

ANEXO No 7: Construcciones Geométricas de las Cónicas en Cabri por Díaz-Barriga (2006, pp. 143 - 146)

En esta sección mostraremos a las cónicas (parábola, elipse e hipérbola) generada con distintos enfoques: bajo su definición o bajo condiciones especiales que las determinan completamente, la meta es mostrarlas como cortes de un cono. La colección de problemas constructivos ofrecen la oportunidad de resolver con geometría sintética cuestiones que involucran al plano y al espacio, con los puntos finitos y al infinito.

Comenzaremos con las definiciones sintéticas. Al principio, nos alejaremos de la presentación de la Geometría Analítica.

Definición de circunferencia

Dado un punto, llamado centro, la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia al centro es constante. A la distancia constante se le llama radio.

Definición de Parábola

Dados un punto, llamado foco, y una recta, llamada directriz, la parábola es el conjunto de puntos tales que la distancia del punto al foco es igual a la distancia del punto a la directriz.

Definición de la Elipse

Dados dos puntos, llamados focos, la elipse es el conjunto de puntos tales que la suma de las distancias a los focos es constante. Observación: la circunferencia puede verse como un caso particular de elipse en el cual los focos se han superpuesto en un solo punto que es precisamente el centro de la circunferencia.

Definición de Hipérbola

Dados dos puntos, llamados focos, la hipérbola es el conjunto de puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a los focos es constante.

Enseguida una primera colección de problemas que pueden ser resueltos siempre con un tratamiento sintético.

Actividad 1. Anatomía de las cónicas

Realice las siguientes construcciones.

1. Trace en el plano una recta l y un punto F exterior a dicha recta. La recta será nuestra directriz y el punto será el foco de una parábola. Dichos objetos serán los datos iniciales para la construcción de la curva. **¿Cómo encontrar los puntos que pertenecen a la parábola definida por estos elementos?**

Trace un punto Q sobre la directriz. Dicho punto será un punto móvil en ella. Supongamos que P sea un punto en la parábola y que Q sea el punto en la directriz más próximo a P . ¿Puede decir qué ángulo forman el segmento PQ con la recta l ?

Trace pues la recta s perpendicular a la recta l que pase por Q .

En el párrafo anterior se ha explorado su relación con el problema que deseamos resolver.

Además, si P es un punto de la parábola, habrá de encontrarse a igual distancia de los puntos F y Q , es decir, del foco y la directriz. ¿Qué puntos satisfacen encontrarse a igual distancia entre F y Q ? Aquellos que se encuentran en la mediatriz del segmento FQ . Llamamos m a dicha recta.

Finalmente, los puntos de la parábola deben pertenecer simultáneamente a las rectas s y m . Trace entonces el lugar geométrico de dichos puntos cuando Q recorre toda la directriz.

Con el comando cónica, superponga una cónica a dicho lugar geométrico dando clics a 5 puntos distintos del lugar geométrico (verá la coincidencia casi total de los píxeles dibujados). Después, oculte los puntos elegidos y el lugar geométrico, mientras queda visible la cónica. Defina en Cabri la macro correspondiente.

Trace la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco. Dicha recta se llama eje focal.

Trace el punto de intersección entre el eje focal y la cónica. Dicho punto se llama vértice de la parábola; se encuentra en la mitad entre el foco y la directriz.

Trace la recta paralela a la directriz que pase por el foco. Trace los puntos de intersección entre la cónica y la paralela. El segmento que une a dichos puntos se llama lado recto.

2. Trace en el plano una circunferencia de centro F y radio arbitrario. Además trace también un punto F' en el interior de dicha circunferencia. Dichos objetos serán los datos iniciales para la construcción de la curva. **¿Cómo encontrar los puntos que pertenece a la elipse definida por estos elementos?**

Sobre trace un punto Q sobre la circunferencia. Dicho punto será un punto móvil en ella. Supongamos que P sea un punto en la elipse: buscamos que la suma de distancias PF con PF' sea constante.

Tracemos el radio FQ y, como en el caso anterior la mediatriz m entre Q y el foco restante, es decir F' .

Sea P el punto de intersección entre el radio FQ y la mediatriz m . Veremos entonces que P es un punto de una elipse.

Por pertenecer a la mediatriz m , la distancia PF' es igual a PQ . En base a esto, descomponiendo el radio FQ en la suma de segmentos FP más PQ y substituyendo PQ por su equivalente PF' , se llega a que la suma de distancias pedida se mantiene constante pues se ha mostrado como equivalente al radio de la circunferencia trazada al inicio.

Trace entonces el lugar geométrico de dichos punto P cuando Q recorre toda la circunferencia.

Con el comando cónicas, superponga una cónica a dicho lugar geométrico dando clic a 5 puntos distintos del lugar geométrico (verá la coincidencia casi total de los pixeles dibujados). Después oculte los puntos elegidos y el lugar geométrico, mientras queda visible la cónica.

Trace la recta que une a los focos. Dicha recta se llama eje focal.

Trace los puntos de intersección entre el eje focal y la cónica. Dichos puntos se llaman vértices de la elipse, el segmento que los une se llama eje mayor de la elipse.

Trace la recta perpendicular al eje focal que pase por el foco. Trace los puntos de intersección entre la cónica y la perpendicular. El segmento que une a dichos puntos se llama lado recto. Una elipse permite dos lados rectos, uno por cada foco.

Trace el punto medio entre los dos focos. Dicho punto es el centro de la elipse. Levante la perpendicular al eje focal que pase por el centro de la elipse. Encuentre los puntos de intersección de esta recta con la elipse y únalos. Dicho segmento se llama eje conjugado y sus extremos son los vértices conjugados de la elipse.

La elipse puede encerrarse dentro de un rectángulo cuyos lados son paralelos a ejes y pasan por los vértices.

3. Trace en el plano una circunferencia de centro F y radio arbitrario. Además trace también un punto F' en el exterior de dicha circunferencia. Dichos objetos serán los datos iniciales para la construcción de la curva. **¿Cómo encontrar los puntos que pertenecen a la hipérbola definida por estos elementos?**

Sobre trace un punto Q sobre la circunferencia. Dicho punto será un punto móvil en ella. Supongamos que P sea un punto en la hipérbola: busquemos que el valor absoluto de la diferencia de las distancias entre PF y PF' sea constante.

Tracemos la recta FQ y, como en el caso anterior la mediatriz m entre Q y el foco restante, es decir F' .

Sea P el punto de intersección entre la recta FQ y la mediatriz m . Veamos por qué P es punto de una hipérbola.

Por pertenecer a la mediatriz m , la distancia PF' es igual a PQ . Ahora bien, los segmentos importantes PF , PF' , PQ y FQ están relacionados entre ellos. Para posiciones específicas de Q en la circunferencia, la diferencia PF menos PF' es igual al radio de la circunferencia; para otras es la diferencia PF' menos PF la cantidad igual al radio de la circunferencia; más específicamente, cada rama de la hipérbola se asocia a un tipo de diferencia, ya sea $PF - PF'$ o la complementaria $PF' - PF$. Ambos casos se resumen si se considera el valor absoluto de una diferencia.

Trace entonces el lugar geométrico de dichos puntos P cuando Q recorre toda la circunferencia.

Con el comando cónicas, superponga una cónica a dicho lugar geométrico dando clic a 5 puntos distintos del lugar geométrico (verá la coincidencia casi total de los píxeles dibujados). Después, oculte los puntos elegidos y el lugar geométrico, mientras queda visible la cónica.

Trace la recta que une a los focos. Como en el caso de la elipse, la recta construida se llama eje focal.

Trace los puntos de intersección entre el eje focal y la cónica. Dichos puntos se llaman vértices de la hipérbola.

Trace el punto medio entre los dos focos. Dicho punto es el centro de la hipérbola. Levante la perpendicular al eje focal que pase por el centro de la hipérbola. La recta se llama eje conjugado. No existen puntos de intersección de esta recta con la hipérbola.

Trace la recta perpendicular al eje focal que pase por el foco. Trace los puntos de intersección entre la cónica y la perpendicular. El segmento que une a dichos puntos se llama lado recto. Una hipérbola permite dos lados rectos, uno por cada foco.

Trace la circunferencia cuyo centro sea el centro de la hipérbola y que pase por uno de los focos. En seguida, prolongue el lado recto hasta que corte a dicha circunferencia. Llame A_1 y A_2 a los puntos de intersección de la recta y la circunferencia. Trace las rectas que unen al centro de la hipérbola con cada uno de los puntos A_1 y A_2 . Dichas rectas son las asíntotas de la hipérbola.

REALICE LAS CONSTRUCCIONES NECESARIAS PARA RESPONDER LAS SIGUIENTES PREGUNTAS:

Parábola

1. ¿El foco o la directriz, pertenecen a la parábola?
2. De todos los puntos de la parábola, ¿cuál de ellos se encuentra más cerca de la directriz?
3. ¿Qué relación hay entre la longitud del lado recto y la distancia del foco a la directriz?
4. Mencione 3 puntos de fácil construcción en la parábola, conocidos foco y directriz.

Elipse

1. Los focos, ¿pertenecen a la elipse?
2. De todos los rectángulos que circunscriben a la elipse, ¿cuál de ellos tiene menor área?
3. ¿Qué relación hay entre la longitud del lado recto, la distancia entre los vértices del eje mayor y la distancia entre los vértices del eje conjugado?
4. Mencione 6 puntos de fácil construcción en la elipse, conocidos los focos y uno de los vértices del eje mayor.

Hipérbola

1. Los vértices, ¿pertenecen a la hipérbola?
2. De todos los rectángulos que circunscriben a la elipse, ¿cuál de ellos tiene menor área?
3. ¿Qué relación hay entre la longitud del lado recto, la distancia entre los vértices del eje mayor y la distancia entre los focos?
4. Mencione 6 puntos de fácil construcción en la hipérbola, conocidos un foco, el centro y el lado recto.