son utilizados: medida, cociente, razón y operador, y afirman que la concepción parte-todo está incluida en las restantes, al identificar en cada contexto la unidad y sus partes correspondientes.

Respecto a las representaciones de los números racionales, se ha encontrado que las fracciones pueden representarse de manera geométrica, discreta, numérica y literal. Las representaciones geométricas se realizan en un contexto continuo y las más frecuentes son los diagramas circulares, rectangulares y la recta numérica. En las representaciones discretas la unidad está formada por un conjunto discreto de objetos. Las representaciones numéricas encuentran distintas formas de utilizar los números para indicar una relación parte-todo: representación como división indicada $\frac{3}{5}$, representación como razón 3:5, representación decimal 0,6 y representación de porcentajes 60%. En las representaciones literales podemos distinguir distintas formas: tres quintos, tres de cinco y proporción de tres a cinco (Llinares y Sánchez 1997).

La representación de fracción como operador $\frac{a}{b}$, se apoya en el significado de función donde a y $b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$; es decir es el operador que transforma un valor particular n a través de dos acciones: multiplicando por el valor de a y dividiéndolo por b . La comprensión de este significado les permitirá a los estudiantes resolver con mayor habilidad multiplicaciones de fracciones. Es importante considerar que el significado de operador multiplicativo predomina, seguido del significado parte-todo.

En este sentido, se puede hablar de la fracción como expresando una orden de ejecución, que al final de la transformación resulta ser indistinguible. Ejemplos de este uso de la fracción lo observamos en “los $\frac{3}{5}$ de una clase son niños”, o “el 20% de descuento”. Nótese que en el segundo caso, el porcentaje también se asocia como operador, pues para hallar la cantidad porcentual será necesario multiplicar por 20 y dividir por 100. En general, de la fracción como operador se dice que actúa como reductor o ampliador proporcional del objeto sobre el que se aplica (Gairín y Sancho 2002), o “ciertos monstruos imaginarios que achican o agrandan a las víctimas que se les acercan” (Vasco 1991).

Como operador, los números racionales son transformadores que alargan o recortan los segmentos, aumentan o disminuyen el número de ítems en un conjunto de objetos discretos, o toman una figura en el plano geométrico como un triángulo o un rectángulo, y convertirla en otra figura más pequeña o más grande con la misma forma. Es decir, el papel del significado como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente, esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura a/b veces más grande ó a/b veces más pequeña (Kieren1980); en este caso la fracción actúa sobre otro número, en lugar de una entidad con sentido autónomo, esto se explicita cuando se piden, por ejemplo, los $\frac{4}{5}$ de 20 ó los $\frac{3}{4}$ de 56, donde operativamente se multiplica el entero por el numerador y se divide el producto por el denominador.

Escolano y Gairín (2005) señalan que el significado de operador es el de una función racional de la forma $y = ax$ con a racional, que produce transformaciones en una cantidad de magnitud

obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad. La actuación del operador es la síntesis de dos operadores enteros, uno que multiplica, el numerador; y otro que divide, el denominador. Estos autores señalan que para que sea posible aplicar operaciones indicadas por la fracción, es necesario conocerlas y dicho conocimiento lleva consigo el indudable $a=m/n$ como ajuste que indica que m es el número por el que se multiplica y n el número por el que se divide (Elguero 2009). La composición de operadores que definen la acción de m/n sobre la cantidad puede ser entendida como multiplicar por m y dividir entre n , o dividir entre n y multiplicar por m ; de acuerdo con lo anotado, el número racional como operador le da un significado funcional a la preposición de, y justifica el significado de función, actuando sobre un número y modificándolo.

Al respecto, el significado de operador para la fracción permite que actúe sobre una situación, o estado inicial, para modificarla y conseguir un estado final. Por tanto, se puede interpretar a la fracción como una función de cambio. El trabajo con operadores conecta las fracciones con las propiedades algebraicas de multiplicación inversa y de identidad de elementos, y con propiedades del análisis como son los de composición de funciones (Gairín, 2005). En esta interpretación la fracción actúa como un transformador, número que provoca cambios a través de una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa. Esta interpretación puede ser relacionada a la noción de función.

Vasco (1996), pedagogo colombiano, quien se ha interesado por la enseñanza de las matemáticas, en el documento “El archipiélago fraccionario” afirma que el paso del número natural al número

racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes, tomando al número racional como medidor o como operador ampliador o reductor.

El diseño e implementación de situaciones problema en el proceso de aprendizaje es una alternativa para lograr niveles amplios de participación y movilización de conocimientos matemáticos, tal como lo proponen los LC (MEN, 1998), de tal modo que se generen en los estudiantes procesos de actividad matemática que les faciliten la construcción de nuevos conocimientos. De acuerdo a lo anterior, se hace necesario un cambio en la forma como se aborda el proceso de enseñanza de los números racionales a través de una propuesta de aula pertinente, donde se articulen aspectos matemáticos, curriculares y didácticos, que favorezcan la construcción del saber.

Otra de las razones que justifican esta propuesta de estudio es darle respuesta a las necesidades frente a la comprensión del número racional en los estudiantes de la IE Ateneo, con lo cual se pretende reforzar algunos aspectos del pensamiento numérico – variacional con relación a la representación como fracción, puesto que es una debilidad que se ha identificado en el proceso de aprendizaje del conjunto de los números racionales para los estudiantes del grado séptimo. A manera particular del investigador prevaleció otra razón relacionada con el ámbito académico y personal la cual se concretizó en la propuesta de grado para la Maestría en Educación énfasis Educación Matemática; proyecto que según las exigencias del programa y las becas de Excelencia

Docente debía estar orientado a mejorar la práctica docente y los resultados académicos de los estudiantes de la IE.

1.4 Marco contextual

La propuesta de aula: “El aprendizaje de los números racionales a partir de los significados como operador y medida”, se desarrolla en la IE Ateneo ubicada en el municipio de Pradera (Valle del Cauca). Esta institución es de carácter oficial y está conformada por 5 sedes educativas: Ateneo (Sede Principal), Benjamín Valencia, Eloy Silva, Nidia Navarrete y Santa Isabel; presta los servicios educativos en dos jornadas, en los niveles de preescolar, Básica primaria, Básica Secundaria, Media Técnica y jornada nocturna (ciclo 3,4,5,6 sede principal), cuenta con una población de 3.115 estudiantes, provenientes de todos los sectores urbanos de la localidad y algunas veredas rurales, es dirigida por la comunidad religiosa de las Hermanitas de la Anunciación. La IE desarrolla proyectos como la muestra empresarial, Expoateneo, Ondas, Roboteens y un programa de articulación de la media técnica con el Sena.

Actualmente la sede principal, jornada de la mañana cuenta con una población de 510 estudiantes, distribuidos en trece (13) grupos. Los grados séptimos están conformados por una población de 114 estudiantes, distribuidos en tres (3) grupos, en los cuales se encuentran niñas de 11 a 13 años de edad. Las familias que conforman la comunidad educativa devengan su sustento como empleados en empresas, trabajo informal y otros se dedican al comercio.

1.5 Marco metodológico

1.5.1 Tipo de investigación

La propuesta de aula, se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de tipo exploratorio, sobre el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracción a partir de los significados como operador y medida en los estudiantes del grado séptimo en la IE Ateneo, por cuanto este método permite conocer los puntos de vista de los participantes, interpretando los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen las personas. La implementación de este enfoque en la propuesta de aula permite inferir y conjeturar desde la visión de los estudiantes, ubicándolos como protagonistas de su aprendizaje. (Hernández, 2006)

1.5.2 Participantes en el proceso

La población escogida para el desarrollo de la propuesta fue el 10% de los estudiantes de los grados séptimos de la sede principal IE Ateneo de la jornada mañana (114 estudiantes), quienes están distribuidos en tres grupos (séptimo 1, 2 y 3); por tanto la muestra seleccionada correspondió a 12 estudiantes, los cuales fueron seleccionados por su disposición a participar en el estudio, ya que esto implicaba un trabajo extra clase y en jornada contraria.

1.5.3 Etapas del proceso

El estudio se llevó a cabo en dos fases:

La fase diagnóstica se realizó con la muestra seleccionada (12 estudiantes) del grado séptimo, con el fin de determinar las habilidades, dificultades y errores que presentaban al resolver situaciones que involucraran números racionales en la representación como fracción y sus diferentes significados.

La fase de implementación se realizó con la muestra seleccionada (12 estudiantes) en jornada contraria, esta fase tuvo una duración de tres (3) semanas distribuidas en seis (6) sesiones, que se desarrollaron los días martes y jueves, con un tiempo de dos horas (120 minutos). En la cual se analizó el desempeño de los estudiantes a través de la propuesta de aula conformada por tres situaciones.

1.5.4 Metodología de las sesiones de trabajo

Durante las sesiones se desarrollaron las tres situaciones de la propuesta, cada una como un espacio de interrogantes que posibilitaron la construcción del conocimiento matemático a través de aspectos concretos, conceptuales y simbólicos, permitiendo la aplicación significativa de los conceptos matemáticos al formular y resolver problemas. Cada situación está integrada por tareas que son el conjunto de actividades y ejercicios que permiten la comprensión del concepto

matemático y cada actividad está diseñada por preguntas que son los enunciados interrogativos que permiten obtener la información sobre un objeto de estudio.

El papel del docente investigador es de mediador y observador del proceso, con el fin de evaluar el desempeño de los estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo y la pertinencia de la propuesta al proceso de aprendizaje.

1.5.5 Metodología empleada en la recolección de la información

En la fase diagnóstica se recolectó la información para determinar los saberes previos, las estrategias empleadas, las dificultades y errores en los estudiantes del grado séptimo sobre los números racionales en la representación como fracción.

1.5.5.1 Etapa diagnóstica

En esta etapa se recolectó la información para determinar los conocimientos previos que poseen los estudiantes, las estrategias de solución y los errores que comúnmente se presenta al resolver actividades sobre los números racionales en la representación como fracción. Para ello, se diseñó la prueba diagnóstica conformada por 10 preguntas en las que se abordó los diferentes significados de la fracción, haciendo énfasis en los significados como operador y medida.

1.5.5.2 Fase de implementación

En la fase de implementación, se analizó el desempeño de los estudiantes a través de la prueba diagnóstica, con el fin de identificar las dificultades que afectan el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracción en los estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo.

1.5.6 Procedimiento de análisis

En la fase de diagnóstico se reúne problemas relacionados sobre los significados de la fracción. El análisis se realizó describiendo las estrategias y errores presentados en los estudiantes al encontrar la solución, se determinó el tipo de respuestas haciendo un análisis cualitativo que permitiera una explicación de sus respuestas y la identificación de estrategias y errores cometidos.

En la fase de implementación de la propuesta, se generaron actividades con las cuales se pretendía que el estudiante adquiriera nuevas habilidades en los significados de la fracción como operador y medida a través de la resolución de problemas, de modo que permitiera la construcción del aprendizaje de los números racionales y reforzara sus conocimientos sobre la fracción. En esta fase se hizo la observación del desempeño de los estudiantes frente al objeto matemático y se analizaron los aportes de la propuesta al proceso de construcción del aprendizaje.

CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA

Este capítulo presenta los referentes teóricos que fundamentan la problemática, está conformado por tres componentes: aspecto curricular, aspecto matemático y aspecto didáctico. El aspecto curricular, hace énfasis en los LC y los EBC en Matemáticas, el aspecto matemático hace referencia al número racional, la historia, el concepto y los significados de la fracción desde diversos autores y el aspecto didáctico trata sobre los números racionales, las fracciones en el contexto escolar, los números racionales como operador y medida y las situaciones problema como estrategia para la construcción de aprendizajes matemáticos.

2.1 Aspecto Curricular

2.1.1 Enfoque nacional

Los LC de Matemáticas (MEN, 1998) y los EBC en Matemáticas (MEN, 2006), son referentes para la planificación y organización de criterios en la enseñanza de las matemáticas en Colombia. Los lineamientos mencionados son una propuesta del MEN, con el fin de orientar el currículo y los enfoques que debe tener la enseñanza de las matemáticas en el país. Estos lineamientos proponen organizar el currículo atendiendo a tres grandes aspectos: procesos generales, conocimientos básicos y contexto.

Los procesos generales hacen referencia al aprendizaje, desde la resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los conocimientos básicos se relacionan con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, estos son: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. El contexto hace alusión a los ambientes que rodean al estudiante y contribuyen al sentido de las matemáticas que se aprende, es decir los espacios para generar y movilizar procesos de pensamiento que permitan la construcción de conceptos matemáticos, estos contextos son: matemático, vida diaria y otras ciencias.

Para aprovechar el contexto como un recurso en el proceso de enseñanza se hace necesaria la intervención continua del maestro para transformar y enriquecer ese contexto con la intención de que los estudiantes aprendan. Estas intervenciones generan preguntas y situaciones interesantes que por estar relacionadas con su entorno son relevantes para el estudiante y le dan sentido a las matemáticas. Así es como del contexto amplio generan situaciones problemáticas, convirtiéndose en un espacio de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes al interactuar entre ellos mismos y el profesor a través de un objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática a través de la exploración del problema, construcción de estructuras, planeación y reflexión sobre modelos (MEN, 1998)

2.1.1.1 Procesos generales

Los procesos generales en relación con las matemáticas, están asociados con aquellos conocimientos que determinan si un estudiante es matemáticamente competente (MEN, 1998).

Los procesos generales en matemáticas son:

Resolución y Planteamiento de Problemas:

Este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que desarrollan en el estudiante una actitud mental constante e indagadora, permitiendo fomentar la consecución de diversas estrategias de solución, encontrar resultados a situaciones problema y originar otras situaciones de aplicación. Estas situaciones pueden surgir de la vida cotidiana, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas posibilidades para la construcción del saber; estas situaciones proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que se aborden experiencias cotidianas para que sean más significativas para los estudiantes.

Razonamiento:

Este proceso permite utilizar argumentos propios para exponer ideas, hacer predicciones y conjeturas, justificar o refutar las estrategias y los procedimientos, dando explicaciones e interpretaciones coherentes sobre el objeto de estudio, permitiendo comprender que las

matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y fortalecen la capacidad de pensar.

Comunicación:

Este proceso consiste en la adquisición y dominio de los lenguajes propios de las matemáticas, los cuales se adquieren fomentando la discusión frecuente en el aula, la argumentación de situaciones, conceptos y simbolizaciones, que conlleve a demostrar los niveles de abstracción, al ser capaz de traducir su lenguaje natural en lenguaje simbólico y compartir el significado de las palabras, frases, gráficos y símbolos en entre pares, en contextos matemáticos y de otras ciencias.

Modelación:

Este proceso consiste en identificar esquemas o comportamientos que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas o matemáticas para reconstruirlas mentalmente. La modelación en una situación problema permite decidir qué variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos matemáticos de distintos niveles de complejidad, a partir de los cuales se pueden hacer predicciones, utilizar procedimientos numéricos, obtener resultados y verificar qué tan razonable son estos respecto a las condiciones iniciales.

Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos:

Este proceso tiene por objetivo formar en el estudiante, la habilidad de identificar procedimientos, seguir instrucciones, transformar expresiones numéricas según la necesidad y medir correctamente longitudes, áreas, volúmenes, etc; es decir que ejecute tareas matemáticas que suponen el dominio

de los procedimientos usuales que se puedan desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas, permitiendo con ello, demostrar su dominio sobre el concepto matemático.

2.1.1.2 Conocimientos básicos

Estos conocimientos están asociados con aquellos procesos específicos que aportan al desarrollo del pensamiento, ellos son el pensamiento lógico que actúa por medio de operaciones sobre las proposiciones y el pensamiento matemático que se distingue del lógico porque contempla el número y el espacio, dando lugar a la Aritmética y a la Geometría (MEN, 2006). El pensamiento matemático está representado en cinco tipos de pensamientos: pensamiento numérico y los sistemas numéricos; pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos; pensamiento espacial y los sistemas geométricos; pensamiento métrico y los sistemas de medidas; pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, a su vez cada uno de estos pensamientos está asociado a un sistema conceptual y simbólico mediante el cual se refina el pensamiento respectivo.

Se presenta a continuación la relación que establecen los pensamientos matemáticos con las diversas disciplinas que conforman el área de matemáticas: la Aritmética con el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, la Geometría con los pensamientos espacial y los sistemas geométricos y el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, el Álgebra y el Cálculo con los pensamientos métrico y los sistemas de medidas y el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, la Estadística descriptiva e inferencial con el pensamiento aleatorio y los

sistemas de datos. También se establecen relaciones entre los procesos específicos y los sistemas conceptuales y simbólicos, los cuales son:

Pensamiento numérico y los sistemas numéricos:

Este pensamiento hace énfasis en el sentido operacional, los conceptos, las relaciones, las propiedades, los problemas y los procedimientos; se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos, reflexionando sobre las interacciones entre los conceptos, las operaciones y los números (MEN, 1998).

Pensamiento espacial y los sistemas geométricos:

Es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, sus relaciones, sus transformaciones y las diversas traducciones o representaciones materiales. El componente geométrico del pensamiento, permite a los estudiantes examinar y analizar las propiedades de los espacios bidimensional y tridimensional, así como las formas y figuras geométricas que se hallan en ellos (MEN, 2006).

Pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas:

Este pensamiento se enfoca en la interacción que genera el proceso de medir el entorno frente a situaciones de utilidad y aplicabilidad, en la cual cobra sentido las matemáticas (MEN, 1998).

Pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos:

Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y en la Educación Media el cálculo diferencial e integral (MEN, 2006).

Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos:

Este tipo de pensamiento, llamado también probabilístico o estocástico, ayuda a tomar decisiones en situaciones de incertidumbre, de azar, de riesgo o de ambigüedad por falta de información confiable, en las que no es posible predecir con seguridad lo que va a pasar. El pensamiento aleatorio se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y en la combinatoria. Ayuda a buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, abordándolos con un espíritu de exploración y de investigación mediante la construcción de modelos de fenómenos físicos, sociales o de juegos de azar y la utilización de estrategias como la exploración de sistemas de datos, la simulación de experimentos y la realización de conteos (MEN, 2006).

2.1.1.3 Contexto

Los contextos, son entendidos como aquellos ambientes que rodean al estudiante y dotan de sentido la actividad matemática. Desde los EBC en matemáticas (2006), se define:

- Contexto inmediato o contexto del aula, creado por la disposición del aula de clase (parte física, materiales, normas explícitas o implícitas, situación problema preparada por el docente).
- Contexto escolar o contexto institucional, conformado por los escenarios de las actividades diarias, la arquitectura escolar, la cultura y los saberes de los estudiantes, docentes, empleados administrativos y directivos. De igual forma, el PEI, las normas de convivencia, el currículo explícito y oculto hacen parte de este contexto.
- Contexto extraescolar o contexto sociocultural, descrito desde lo que pasa fuera del ambiente institucional, es decir desde la comunidad local, la región, el país y el mundo.

Estos tres contextos no se dan de forma aislada o en forma secuencial, al contrario estos toman significado en cualquier momento del acto educativo. El MEN (1998) acerca de los contextos referencia que se desarrollan en el interior de las situaciones cotidianas para el estudiante, como el espacio en el cual los estudiantes tienen la posibilidad de acercarse al objeto matemático a través de lo vivido en su entorno.

2.1.1.4 Procesos relacionados con la propuesta

Los procesos generales que permean la propuesta de aula son: Resolución y Planteamiento de problemas, Razonamiento, Comunicación, Modelación y Elaboración, Comparación y ejercitación de procedimientos. A continuación se presenta los aportes de cada proceso general a la propuesta: Resolución y Planteamiento de problemas:

Su aporte a la propuesta se evidencia en el desarrollo de una actitud mental constante e indagadora en el estudiante, que genera diversas estrategias de solución y comprobación de resultados. La puesta en marcha de la propuesta va dirigida a problemas de la vida cotidiana, que proporcionaron el espacio de participación para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos de aprendizaje conducentes a la construcción de nuevos conocimientos.

Razonamiento:

Este proceso aporta a la propuesta de aula en la organización de los saberes previos y concepciones frente al objeto de aprendizaje, permitiendo la utilización de argumentos propios para exponer ideas y dar origen a estrategias de solución, entendiendo que las matemáticas más que una memorización de propiedades y algoritmos, son lógicas y fortalecen la capacidad de pensar.

Comunicación:

Este proceso aporta a la propuesta de aula, en la adquisición y dominio de conceptos sobre los números racionales, los cuales se logran a partir de la interacción y la discusión sobre el objeto matemático, la argumentación de los procedimientos, conceptos y simbolizaciones, que conlleven a demostrar los niveles de abstracción, al ser capaz el estudiante de traducir su lenguaje natural en lenguaje simbólico y compartir lo aprendido con en su vida, en contextos matemáticos y de otras ciencias.

Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos:

Este proceso es clave en la formación del estudiante en el desarrollo de la habilidad de identificar procedimientos, seguir instrucciones y realizar procesos de medición, permitiendo demostrar su dominio sobre el concepto matemático.

Los procesos específicos determinados por los conocimientos básicos, permean la propuesta a través de los pensamientos numéricos y sistemas numéricos, Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos, Pensamiento Métrico y Sistemas Métricos o de Medidas, a continuación se relacionan los aportes de cada pensamiento a la propuesta:

El pensamiento numérico y los sistemas numéricos aportan a la propuesta a través del reconocimiento del significado del número, la comprensión del sentido y significado de las operaciones, las relaciones entre los números y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. Es por ello que este pensamiento es un eje central para la propuesta, del cual se toma

el estándar de competencia que establece que al terminar el grado séptimo los estudiantes deben resolver y formular problemas en contextos de medidas utilizando los números racionales en sus distintas expresiones (MEN, 2006).

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos aporta al propuesta desde la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, que se ve evidenciado en el efecto de aplicación de un número racional como operador en una cantidad o magnitud y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2006).

El pensamiento métrico y los sistemas métricos o de medidas aportan a la propuesta a través del conocimiento sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones, puesto que algunas actividades de la vida diaria acercan a los estudiantes a la medición y les permite desarrollar conceptos y destrezas, dando como resultado la comprensión; en este sentido se está considerando la interacción que genera el proceso de medir el entorno frente a situaciones de utilidad y aplicabilidad, en la cual cobra sentido las matemáticas (MEN, 1998). Cabe destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y las apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta

Los contenidos en la estructura curricular deben responder a la planeación de estrategias pedagógicas que se orienten desde los pensamientos matemáticos y sus sistemas (enseñanza), al desarrollo de los procesos generales (aprendizaje) y a la inclusión de los diferentes contextos que promuevan el pensamiento crítico y articulado a la realidad como ejes que regulan la construcción de conocimientos y la transformación en saberes desde la idea de un ser competente que asuma la responsabilidad conjunta del aprendizaje. (MEN, 2006).

En este sentido, el EBC en matemáticas (2006) dice: “Los estándares para cada pensamiento están basados en la interacción entre la faceta práctica y la formal de las matemática y entre el conocimiento conceptual y el procedimental” Cada estándar posee una complejidad conceptual y una gradualidad del aprendizaje de las matemáticas, que se condensa en la coherencia vertical que hace referencia a la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados y una coherencia horizontal que hace referencia a la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

En la tabla 5 se presenta un esquema de la coherencia vertical de los EBC en matemáticas en cuanto al pensamiento Numérico y sistemas numéricos, para los grados 6° a 7° asociados a los números racionales, que aportan al diseño de la propuesta:

Tabla 5 Coherencia vertical Pensamiento numérico y sistemas numéricos

COHERENCIA VERTICAL	
De 6° a 7° Pensamiento Numérico y sistemas numéricos • Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. • Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones • Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas	De 10° a 11° • Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos
	De 8° a 9° • Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos
	De 4° a 5° • Interpreto las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones • Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
	De 1° a 3° • Reconozco significados del número en diferentes contextos. • Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones • Describo situaciones de medición utilizando fracciones comunes

En la tabla 6 se presenta un esquema de la coherencia vertical de los EBC en Matemáticas respecto al Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, para los grados 6° a 7° asociados a los números racionales, que aportan al diseño de la propuesta:

Tabla 6 Coherencia vertical Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos

COHERENCIA VERTICAL	
De 6° a 7° Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	De 10° a 11° Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas
	De 8° a 9° Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas
	De 4° a 5° - Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos. - Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
	De 1° a 3° - Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas. - Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual.

En la tabla 7 se presenta un esquema de la coherencia vertical de los EBC en Matemáticas referente al pensamiento Métrico y sistemas de medidas, para los grados 6° a 7° asociado a los números racionales, que aportan al diseño de la propuesta:

Tabla 7 Coherencia vertical Pensamiento métrico y sistemas de medidas

COHERENCIA VERTICAL	
De 6° a 7° Pensamiento Métrico y sistema de medidas Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud	De 10° a 11° Resuelvo y formulo problemas que involucren magnitudes cuyos valores medios se suelen definir indirectamente como razones entre valores de otras magnitudes, como la velocidad media, la aceleración media y la densidad media.
	De 8° a 9° Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.
	De 4° a 5° Selecciono unidades, tanto convencionales como estandarizadas, apropiadas para diferentes mediciones.
	De 1° a 3° - Comparo y ordeno objetos respecto a atributos medibles. - Realizo y describo procesos de medición con patrones arbitrarios y algunos estandarizados, de acuerdo al contexto

En la tabla 8 se presenta un esquema de la coherencia horizontal de los EBC en matemáticas en cuanto al Pensamiento numérico y sistemas numéricos, para los grados 6° a 7° asociado a los números racionales, que aportan al diseño de la propuesta:

Tabla 8 Coherencia horizontal grado sexto y séptimo

COHERENCIA HORIZONTAL	
De 6° a 7° Pensamiento Numérico y sistemas numéricos • Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. • Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medida	Pensamiento Métrico y sistemas de medidas • Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud
	Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).
	Pensamiento Espacial y sistemas geométricos • Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.
	Pensamiento Aleatorio y sistemas de datos • Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.

2.2 Aspecto Matemático

2.2.1 Historia de los números racionales

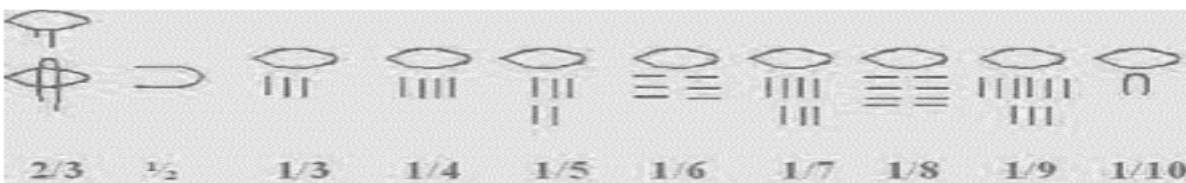
El desarrollo intelectual del hombre ha estado ligado a la necesidad de solucionar problemas, es así que ante la necesidad de medir (longitudes, áreas, tiempos, entre otras) porciones más pequeñas o mayores que la unidad de referencia, se originan los números racionales.

Según Fandiño (2009), los primeros usos sobre las fracciones se originan en los egipcios y babilonios, evidenciándose en los registros históricos hallados en tablillas hechas por estas civilizaciones. En la civilización egipcia la fracción surge en el contexto de la resolución de problemas sobre la vida real relacionados con el reparto, es decir, aparecen con un claro significado de cociente; este sistema fue utilizado para el reparto de tierras, por esta época se le daba tributo al faraón y esto hizo que los egipcios hallaran la forma de distribuir de forma equitativa su producción; esto quiere decir que para los egipcios las fracciones estuvieron presentes tanto en la contabilidad como en el trabajo.

En el papiro de Rhind escrito hacia el 1.650 aC, se puede apreciar que los egipcios expresaban las fracciones como suma de fracciones unitarias. Si querían repartir 3 panes para 5 personas, dividían cada pan en dos partes iguales y daban un pedazo a cada persona, el medio pan restante, lo dividían en 5 pedazos lo que equivale a $\frac{1}{10}$ entonces cada uno recibía $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, lo que equivale a $\frac{6}{10}$. De este modo podían expresar la fracción deseada. Se debe resaltar que ellos usaron solo fracciones unitarias y que solo se han conocido dos excepciones que son $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$. El símbolo usado para la representación de la fracción se reconoce como Ro^2 . (Hurtado, 2012).

En la figura 1 se muestran los símbolos de fracciones utilizados por los egipcios.

Figura 1 Símbolos de fracciones en los egipcios



Los babilonios decidieron optar por un sistema posicional sexagesimal para cantidades enteras que permitía realizar extensiones para representar cualquier cantidad no entera, con un sistema uniforme de medidas que disponía de una unidad y de múltiplos y submúltiplos sexagesimales de la misma, por lo que el resultado se expresaba mediante cantidades enteras y fracciones sexagesimales; este sistema ha mantenido una utilidad considerable en nuestros sistemas actuales de medidas horarias y de medidas de ángulos.

Respecto a los griegos se hace mención a la noción de fracción y sus propiedades, la cual está asociada a la razón entre dos números y no se concebía como otro tipo de número llamado fracción o número racional, sino que se interpretaba como una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo. La escritura de este tipo de números no fue uniforme, hay quienes escribían la correspondiente palabra para el numerador y un número para el denominador, otros escribían el numerador y duplicaban el denominador, otras veces se escribía el numerador seguido de la palabra en parte y después el denominador. (Hurtado 2012)

Por su parte, los astrónomos griegos utilizaron el sistema sexagesimal para sus cálculos, posiblemente importado de Babilonia. El uso de las fracciones sexagesimales les permitía hacer divisiones más fácilmente que con las fracciones unitarias, así Ptolomeo subdividía sus grados en 60 partes *minutae primae* y cada uno de ellos en 60 partes *minutae secundae*. Sin embargo, el uso de expresiones no enteras en terrenos científicos no tenía significado para el hombre práctico que necesitaba utilizar las fracciones en situaciones cotidianas, sobre todo de tipo comercial en las que se consideraban la expresión de partes de la unidad monetaria o de una medida. De este modo, se

encuentra en los escritos de Herón recurrencia a las fracciones unitarias para representar las fracciones comunes (Hurtado, 2012).

En los hindúes y árabes, se conoce que los hindúes en el siglo VI notaban a las fracciones con numerador encima del denominador pero sin raya de fracción y dieron continuidad a la descomposición de unidades fraccionarias.

Los árabes son los que introducen las líneas vertical y horizontal para notar fracciones. Además, en los árabes aparece el significado de fracción como razón en el sentido de proporción de cambio entre valores de monedas diferentes (Hernández, 2010).

En Occidente tuvieron que pasar muchos siglos hasta que los musulmanes introdujeron su sistema de numeración, conocido como indoarábigo. Este paso fue clave para la comprensión y el estudio de los números racionales en la vieja Europa. Sin embargo, no fue hasta el S. XIII cuando Leonardo de Pisa, más conocido por su apodo Fibonacci, introdujo en Europa el concepto de números quebrados o números “ruptus”, empleando además la raya para separar el numerador del denominador. A principios del siglo XV, el árabe Al Kashi fue el que generalizó el uso de los números decimales tal y como los conocemos hoy.

A finales del siglo XVI, Simon Stevin desarrolló y divulgó las fracciones decimales que se expresaban por medio de números decimales: décimas, centésimas, milésimas, entre otras, pero los escribía de una forma complicada; así para 456, 765 escribía 456 (0) 7(1) 6(2) 5(3).

A principios del siglo XVII, los números decimales ya aparecieron tal y como los escribimos hoy, separando con un punto o una coma la parte entera de la parte decimal. Los números decimales se impusieron, en casi todos los países, al adoptarse el Sistema Métrico Decimal, en el siglo XVIII, concretamente en 1792.

2.2.2 Definición de número racional y sus términos asociados para la propuesta

Para identificar los objetos matemáticos utilizados en el desarrollo de la propuesta, es conveniente precisar en las definiciones del número racional y sus términos asociados que aportan a la propuesta, con este propósito se presenta la conceptualización de: número racional, número fraccionario y fracción

2.2.2.1 Número racional

Un número racional que notaremos $\left(\frac{m}{n}\right)$, se define mediante las parejas de números enteros que sean equivalentes a una pareja dada (m, n) con n diferente de 0 ($n \neq 0$) esto es:

Un número racional $\left(\frac{m}{n}\right)$ es equivalente a otro número racional $\left(\frac{a}{b}\right)$ si y solo si el producto de sus extremos ($\mathbf{m * b}$) es igual al producto de sus medios ($\mathbf{n * a}$) tal que los denominadores ($\mathbf{n, b}$) sea diferentes de 0 y $\mathbf{m, n, a, b}$ pertenezcan a los números enteros (Quispe, 2011).

$$\left(\frac{m}{n}\right) \approx \left(\frac{a}{b}\right) \text{ si y solo si } \mathbf{m * b = n * a tal que } \mathbf{n, b \neq 0 \text{ y } m, n, a, b \in \mathbb{Z}}$$

Como afirma Restrepo (1998), para determinar la relación de equivalencia en $\mathbb{Q}$, se debe tener en cuenta que:

Sea H el conjunto de las parejas $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ **tales que $q \neq 0$** :

$$H = \{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: q \neq 0\}$$

La relación $(p, q) \sim (r, s)$ **si $ps = qr$** es una relación de equivalencia en H .

Demostración:

$(p, q) \sim (p, q)$ **si $pq = qp$. si $(p, q) \sim (r, s)$ entonces $(r, s) \sim (p, q)$.**

En efecto

$ps = qr$ implica $rq = sp$. si $(p, q) \sim (r, s)$ y $(r, s) \sim (t, u)$ entonces $(p, q) \sim (t, u)$

En efecto **$ps = qr$ y $ru = st$ implica $pu = qt$ ya que**

$psu = qru = qst$, $(pu)s = (qt)s$ y $pu = qt$ por conmutatividad puesto que $s \neq 0$.

Denotaremos por $\frac{p}{q}$ ó p/q ($q \neq 0$) a la clase de equivalencia $[(p, q)]$. Es decir $\frac{p}{q} = [(p, q)]$

Con esta notación, $\frac{p}{q} \sim \frac{r}{s}$ **si y sólo si $ps = qr$**

Por ejemplo

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} \text{ si y sólo si } 1 \times -2 = 2 \times -1 \rightarrow -2 = -2$$

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} \text{ si y sólo si } -3 \times -4 = 4 \times 3 \rightarrow 12 = 12$$

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ si y sólo si } 2 \times 12 = 3 \times 8 \rightarrow 24 = 24$$

A partir de lo anterior por ser $\approx$ una relación de equivalencia en $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^*)$ se puede formar el conjunto cociente $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}^*)/\approx$ que se denomina el conjunto de los números racionales.

Se llamará cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$ al cuerpo de cocientes de $\mathbb{Z}$. Los elementos de $\mathbb{Q}$ son las fracciones con $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Cuando b sea positivo. El cuerpo $\mathbb{Q}$ está totalmente ordenado por la relación. Resulta sencillo ver que este orden extiende al de $\mathbb{Z}$. Se llamaría $+\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales positivos (mayores que 0) y $-\mathbb{Q}$ al de los negativos (menores que 0).

Recordemos además que si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ el número racional $\frac{a}{b}$ se puede considerar como el cociente que se obtiene al dividir a por b ; en donde b indica el número de partes en que se divide la unidad y a el número de partes que se toman.

El concepto matemático de número racional $\mathbb{Q}$, generalmente se define como una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros ($a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$) y $b \neq 0$, además que a y b son primos relativos; es decir si no tienen ningún factor en común más que 1.

2.2.2.2 Número fraccionario

Los números fraccionarios son el cociente de dos números a y b , que representamos de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$ donde a y $b \in \mathbb{N}$ (Flores, 2010).

2.2.2.3 Fracción

El concepto matemático de fracción corresponde a la idea intuitiva de dividir una totalidad en partes iguales, generalmente una fracción se define como una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números que están escritos uno sobre el otro y que se hallan separados por un vínculo. La fracción está formada por dos términos: el numerador y el denominador. El numerador es el número que se ubica encima del vínculo y el denominador es el que está debajo. Dependiendo del tipo de vínculo que se establezca entre el numerador y el denominador, las fracciones se pueden clasificar como propias e impropias, irreducibles y no irreducibles. Las propias se caracterizan porque el denominador es mayor respecto al numerador. Las Impropias por otro lado son aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador. Seguidamente se ubican las reducibles, es cuando el numerador y el denominador no son primos entre uno y otro, una característica que permite que la estructura pueda simplificarse. Finalmente las irreducibles son aquellas donde el numerador y el denominador son primos entre sí y por tal razón, no puede hacerse más simple (Flores, 2010)

2.3 Aspecto Didáctico

2.3.1 El aspecto didáctico del número racional

El aprendizaje de los números racionales es un asunto complejo, puesto que está relacionada con el hecho de que la fracción presenta diversos significados (homonimia) (Mancera, 1992), por otro

lado, una fracción puede representarse de diferentes formas (sinonimia) (Obando ,2003), teniendo en cuenta estos términos Mancera (1992) afirma que uno de los problemas en el aprendizaje de las fracciones es que el símbolo $\frac{x}{y}$ donde $x, y \in \mathbb{Z}$ y $y \neq 0$, está asociado a diversos significados. Ohlsson (1988), que propone la fracción como un avance significativo, en la caracterización alrededor de la enseñanza de los números racionales, ya que pone de manifiesto la complejidad del campo de significados de las fracciones al mostrar cómo estas pueden ser interpretadas desde cuatro constructos matemáticos y desde el significado procedimental que tiene su aplicación en contextos matemáticos, de otras ciencias y de la vida cotidiana.

La propuesta de aula contempla los números racional y los significados como operador y medida, en donde toma significado los EBC para el grado séptimo.

2.3.2 Significados del número racional en la representación como fracción

El estudio de la fracción incluye diferentes interpretaciones que posibilitan su construcción; significados que algunos autores denominan constructos, de acuerdo a Thomas Kieren (citado en Gairín, 2005), dichos constructos deben entenderse como las distintas interpretaciones de objetos del mundo real a objetos mentales. Los diferentes significados de la fracción son citados por autores como Vasco (1996), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (2005) y Múnera (2006). A continuación se realiza una descripción de los aspectos más importantes de cada uno de los significados:

La fracción como parte – todo

Es el significado que considera la fracción a/b como la relación existente entre dos cantidades específicas, en donde b (denominador) es el número de partes en las que se divide el todo o unidad presentado en forma discreta o continua, y a (numerador) es el número de partes tomadas del todo, haciéndose el paso de lo concreto a la representación matemática; así, la idea inicial de fracción consiste en dividir un todo en partes iguales o congruentes; ya sea discreto cuando involucra colecciones de objetos, o continuo si el todo es un segmento, un área o un volumen (Kieren, 1980). Con el significado parte todo se establece una relación simbólica entre dos números enteros a partir de una representación gráfica, desde la cual se formulan definiciones sobre los componentes de la fracción: el denominador indica las partes que existen y el numerador las partes que se consideran (Escolano y Gairín, 2005).

La fracción como cociente

Este significado es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir A unidades entre B partes iguales. Según Obando (2003) “De esta manera, cuando la fracción es interpretada como el resultado de una división, esta fracción tendrá un significado y no será un símbolo muerto, sin sentido para quien lo utiliza”. Obando (2003, p. 69).

La fracción como razón

Esta relación es tomada como la comparación numérica entre dos magnitudes o cantidades; es decir es la comparación numérica entre la medida que se toma conforme a una escala determinada.

Cuando se realiza comparaciones entre valores finitos o parte – parte en un conjunto hacemos referencia a las magnitudes discretas y cuando se realiza comparaciones entre infinitos valores contenidos en un intervalo o comparaciones parte- todo hacemos referencia a magnitudes continuas. Por lo tanto al realizar la interpretación de la fracción como razón comparamos cantidades de magnitudes diferentes, mientras que en la interpretación parte – todo en un contexto de medida solo se permite comparar cantidades del mismo tipo.

La fracción como Medida

La fracción como medida, aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. La comprensión de este significado les permitirá a los estudiantes resolver con mayor habilidad sumas y restas de fracciones y relacionarlos con otras representaciones como lo son los números decimales.

La fracción como Operador

Este significado es el transformador de un conjunto hacia otro conjunto equivalente; esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura asociada al uso de fracciones. (Perera y Valdemoros, 2009). Por lo tanto, es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b .

2.3.3 Número racional en la representación en fracción como operador y medida

El número racional en la representación en fracción como operador y medida se resaltan en esta propuesta de aula como herramientas potentes para la construcción del conocimiento matemático a la luz de los EBC en Matemáticas para los estudiantes del grado séptimo.

De acuerdo con Elguero (2009), basándose en los trabajos de Escolano y Gairín (2005), se identifican cuatro significados o subconstructos del número racional en su representación como fracción (medida, cociente, razón y operador), y la concepción parte-todo que está incluida en las restantes.

El número racional en la representación en fracción como operador $\frac{a}{b}$, se apoya en el significado de función donde a y $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$; es decir es el operador que transforma un valor particular n a través de dos acciones: multiplicando por el valor de a y dividiéndolo por b . En este sentido, se puede hablar de una acción que expresa una orden de ejecución, que al final de la transformación resulta ser indistinguible. Ejemplos de este uso del número racional lo observamos en “los $\frac{3}{5}$ de una clase son niños”, o “el 20% de descuento”. Nótese que en el segundo caso, el porcentaje también se asocia como operador, pues para hallar la cantidad porcentual será necesario multiplicar por 20 y dividir por 100. En general, como operador, los números racionales son transformadores que alargan o recortan los segmentos, aumentan o disminuyen el número de ítems en un conjunto de objetos discretos, o toman una figura en el plano geométrico como un triángulo o un rectángulo, y convertirla en otra figura más pequeña o más grande con la misma forma.

El papel del número racional en la representación en fracción como operador es la de transformador multiplicativo de un conjunto hacia otro conjunto equivalente, esta transformación se puede pensar como la amplificación o la reducción de una figura geométrica en otra figura a/b veces más grande ó a/b veces más pequeña (Kieren1980); en este caso la fracción actúa sobre otro número, en lugar de una entidad con sentido autónomo, esto se explicita cuando se piden, por ejemplo, los $4/5$ de 20 ó los $3/4$ de 56, donde operativamente se multiplica el entero por el numerador y se divide el producto por el denominador.

Escolano y Gairín (2005) señalan que el significado de operador es el de una función racional de la forma $y = ax$ con a racional, que produce transformaciones en una cantidad de magnitud obteniéndose otra cantidad de esa misma magnitud medida con la misma unidad. La actuación del operador es la síntesis de dos operadores enteros, uno que multiplica, el numerador; y otro que divide, el denominador. Estos autores señalan que para que sea posible aplicar operaciones indicadas por la fracción, es necesario conocerlas y dicho conocimiento lleva consigo el indudable $a = m/n$ como ajuste que indica que m es el número por el que se multiplica y n el número por el que se divide (Elguero 2009). La composición de operadores que definen la acción de m/n sobre la cantidad puede ser entendida como multiplicar por m y dividir entre n , o dividir entre n y multiplicar por m ; de acuerdo con lo anotado, el número racional como operador le da un significado funcional a la preposición de, y justifica el significado de función, actuando sobre un número modificándolo. Bajo esta interpretación el número racional es visto en el papel de transformador: algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica. Se concibe aquí como una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa.

El número racional en la representación como medida aparece cuando se desea medir una determinada magnitud, en la cual la unidad no está contenida un número entero de veces en la magnitud que se quiere medir. Esta relación permite al estudiante medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad, realizar comparaciones con la unidad, entre otros. En los números racionales en la representación como medida, se centra la atención sobre la partición sucesiva de la unidad, identificándose con la enseñanza de la recta numérica. Es por ello que Escolano y Gairín (2005, p. 12) afirman sobre la fracción como medida que “por su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad y la construcción de unidades de longitud conocida su representación fraccionaria”. Mediante esta magnitud se busca medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$ tomando como unidad de medida la longitud de otro segmento $\overline{CD}$. De este modo la fracción $\frac{a}{b}$ indica que el segmento $\overline{AB}$ tiene de longitud a veces la unidad de medida que resulta de dividir el segmento $\overline{CD}$ en b partes iguales.

En este sentido, Vasco (1994, p 4) propone que el puente entre los operadores y los puntos de la recta numérica empieza con la semirrecta (positiva) donde “lo importante es el aspecto dinámico; moverse, avanzar, etc. y que el punto o fraccionario estático sea como una marca al final del movimiento”, las magnitudes físicas que manejan los niños no tienen negativos, lo cual establece un orden, mediante la magnitud o distancia que hay desde un punto 0 (el origen) hasta otro punto llamado 1.

En cuanto a los racionales negativos. Vasco plantea que son contruidos mediante el sistema aditivo como desplazamientos contrarios, por ejemplo “correr hacia atrás” o “deslizarse hacia

atrás”. Esto conlleva prolongar la semirrecta en las dos iteraciones (positivo y negativo), a cada racional positivo le corresponde un opuesto o inverso aditivo marcado a la izquierda del cero y viceversa. El operador menos (-) es como un reflector, que ni aumenta ni disminuye las distancias medidas a partir del cero, pero sí cambia la orientación. Así, propone que: “En la básica secundaria hay que completar los fraccionarios positivos con los negativos. Hay que extender los órdenes estrictos y los ampliadores, así como las operaciones binarias, a toda la recta numérica. Hay que construir el llamado “orden de magnitud” u “orden en valor absoluto” (o el llamado pre-orden), y coordinar las órdenes con las operaciones”.

2.3.4 Las fracciones, en una mirada en el contexto escolar

Las fracciones y sus diferentes significados hacen parte de contextos matemáticos y de la vida cotidiana de los estudiantes. Es por ello que surge la pregunta ¿Cómo se debe abordar el aprendizaje de las fracciones, de modo que permitan la construcción de conocimientos matemáticos en los estudiantes?

Cuando se retoma la anterior pregunta, se hace una reflexión sobre el objetivo que pretende el maestro al enseñar, su preocupación constante por mejorar su quehacer pedagógico, en miras de una educación de calidad, que promueva la formación de un estudiante integral y competente, con condiciones necesarias para la construcción de su conocimiento y la aplicación de sus saberes en la solución de problemas, mediante la toma de decisiones asertivas que favorezca su entorno.

Este ideal que pretende el maestro en su quehacer pedagógico, se ve empañado al abordar las fracciones en el aula escolar, debido a dificultades que presentan los estudiantes en la representación, significación y operatividad del objeto matemático, lo cual será un obstáculo al acceder al conjunto de los números racionales.

Behr et al (1983) propone una caracterización del número racional a partir de siete subconstructos, estos son: medida fraccional, razones, tasas, cocientes, coordenada lineal, fracción decimal y operador. Esta clasificación en esencia, es una reorganización de la propuesta de Thomas Kieren. Años más tarde Ohlsson (1988) propone una caracterización semántica para las fracciones en términos de dos tipos de significados: el significado matemático y el significado aplicativo, desde esta perspectiva se distingue cuatro subconstructos que son: El constructo de la función cociente, el constructo del número racional, el constructo de los vectores y el constructo de la función compuesta (operador).

En Colombia se destaca el trabajo de Vasco (1996), el cual hace referencia al trabajo de Thomas Kieren(1980); este documento propone que la enseñanza de los números racionales debe ser organizada desde el constructor de los operadores (agrandadores o achicadores), y realizando conexiones con los otros significados de la fracción.

2.3.5 Las situaciones problema como herramienta en el aprendizaje

En las últimas décadas, se ha reflexionado sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estas reflexiones permiten plantear diferentes propuestas curriculares, en las cuales, se da mayor

relevancia al proceso enseñanza - aprendizaje y al papel preponderante del estudiante frente al conocimiento.

Una de estas reflexiones es la propuesta basada en situaciones problema, como una estrategia para la construcción de aprendizajes matemáticos (Muñera, 2006) esta idea es un método de enseñanza-aprendizaje centrado en el estudiante, y la forma como adquiere conocimientos, habilidades y actitudes a través de situaciones de la vida real. Su finalidad es formar estudiantes capaces de analizar y enfrentarse a los problemas de su contexto, valorando e integrando el saber que los conducirá a la adquisición de competencias que le permitan generar procesos de solución a su vida; este método, centra al estudiante como protagonista de su aprendizaje, partiendo de la necesidad para brindar solución a problemas cotidianos y enfocarse en conceptos que ayudan a desarrollar su concepción sobre el objeto matemático.

Por consiguiente, se concibe esta interacción como un espacio de cooperación para el aprendizaje, en el cual los estudiantes interactúan con el profesor y sus compañeros a través de un objeto de conocimiento, permitiendo fortalecer los procesos de pensamiento que permitan la construcción del objeto matemático y generar procesos adecuados para la construcción de nuevos conocimientos.

La situación problema debe permitir a los alumnos desarrollar procesos que propicien niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático; elementos necesarios en la construcción de conceptos matemáticos. Una situación problema debe estar conformada por: la red conceptual, el

motivo, los medios y los mediadores, las actividades, la validación y la evaluación (Obando y Múnera, 2003).

La red conceptual:

La red conceptual permite establecer las relaciones existentes entre los conceptos que aborda la situación problema, posibilitando la toma de decisiones sobre los medios y mediadores, y el tipo de actividad que se debe proponer al estudiante, de tal forma que se logre coherencia entre las relaciones estructurales lógico matemáticas que se establecen en la situación y los aspectos conceptuales de la red que se espera aprendan los alumnos.

Motivo, medios y mediadores:

El motivo es la excusa, la oportunidad, el evento, la ocasión, el acontecimiento, la coyuntura, o el suceso, que puede ser aprovechado para generar una situación problema en el aula de clase. Su elección es muy importante, pues determina en gran medida las posibilidades de comprensión de la situación por parte de los estudiantes, y por ende, el que la situación pueda constituirse en un verdadero problema. Los medios son los soportes materiales sobre los cuales se estructura la situación problema. En este sentido, pueden ser materiales físicos, manipulables por los alumnos o abstractos. Un medio se hace un mediador en tanto que este permita el desarrollo de la actividad matemática del alumno.

Las actividades:

Las actividades que conforman las situaciones, son eje central, que permiten desarrollar en el estudiante la capacidad de crear estrategias de solución relativas a los problemas que enfrentan. En las actividades se cristalizan los análisis realizados por el maestro sobre la red conceptual, los medios y los mediadores, y se plasman en un diseño que, al ser vivido por el alumno, le permiten la construcción del conocimiento (Obando y Múnera, 2003).

La validación:

La validación es el mecanismo que permiten al estudiante determinar el grado de certeza de sus acciones, generando con ello, los cambios de estrategia necesarios para la resolución de la situación problema. El maestro debe introducir la validación en el aula de clase, a través de actividades de confrontación entre lo realizado por el estudiante y las conclusiones obtenidas, permitiendo con ello comprobar certezas o contradicciones que justifiquen el resultado.

La evaluación:

La evaluación en las matemáticas está influenciada con la manera de intervención pedagógica y los referentes teóricos que sustentan la posición curricular; en este sentido cuando la enseñanza es basada en situaciones, la evaluación se fusiona, de tal manera que se convierte en un proceso continuo, el cual reconoce los ritmos de aprendizaje en los estudiantes y las soluciones como canalizadoras del aprendizaje que pueden conllevar a provocar cambios conceptuales en los alumnos.

Las situaciones problema al ser trabajadas en el aula, propenden hacia el trabajo individual y grupal, la socialización colectiva, espacio de ejercitación e indagación de resultados.

Trabajo individual y grupal:

Los estudiantes se organizan en forma individual o equipos, con el fin de generar un espacio de debate en torno a la situación planteada; en este espacio se utiliza las ideas previas de los estudiantes, con el fin de crear un insumo frente al aprendizaje. El papel del docente es de facilitador, el cual debe fomentar la adquisición de nuevas inquietudes que conlleven a la construcción del conocimiento matemático. Carmen Chamorro expresa “Los aprendizajes previos de los alumnos se deben tener en cuenta para construir nuevos conocimientos, ya que estos no se producen a partir de la nada, su elaboración está sometida a adaptaciones, rupturas y a reestructuraciones, a veces radicales, de los conocimientos anteriores” (Chamorro, 2003, p 45).

Socialización colectiva:

Los estudiantes realizan una plenaria con el fin de compartir los saberes y argumentar los procedimientos que conlleven a la resolución de la situación planteada. Este momento también es conocido como la institucionalización del saber. “Esta etapa se constituye quizás en un elemento fundamental del trabajo, ya que en la institucionalización del saber el profesor organiza, sistematiza, da cuerpo y estructura a los objetos matemáticos que se quería fueran objeto de aprendizaje en los alumnos a través de las situaciones problema. En este momento, el maestro retoma la responsabilidad del trabajo, pues debe organizar de manera clara los objetos de conocimiento matemático presentes en la situación y así ayudar a los estudiantes a organizar los esquemas generales de pensamiento a través de los cuales estructura su conocimiento. (Obando, G; Múnera, J, 2003, p 197).

Espacio de ejercitación:

Los estudiantes se deben enfrentar al desarrollo de actividades, ejercicios y preguntas a través de la retroalimentación y ejercitación de competencias básicas asociadas al objeto de estudio. “El desarrollo de las destrezas procedimentales se refiere a conocer los procedimientos matemáticos, conocer cómo y cuándo usarlos apropiadamente, y de ser posible ante la posibilidad de adaptarlos a las diferentes tareas propuestas. [...]. En cierta, medida, el desarrollo de las destrezas debe estar vinculado, con la comprensión conceptual de los conceptos que fundamentan los procedimientos (Chamorro, 2003, p 16).

Indagación de resultados:

En este proceso aparece la evaluación implícita en cada uno de los aspectos anteriores; es decir que desde el desarrollo de las actividades el maestro valora el proceso de aprendizaje en los estudiantes, puesto que a través de las asesorías que imparte en los grupos de trabajo, observa los avances en la construcción del concepto matemático, permitiendo recoger los aportes y elementos sobre conceptos involucrados en la apropiación del conocimiento.

El aporte de las situaciones problema a la propuesta para el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones, a partir de los significados como operador y medida, está permeada por los elementos fundamentales, que conlleven a la construcción del objeto de estudio, permitiendo a los estudiantes desarrollar procesos que propicien niveles de estructuración simbólica y de lenguaje matemático.

CAPÍTULO 3: EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS RACIONALES EN LA REPRESENTACIÓN COMO FRACCIÓN A PARTIR DE LOS SIGNIFICADOS COMO OPERADOR Y MEDIDA

Este capítulo presenta la propuesta de aula en toda su extensión, iniciando con la recolección de información, los resultados y análisis de la información de la prueba diagnóstica, continua con el diseño de la propuesta, la esquematización y la descripción de cada uno de sus componentes, muestra las situaciones que la conforman, las cuales son diseñadas a partir de los referentes teóricos. Posteriormente se encuentra una amplia exhibición del proceso de implementación de la propuesta mediante los análisis de los resultados de la implementación realizada; finaliza este capítulo con algunas consideraciones, conclusiones y reflexiones sobre esta fase de implementación.

3.1 Recolección de Información

La recolección de información se realizó mediante una prueba diagnóstica sobre los números racionales en la representación como fracciones, esta prueba estaba conformada por 10 preguntas, las cuales permitían determinar los saberes previos, estrategias empleadas, dificultades y errores de los estudiantes frente al proceso de aprendizaje.

La población escogida para el desarrollo de la propuesta fueron los grados séptimos de la I.E Ateneo de la jornada mañana, con una población de 114 estudiantes, distribuidos en tres grupos

(séptimo 1, 2 y 3). La muestra seleccionada correspondiente al 10 % de la población fue de 12 estudiantes, los cuales fueron seleccionados por su disposición a participar en el estudio, debido a ser una trabajo extra clase y en jornada contraria con una duración de seis (6) sesiones de 120 minutos (2 horas), distribuidas en tres semanas. Se presenta el cuestionario implementado para la recolección de la información en el anexo 1.

3.1.1 Resultados y análisis de la información

Los resultados de la prueba se agruparon teniendo en cuenta los distintos significados de la fracción (Parte-Todo, Cociente, Medida, Operador) y su aplicación en situaciones matemáticas. A continuación se presentan los resultados y el análisis de la recolección de información (RI).

Pregunta 1 (P1) Colorea la parte que se indica en cada caso.									
☐	☐	☐	☐	☐	☐	$\frac{8}{10}$			
☐	☐	☐	☐	☐	☐	$\frac{3}{5}$			
☐	☐	☐	☐	☐	☐	$\frac{1}{2}$			

Esta pregunta tenía como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como parte todo, dividiendo un todo en partes iguales. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 2 Respuesta de estudiantes P1 Recolección de información

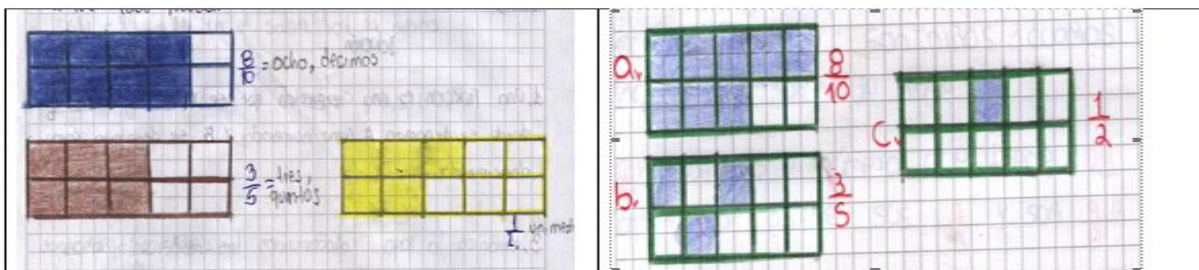


Tabla 9 Recolección de información pregunta 1(R1P1)

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
PARTE TODO	12	1	Estudiantes que representan adecuadamente la fracción en la unidad	2	16,7
		2	Estudiantes que tienen dificultad para representar la fracción en la unidad	4	33,3
		3	Estudiantes que no representa la fracción en la unidad	6	50

En la información de la tabla 9, se observa que 6 de 12 estudiantes no representan la fracción en la unidad, 4 de los 12 estudiantes no representan adecuadamente la fracción, debido a dificultades con la partición de la unidad y 2 de los 12 estudiantes representan adecuadamente la fracción coloreándola en la unidad. Estos resultados nos indican que los estudiantes de la muestra, presentan dificultades en la representación de la fracción, infiriéndose que tienen algunas falencias en la construcción del significado como parte todo.

P 2 ¿Cómo resolverías esta operación?

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$$

Esta pregunta tenía como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como cociente, identificando la fracción y resolviendo el algoritmo. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 3 Respuesta estudiantes P2 Recolección de información

Tabla 10 R1P2

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
COCIENTE	12	1	Estudiantes que resuelven la operación con fracciones homogéneas correctamente y justifica su respuesta con el procedimiento	10	83,3
		2	Estudiantes que tienen dificultad para resolver la operación con fracciones homogéneas	2	16,7

En la información de la tabla 10 se observa que 10 de 12 estudiantes resuelven la operación con fracciones homogéneas correctamente y 2 de los 12 estudiantes no realizan el proceso algorítmico

Tabla 11 R1P3

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
COCIENTE	12	1	Estudiantes que encuentran la relación entre las operaciones de adición y multiplicación de fracciones. Justifica su respuesta con el procedimiento	10	83,3
		2	Estudiantes que no reconocen la relación entre las operaciones aritméticas	2	16,7

En la información de la tabla 11 se observa que 10 de 12 estudiantes encuentran la relación entre las operaciones de adición y multiplicación de fracciones, argumentando su respuesta con el procedimiento algorítmico; 2 de los 12 estudiantes no reconocen la relación entre las operaciones aritméticas. Lo que indica que los estudiantes reconocen relaciones numéricas entre operaciones de adición y multiplicación de fracciones.

P4 Cómo podrías representar en una recta numérica las siguientes fracciones

$$\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7}, \frac{5}{7}, \frac{12}{7}$$

Esta pregunta tenía como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como medida, representando las fracciones en la recta numérica. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 5 Respuestas de estudiantes P4 Recolección de Información

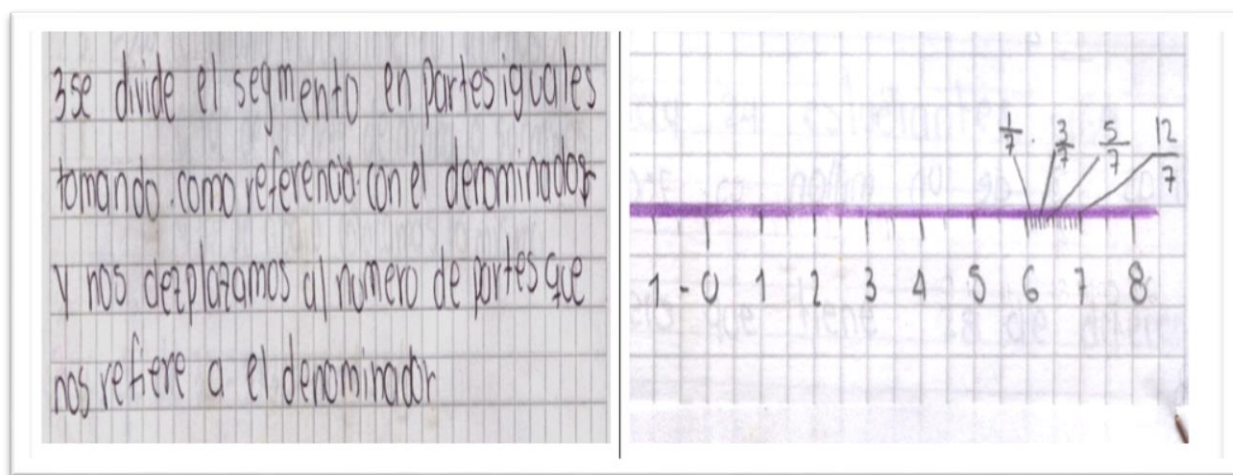


Tabla 12 R1P4

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
MEDIDA	12	1	Estudiante que ubican la fracción correctamente en la recta numérica	1	8,3
		2	Estudiantes que tienen dificultad para ubicar la fracción en la recta numérica	10	83,3
		3	Estudiantes que no ubican la fracción en la recta numérica	1	8,3

En la información de la tabla 12 se observa que 11 de 12 estudiantes no ubican correctamente las fracciones en la recta numérica y 1 de 12 estudiantes realizan correctamente la ubicación de la fracción en la recta numérica. Lo que indica que el 91,6% de los estudiantes no comprende el concepto de fracción como medida, es decir que presentan dificultades en la partición de la unidad en una magnitud.

P 5 De una cuerda de cien metros, María cortó $\frac{2}{5}$ partes, y Sofía $\frac{8}{20}$ partes, ¿Qué longitud de cuerda cortó cada una?

P8 En un grupo de 32 estudiantes, las tres cuartas partes son niñas ¿Cuántas niñas hay en el salón de clase?

Estas preguntas tenían como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como operador y puede establecer la operación de transformación de la cantidad o magnitud. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 6 Respuesta de Estudiantes P5 Recolección de Información

$100 \times 2 = 200 \div 5 = 40$ $\begin{array}{r} 200 \overline{) 5} \\ 0 \quad 40 \end{array}$ $100 \times 8 = 800 \div 20 = 40$ $\begin{array}{r} 800 \overline{) 20} \\ 0 \quad 40 \end{array}$	$\frac{2}{5} + \frac{8}{20} = \frac{16}{100}$ 1
---	--

Tabla 13 R1P5 Y R1P8

Relación	Número de estudiantes	%	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
OPERADOR PROCESO RESOLUCION DE PROBLEMAS	12	100	1	Estudiantes que formulan y resuelven el problema aplicando operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, que transforman la cantidad. Justifica su respuesta con el procedimiento	4	33,3
			2	Estudiantes que tienen dificultad para formular y resolver el problema	5	41,7
			3	Estudiantes que no responden la pregunta	3	25

En la información de la tabla 13 se observa que 4 de 12 estudiantes formulan y resuelven el problema correctamente, aplicando la operación pertinente, 5 de 12 estudiantes presentan dificultad para resolver el problema, 3 de 12 estudiantes no responden la pregunta. Lo que indica que el 67,7% de los estudiantes no comprenden la información para resolver la situación problema, lo cual impide la aplicación adecuada de un operador.

P 6 Calcula Los $\frac{3}{4}$ de 1.000.000 pesos

Esta pregunta tenía como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como operador y puede establecer la operación de transformación de la cantidad. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 7 Respuesta de estudiantes P6 Recolección de información

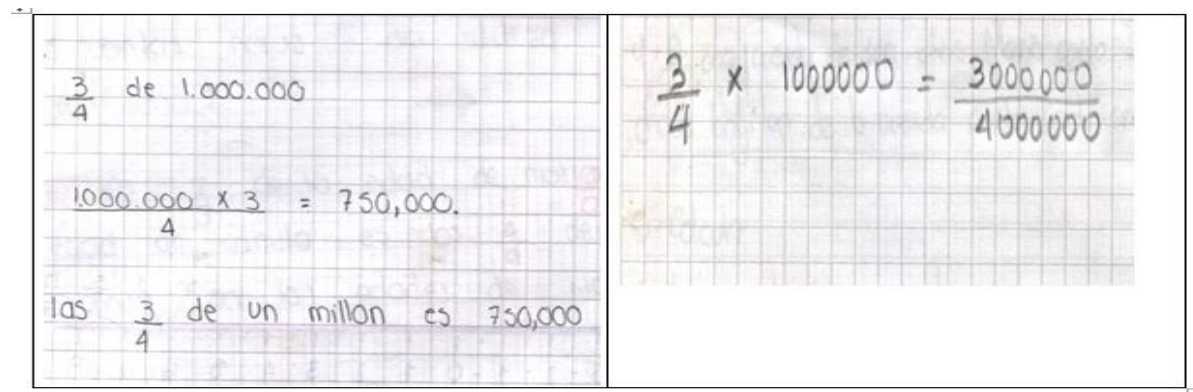


Tabla 14 R1P6

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
OPERADOR	12	1	Estudiantes que resuelven correctamente la pregunta, calculando el resultado con la aplicando el operador de la forma $\frac{m}{n} \times$, justifica su respuesta con el procedimiento	2	16,7
		2	Estudiantes que presentan dificultades para calcular el resultado.	8	66,7
		3	Estudiantes que no responden la pregunta	2	16,7

En la información de la tabla 14, se observa que 10 de 12 estudiantes presentan dificultades al calcular el resultado, puesto que no identifican la operación pertinente para la solución del problema, 2 de 12 estudiantes calculan el resultado adecuadamente, aplicando el operador necesario para encontrar el resultado, argumentando por medio del procedimiento algorítmico. Lo que indica que la 83,4% de los estudiantes tienen dificultad en la comprensión del significado como operador y su aplicación en la transformación de un valor numérico.

P 7 Qué relación encuentras entre la tira del punto 1 con la tira del punto 2?



Punto 1



Punto 2

Esta pregunta tenía como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como parte todo y puede establecer relaciones de equivalencia. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 8 Respuesta de estudiantes P7 Recolección de información

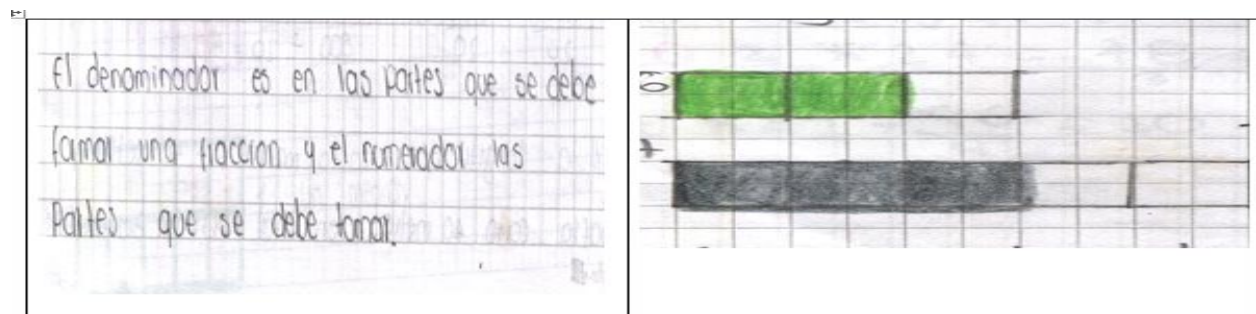


Tabla 15 R1P7

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
PARTE TODO	12	1	Estudiantes que encuentran la relación entre las particiones en la unidad y justifican en forma verbal	2	16,7
		2	Estudiantes que no encuentran la relación entre las particiones en la unidad.	4	33,3
		3	Estudiantes que no responden la pregunta	6	50

En la información de la tabla 15 se observa que 10 de 12 estudiantes no reconocen la relación entre las particiones de la unidad o no responden la pregunta, 2 de 12 estudiantes encuentran la relación y justifican en forma verbal. Lo que indica que el 83,3 % de los estudiantes tienen dificultad con el significado como parte todo, conllevando a las dificultades para establecer relaciones entre unidades o magnitudes particionadas de forma diferentes.

P 9 Rodolfo utiliza $\frac{1}{4}$ de un día a leer, $\frac{3}{8}$ del día a trabajar y el resto del tiempo a descansar.
¿Cuántas horas del día, utiliza para cada actividad?

P10 Los $\frac{2}{3}$ de la edad de María es 24 años y la edad de Camila es los $\frac{4}{9}$ de la de María ¿Cuáles son las edades de María y Camila?

Estas preguntas tenían como finalidad determinar si el estudiante reconoce el significado como operador y puede establecer la operación pertinente para resolver el problema. A continuación algunos ejemplos de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 9 Respuestas de estudiantes P9 Recolección de información

Handwritten student responses for problem P9:

Left side calculations:

$$\frac{24 \times 3}{4} = 18 \text{ hora lee}$$

$$\frac{24 \times 3}{8} = 9 \text{ hora trabaja}$$

Right side calculation:

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{4}{12}$$

Below the fraction sum, it says: "utiliza $\frac{4}{12}$ "

Tabla 16 R1P9 Y R1P10

Relación	Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
OPERADOR PROCESO RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	12	1	Estudiantes que no resuelven el problema adecuadamente, debido a la dificultad para reconocer el procedimiento aritmético necesario.	10	83,3
		2	Estudiantes que no responden la pregunta	2	16,7

En la información de la tabla 16 se observa que 10 de 12 estudiantes tiene dificultades para resolver el problema, debido a la dificultad para reconocer la operación aritmética necesaria para encontrar la solución al problema, 2 de 12 estudiantes no responden la pregunta. Lo que indica que el 100% de estudiantes presentan dificultades para resolver problemas con fracciones y aplicar el significado como operador para la transformación de una cantidad.

La información recolectada permitió identificar algunas falencias en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado séptimo referente a la comprensión de los números racionales en la representación como fracción; entre las cuales se identifican las particiones de la unidad y relación con las fracciones equivalentes, la ubicación de las fracciones en la recta numérica y resolver problemas en los que deben aplicar operadores fraccionarios a cantidades o magnitudes en situaciones problema. Es por ello, que estas falencias en el proceso de aprendizaje de los estudiantes del grado séptimo, sirvieron de insumo para diseñar la propuesta de aula, permitiendo la generación de estrategias acordes a las necesidades de los estudiantes que permitieron abordar efectivamente los números racionales en la representación como fracción.

3.2 Diseño de la propuesta de aula

La propuesta de aula se centra en el número racional en su representación como fracción, a través de los significados como operador y medida, tomando como referentes teóricos a Vasco (1996), Llinares y Sánchez (1997), Gairín (2005) Elguero (2009) y Zarzar (2013), y la utilización de situaciones problema como estrategia para el aprendizaje de las matemáticas. (Múnera, 2006). La propuesta de aula se enfoca en dos significados de la fracción, puesto que son herramientas potentes para la construcción del conocimiento matemático a la luz de los EBC para el grado séptimo; conforme a los estándares, los estudiantes de este nivel deben utilizar los números racionales, en su representación como fracciones para resolver problemas en contextos de medida.

Los significados como operador y medida, son poco estudiadas para la construcción del concepto de números racionales en la representación como fracciones, puesto que el significado de mayor divulgación en el ámbito escolar es el significado parte todo, de la cual se han realizado diversos trabajos de investigación posicionándola como una de las interpretaciones más intuitivas en los estudiantes y generadora de lenguajes y símbolos (Llinares y Sánchez, 1997) para la comprensión de la fracción. Es por ello que al abordar la enseñanza de las fracciones sería ideal potenciar los cinco significados (Parte- todo, cociente, razón, medida y operador), para de esta forma aprovechar los aportes que cada uno brinda a la conceptualización del objeto matemático y así poder superar las dificultades que se presentan con cada significado. Sin embargo, autores como Escolano y Gairín (2005), Llinares y Sánchez (1997) y Perera y Valdemoros (2009), consideran que la enseñanza simultánea de estos significados llevaría a la confusión de los estudiantes y proponen

hacerlo de forma secuencial durante el desarrollo del proceso escolar, comenzando con el significado de la fracción como medida para hacer el primer acercamiento al objeto matemático y finalizar con el significado de razón para vincular la idea de proporcionalidad.

Es por ello, que se pretende contribuir con esta propuesta, a una mejor comprensión de los números racionales a través del fortalecimiento de una de sus representaciones; la representación como fracciones a partir de los significados como operador y medida, se lleva a la clase a través de situaciones problema, en las que se utilizan una serie de actividades, tareas y juegos que faciliten la construcción del objeto matemático, generando interrogantes y reflexiones que conlleven a la conceptualización del objeto de estudio.

Entre los significados estudiados en la propuesta se encuentra la fracción como operador $\frac{a}{b}$, la cual actúa como función transformadora de una cantidad o magnitud, esto implica que hay que considerarla como una única entidad más que como un par de números enteros. En la fracción $\frac{a}{b}$ cada uno de los valores tiene distintas implicaciones en el resultado final, las cuales son multiplicar por a y dividir por b . Además, no hay exigencias en las relaciones de orden entre a y b , de manera que a puede ser mayor, menor o igual que b (Perera y Valdemoros, 2009).

Vasco (1994, p 32) plantea que uno de los significados de mayor importancia para el estudio de las fracciones es su isla principal como operadores o transformadores (achicadores y agrandadores). “Estos operadores no son símbolos para escribir en papeles o tableros, son construcciones mentales que se podrían describir como ciertos *"monstruos imaginarios"* que

achican o agrandan a las víctimas que se les acerquen”. Bajo esta interpretación las fracciones son vistas en el papel de transformaciones: “algo que actúa sobre una situación (estado) y la modifica”. Se concibe aquí la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones, o a la inversa.

El significado de fracción como medida contemplada también en esta propuesta, está referida inicialmente a la magnitud longitud; es por ello que Escolano y Gairín (2005, p. 12) afirman sobre la fracción como medida que “por su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad y la construcción de unidades de longitud conocida su representación fraccionaria”. Mediante esta magnitud se busca medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$ tomando como unidad de medida la longitud de otro segmento $\overline{CD}$. De este modo la fracción $\frac{a}{b}$ indica que el segmento $\overline{AB}$ tiene de longitud a veces la unidad de medida que resulta de dividir el segmento $\overline{CD}$ en b partes iguales.

Vasco (1994), plantea en cuanto a los racionales negativos, que son contruidos mediante el sistema aditivo como desplazamientos contrarios, por ejemplo “correr hacia atrás” o “deslizarse hacia atrás”. Esto conlleva prolongar la semirrecta en las dos iteraciones (positivo y negativo), a cada racional positivo le corresponde un opuesto o inverso aditivo marcado a la izquierda del cero y viceversa. El operador menos (-) es como un reflector, que ni aumenta ni disminuye las distancias medidas a partir del cero, pero sí cambia la orientación. Así, propone que: “En la básica secundaria hay que completar los fraccionarios positivos con los negativos. Hay que extender los órdenes estrictos y los ampliadores, así como las operaciones binarias, a toda la recta fraccionaria. Hay que construir el llamado “orden de magnitud” u “orden en valor absoluto” (o el llamado pre-orden), y coordinar los órdenes con las operaciones”.

La propuesta contempla que como alternativa para lograr niveles amplios de participación con los estudiantes, se debe diseñar e implementar situaciones problema, tal como lo proponen los L.C. en Matemáticas (MEN, 1998), de modo que se genere en los estudiantes procesos de actividad matemática que les faciliten la construcción de los conocimientos. El autor Múnera (2006), referencia que para la construcción del conocimiento matemático es pertinente utilizar las situaciones problema como estrategia, teniendo en cuenta que una situación problema la podemos interpretar como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Así, la situación problema debe permitir la acción, la exploración, la sistematización, la confrontación, el debate, la evaluación, la autoevaluación, la heteroevaluación; es decir una situación problema se puede entender, como un espacio para generar y movilizar procesos de pensamiento que permitan la construcción sistemática de conocimiento matemático.

La propuesta de aula, se desarrolla bajo un enfoque cualitativo; por cuanto este enfoque estudia la realidad en su contexto natural, interpretando los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen las personas participantes; la implementación de este enfoque implica la utilización y recolección de una gran variedad de materiales, entre los cuales se tienen la entrevista, experiencia personal, observaciones e imágenes, entre otras; que describen la rutina, las situaciones problema y los significados en la vida de las personas (Gómez, 1996, p 32). La implementación de este

enfoque en la propuesta de aula permite inferir y conjeturar desde la visión de los estudiantes, ubicándolos como protagonistas de su aprendizaje.

Una vez diseñada la propuesta, se valida su pertinencia implementándola en el grado séptimo de la I.E Ateneo de la jornada mañana, a través de una muestra seleccionada correspondiente al 10% de la población con 12 estudiantes, los cuales fueron seleccionados por su disposición a participar en el estudio, debido a ser una trabajo extra clase y en jornada contraria con una duración de seis (6) sesiones de 120 minutos (2 horas), distribuidas en tres semanas. En la cual se analizó el desempeño de los estudiantes a través de la propuesta de aula conformada por tres situaciones, mediante el método de tipo exploratorio, sobre el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a partir de los significados como operador y medida, por cuanto este método permite conocer los puntos de vista, interpretando los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen las personas.

La propuesta contempla dos aspectos fundamentales, estos son: la estructura de la propuesta y la propuesta de aula como tal.

3.2.1 Estructura de la propuesta de aula

La propuesta está conformada por tres situaciones. Cada situación está integrada por tareas que son el conjunto de actividades, juegos matemáticos y ejercicios que permiten la comprensión del objeto matemático y cada actividad está diseñada por preguntas que son los enunciados

interrogativos que permiten obtener la información sobre un objeto de estudio. En la implementación de la propuesta se contemplan 6 sesiones de clase, con un tiempo estimado por sesión de 120 minutos en jornada contraria, distribuidas en tres semanas. En la siguiente tabla se condensa la información sobre cada uno de estos aspectos:

Tabla 17 Estructura de la propuesta

Situación		Tareas	Número de preguntas	Número de sesiones de clase
1	Reconociendo transformaciones de un valor numérico	Tarea 1: Identificando transformaciones de un valor numérico con la maquina mágica	4	3
		Tarea 2: Transformaciones de un valor numérico en la recta numérica	2	
		Tarea 3: Analizando las transformaciones de un valor numérico	3	
		Tarea 4: Afianzando las transformaciones de un valor numérico	2	
		Tarea 5: Conceptualizando las transformaciones	1	
2	Pintando el salón de clase y las fracciones equivalentes	Tarea 1: Construyendo particiones diferentes a partir de una unidad	3	1
3	Compartiendo dulces y las transformaciones sucesivas	Tarea 1: Comprendiendo y generando una estrategia de solución	2	2
		Tarea 2: Dominó de fracciones como operador	3	
		Tarea 3 Aplicación de saberes sobre la fracción	3	

Para una mayor comprensión de la propuesta de aula, se presenta a continuación la estructura de cada situación, la cual contemplan los propósitos, contenidos matemáticos y desempeños resultantes de un proceso de implementación exitoso (Ver tablas desde la 20 hasta la 22).

Situación 1 (S1): Reconociendo transformaciones de un valor numérico

Tabla 18 Estructura situación 1

Estructura Situación 1		
Estándares básicos de competencia	Contenidos matemáticos	Desempeños
Pensamiento numérico y sistemas numéricos - Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida Pensamiento métrico y sistemas de medidas - Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos - Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación)	- Transformación de un valor numérico - Fracciones propias e impropias - Fracción como parte de una unidad - Fracción como cociente - Fracción como operador	- El estudiante reconoce los significados como operador y medida y los aplica al valor de una cantidad o magnitud. - El estudiante explica la transformación al aplicar un operador en un valor numérico - El estudiante aplica a una magnitud operadores como la mitad, tercera parte, cuarta parte, etc., y explica su resultado - El estudiante resuelve problemas en la que aplica el operador a una cantidad o magnitud.

Situación 2 (S2): Pintando el salón de clase y las fracciones equivalentes

Tabla 19 Estructura situación 2

Estructura situación 2		
Estándares básicos de competencias	Contenidos matemáticos	Desempeños
Pensamiento numérico y sistemas numéricos - Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida - Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones Pensamiento métrico y sistemas de medidas - Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos - Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas en relación con la situación que representan	- Fracciones como parte de una unidad - Fracciones como resultado de una medida - Fracción como operador - Comparación de fracciones - Fracciones equivalentes - Amplificación y simplificación de fracciones	- El estudiante reconoce la expresión de la forma $\frac{1}{n} \times$, como fracciones de una magnitud - El estudiante representa en la recta numérica el efecto al ser aplicados operadores de la forma $\frac{m}{n} \times$. - El estudiante identifica los números de la forma $\frac{m}{n} \times$, con $n \neq 0$ como el resultado de tomar m veces la fracción $\frac{1}{n} \times$, - El estudiante reconoce las fracciones equivalentes a partir de particiones diferentes en una unidad - El estudiante, dada dos fracciones, determina si son equivalentes

Situación 3 (S3): Compartiendo dulces y las transformaciones sucesivas

Tabla 20 Estructura situación 3

Estructura situación 3		
Estándares básicos de competencias	Contenidos matemáticos	Desempeños
Pensamiento numérico y sistemas numéricos - Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida - Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones Pensamiento métrico y sistemas de medidas - Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos - Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación)	- Fracciones como parte de una unidad - Fracciones como resultado de una medida - Resolución de problemas con la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $m \times$ y la forma $\frac{1}{n} \times$,	- El estudiante dados dos operadores de la forma $\frac{m}{n} \times$, aplica sucesivamente los operadores y analiza el resultado al aplicarlo - El estudiante formula y resuelve problemas que requieran el uso de operadores $\frac{m}{n} \times$

3.2.2 Propuesta de aula

La propuesta de aula “El aprendizaje de los números racionales a partir de los significados como operador y medida”, propone una nueva forma de abordar los números racionales en la representación como fracciones a través de los significados como operador y medida, esta propuesta está dirigida a alumnos del grado séptimo y su propósito es brindar sentido y significado a lo que se aprende, a través de tres aspectos relevantes como son: un aspecto concreto o manipulativo, un aspecto simbólico y un aspecto conceptual que se unifican para lograr el aprendizaje del objeto de estudio.

Esta propuesta está diseñada bajo dos pilares: una situación problema que orienta cada una de las preguntas y el contenido matemático que se desarrolla. Será guiada bajo el icono de Atenea, que es una representación de los estudiantes de la I.E Ateneo, con el fin de crear un personaje familiar para los educandos.

La propuesta de aula estaba conformada por tres situaciones. Cada situación está integrada por tareas y cada tarea está diseñada por actividades, juegos y ejercicios que permiten obtener la información sobre un objeto de estudio. Para una mayor comprensión de la propuesta de aula, se detallan a continuación las definiciones necesarias:

Situaciones:

En la propuesta de aula se empleó 3 situaciones de aprendizaje, las cuales eran espacios, momentos y ambientes organizados por el docente, en los que se estableció una serie de actividades de aprendizaje, con las cuales se evaluó el proceso de enseñanza. Estas situaciones tenían como fin la construcción de aprendizajes significativos que propiciaran el desarrollo de competencias en los estudiantes, mediante la resolución de problemas simulados o de la vida cotidiana.

Tarea:

En la propuesta de aula se emplearon diferentes actividades y ejercicios orientados a la resolución de una situación dentro de un contexto definido, mediante la combinación de todos los saberes disponibles en los estudiantes, que permitieron la asimilación del objeto matemático.

Juegos:

En la propuesta de aula se emplearon diversos juegos y actividades lúdicas como una herramienta para generar interés, motivación y movilizar el aprendizaje de los números racionales a través de diferentes estrategias didácticas y lúdicas que permitieron mejorar el aprendizaje de las matemáticas.

Desde este punto de vista, esta propuesta de aula pretende que los estudiantes deban tener experiencias que les permitan vivenciar su aprendizaje, desarrollando habilidades a través de procesos colaborativos y diálogos de aula que permitan compartir conocimientos, validar resultados, expresar ideas, estrategias y soluciones en lenguajes cotidianos, siendo una herramienta potente para la escritura de sus procesos, opiniones, hipótesis y conclusiones, permitiendo aumentar su confianza y autonomía con su aprendizaje, que le generen una adecuada construcción del saber y posibiliten su aplicación en la resolución de situaciones problema; a continuación se presentan cada una de las situaciones que la conforman.

Situación 1: RECONOCIENDO TRANSFORMACIONES DE UN VALOR NUMÉRICO

Atenea estuvo observando en la fotocopidora del colegio cómo lograban ampliar o reducir una imagen o un documento y esto le llamó la atención, le comentó a su profesor de Matemáticas buscando comprender ¿Cómo esta máquina lograba hacer estos cambios?, el profesor le propuso explicárselo a través del juego Máquina mágica, donde se logra transformar una cantidad en un

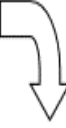
valor más grande o más pequeño que el original. Acompañemos a Atenea a comprender la transformación que sufre una cantidad al agrandarse o reducirse, a través de diferentes tareas.

Tarea 1: Identificando transformaciones de un valor numérico con la máquina mágica

El profesor de Atenea construye una máquina mágica para agrandar o achicar el valor de un número y desea jugar con sus estudiantes, con el fin de mostrarles la transformación que sufre una cantidad. Para ello distribuye los estudiantes en grupos de 4 personas los cuales se organizarán en:

- 1 operador de la máquina: será el encargado de manipular la máquina
- 3 jugadores: realizan el proceso de agrandar o achicar el valor del número en sus planillas de información.

Figura 10 Máquina mágica y operadores fraccionarios

MÁQUINA MÁGICA			OPERADOR	
	OPERADOR:		TRIPPLICADOR	MITAD
	ENTRADA		TRIPPLICADOR	TERCERA PARTE
	1		QUINTUPLICADOR	QUINTA PARTE

Reglas del juego

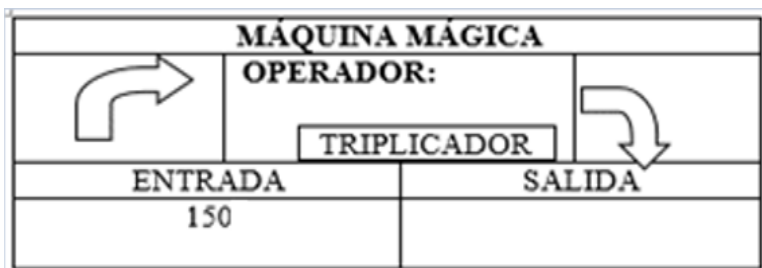
- El operador de la máquina selecciona una tarjeta transformadora de cantidad (duplicador, triplicador, quintuplicador, mitad, tercera parte, cuarta parte, quinta parte) y lo muestra a los jugadores del grupo
- El operador de la máquina selecciona un número al azar de la máquina y lo muestra a los jugadores
- Los jugadores deben aplicar rápidamente el procedimiento señalado por la máquina, al número seleccionado al azar
- Cada jugador debe consignar el resultado del procedimiento anterior en su planilla.
- El operador extrae 5 fichas de cantidades, antes de cambiar de transformador.

Gana el jugador que resuelva primero los procedimientos señalados por la máquina en el valor numérico y lo registre en su planilla.

Atenea después de realizar el juego, desea que le ayudes a responder las siguientes preguntas:

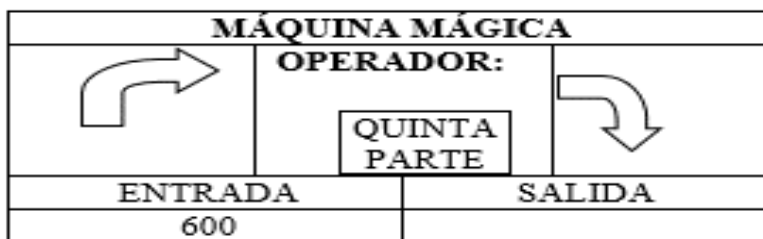
1. ¿Qué sucede al número de entrada al ingresar a la máquina con el transformador Triplicador?

Figura 11 Máquina mágica operador triplicador



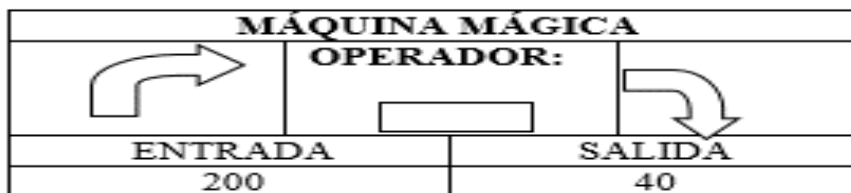
2. ¿Qué sucede al número de entrada al ingresar a la máquina con el transformador quinta parte?

Figura 12 Máquina mágica operador quinta parte



3. ¿Qué operador utiliza la máquina mágica para obtener el valor numérico de salida?

Figura 13 Máquina mágica y operador



4. ¿Cómo podrías representar mediante una operación aritmética, lo que sucede en la máquina al número de entrada 2500 al aplicar un transformador mitad?

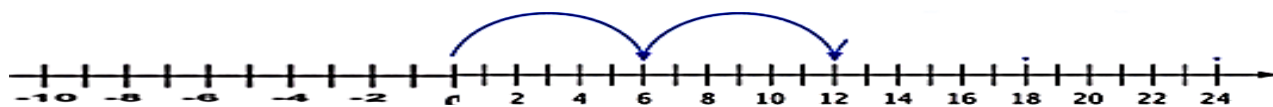
Tarea 2 Transformaciones de un valor numérico en la recta numérica

Atenea desea que le ayudes a transformar valores numéricos en la recta numérica, para ello debes seguir los pasos:

- Dibujamos en una hoja de block, una recta numérica
- Aplica el operador al valor numérico respectivo
- Traza la longitud del segmento resultante

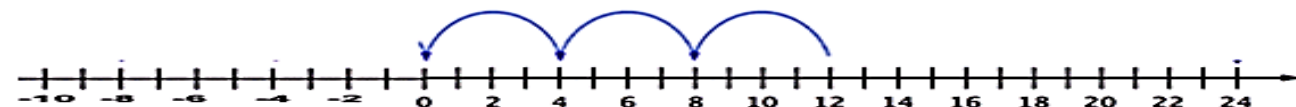
Aplica el operador duplicador ($2 \times$) al valor del número 6

$$2 \times 6 = 12$$



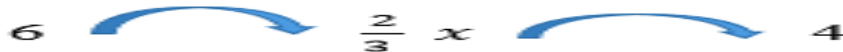
Aplica el operador Tercera parte ($\frac{1}{3} \times$) al valor del número 12

$$\frac{1}{3} \times 12 = \frac{1 \times 12}{3} = \frac{12}{3} = 4$$



Teniendo en cuenta la información anterior, responde las siguientes preguntas

1. Atenea encuentra una relación entre los operadores $\frac{1}{3} \times$ y $2 \times$ y el operador $\frac{2}{3} \times$. ¿Cómo podrías explicar esta relación?



2. Atenea necesita tu ayuda para completar la siguiente tabla, en la que aplicará a la longitud de una cinta métrica un operador agrandador y un achicador.

Tabla de información

Longitud inicial	Operador	Longitud de la cuerda, después de aplicar el operador que aumenta	Longitud inicial	Operador	Longitud de la cuerda, después de aplicar el operador que reduce
100 cm	$2 \times$		100 cm	$\frac{1}{2} \times$	
60 cm	$3 \times$		60 cm	$\frac{1}{3} \times$	
40 cm	$5 \times$		40 cm	$\frac{1}{5} \times$	
100 cm	$2 \times$		100 cm	$\frac{1}{5} \times$	
30 cm	$4 \times$		30 cm	$\frac{1}{3} \times$	

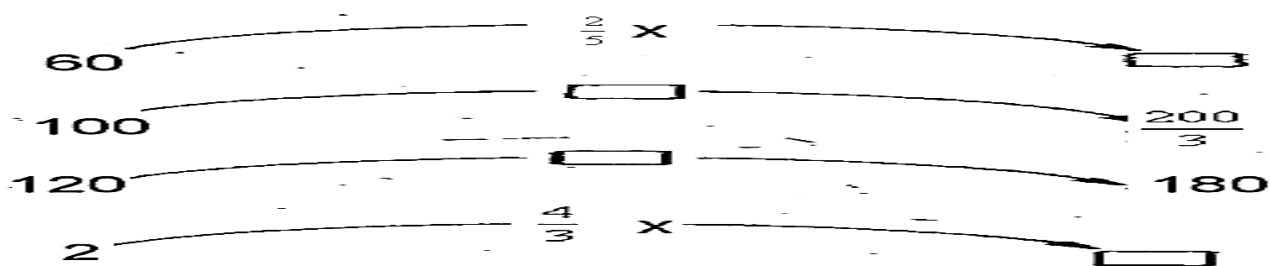
Tarea 3 Analizando las transformaciones de un valor numérico

Teniendo en cuenta la información anterior, responde las siguientes preguntas

1. ¿Qué relación encuentras entre el transformador $5 \times$ y el transformador $\frac{1}{5} \times$?
2. ¿Cómo podrías mediante una operación aritmética, representar lo que sucede a la longitud de 100 cm de la cinta métrica cuando aplicas los operadores $2 \times$ y $\frac{1}{2} \times$?
3. ¿Cómo podrías mediante una operación aritmética, representar lo que sucede en la longitud de 100 cm de la cinta métrica al aplicar el transformador $4 \times$ y el transformador $\frac{1}{3} \times$?

Tarea 4 Afianzando las transformaciones de un valor numérico

1. Ayuda a Atenea a resolver los siguientes ejercicios



2. Ubica en la recta numérica las siguientes transformaciones

- | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|
| a. $\frac{2}{5}$ de -10 | d. $\frac{1}{4}$ de 20 | g. $\frac{2}{3}$ de -30 |
| b. $\frac{5}{4}$ de 20 | e. $\frac{8}{3}$ de 6 | |
| c. $\frac{1}{4}$ de 1 | f. $\frac{5}{3}$ de 1 | |

Tarea 5 Conceptualizando las transformaciones

Atenea se da cuenta que la transformación realizada a la Cinta métrica, ya sea agrandarla o reducirla, se puede representar mediante operaciones matemáticas que le permiten realizar el proceso más rápidamente. Ayuda a Atenea a solucionar el siguiente problema.

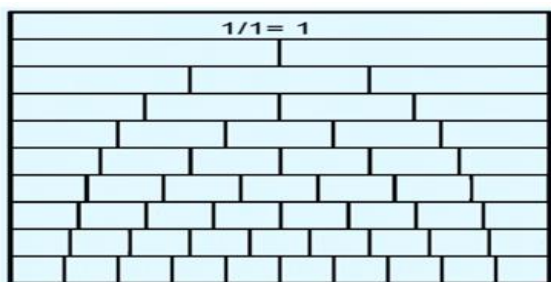
1. Si un pollo asado cuesta \$15000 ¿Cuánto debe cancelar Atenea por medio $\left(\frac{1}{2}\right)$ pollo y por tres pollos y medio?

Situación 2**PINTANDO EL SALON DE CLASES Y LAS FRACCIONES****EQUIVALENTES**

El profesor de Matemáticas desea que sus estudiantes apliquen conocimientos matemáticos aprendidos, en la decoración de una pared de su salón de clases, que será utilizada como el “RINCÓN DE LAS MATEMÁTICAS”. Cada estudiante debe elaborar su propuesta en una hoja de block y presentarla ante el profesor y sus compañeros, con el fin de decidir cuál de las propuestas es la mejor. Atenea desea que su propuesta sea la más bonita y llamativa, para ello decide utilizar franjas de papel de varios colores divididas en diferentes partes iguales. Ayudemos a Atenea a ganar su concurso.

PARED DE FRACCIONES

Figura 14 Pared de fracciones

**Tarea 1 Construyendo particiones diferentes a partir de una unidad**

Atenea decide utilizar franjas de papel de varios colores divididas en diferentes partes iguales. Para la siguiente actividad, necesitas:

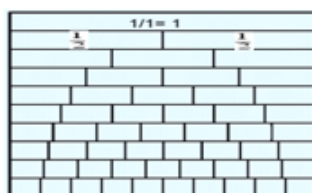
10 tiras de papel de 20 cm de largo por 2 cm de ancho

1 hoja de block

Pasos para desarrollar la pared de fracciones que atenea presentará a su profesor y compañeros

1. Toma una tira de papel y Plegar en 2 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar la línea divisoria
2. Toma una tira de papel y plegar en 3 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
3. Toma una tira de papel y plegar en 4 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
4. Toma una tira de papel y plegar en 5 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
5. Toma una tira de papel y plegar en 6 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
6. Toma una tira de papel y plegar en 7 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
7. Toma una tira de papel y plegar en 8 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
8. Toma una tira de papel y plegar en 9 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias
9. Toma una tira de papel y plegar en 10 partes iguales, luego abre la tira de papel y repintar las líneas divisorias

Pega las tiras de papel en la hoja de block una debajo de otra (en forma de columna), empezando por la tira sin plegar, luego cada una de las tiras hasta la plegada en 10 partes iguales. Como se muestra en la figura



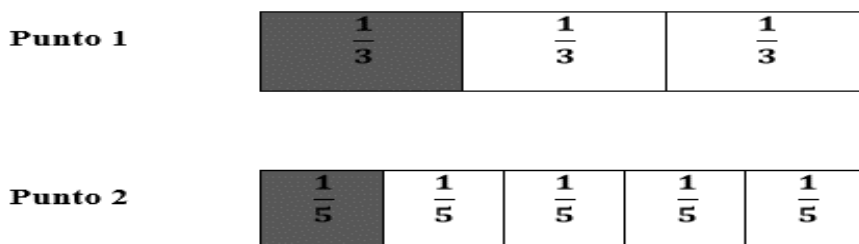
Simboliza con una expresión numérica $\frac{a}{b}$ cada una de las partes en que doblaste la tira de papel en la pared de fracciones; de tal forma que **a** represente cada parte que tomas de la tira y **b** represente en cuantas partes en se dividió la tira.

Teniendo en cuenta la información anterior, responde las siguientes preguntas:

1. Observa las siguiente representaciones de fracciones y responde ¿Qué relación encuentras entre la parte coloreada en el tira 1 con la parte coloreada de la tira 2?

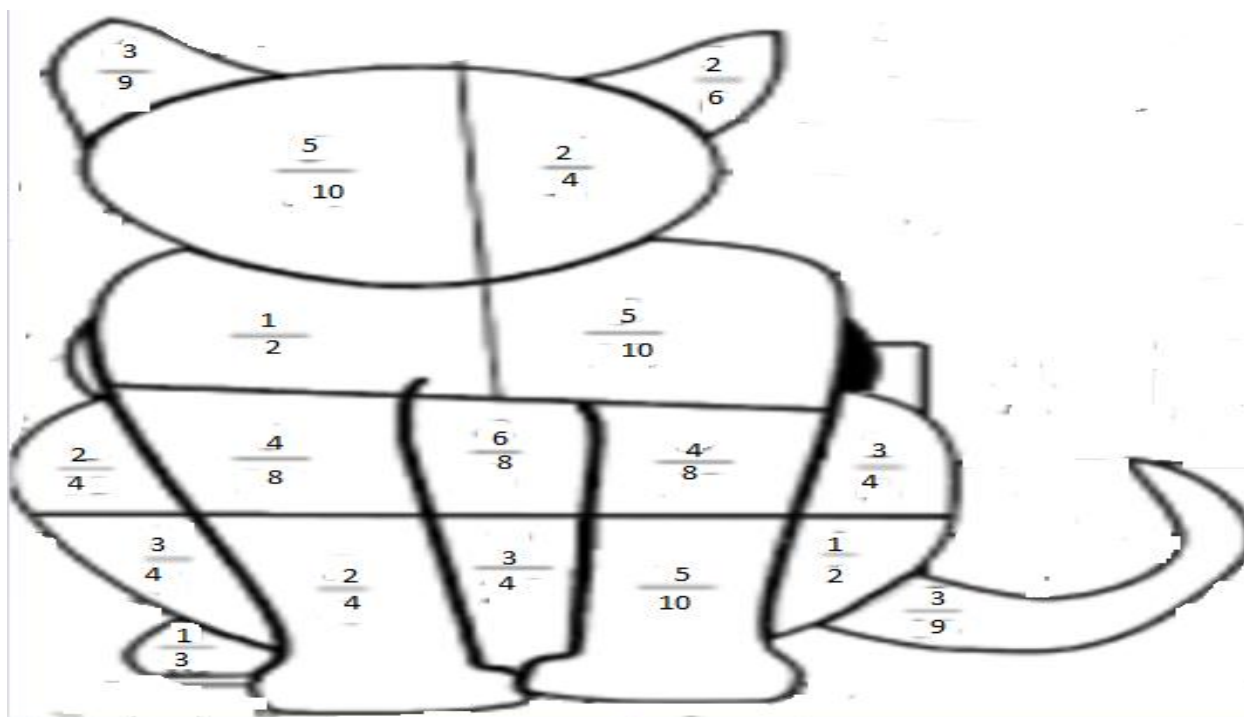


2. Observa las siguientes representaciones de fracciones y responde ¿las tiras del punto 1 y 2 representan la misma porción en la unidad? Argumenta la respuesta.



3. Atenea necesita ayuda para colorear el siguiente dibujo, teniendo en cuenta la pared de fracciones y las indicaciones del profesor.
- Colorea de color amarillo todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$
 - Colorea de color café todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$
 - Colorea de color negro todas las fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$

Figura 15 juego con fracciones



Situación 3 COMPARTIENDO DULCES Y LAS TRANSFORMACIONES SUCESIVAS

Atenea compra un paquete de bananas que contiene 100 unidades, las cuales reparte entre un grupo de estudiantes y padres de familia, teniendo en cuenta la siguiente información:

La cuarta parte del paquete lo consumió las niñas, de los cuales $\frac{2}{5}$ eran niñas de cabello negro y $\frac{3}{5}$ eran niñas de cabello claro. El resto de los dulces se repartió a los adultos. Entre los adultos, $\frac{1}{3}$ eran hombres y el resto eran mujeres.



Tarea 1 Comprendiendo y generando una estrategia de solución

Teniendo en cuenta la información suministrada en la Situación 3, identifica lo que piden encontrar, luego escribe los datos que brinda la situación problema, posteriormente realiza las operaciones para dar la solución y finalmente responde las siguientes preguntas:

1. De los dulces que reciben las niñas ¿Qué parte de dulces reciben las niñas de cabello negro?
2. Completa la información de la tabla

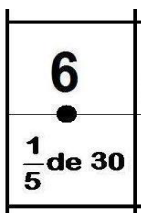
COMPARTIENDO DULCES			
NIÑAS		ADULTOS	
NUMERO DE DULCES		NUMERO DE DULCES	
NIÑAS DE CABELLO NEGRO	NIÑAS DE CABELLO CLARO	HOMBRES	MUJERES
NUMERO DE DULCES	NUMERO DE DULCES	NUMERO DE DULCES	NUMERO DE DULCES

Gana el jugador que:

- Se queda sin ficha.
- Si se cierra el juego y nadie puede colocar una ficha, gana el jugador que tiene menos puntos, sumando los valores de las fichas que le han quedado.

Teniendo en cuenta el juego anterior, responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relación encuentras en la ficha entre el número y la fracción como operador?



2. Colorea la parte que se indica en cada caso

$\frac{8}{10}$ de 10

$\frac{3}{5}$ de 10

3. Representa en una recta numérica las siguientes fracciones

- a. $\frac{3}{7}$ de -1 b. $\frac{5}{7}$ de 1 c. $\frac{9}{7}$ de -1 , d. $\frac{12}{7}$ de 1

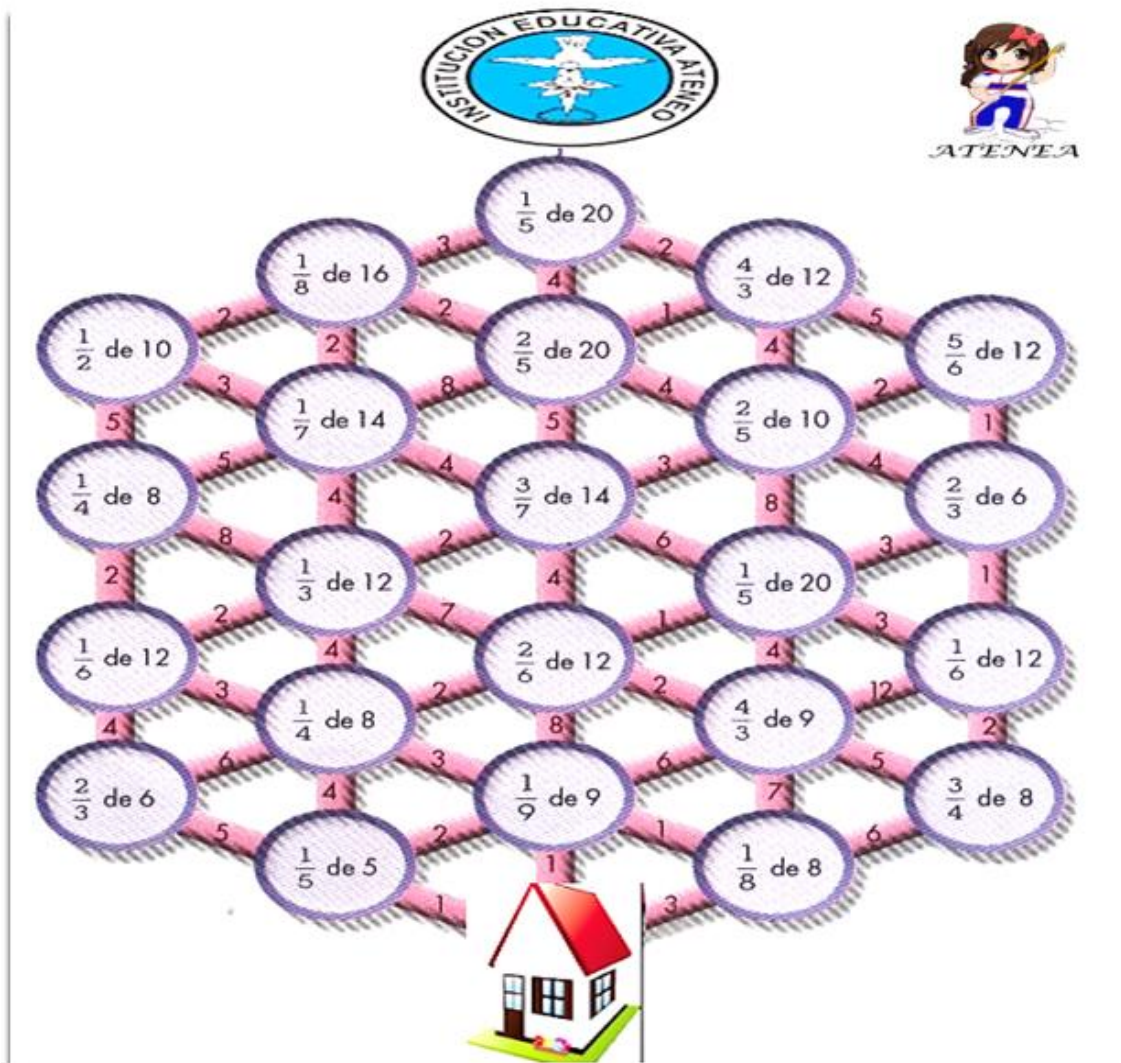
Tarea 3 Aplicando saberes sobre la fracción como operador y medida

1. Atenea se pregunta ¿cómo hallar la mitad de la cuarta parte de una longitud de 4000 metros?
 - a. ¿Cuánto es la mitad de la longitud?
 - b. ¿Cuánto es la cuarta parte de la mitad de la longitud?
 - c. ¿Cómo podrías simbolizar este procedimiento?

2. Un día tiene 24 horas, de las cuales Atenea utiliza $\frac{1}{4}$ de un día a leer, $\frac{3}{8}$ del día a trabajar y el resto del tiempo a descansar. Con base en esta información, encuentra la respuesta a cada pregunta:
 - a. ¿Cuántas horas del día, utiliza Atenea para leer?
 - b. ¿Cuántas horas del día, utiliza Atenea para trabajar?
 - c. ¿Cuántas horas del día, utiliza Atenea para descansar?
 - d. ¿En qué actividad Atenea utiliza la mayor cantidad de tiempo?
 - e. ¿Cuántas horas utiliza Atenea para leer y trabajar?

3. Traza un camino desde la salida del colegio a la casa de Atenea. Une cada círculo con el siguiente por la ruta que tenga la respuesta del transformador enunciado

Figura 16 Juego con fracciones



3.3 Análisis de resultados de la propuesta de aula

El análisis de los resultados en la propuesta, se realizó haciendo énfasis en los significados de la fracción, permitiendo recoger información sobre el dominio de conocimientos frente al objeto de estudio, las estrategias utilizadas y los posibles errores cometidos por los estudiantes.

3.3.1 Resultados y Análisis de los resultados de la situación 1

Tarea 1(T1): Identificando transformaciones de un valor numérico con la máquina mágica

Pregunta 1 (P1) ¿Qué sucede al número de entrada al ingresar a la máquina con el transformador **Triplicador**?

MÁQUINA MÁGICA	
	TRIPLICADOR OPERADOR:
ENTRADA	SALIDA
150	

Esta pregunta tenía como finalidad la identificación del efecto de aplicación del operador de la forma $m \times$ al valor numérico, que permitiera comprender la transformación del valor numérico. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 17 Respuesta de estudiantes S1T1P1

1. ¿Qué sucede al número de entrada al ingresar a la máquina con el transformador **Triplicador**?

Sucede que se triplica con el número de la entrada y esa es la salida
 $150 \times 3 = 450$

MAQUINA MÁGICA	
	OPERADOR: TRIPLICADOR
ENTRADA	SALIDA
150	450

Tabla 22 SIT1P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que afirman que aumenta o agranda, porque se multiplica por 3 el valor numérico.	4	33,3
	2	Estudiantes que expresan el valor que se transforma al multiplicar por 3 y da el resultado	2	16,7
	3	Estudiantes que indican que el valor que se obtiene sube 3 veces y hace la operación	5	41,7
	4	Estudiantes que indican que se suman la cantidad tres veces	1	8,3

En la tabla 22 se observa que 5 de 12 estudiantes expresan que el valor que se obtiene sube tres veces, dando la respuesta en términos numéricos, relacionando su respuesta al procedimiento numérico que hace el triplicador. Lo que muestra que el estudiante comprende el efecto que hace la operación en el valor numérico, asumiendo la multiplicación como sumas reiteradas.

Se observa también en la tabla que 4 de 12 estudiantes afirman que el valor se aumenta o agranda porque se realiza una multiplicación por 3 a la cantidad, advirtiendo el cambio o transformación que tiene la cantidad en términos operador que aumenta o agranda, a partir del uso de una operación. Lo que indica que comprenden la transformación que sufre la cantidad al aplicarse un operador fraccionario. Adicionalmente 2 de 12 estudiantes expresan que el valor se modifica al aplicar un operador. Lo cual evidencia que reconocen el efecto de aplicar la fracción como operador en una cantidad. Se observa también que 1 de 12 estudiantes expresa que la cantidad se suma tres veces. Lo que revela que el estudiante aplica la operación de la adición como estrategia para encontrar el valor numérico.

En términos generales se puede inferir a partir de las respuestas Tipo 1 (R1), respuesta Tipo 2 (R2) y respuesta Tipo 3 (R3), que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, lo que representa un alto porcentaje de estudiantes en la muestra evaluada. Con ello se evidencia el reconocimiento en los estudiantes del efecto del operador al transformar el valor de una cantidad.

P 2 ¿Qué sucede al número de entrada al ingresar a la máquina con el transformador **quinta Parte**?

MÁQUINA MÁGICA	
	QUINTA PARTE OPERADOR: 
ENTRADA	SALIDA
600	

Esta pregunta tenía como finalidad la identificación del efecto de aplicación del operador de la forma $\frac{1}{n} \times$, que permitiera comprender la transformación del valor numérico. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 18 Respuesta de estudiante S1T1P2

2. ¿Qué sucede al número de entrada al ingresar a la máquina con el transformador **quinta parte**?

se divide en 5 partes iguales

MAQUINA MÁGICA	
	OPERADOR: QUINTA PARTE 
ENTRADA	SALIDA
600	

Tabla 23 S1T1P2

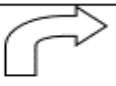
Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que reconocen el valor numero sufre una transformación al operador $\frac{1}{n} \times$ y lo expresan en forma cualitativa, pero no realiza el algoritmo	2	16,7
	2	Estudiantes que reconocen que hay una transformación de la cantidad en cinco partes y no realiza la operación.	3	25
	3	Estudiantes que reconocen que el valor numérico sufre una transformación al emplear el operador $\frac{1}{n} \times$ y realizan el algoritmo de división.	4	33,3
	4	Estudiantes que escriben sobre el procedimiento para obtener la quinta parte del valor numérico.	2	16,7
	5	Estudiantes que reconocen el efecto del operador $\frac{1}{n} \times$, pero hacen mal el procedimiento algorítmico.	1	8,3

En la información de la tabla 23 se observa que 4 de 12 estudiantes reconocen que el valor numérico sufre una transformación al aplicar el operador $\frac{1}{5} \times$, indicando que el número se reduce en una quinta parte de su valor original y lo argumentan a través de procedimiento algorítmico, lo cual evidencia el reconocimiento del efecto del operador sobre el valor numérico. Se observa que 2 de 12 de los estudiantes reconocen el efecto de aplicar el operador fraccionario en un valor numérico forma cualitativa, indicando que el número se reduce en una quinta parte de su valor original, lo cual evidencia la comprensión del efecto del operador en el valor numérico. También se observa que 2 de 12 estudiantes escriben la respuesta, argumentando el efecto de aplicación

del operador fraccionario para obtener la quinta parte del valor numérico. Esto muestra que hay comprensión del efecto del operador, además de demostrar el manejo de competencias comunicativas. Posteriormente se observa que 3 de 12 estudiantes que reconocen que el valor numérico sufre una transformación en cinco partes iguales, siendo esta quinta parte una cantidad menor, sin realizar la operación. Esto infiere que los estudiantes reconocen que el valor numérico sufre un cambio, pero no comprenden el efecto al aplicar el operador fraccionario. Se observa también que 1 de 12 estudiantes presenta dificultades en el reconocimiento del efecto del operador sobre el valor numérico y en el procedimiento algorítmico. Esto indica una dificultad en la comprensión del efecto de transformación al aplicar el operador fraccionario y en el manejo de operaciones algorítmicas.

En términos generales se puede inferir mediante las R1, R3 y R4, que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar un operador fraccionario quinta parte a un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, lo que representa un 66,7% del porcentaje de estudiantes en la muestra evaluada. Con ello se evidencia el reconocimiento en los estudiantes del efecto de aplicar operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}x$ como operadores que transforman el valor de una cantidad.

P3 ¿Qué operador utiliza la máquina mágica para obtener el valor numérico de salida?

MÁQUINA MÁGICA	
	OPERADOR:
ENTRADA	SALIDA
200	40

Esta pregunta tenía como finalidad la identificación del efecto de aplicación del operador fraccionario, que permitiera comprender la transformación del valor numérico. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 19 Respuesta de estudiante S1T1P3

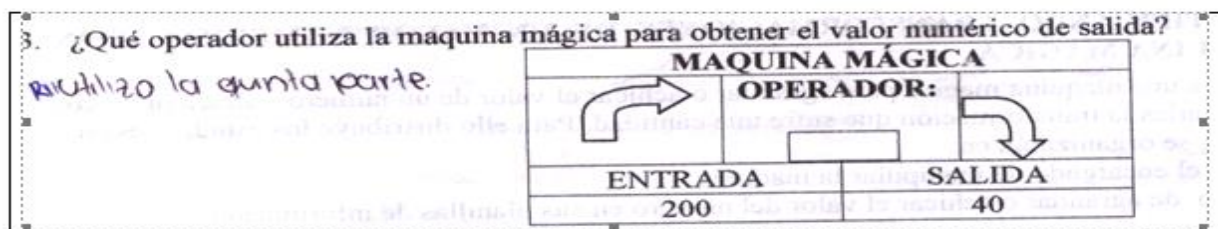


Tabla 24 S1T1P3

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que reconocen el operador utilizado y justifican su respuesta a través de procedimiento algorítmico.	8	66,7
	2	Estudiantes que escriben sobre el procedimiento para encontrar el operador utilizado y justifican con el proceso algorítmico	3	25
	3	Estudiantes que no reconocen el operador utilizado y dejan de responder la pregunta.	1	8,3

En la tabla 24 se observa que 8 de 12 estudiantes encuentran el operador utilizado, realizando el proceso algorítmico, lo cual evidencia el reconocimiento del efecto del operador sobre un valor numérico. También se observa que 3 de 12 estudiantes escriben la respuesta, indicando que al ser aplicado el operador fraccionario el número se reduce en una quinta parte de su valor original, lo cual evidencia la comprensión del efecto de transformación sobre el valor numérico.

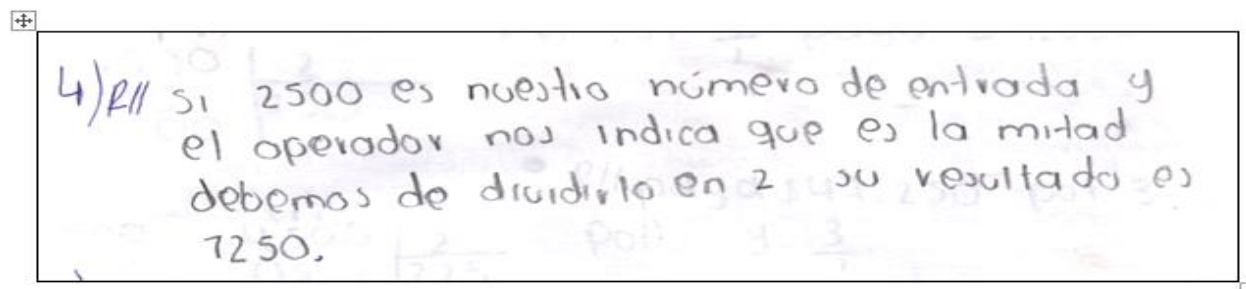
Posteriormente se observa que 1 de 12 estudiantes no reconocen el operador utilizado y dejan la pregunta sin responder.

En términos generales las R1 y R2, permiten inferir que los estudiantes reconocen el efecto de transformación al aplicar un operador fraccionario $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ en un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, lo que representa un 91,7% del porcentaje de estudiantes en la muestra evaluada.

P4 ¿Cómo podrías representar mediante una operación aritmética, lo que sucede en la máquina al número de entrada 2500 al aplicar un transformador **mitad**?

Esta pregunta tenía como finalidad la identificación del efecto de transformación en un valor numérico, que permitiera la aplicación del operador fraccionario. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 20 Respuesta de estudiante S1T1P4



4) R11 si 2500 es nuestro número de entrada y el operador nos indica que es la mitad debemos de dividirlo en 2 su resultado es 1250.

Tabla 25 S1T1P4

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que realizan el procedimiento algorítmico y lo justifican en forma verbal	3	25
	2	Estudiantes que explican el procedimiento aritmético en forma verbal.	3	25
	3	Estudiantes que solo realizan el procedimiento en forma numérica.	6	50

En la tabla 25 se observa que 6 de 12 estudiantes solo realizan el procedimiento algorítmico de aplicación del operador fraccionario al valor numérico. También se observa que 3 de 12 estudiantes explican la respuesta en forma numérica, argumentando el procedimiento en forma verbal. Lo que muestra la comprensión del efecto de aplicación del operador de transformación. Posteriormente 3 de 12 estudiantes explican el procedimiento aritmético en forma verbal, argumentando el efecto de aplicación del operador fraccionario en el valor numérico.

En términos generales se puede inferir a través de las R1, R2 y R3, que los estudiantes reconocen el efecto de aplicación del operador fraccionario en un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, representando el 100 % de la muestra, Con ello se infiere que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar operadores fraccionarios que transforman el valor de una cantidad.

T2 Transformaciones de un valor numérico en la recta numérica

P1 Atenea encuentra esta relación entre los operadores $\frac{1}{3}x$ y $2x$. y el operador $\frac{2}{3}x$. ¿Cómo podrías explicar esta relación?

The diagram illustrates two ways to reach the number 4 from the number 6. In the first sequence, 6 is multiplied by $\frac{1}{3}$ to get 2, and then 2 is multiplied by 2 to get 4. In the second sequence, 6 is multiplied by $\frac{2}{3}$ to get 4.

Esta pregunta tenía como finalidad la comprensión del efecto de transformación del operador de la forma $\frac{1}{n} \times$ en una magnitud, que permitiera la comprensión del proceso de transformación. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 21 Respuesta de estudiante S1T2P1

R// Relación $\frac{1}{3}x$ y $2x$, la relación que existe entre el fraccionario y el número entero es que cuando hablamos de $\frac{1}{3}$ es porque es la tercera parte de un número entero es 6, dividimos 6 en 3 y el...

Tabla 26 S1T2P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que no encuentran la relación entre los operadores.	2	16,7
	2	Estudiantes que no responden la pregunta	3	25
	3	Estudiantes que explican el procedimiento empleado, argumentando su respuesta.	7	58,3

En la tabla 26 se observa que 7 de 12 estudiantes, explican el procedimiento empleado para solucionar la pregunta, argumentando con el procedimiento algorítmico; lo que indica que reconocen la relación entre las cantidades y el operador de transformación. También se observa que 3 de 12 estudiantes no responden la pregunta.. Posteriormente se evidencia que 2 de 12 estudiantes explican el procedimiento utilizado, aunque no encuentran la relación entre las cantidades y el operador de transformación.

En términos generales se puede inferir que los estudiantes con la R3, reconocen el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, representando en 58,3% del porcentaje de la muestra, Con ello se infiere que la mayoría de estudiantes de la muestra reconocen el efecto de aplicar operadores fraccionarios $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ que transforman el valor de una cantidad o magnitud.

P2 Atenea necesita tu ayuda para completar la siguiente tabla, en la que aplicará a la longitud de una cinta métrica un operador agrandador y un achicador simultáneamente.

Esta pregunta tenía como finalidad la identificación del efecto de transformación en una magnitud, que permitiera la aplicación del operador fraccionario. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 22 Respuesta de estudiante S1T2P2

Longitud inicial	Operador	Longitud de la cuerda, después de aplicar el operador que aumenta	Longitud inicial	Operador	Longitud de la cuerda, después de aplicar el operador que reduce
100 cm	2 x	200	100 cm	$\frac{1}{2} \times$	50
60 cm	3 x	180	60 cm	$\frac{1}{3} \times$	20
40 cm	5 x	200	40 cm	$\frac{1}{5} \times$	8
100 cm	2 x	200	100 cm	$\frac{1}{5} \times$	20
30 cm	4 x	120	30 cm	$\frac{1}{3} \times$	10

Tabla 27 S1T2P2

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que completan la tabla adecuadamente, aplicando los operadores en la longitud de la cuerda	11	91,7
	2	Estudiantes que no responden la pregunta.	1	8,3

En la tabla 27 se observa que 11 de 12 estudiantes expresan la respuesta, en forma numérica, en la que argumentan con el procedimiento algorítmico. Lo que indica que reconocen la relación entre

las cantidades y el operador de transformación. También se observa que 1 de 12 estudiantes no responde la pregunta. En términos generales se puede inferir que los estudiantes con la R1, reconocen el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, representando un 91,7% del porcentaje de la muestra, Con ello se deduce que los estudiantes reconocen el efecto de transformación al aplicar operadores fraccionarios a la longitud de la cuerda.

T3 Analizando las transformaciones de un valor numérico

P1 ¿Qué relación encuentras entre el transformador $5x$ y el transformador $\frac{1}{5}x$?

Esta pregunta tenía como finalidad la identificación del efecto de transformación. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 23 Respuesta de estudiante S1T3P1

1- Que en $5x$ se multiplica por 5 y $\frac{1}{5}$ se divide por 5.

Tabla 28 S1T3P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que escriben la respuesta en forma verbal, reconociendo un cambio en la cantidad al aplicar el operador ampliando y reduciendo	5	41,7
	2	Estudiantes que argumentan la aplicación de un operador mediante el efecto de multiplicar y dividir	4	33,3
	3	Estudiantes que no responden la pregunta	2	16,7
	4	Estudiante que no reconocen la relación entre los operadores.	1	8,3

En la tabla 28 se observa que 5 de 12 estudiantes escriben las respuestas, en la que muestran la relación en la transformación que sufre la cantidad al aplicar el operador fraccionario que la amplía o reduce. Lo que indica que reconocen la relación entre las cantidades y el operador de transformación. También se observa que 4 de 12 estudiantes expresan las respuestas en forma numérica, quienes argumentan la respuesta a través de la aplicación de operaciones aritméticas como la multiplicación y división, dando paso a la transformación en la cantidad. Lo que muestra que reconocen el efecto de aplicación del operador de transformación. Se observa también que 2 de 12 estudiantes no responden la pregunta. Con lo que se deduce que no comprenden la relación entre los operadores fraccionarios. 1 de 12 estudiantes no reconocen la relación entre los operadores fraccionarios.

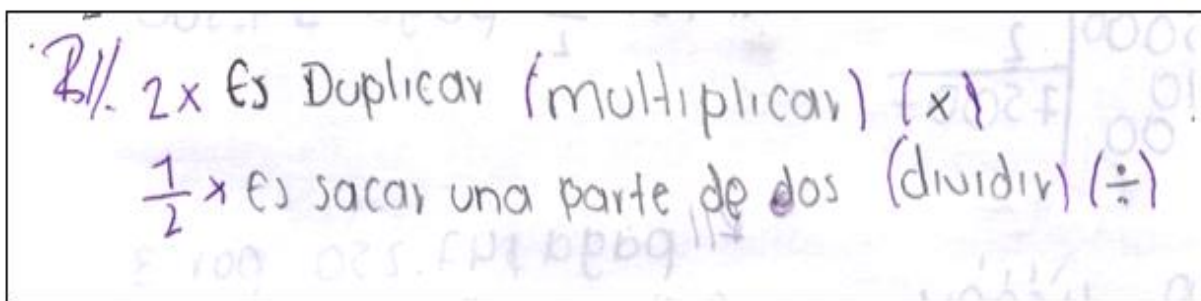
En términos generales se puede inferir según las R1 y R2, que los estudiantes reconocen la relación entre los operadores fraccionarios y el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor

numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, representando un 75% del porcentaje de la muestra, Con ello se deduce que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar operadores como operadores fraccionarios que transforman el valor de una cantidad o magnitud.

P2 ¿Cómo podrías representar mediante una operación aritmética, lo que sucede en la longitud de 100 cm de la cinta métrica al aplicar el transformador $2x$ y el transformador $\frac{1}{2}x$ simultáneamente?

Esta pregunta tenía como finalidad la aplicación del operador al valor numérico y representar mediante operación aritmética. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 24 Respuesta de estudiante S1T3P2



2x Es Duplicar (multiplicar) ($\times$)
 $\frac{1}{2}x$ Es sacar una parte de dos (dividir) ($\div$)

Tabla 29 S1T3P2

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que explican la respuesta en forma escrita, reconociendo que la cantidad tuvo una transformación al aplicar el operador (agrandando y reduciendo)	5	41,7
	2	Estudiantes que expresan su respuesta en forma numérica realizando el procedimiento algorítmico	3	25
	3	Estudiantes que explican su respuesta en forma escrita, aunque tiene dificultad para realizar la transformación	2	16,7
	4	Estudiantes que no responden la pregunta	2	16,7

En la tabla 29 se observa que 5 de 12 estudiantes explican la respuesta en forma escrita, manifestando que la relación es la transformación que sufre la cantidad al aplicar el operador fraccionario que amplía o reduce la cantidad o magnitud. Lo que indica que reconocen la relación entre las cantidades y el operador de transformación. También se observa que 3 de 12 estudiantes expresan la respuesta en forma numérica, argumentando la respuesta a través de la aplicación de procesos algorítmicos. Lo que muestra un reconocimiento del efecto de aplicación del operador de transformación. Se evidencia también que 2 de 12 estudiantes expresan la respuesta en forma escrita, los cuales no aplican el operador de transformación en la cantidad o magnitud adecuadamente. Posteriormente se observa que 2 de 12 estudiantes no responden la pregunta.

En términos generales se puede inferir que los estudiantes con las R1 y R2, reconocen los operadores fraccionarios $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ y el efecto de transformación al aplicar un

operador en un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, representando un 66,7% del porcentaje de la muestra.

P3 ¿Cómo podrías representar mediante una operación aritmética, lo que sucede en la cinta métrica al aplicar el transformador 4 x y el transformador $\frac{1}{3}$ x simultáneamente?

Esta pregunta tenía como finalidad la aplicación del operador al valor numérico y representar mediante operación aritmética. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 25 Respuesta de estudiante S1T3P3

341 Dependiendo del número al aplicar el transformador 4x es ese número cuatro veces en si, ejemplo: 60, 4 veces o multiplicado por cuatro, y en el caso $\frac{1}{3}$ es sacar una parte de 3 ejemplo:

20	20	20
----	----	----

Tabla 30 SIT3P3

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que explican la respuesta de lo que sucede en la cinta métrica en forma escrita, reconociendo la transformación al aplicar el operador que multiplica y divide	2	16,7
	2	Estudiantes que realiza la respuesta en forma numérica y lo argumenta realizando el procedimiento algorítmico	3	25
	3	Estudiantes que no emplea un algoritmo en la situación planteada	2	16,7
	4	Estudiantes que expresan su respuesta en forma escrita y argumentan con el procedimiento algorítmico al aplicar el operador	3	25
	5	Estudiantes que no responde la pregunta	2	16,7

En la tabla 30 se observa que 2 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 1, los cuales explican lo que sucede en la cinta métrica, en la que argumentan que la transformación sufrida por la cantidad es por la aplicación del operador fraccionario que multiplica y divide. Lo que muestra que reconocen la relación entre las cantidades y el operador de transformación. La tabla muestra además que 3 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 2, los cuales expresan la respuesta en forma numérica, argumentando la respuesta a través de la aplicación de procesos algorítmicos. Con lo cual se deduce que los estudiantes reconocen el efecto de aplicación del operador de transformación. Se observa también que 2 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 3, los cuales no argumentan su respuesta mediante procedimiento algorítmico. Lo que indica poseen dificultades para aplicar el operador fraccionario en la cantidad o magnitud correspondiente. Se observa también que 3 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 4, los cuales expresan la

respuesta en forma escrita y argumentan mediante el procedimiento algorítmico. Lo que indica que comprenden el efecto de aplicación del operador fraccionario en una cantidad. Posteriormente se observa que 2 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 5, los cuales no responden la pregunta. Lo que indica que no comprenden la aplicación de operadores fraccionarios en una cantidad o magnitud.

En términos generales se puede inferir según las R1, R2 y R4, los estudiantes reconocen los operadores fraccionarios $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ y el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor numérico y lo argumentan en forma verbal y/o numérica, representando un 66,7% del porcentaje de la muestra.

Tarea 4 Afianzando las transformaciones de un valor numérico

P1 Ayuda a Atenea a resolver los siguientes ejercicios

60	$\frac{2}{5} \times$	
100		$\frac{200}{3}$
120		180
2	$\frac{4}{5} \times$	

Esta pregunta tenía como finalidad la aplicación del operador al valor numérico A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 26 Respuesta de estudiante S1T4P1

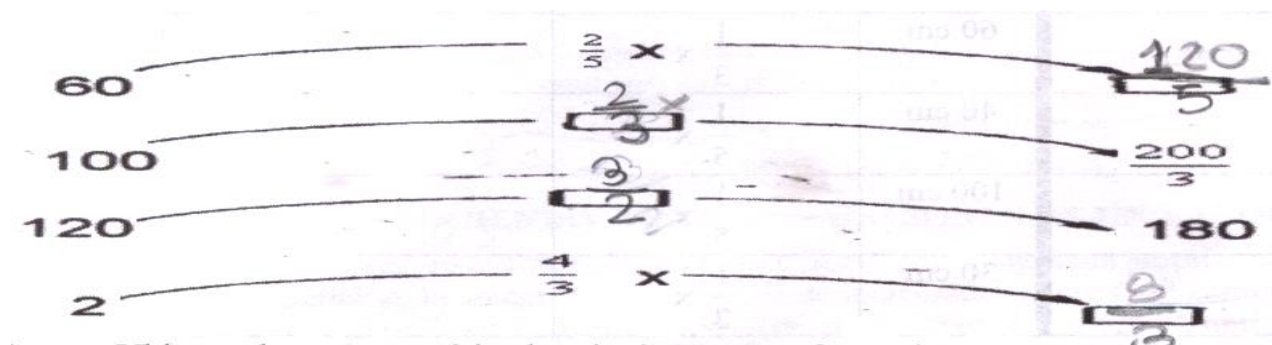


Tabla 31 S1T4P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Justificación	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que aplican la fracción $\frac{m}{n}x$ correctamente en la cantidad	6	50
	2	Estudiantes que aplican la fracción como operador $\frac{m}{n}x$ aunque no calculan todas las cantidades	4	33,3
	3	Estudiantes que aplican la fracción $\frac{m}{n}x$ para calcular la cantidad y argumentan con el procedimiento	2	16,7

En tabla 31 se observa que 6 de 12 estudiantes aplican correctamente el operador fraccionario $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ a la cantidad. Lo que muestra que reconocen la relación entre las cantidades y el operador de transformación. También se visualiza que 4 de 12 estudiantes aplican el operador fraccionario aunque no realizan toda la actividad propuesta. Posteriormente se nota que 2 de 12 estudiantes aplican el operador fraccionario en la cantidad y argumenta su respuesta mediante el procedimiento algorítmico.

En términos generales se puede inferir que según las R1, R2 y R3, los estudiantes identifican los operadores fraccionarios y el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor numérico y lo argumentan, representando el 100% de la totalidad de la muestra, Con ello se infiere que los estudiantes identifican el efecto de aplicar la fracción como operador sobre el valor numérico.

P2 Ubica en la recta numérica las siguientes transformaciones				
a $\frac{2}{5}$ de -10	b $\frac{1}{4}$ de 20	c. $\frac{2}{3}$ de -30	d. $\frac{8}{3}$ de 6	e. $\frac{5}{4}$ de 20
f. $\frac{1}{4}$ de 1	g. $\frac{5}{3}$ de 1			

Esta pregunta tenía como finalidad la aplicación del operador de la forma $\frac{1}{n} \times$ en la magnitud. A

continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Tabla 32 SIT4P2

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que ubican correctamente la fracción en la recta numérica, teniendo en cuenta el sentido de dirección (positiva o negativa)	6	50
	2	Estudiantes que no responden la pregunta	3	25
	3	Estudiantes que ubican correctamente la fracción en la recta numérica y argumentan su respuesta en forma escrita.	3	25

En la tabla 32 se observa que 6 de 12 estudiantes ubican la fracción $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ en la recta numérica correctamente, teniendo en cuenta la ubicación positiva o negativa, argumentando mediante procedimiento algorítmico. Lo que muestra que los estudiantes reconocen el efecto entre las cantidades y el operador de transformación. También se observa que 3 de 12 estudiantes no responden la pregunta. Posteriormente se nota que 3 de 12 estudiantes aplican el operador fraccionario en la magnitud y argumenta la respuesta en forma escrita. Lo que indica que reconocen el efecto de aplicación del operador fraccionario en la magnitud correspondiente.

En términos generales se puede inferir que según las R1 y R3, los estudiantes reconocen los operadores $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ y el efecto de aplicación en una magnitud, representando un 75% de la totalidad de la muestra, Con ello se infiere que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar operadores de la forma $\frac{m}{n}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ como operadores fraccionarios que transforman el valor y dirección positiva o negativa en una magnitud.

T5 Conceptualizando las transformaciones

P1 Si un pollo asado cuesta \$15000 ¿Cuánto debe cancelar Atenea por medio $\left(\frac{1}{2}\right)$ pollo y por tres pollos y medio?

Esta pregunta tenía como finalidad formular y resolver problemas que requieran de la aplicación de operadores de la forma $m \times$ y la forma $\frac{1}{n} \times$ en un valor numérico. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 27 Respuesta de estudiante S1T5P1

1. $15000 \div 2 = 7500$ • 211 por $\frac{1}{2}$ paga \$7.500

2. $15000 \times 3 = 45000$ • 211 paga \$52500 por 3 Pollos y $\frac{1}{2}$

3. $15000 + 15000 + 15000 + 15000 = 52500$

Tabla 33 S1T5P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que resuelven el problema, realizando procedimientos algorítmicos	2	16,7
	2	Estudiantes que resuelven el problema y lo argumentan en forma escrita y mediante procesos algorítmicos.	9	75
	3	Estudiantes que no responden la pregunta	1	8,3

En la tabla 33 se observa que 9 de 12 estudiantes resuelven el problema a través de procedimientos algorítmicos al aplicar el operador fraccionario en una cantidad y lo argumentan en forma verbal.

También se registra que 2 de 12 estudiantes resuelven el problema realizando los procesos algorítmicos. 1 de 12 estudiantes no responden la pregunta.

En términos generales se puede inferir que según las R1 y R2, los estudiantes resuelven el problema reconociendo los operadores fraccionarios y el efecto de aplicar un operador fraccionario a un valor numérico, representando un 91,7% de la totalidad de la muestra. Con ello se deduce que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar el significado como operador para la transformación de una cantidad o magnitud.

Los resultados obtenidos en la situación 1 “Reconociendo transformaciones de un valor numérico”, a través de las cinco tareas realizadas, demuestran que se identificó el efecto de la transformación del valor numérico, mediante un proceso concreto y vivencial del objeto matemático a través de diferentes actividades, entre ellas la máquina mágica y en la construcción de la recta numérica, que conllevaron al fortalecimiento del significado como operador y medida que al ser aplicado a un valor numérico o magnitud, la transforma agrandándola o achicándola. Este fortalecimiento de los números racionales en la representación como fracción a través de los significados como operador y medida, contempló dos aspectos relevantes como son: el aspecto simbólico mediante procesos algorítmicos y el aspecto conceptual a través de diálogos de saberes, justificación de procesos y diseño de estrategias de solución, que permitieran la solución de la situación problema.

3.3.2 Resultados y Análisis de los resultados de la situación 2

T1 Construyendo particiones diferentes a partir de una unidad

P1 Qué relación encuentras entre la tira del punto 1 con la tira del punto 2?

Punto 1

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
---------------	---------------

Punto 2

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
---------------	---------------	---------------	---------------

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante reconozca las fracciones equivalentes a partir de particiones diferentes en una unidad. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 28 Respuesta de estudiante S2T1P1

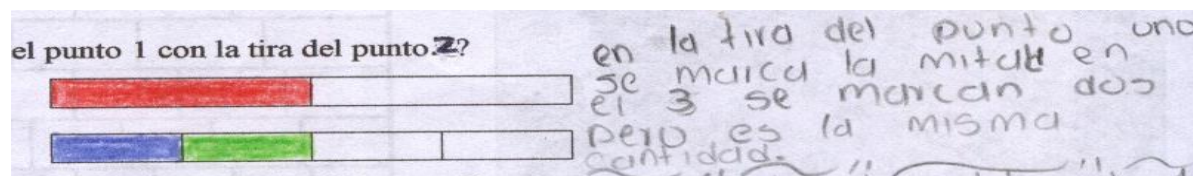


Tabla 34 S2T1P1

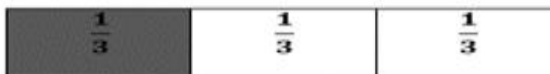
Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que establecen la relación como fracciones equivalentes a partir de diferentes particiones en la unidad.	6	50
	2	Estudiantes que establecen la relación de equivalencia y argumentan en forma escrita.	5	41,7
	3	Estudiantes que argumentan que las fracciones son iguales y se dividen en partes diferentes.	1	8,3

En la tabla 34 se observa que 6 de 12 estudiantes establecen la relación como fracciones equivalentes entre las porciones sombreadas en la tira del punto 1 y 2. Lo que indica que reconocen la relación entre las fracciones y la unidad que las contiene. Los resultados también muestran que 5 de 12 estudiantes establecen la relación de equivalencia con las porciones sombreada en las tiras, argumentando en forma escrita. 1 de 12 estudiantes argumentan que la tira (unidad) está dividida en partes diferentes pero la fracciones representan la misma porción de la unidad. Lo que indica que reconoce la relación de equivalente entre las fracciones.

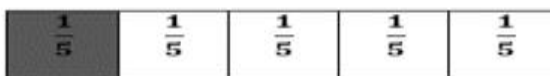
En términos generales se puede inferir que según las R1, R2 y R3, los estudiantes reconocen la relación de equivalencia entre las porciones sombreadas en las tiras del punto 1 y 2. Esta información permite inferir que los estudiantes identifica que la unidad se puede dividir en diferentes partes iguales y al compararlas con otra unidad puede representar la misma parte del todo.

P2 Observa las siguientes representaciones de fracciones y responde la pregunta ¿las tiras del punto 1 y 2 representan la misma porción en la unidad? Argumenta la respuesta.

Punto 1



Punto 2



Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante reconozca las fracciones equivalentes a partir de particiones diferentes en una unidad. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 29 Respuesta de estudiante S2T1P2

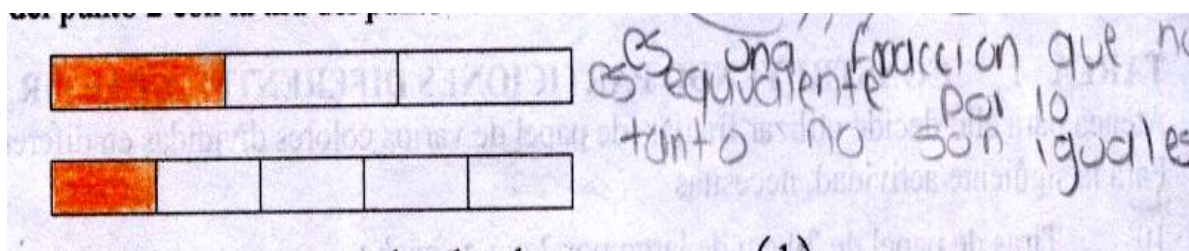


Tabla 35 S2T1P2

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que encuentran la relación, argumentando que no son fracciones equivalentes, porque no representan la misma parte en la unidad.	7	58,3
	2	Estudiantes que no reconocen la relación entre las dos partes sombreadas en las tiras.	3	25
	3	Estudiantes que no responden la pregunta	2	16,7

En la tabla 35, se observa que 7 de 12 estudiantes determinan la relación entre las dos partes sombreadas en las tiras, estableciendo que no representan la misma parte de la unidad. Lo que indica que reconocen la relación entre las fracciones y la unidad que las contiene. También se

muestra que 3 de 12 estudiantes no reconocen la relación entre las dos partes sombreadas de las tiras. 2 de 12 estudiantes no responden la pregunta.

En términos generales se puede inferir que los estudiantes con las R1 y R2 reconocen que la unidad se puede fraccionar en diferentes partes iguales, por lo tanto hay fracciones que se pueden escribir de diferentes formas pero equivalen a la misma porción en la unidad que las contiene.

P 3	Atenea necesita ayuda para colorear el siguiente dibujo, teniendo en cuenta la pared de fracciones y las indicaciones del profesor.
•	Colorea de color amarillo todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$
•	Colorea de color café todas las fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$
•	Colorea de color negro todas las fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante reconozca las fracciones equivalentes a partir de particiones diferentes en una unidad.

Tabla 36 S2T1P3

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que expresan su respuesta en forma numérica, reconociendo las fracciones equivalentes a partir de particiones diferentes en una unidad. Justifica su respuesta con el procedimiento	6	50
	2	Estudiantes que expresan su respuesta estableciendo la relación a partir de la comparación y utilización de la pared de fracciones.	4	33,3
	3	Estudiantes que realizan su respuesta sin realizar procedimientos	2	16,7

En la tabla 36 se observa que 6 de 12 estudiantes expresan la respuesta en forma numérica, reconociendo las fracciones equivalentes a partir de particiones diferentes en una unidad y reconocen que el mismo número fraccionario puede estar representado por distintas fracciones $\frac{a}{b}$

Lo que evidencia que reconocen la relación entre las fracciones y la unidad que las contiene. También se observa que 4 de 12 estudiantes expresan su respuesta estableciendo la relación a partir de las fracciones equivalentes, utilizando la pared de fracciones como punto de comparación. Lo que muestra que los estudiantes reconocen la relación de equivalencia. Posteriormente se observa que 2 de 12 estudiantes responden la pregunta sin realizar procedimientos. En términos generales se puede inferir que según las R1, R2 y R3 los estudiantes reconocen la relación de fracciones equivalentes y que la unidad se puede dividir en partes diferentes.

Los resultados obtenidos en la situación 2 “Pintando el salón de clases y las fracciones equivalentes”, mediante la realización de una tarea, conformada por 3 preguntas, contempló la fracción como medida, desde un contexto. En esta situación se fortaleció los conocimientos matemáticos de partición, fracciones equivalentes, comparación de fracciones, fracción como cociente indicado y la fracción como parte de una unidad a través de la aplicación de operadores fraccionarios $\frac{a}{b}$, mediante procesos concretos y vivenciales sobre el objeto matemático en la pared de fracciones, que conllevaron al fortalecimiento del objeto matemático en comparación de fracciones y fracciones equivalentes. Esta situación, contempló otros dos aspectos relevantes como son: el aspecto simbólico mediante procesos algorítmicos e identificar fracciones equivalentes al

colorear la figura de la pregunta 3 y el aspecto conceptual a través de diálogos de saberes y justificación de procesos.

3.3.3 Resultados y Análisis de los resultados de la situación 3

T1 Comprendiendo y generando una estrategia de solución

P1 De los dulces que reciben las niñas ¿Qué parte de dulces reciben las niñas de cabello negro?

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante utilice números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular una determinada cantidad. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 30 Respuesta de estudiante S3T1P1

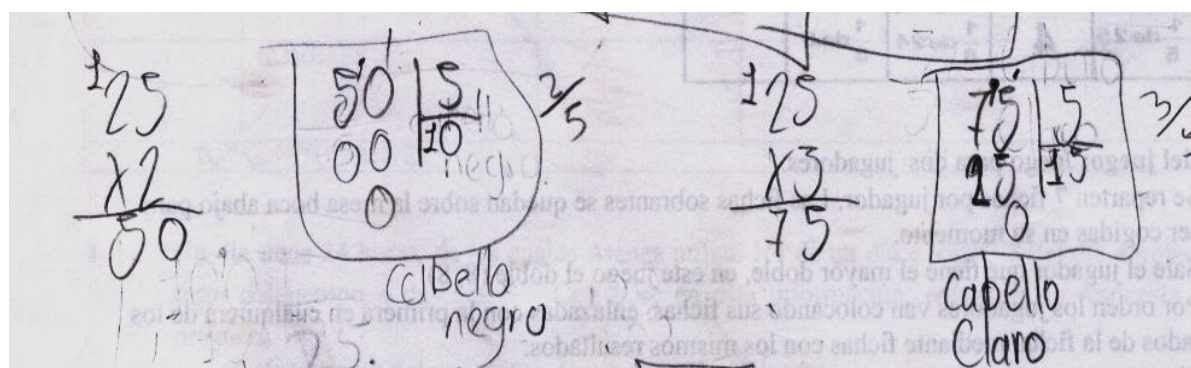


Tabla 37 S3T1P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que formulan el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$ y justifican su respuesta con el procedimiento algorítmico	2	16,7
	2	Estudiantes que expresan la respuesta a partir del proceso algorítmico.	8	66,7
	3	Estudiantes que expresan la respuesta, argumentando en forma escrita.	2	16,7

En la tabla 37 se observa que 8 de 12 estudiantes expresan la respuesta a partir de procedimientos algorítmicos. Lo que indica que comprende la información del problema y reconocen el efecto de aplicación del operador fraccionario. También se nota que 2 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 1, los cuales formulan el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, justificando su respuesta con el procedimiento algorítmico. Lo que evidencia que reconocen la información en el problema y la relación entre el operador y la cantidad. Se observa que 2 de 12 estudiantes tienen un tipo de respuesta 3, los cuales expresan la respuesta en forma escrita sin justificar el proceso.

En términos generales se puede inferir que según las R1 y R2 los estudiantes reconocen la información en el problema y el efecto de aplicación del operador en una cantidad. Con ello se infiere que los estudiantes reconocen el efecto de aplicar operadores de la forma $\frac{m}{n} \times$,

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ como operadores fraccionarios que transforman el valor de una cantidad o magnitud.

P 2 Completa la información de la tabla

COMPARTIENDO DULCES			
NIÑAS	Número de dulces	ADULTOS	Número de dulces
Niñas de cabello negro		Hombres	
niñas de cabello claro		Mujeres	

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante utilice números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular una determinada cantidad. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 31 Respuesta de estudiantes S3T1P4

P 2 Completa la información de la tabla

COMPARTIENDO DULCES			
NIÑAS	Número de dulces	ADULTOS	Número de dulces
	25		75
Niñas de cabello negro	10	Hombres	25
niñas de cabello claro	15	Mujeres	50

Tabla 38 S3T1P4

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que formulan y resuelven el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $m \times$ y la forma $\frac{1}{n} \times$. Justifican su respuesta con el procedimiento	9	75
	2	Estudiantes que reconocen la información y resuelven el problema propuesto	2	16,7
	3	Estudiantes que no responden la pregunta	1	8,3

En la tabla 38 se observa que 9 de 12 estudiantes formulan y resuelven el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, argumentando la respuesta con el procedimiento algorítmico. Lo que señala que los estudiantes comprenden la información del problema y reconocen el efecto de aplicación del operador fraccionario. También se evidencia que 2 de 12 estudiantes formulan el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, . Lo que muestra que los estudiantes reconocen la información en el problema y relación entre el operador y la cantidad. Posteriormente se observa que 1 de 12 estudiantes no responde la pregunta.

En términos generales se puede inferir que según las R1 y R2 los estudiantes reconocen la información en el problema y el efecto de aplicación del operador en una cantidad.

T 2 Dominó de fracción como operador

P1 ¿Qué relación encuentras entre el número y la fracción como operador en la ficha?



Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante utilice números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular una determinada cantidad. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 32 Respuesta de estudiantes S3T2P1

la relación egueson iguales porque $1 \times 5 = 5 \div 30 = 6$.

Tabla 39 S3T2P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que identifican la relación entre el número y la fracción como operador y lo aplican en el juego del dominó	8	66,7
	2	Estudiantes que realizan el proceso algorítmico para encontrar la relación entre el número y la fracción como operador.	4	33,3

En la tabla 39 se observa que 8 de 12 estudiantes que encuentran la relación del número con la fracción como operador y lo evidencian en el juego de dominó. Lo cual indica que los estudiantes

comprenden el efecto de aplicación del operador fraccionario $\frac{m}{n} \times$ en una cantidad. También se evidencia que 4 de 12 estudiantes realizan el proceso algorítmico para encontrar la relación entre el número y la fracción como operador. Lo que señala que los estudiantes reconocen la información en el problema y relación entre el operador y la cantidad. En términos generales se puede inferir que las R1 y R2 identifican el efecto al aplicar el operador de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ en una cantidad.

P 2		Colorea la parte que se indica en cada caso										
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>											$\frac{8}{10}$	de 10
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table>											$\frac{3}{5}$	de 10

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante utilice números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular una determinada cantidad. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 33 Respuesta de estudiante S3T2P2

8 de 10 = Se coborean 8 cuadros porque $10 \times 8 = 80 \div 10 = 8$

3 de 10 = Se colorea 6 cuadros porque $10 \times 3 = 30 \div 5 = 6$

Tabla 40 S3T2P2

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que utilizan números de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ para calcular fracciones de una determinada cantidad, argumentan su respuesta mediante procedimiento algorítmico.	7	58,3
	2	Estudiantes que expresan su respuesta a partir de procedimientos algorítmicos, aunque su resultado no satisface la pregunta	2	16,7
	3	Estudiantes que mediante procedimiento algorítmico encuentra la respuesta.	3	25

En la tabla 40 se observa que 7 de 12 estudiantes utilizan números de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, para calcular fracciones de una determinada cantidad, argumentan su respuesta mediante procedimiento algorítmico. Lo que señala que comprenden el efecto de aplicación del operador fraccionario. Los resultados muestran que 2 de 12 estudiantes expresan su respuesta en a partir de operaciones algorítmicas, aunque su resultado no satisface la pregunta. Lo que indica que los estudiantes presentan dificultad para reconocer la relación entre el operador fraccionario y la cantidad. Se observa que 3 de 12 estudiantes encuentran la respuesta a partir de procedimientos

algorítmicos. Lo que muestra que los estudiantes reconocen la relación entre el operador fraccionario y la cantidad.

En términos generales se puede inferir que según las R1 y R3 los estudiantes reconocen el efecto de aplicación del operador $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, en una cantidad.

Pregunta 3 Representa en una recta numérica las siguientes fracciones

- a. $\frac{3}{7}$ de -1 b. $\frac{5}{7}$ de 1 c. $\frac{9}{7}$ de -1 , d. $\frac{12}{7}$ de 1

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante utilice números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular una determinada magnitud. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 34 Respuesta de estudiante S3T2P3

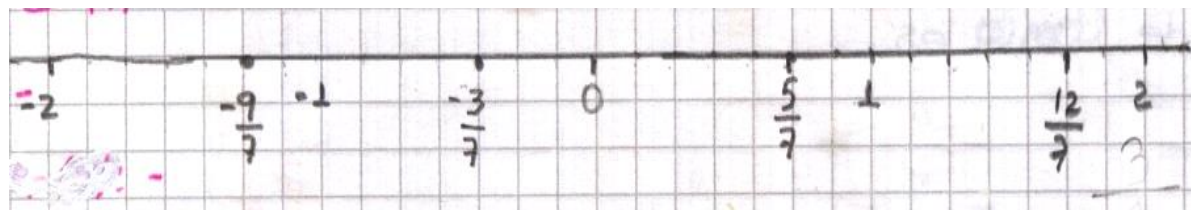


Tabla 41 S3T2P3

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que representan en la recta numérica correctamente, utilizando los números de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, para calcular fracciones de una determinada magnitud.	10	83,3
	2	Estudiantes que representan en forma incorrecta en la recta numérica	2	16,7

En la tabla 41 se observa que 10 de 12 estudiantes representan la fracción correctamente en la recta numérica, utilizando los números de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ para calcular en una determinada magnitud. Lo que indica que comprende el efecto de aplicación del operador fraccionario en una magnitud. También se evidencia que 2 de 12 estudiantes representan la fracción en forma incorrecta en la recta numérica. Lo que demuestra que algunos estudiantes tienen dificultad para reconocer la relación entre el operador fraccionario y la magnitud. En términos generales se puede inferir que según las R1 los estudiantes reconocen el efecto de aplicación del operador en una magnitud.

T3 Aplicando saberes sobre la fracción como operador y medida

P1	Atenea se pregunta ¿cómo hallar la mitad de la cuarta parte de una longitud de 4000 metros?
a.	¿Cuánto es la mitad de la longitud?
b.	¿Cuánto es la cuarta parte de la mitad de la longitud?
c.	¿Cómo podrías simbolizar este procedimiento?

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante formule y resuelva problemas que requieran de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $m \times$ y la forma $\frac{1}{n} \times$. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 35 Respuesta de estudiante S3T3P1

Handwritten student work showing the calculation of $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ de 4000. The student then calculates $\frac{1}{8}$ de 4000. A final calculation shows $1 \times 4000 \div \text{entre } 8$. To the right, there is a vertical multiplication of 4000 by 18, resulting in 72000.

Tabla 42 S3T3P1

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que resuelven el problema, analizando el efecto al aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{m}{n} \times$. Justifica su respuesta con el procedimiento algorítmico.	8	66,7
	2	Estudiantes que resuelven el problema, mediante procedimiento algorítmico.	3	25
	3	Estudiantes que no responden la pregunta	1	8,3

En la tabla 42 se observa que 8 de 12 estudiantes expresan la respuesta en forma numérica, analizando el efecto de aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{m}{n} \times$, argumentan la

respuesta con el procedimiento algorítmico. Lo que indica que los estudiantes comprenden el efecto de aplicación del operador fraccionario $\frac{m}{n} \times$ en una magnitud y lo pueden aplicar en su entorno. También se aprecia que 3 de 12 estudiantes dan su respuesta en forma verbal, argumentando mediante procedimiento algorítmico. Con esto se muestra que reconocen el efecto de aplicación entre el operador fraccionario $\frac{m}{n} \times$ y la cantidad. Posteriormente se observa que 1 de 12 estudiantes no responden la pregunta. En términos generales se puede inferir que según las R1 y R2 los estudiantes reconocen el efecto de aplicación del operador en una cantidad.

- P2 El día tiene 24 horas, de las cuales Atenea utiliza $\frac{1}{4}$ para leer, $\frac{3}{8}$ para trabajar y el resto del tiempo a descansar. Con base en esta información, encuentra la respuesta a cada pregunta:
- a. ¿Cuántas horas del día, utiliza Atenea para leer?
 - b. ¿Cuántas horas del día, utiliza Atenea para trabajar?
 - c. ¿Cuántas horas del día, utiliza Atenea para descansar?
 - d. ¿En qué actividad Atenea utiliza la mayor cantidad de tiempo?
 - e. ¿Cuántas horas utiliza Atenea para leer y trabajar?

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante formule y resuelva problemas que requieran de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $m \times$ y la forma $\frac{1}{n} \times$. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 36 Respuesta de estudiante S3T3P2

Handwritten student work on grid paper:

$$\frac{1}{4} \times 24 = 24 \overline{) 4}$$

$$\frac{3}{8} \times 24 = 72 \overline{) 8}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ - 16 \\ \hline 08 \end{array}$$

R113 Para leer utilizas 6 y para trabajar es 9 y para descansar 9.

R119 para trabajar y para descansar.

Tabla 43 S3T3P2

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que formulan y resuelven el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$ justificando su respuesta con el procedimiento algorítmico.	5	41,7
	2	Estudiantes que reconocen la información y resuelven el problema propuesto, argumentando en forma verbal.	5	41,7
	3	Estudiantes que no reconocen la información en el problema propuesto	2	16,7

En la tabla 43 se observa que 5 de 12 estudiantes formulan y resuelven el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ y lo justifican con el procedimiento algorítmico. Lo que indica que comprenden el efecto de aplicación del operador fraccionario en una cantidad. También se observa que 5 de 12 estudiantes reconocen la

información y resuelven el problema propuesto, argumentando en forma escrita, lo que se puede interpretar como un reconocimiento del efecto de aplicación entre el operador fraccionario y la cantidad. Se advierte también que 2 de 12 estudiantes no reconocen la información en el problema propuesto. Lo que muestra que algunos estudiantes tienen dificultad para aplicar operador fraccionario.

En términos generales se puede establecer que los estudiantes con las R1 y R2 reconocen el efecto de aplicación del operador en una cantidad. Con ello se deduce que los estudiantes formulan y resuelven situaciones problema utilizando operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, y reconocer el efecto de transformación de la fracción como operador.

Pregunta 3	Traza un camino desde la salida del colegio a la casa de Atenea. Une cada círculo con el siguiente por la ruta que tenga la respuesta del transformador enunciado
------------	---

Esta pregunta tenía como finalidad que el estudiante formule y resuelva problemas que requieran de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $m \times$ y la forma $\frac{1}{n} \times$. A continuación un ejemplo de las respuestas realizadas por los estudiantes:

Figura 37 Respuesta de estudiante S3T3P3

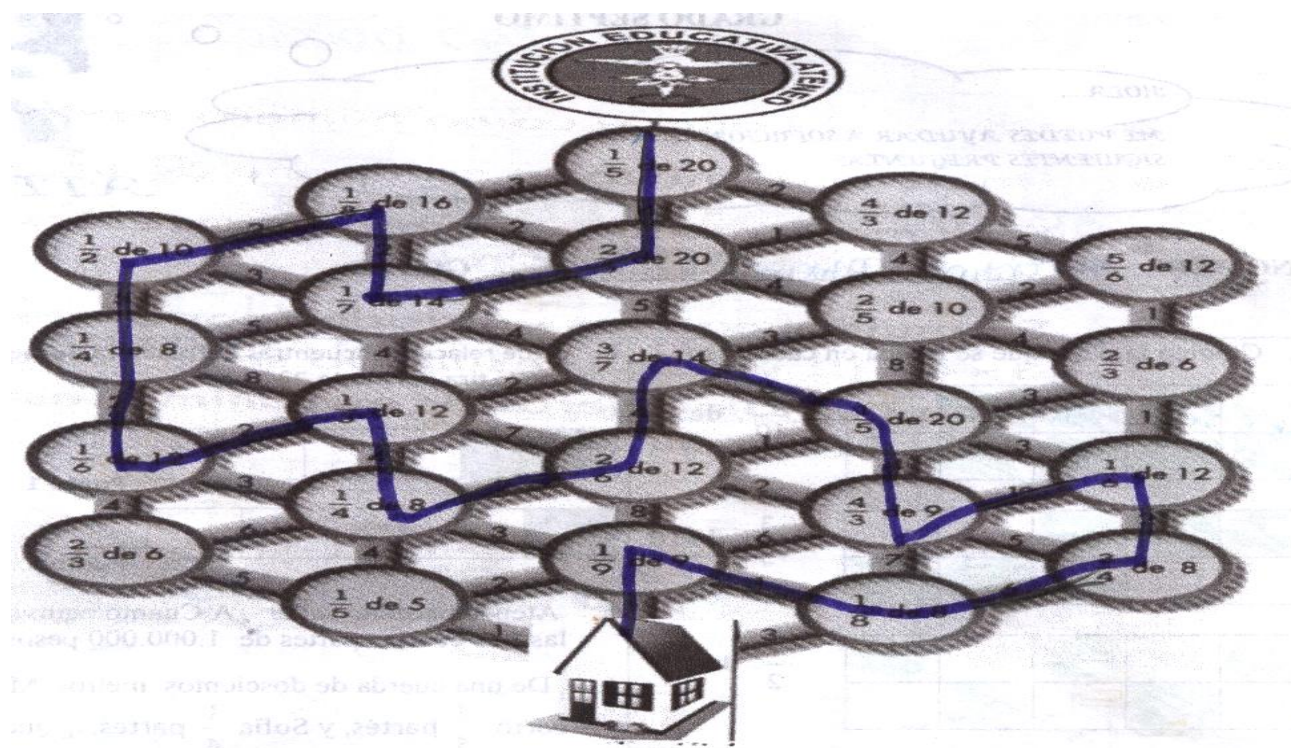


Tabla 44 S3T3P3

Número de estudiantes	Tipo de respuesta	Descripción	Número de estudiantes	%
12	1	Estudiantes que resuelven el problema utilizando números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular fracciones de una determinada magnitud, justifica con el procedimiento algorítmico.	7	58,3
	2	Estudiantes que resuelven el problema utilizando números de la forma $\frac{m}{n} \times$ para calcular fracciones de una determinada magnitud, aunque presentan algunas dificultades en el procedimiento algorítmico	3	25
	3	Estudiantes que no reconocen la información en el problema	2	16,7

En la tabla 44 se observa que 7 de 12 estudiantes formulan y resuelven el problema a partir de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$ y justifican la respuesta con el procedimiento algorítmico. Lo que denota la comprensión del efecto de aplicación

del operador fraccionario en una cantidad. También se muestra que 3 de 12 estudiantes reconocen la información y resuelven el problema propuesto, de este modo se resalta el reconocimiento del efecto de aplicación entre el operador fraccionario y la cantidad. Se aprecia también que 2 de 12 estudiantes no reconocen la información en el problema propuesto. Lo que indica que algunos estudiantes presentan dificultad para reconocer el efecto de aplicación del operador fraccionario.

En términos generales se puede inferir que según las R1 y R2 los estudiantes reconocen el efecto de aplicación del operador en una cantidad.

Los resultados obtenidos en la situación 3 “Compartiendo dulces y las transformaciones sucesivas”, a través de 3 tareas realizadas, abordó la comprensión y generación de estrategias de solución, mediante un proceso concreto y vivencial del objeto matemático a través del dominó de fracción como operador, que conllevaron a fortalecer el objeto matemático, permitiendo aplicarlo en situaciones problema. Esta situación generó un espacio de participación para el aprendizaje, a través de la interacción entre los estudiantes, el profesor y el objeto de conocimiento, a partir de diálogos de saberes, justificación de procesos y diseño de estrategias de solución, que permitieron la solución a situaciones problema, mediante la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, en una determinada cantidad o magnitud. Esta situación también contempló otros dos aspectos relevantes como son: el aspecto simbólico mediante la aplicación de saberes en procesos algorítmicos y el aspecto conceptual a través de la argumentación y socialización de respuestas, que permitiera fortalecer el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a partir de los significados como operador y medida.

3.4 Algunas Consideraciones y Conclusiones

A continuación se presentan los aspectos más significativos alcanzados por los estudiantes participantes en el estudio de implementación de la propuesta de aula sobre el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones a partir de los significados como operador y medida.

En la situación 1 “Reconociendo transformaciones de un valor numérico”, a través de las cinco tareas realizadas, se observa en términos generales que los estudiantes identificaron el efecto de la transformación del valor numérico, a través de diferentes actividades, entre ellas la máquina mágica y en la construcción de la recta numérica, que conllevaron al fortalecimiento del significado como operador y medida que al ser aplicado a un valor numérico o magnitud, la transforma agrandándola o achicándola. Este fortalecimiento de los números racionales en la representación como fracción a través de los significados como operador y medida, contempló dos aspectos relevantes como son: el aspecto simbólico mediante procesos algorítmicos y el aspecto conceptual a través de diálogos de saberes, justificación de procesos y diseño de estrategias de solución, que permitieran la solución de la situación problema.

La situación de reconocimiento de las transformaciones de un valor numérico, mostró al estudiante que cuando se aplica el transformador $\frac{a}{b}$ en una cantidad o magnitud se debe tener en cuenta que:

- Cuando se aplica la fracción $\frac{a}{b}$ como operador a una cantidad o magnitud, se debe tener en cuenta que si el numerador (a) es menor que el denominador (b) (fracción propia); tal que $a < b$ (a es menor que b), se reduce la cantidad o magnitud.
- Cuando se aplica una fracción $\frac{a}{b}$ como operador a una cantidad o magnitud, se debe tener en cuenta que si el numerador (a) es mayor que el denominador (b) (fracción impropia) $a > b$ (a es mayor que b), la cantidad o magnitud se amplifica.

En esta situación se retoman los referentes teóricos Vasco (1996), Llinares y Sánchez (1997), Elguero (2009), los cuales abordan la fracción como operador y medida desde la transformación que sufre una cantidad o magnitud.

En la situación 2 “Pintando el salón de clases y las fracciones equivalentes”, mediante la realización de una tarea, conformada por 3 preguntas, se contempló la fracción como medida, desde un contexto. En esta situación se fortaleció los conocimientos matemáticos de partición, fracciones equivalentes, comparación de fracciones, fracción como cociente indicado y la fracción como parte de una unidad a través de la aplicación de operadores fraccionarios $\frac{a}{b}$, mediante estos procesos concretos y vivenciales sobre el objeto matemático, se enfatizó en la ubicación de la fracción en la recta numérica y en la pared de fracciones, en donde aplicaron la partición en segmentos iguales, permitiendo comprender que las fracciones equivalentes representan la misma

parte de una unidad. El fortalecimiento del objeto matemático, contempló otros dos aspectos relevantes como fueron: el aspecto simbólico mediante procesos algorítmicos e identificación de fracciones equivalentes al colorear la figura de la pregunta 3 y el aspecto conceptual a través de diálogos de saberes y justificación de procesos.

En esta situación se retoman los referentes teóricos Vasco (1996), Llinares y Sánchez (1997) y Gairín (2005), en donde se plantea la fracción como medida como una herramienta potente que permite entender la fracción desde un contexto, fácil de reconocer por los estudiantes, en donde se centra la atención sobre la partición sucesiva de la unidad, identificándose con la enseñanza de la recta numérica. Es por ello que Escolano y Gairín (2005, p. 12) afirman sobre la fracción como medida que “por su carácter unidimensional facilita la percepción de la cantidad y la construcción de unidades de longitud conocida su representación fraccionaria”. Mediante esta magnitud se busca medir la longitud de un segmento $\overline{AB}$ tomando como unidad de medida la longitud de otro segmento $\overline{CD}$. De este modo la fracción $\frac{a}{b}$ indica que el segmento $\overline{AB}$ tiene de longitud a veces la unidad de medida que resulta de dividir el segmento $\overline{CD}$ en b partes iguales.

En cuanto a los racionales negativos. Vasco plantea que son contruidos mediante el sistema aditivo como desplazamientos contrarios, por ejemplo “correr hacia atrás” o “deslizarse hacia atrás”. Esto conlleva prolongar la semirrecta en las dos iteraciones (positivo y negativo), a cada racional positivo le corresponde un opuesto o inverso aditivo marcado a la izquierda del cero y viceversa. El operador menos (-) es como un reflector, que ni aumenta ni disminuye las distancias medidas a partir del cero, pero sí cambia la orientación. Así, propone que: “En la básica secundaria

hay que completar los fraccionarios positivos con los negativos. Hay que extender los órdenes estrictos y los ampliadores, así como las operaciones binarias, a toda la recta fraccionaria. Hay que construir el llamado “orden de magnitud” u “orden en valor absoluto” (o el llamado pre-orden), y coordinar los órdenes con las operaciones”.

En la situación 3 “Compartiendo dulces y las transformaciones sucesivas” a través de 3 tareas, se abordó la comprensión y generación de estrategias de solución, mediante un proceso concreto y vivencial del objeto matemático a través del dominó de fracciones como operador, que conllevaron a fortalecer el objeto matemático y aplicarlo en situaciones problema. Esta situación generó un espacio de participación para el aprendizaje, a través de la interacción entre los estudiantes, el profesor y el objeto de conocimiento, a partir de diálogos de saberes, justificación de procesos y diseño de estrategias, que permitieron la solución a situaciones problema, mediante la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n} \times$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$, en una determinada cantidad o magnitud.

Esta situación también contempló otros dos aspectos relevantes como son: el aspecto simbólico mediante la aplicación de saberes en procesos algorítmicos y el aspecto conceptual a través de la argumentación y socialización de respuestas, que generó la utilización de una serie de pasos como fueron: el análisis de la información, las estrategias de solución, la validación de la propuesta de solución y la pertinencia de las estrategias, que conlleven a la evaluación donde se determinó la coherencia del resultado frente a la situación propuesta, permitiendo fortalecer en el estudiante del grado séptimo el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracción.

CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES GENERALES Y REFLEXIONES DIDÁCTICAS

En este capítulo se presentan las conclusiones generales de este proyecto que parten de la valoración de los objetivos planteados al interior de los resultados de la implementación de la propuesta de aula y en términos de los logros alcanzados por los estudiantes durante este proceso considerando también las dificultades más frecuentes durante esta fase. Se incluyen además algunas reflexiones didácticas como aportes a los docentes en formación y en ejercicio interesados en esta problemática y finaliza con las referencias bibliográficas

4.1 Conclusiones generales

En relación con los objetivos específicos de la propuesta

Se identificaron las dificultades en el proceso de aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones, mediante una prueba diagnóstica que presentaron los estudiantes, estas dificultades son: la partición de la unidad o magnitud, las fracciones equivalentes, ubicación de la fracción en la recta numérica y la resolución de problemas.

En la fase de diagnóstico según los resultados obtenidos en la prueba, se observa falencias en los estudiantes en su proceso de aprendizaje alrededor del tema de fracciones, lo cual es un inconveniente para acceder al conjunto de los números racionales. Es por ello, que al profundizar en el estudio de la propuesta, autores como Escolano y Gairín (2005), Llinares y Sánchez (1997),

Perera y Valdemoros (2009) y Elguero (2009), consideraron que la enseñanza simultánea de todos los significados de la fracción llevaría a la confusión de los estudiantes y proponen hacerlo de forma secuencial durante el desarrollo de proceso escolar. Es por ello que estas dificultades sirven de insumos para el diseño de la propuesta de aula.

El diseño de la propuesta se centró en integrar los significados de la fracción como operador y medida en situaciones problema, que fortalecieran el aprendizaje de los números racionales en la representación como fracciones, en los estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo, puesto que la mayoría de referentes teóricos como Kieren (1980), Llinares y Sánchez (1997) y Obando (2003) entre otros, hacen énfasis en el significado como parte todo. Los significados como operador y medida requieren un tipo de razonamiento matemático diferente, puesto que cumplen la función de transformar una cantidad o magnitud; es por ello que son herramientas potentes para la construcción del conocimiento matemático a la luz de los EBC en Matemáticas para el grado séptimo.

En la implementación de la propuesta en el aula de clase, se desarrollaron tres situaciones que facilitaron la construcción del conocimiento matemático. Esta propuesta fue enriquecida con las situaciones problema como el espacio de participación que necesitaban los estudiantes para interactuar entre ellos mismos y el docente, a través del objeto de conocimiento mediante la exploración de la situación, la sistematización de estrategias, el debate de posibles soluciones, que conllevaron a la evaluación de procesos hacia la resolución de la situación problema.

Esta implementación de la propuesta, permitió la comprensión en los estudiantes de varios conceptos relevantes para el estudio del objeto matemático como son: la partición, fracción propia e impropia, la fracción como operador, la utilización de operadores de la forma $\frac{m}{n}$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$, y $n \neq 0$ en una cantidad o magnitud, las fracciones equivalentes, la fracción como medida, la fracción en la recta numérica y la resolución de situaciones problema con fracciones, lo cual permitió inferir que la propuesta de aula fue acorde a las necesidades de los estudiantes, permitiendo en ellos la construcción del saber y su aplicación en el entorno.

La validación de la propuesta de aula, se desarrolló bajo un enfoque cualitativo con doce (12) estudiantes en la I.E. Ateneo, mediante el método exploratorio; por cuanto este enfoque estudió la realidad en su contexto natural, interpretando los fenómenos de acuerdo con los significados que tenían los participantes, lo cual les permitió mejorar en la interpretación y resolución de situaciones matemáticas. Este proceso ubicó a los estudiantes como protagonistas de su aprendizaje. El método exploratorio permitió que el docente obtuviera información sobre el contexto particular, dando una visión general de la realidad del estudiante.

En relación con el objetivo general de la propuesta

En esta propuesta de aula se fortaleció el proceso de aprendizaje de los números racionales en su representación como fracciones en los estudiantes del grado séptimo de la IE Ateneo, a partir de la integración de los significados como operador y medida en situaciones problema, que permitieron reforzar los conocimientos adquiridos en grados anteriores, abordar los significados

como operador y medida y enfrentarse a la resolución de problemas, que les brindaran las herramientas necesarias para acceder al estudio del conjunto de números racionales en sus diferentes expresiones (fracción, razones, decimales y porcentajes) y poder aplicarlos en la resolución de problemas en diversos contextos.

4.2 Reflexiones didácticas

La propuesta de aula “El aprendizaje de los números racionales a partir de los significados como operador y medida” deja algunas consideraciones que son pertinentes abordar:

El estudiante para acceder al estudio de los números racionales, debe poseer los conocimientos matemáticos sobre la representación como fracciones desde los diferentes significados. Es por ello que la fracción debe abordarse desde los primeros años de escolaridad, con actividades que desarrollen la interpretación de cada uno de los diferentes significados, iniciando con el significado como medida, para que los estudiantes puedan comprender la relación frente a una magnitud y al espacio que ocupan dentro de su entorno. Después se debe continuar con la relación parte – todo, con el fin de que el estudiante pueda comprender el concepto de partición en contextos de medida, con el fin de significar su aprendizaje. Posteriormente debe abordarse el concepto de fracción como cociente con el fin de comprender la relación entre los términos de la fracción.

Cuando se hayan interiorizados en los estudiantes los anteriores significados de la fracción (medida, parte-todo y cociente), se debe abordar la relación como operador desde la

transformación (agrandamiento o achicamiento) de una cantidad o magnitud, para finalizar con la relación como razón. Estos significados deben llevarse al aula a partir de actividades, guías de trabajo, laboratorios y juegos matemáticos que conlleven a la construcción del conocimiento matemático, desde un nivel concreto hacia un nivel simbólico, con el fin de generar un adecuado proceso de aprendizaje.

El estudiante para comprender los números racionales debe abordar cada una de sus diferentes representaciones, iniciando con la representación como fracciones desde los primeros años de escolaridad, posteriormente emprender las representaciones como fracciones decimales y expresiones decimales y finalizar con la representación como porcentaje, esta secuencia permite construir un adecuado aprendizaje, para acceder al conjunto de los números reales.

Las clases en donde se utiliza material lúdico y juegos, logran captar mayor motivación e interés por aprender, además de desarrollar habilidades que conllevan a la significación del conocimiento, logrando con ello que el estudiante desarrolle su capacidad de análisis, concentración, síntesis, abstracción y generalización del objeto de estudio, convirtiéndose en un estímulo para el diseño de estrategias.

El aprendizaje del conocimiento matemático debe ir permeada por situaciones problema, logrando centrar la atención del estudiante y potenciar el trabajo participativo y autónomo hacia un aprendizaje significativo; promoviendo la transformación de las prácticas docentes en ambientes de aprendizaje que favorezcan la construcción del conocimiento matemático.

4.3 Referencias Bibliográficas

Clarke, D. M., & Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 127-138.

Chamorro, M. D. C. (2003). El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

Escolano Vizcarra, R., & Gairin Sallán, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 1.

Elguero, C. (2009). Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural del trabajo (Doctoral dissertation).

Fandiño, M. (2009). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Bogotá: Magisterio.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel. Traducción de Luis Puig, publicada en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001

Flores, R. (2010). Significados asociados a la noción de fracción al resolver un problema de mezclas.

Gómez, G. R., Flores, J. G., & Jiménez, E. G. (1996). Metodología de la investigación cualitativa.

Hernández, M. R. (2010). Evolución histórica del concepto de Número. *Autodidacta*, 1(1), 28-47.

Hernández, F., & Fernández, C. (2006). Baptista. Metodología de la Investigación. Cuarta edición. Mac Graw Hill editores. México DF México, 103, 205.

Hurtado Orduz, M. E. (2012). Una propuesta para la enseñanza de fracciones en el grado sexto (Doctoral dissertation, Universidad Nacional de Colombia).

Iafrancesco V. Giovanni M. Pedagogía Transformadora, modelo Pedagógico Institución Educativa Ateneo

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. Recent research on number learning, 125-149.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1997). Aprender a enseñar, modos de representación y número racional.

Llinares, S., (2003). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. Madrid: Pearson Educación S.A.

Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la formación de maestros. Caracterizando perspectivas. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, 5-16.

MEN (Ministerio de Educación Nacional). (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.

MEN (Ministerio de Educación Nacional). (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: Magisterio.

Múnera, J. (2006). Construcción de aprendizajes matemáticos desde el enfoque de situaciones problema. *Formándonos Maestros*, (3).

Obando, Gilberto y Múnera, John. (2003). Las situaciones Problema como estrategia para la conceptualización matemática. En: *Revista Educación y Pedagogía*. Vol. XV, N°. 35, (enero-abril). Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. PP. 185 –199.

Perera Dzul, P. B., & Valdemoros Álvarez, M. E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación matemática*, 21(1), 29-61.

Quispe, W. (2011). La comprensión de los significados del número racional positivo y su relación con sus operaciones básicas y propiedades elementales. Perú: Universidad Nacional de Educación.

Restrepo, G. (1998). Fundamentos de las matemáticas. Cali. Universidad del Valle.

Serrano, A., & Emilio, J. (2008). El desarrollo psicológico infantil. Áreas y procesos fundamentales (Vol. 27). Publicacions de la Universitat Jaume I.

Vasco Carlos E (1994). El archipiélago de las fracciones. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 1994

Vasco Carlos E. (1996). Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Volumen II. Ministerio de Educación Nacional. Serie pedagogía y Currículo 2. Santafé de Bogotá.

Zarzar, C. B. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: Una propuesta de enseñanza en dos ambientes. Revista Horizontes pedagógicos, 15(1).

Anexo 1 Registro fotográfico de las estudiantes grado séptimo



Anexo 2 Recolección de información diagnóstico

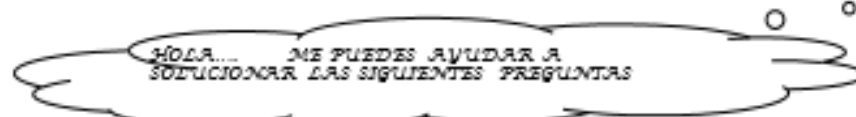


MAESTRIA EN EDUCACION, ENFASIS EN EDUCACION MATEMATICA MODALIDAD PROFUNDIZACION RECOLECCION DE INFORMACION DE BASE



UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA FRACCIÓN A PARTIR DE LAS RELACIONES COMO OPERADOR Y MEDIDA EN SITUACIONES PROBLEMA

NOMBRE _____ GRADO _____



1. Colorea la parte que se indica en cada caso <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table> $\frac{8}{10}$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table> $\frac{3}{5}$ <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> <tr><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td><td style="width: 20px; height: 20px;"></td></tr> </table> $\frac{1}{2}$ 2. ¿Cómo resolverías esta operación? $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} =$ 3. ¿Qué relación encuentras entre estas dos operaciones? $\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \quad \text{y} \quad 8 * \left(\frac{1}{10}\right)$ 4. Cómo podrías representar en una recta numérica las siguientes fracciones a. $\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7}, \frac{5}{7}, \frac{12}{7}$																															5. De una cuerda de cien metros, María cortó $\frac{2}{5}$ partes, y Sofía $\frac{8}{20}$ partes, ¿Qué longitud de cuerda cortó cada una? 6. Calcula Los $\frac{3}{4}$ de 1.000.000 pesos 7. ¿Qué relación encuentras entre la tira del punto 1 con la tira del punto 2? Punto 1 Punto 2 8. En un grupo de 32 estudiantes, las tres cuartas partes son niñas ¿Cuántas niñas hay en el salón de clase? 9. Rodolfo utiliza $\frac{1}{4}$ de un día a leer, $\frac{3}{8}$ del día a trabajar y el resto del tiempo a descansar. ¿Cuántas horas del día, utiliza para cada actividad? 10. Los $\frac{2}{3}$ de la edad de María es 24 años y la edad de Camila es los $\frac{4}{9}$ de la de María ¿Cuáles son las edades de María y Camila?