



Las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto “Vamos a aprender matemáticas de 8° y 9°” del Ministerio de Educación Nacional

María Camila Mayorquín Herrera

Victor Manuel Martinez Valencia

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

2022



Las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto “Vamos a aprender matemáticas de 8° y 9°” del ministerio de educación en Colombia

María Camila Mayorquín Herrera

Victor Manuel Martinez Valencia

Trabajo de grado para optar al título de

Licenciado en Matemáticas y Física

Director

Mg. Diego Díaz Enríquez

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

2022

Agradecimientos

A el único y soberano Dios, a mis amados padres, a el consentido de tito y a mis hermosas abuelas. Son el motor de mi vida.

A mi tío José Valencia, su esposa Patricia y a mi primo Andrés Valencia. Mil gracias por acogerme en su hogar durante 3 años y 1 mes, por la calidad humana y familiar que me ofrecieron todo este tiempo.

A María Camila Mayorquín, compañera y amiga durante esta etapa inolvidable de mi vida. Gracias por su apoyo, paciencia y entrega.

A Diego Díaz Enríquez, gracias por su apoyo incondicional, sin duda el mejor asesor y el maestro que más recordaré del pregrado. Gracias por el tiempo invertido en nosotros, por sus esfuerzos, aportes y consejos.

Victor Manuel Martinez Valencia

Agradezco primeramente a Dios por su infinita bondad, misericordia y amor durante toda mi vida. En lo absoluto todo es por él y para él.

A mis padres; Jorge e Ingrith y hermana; Mariana por estar cuando más los necesitaba, por todo el amor y apoyo incondicional que me han brindado en todo este proceso.

A mi novio; Gerlin. Su compañía y amor han sido fundamental en cada momento. Gracias por ser mi inspiración y motivación para entregar lo mejor de mí.

A mi demás familia y amigos, gracias por creer en mí.

A mi compañero Victor, por toda la paciencia y el compromiso en todo este tiempo.

A nuestro profe Diego Díaz, por enseñarnos tantas cosas; en especial, el amor por lo que hacemos.

María Camila Mayorquín Herrera

Resumen

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación de la didáctica de las matemáticas, específicamente en el análisis de textos escolares; actividad indispensable en la educación, que permite una visión crítica hacia los instrumentos que usan los docentes y estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se realiza el análisis de la presentación de las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar “Vamos a aprender matemáticas libro del estudiante 8° y 9°”, los cuales hacen parte de una colección propuesta por el MEN.

El análisis se hace desde la teoría de la transposición didáctica en la que se resalta la transición del saber sabio al saber que se pretende enseñar en la escuela, considerando las transformaciones que se originan a partir de su tratamiento. Este proceso se describe detalladamente con la ayuda del MVTEM (Modelo de Valoración de Textos Escolares de Matemáticas), el cual aporta unos indicadores para el análisis de libros de texto escolar de matemáticas. Además, se contemplan aspectos relacionados con las operaciones combinatorias elementales desde referentes matemáticos y curriculares, estableciendo una coherencia entre ellos.

Por tanto, se hace énfasis en algunos criterios de valoración con la finalidad de aportar elementos a los libros de texto escolar. De la misma manera, establecer si hay correspondencia entre lo desarrollado en los libros de texto escolar con lo planteado a priori por el MEN en sus referentes curriculares, asociado al ciclo escolar de 8° a 9° grado.

Palabras claves: Transposición didáctica, operaciones combinatorias elementales, análisis de textos escolares, saber sabio, saber a enseñar.

Tabla de contenido

1. Introducción	7
2. Formulación del Problema	9
3. Objetivos	11
3.1. Objetivo General	11
3.2. Objetivos Específicos	11
4. Justificación	12
5. Antecedentes	15
6. Marco Teórico	17
6.1. Referente Matemático	17
6.2. Teoría de la Transposición Didáctica	21
6.3. Modelo de Valoración de Textos Escolares de Matemáticas (MVTEM)	24
6.4. Referentes curriculares	26
Derechos básicos de aprendizaje para las operaciones combinatorias de 8° y 9°	27
7. Metodología	28
8. Aplicación del MVTEM en los Libros de Texto Escolar	29
8.1. Objetivos	29
8.2. Contenidos	32
8.3. Conexiones	42
8.4. Actividades	43
8.5. Temas Transversales en las Actividades	59
8.6. Metodología	60
8.7. Lenguaje	66
8.8. Ilustraciones	67
8.9. Tecnologías de la Información y de la Comunicación	70
8.10. Evaluación	71
8.11. Enfatización	77
9. Saber Matemático y Transposición Didáctica en los Libros de Texto Escolar	78
9.1. Diagrama de Árbol. Principio de Multiplicación	78
9.2. Variaciones	82
9.2.1. Variaciones Con Repetición	82

9.2.2 Variaciones sin Repetición	84
9.3. Combinaciones	88
9.3.1. Combinaciones sin Repetición	88
9.3.2. Combinaciones con Repetición	91
9.4. Permutaciones	94
9.4.1. Permutaciones sin Repetición	94
9.4.2. Permutaciones con Repetición	96
10. Elementos Potentes y Aspectos por Mejorar en los Libros de Texto Escolar	100
11. Conclusiones	103
12. Referencias	107

1. Introducción

Este trabajo se enmarca en la línea de investigación de la didáctica de las matemáticas, específicamente en el análisis de textos escolares; actividad indispensable en la educación, que permite una visión crítica hacia los instrumentos que usan los docentes y los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En este sentido, se realiza el análisis de la presentación de las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar “Vamos a aprender matemáticas libro del estudiante 8° y 9°”, los cuales hacen parte de una colección propuesta por el MEN (El Ministerio de Educación Nacional de Colombia) que aborda dicho tópico.

El análisis se hace desde la teoría de la transposición didáctica en la que se resalta la transición del saber sabio al saber que se pretende enseñar en la escuela, considerando las transformaciones que se originan a partir de su tratamiento. Este proceso se describe detalladamente con la ayuda del MVTEM (Modelo de Valoración de Textos Escolares de Matemáticas), el cual aporta unos indicadores para el análisis de libros de texto escolar de matemáticas. Además, se contemplan aspectos relacionados con las operaciones combinatorias elementales desde referentes matemáticos y curriculares, estableciendo una coherencia entre ellos.

Por tanto, se hace énfasis en algunos criterios de valoración con la finalidad de aportar elementos a los libros de texto escolar. De la misma manera, establecer si hay correspondencia entre lo desarrollado en los libros de texto escolar con lo planteado a priori por el MEN en sus referentes curriculares, asociado al ciclo escolar de 8° a 9° grado.

El documento está organizado en 12 secciones incluidas la presente (sección 1) y la bibliografía (sección 12) por lo cual sería pertinente leerse en orden. En la sección 2, se

establece desde la revisión de la literatura ideas relacionadas a la problemática de los libros de texto escolar, la manera en que se considera al libro de texto escolar y las operaciones combinatorias elementales en el presente trabajo; como también ambas conjuntamente. La sección 3, presenta los objetivos del estudio, tanto los generales como los específicos. La sección 4, introduce los elementos fundamentales asociados al análisis de los textos escolares y a la enseñanza de las operaciones combinatorias elementales, como su repercusión conjunta desde la enseñanza y el aprendizaje, al igual que una breve exposición de las razones por las cuales se eligió la colección de libros de texto escolar, como también, los respectivos grados de escolaridad analizados. La sección 5, da a conocer algunos antecedentes de investigación a nivel nacional e internacional que han abordado estudios afines a la problemática. La sección 6, presenta los referentes teóricos de tipo matemático (problemas típicos), didáctico (la teoría de la transposición didáctica y el MVTEM) y curriculares (Los lineamientos de matemáticas, DBA, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas) que dan soporte al análisis de los libros de texto escolar. La sección 7, especifica cada una de las etapas que se siguieron para el desarrollo del estudio desde el enfoque y la estrategia investigativa adoptada. En la sección 8, se aplica el MVTEM en los libros de texto escolar desde la consideración de algunas de sus categorías (organizadores y categorías). La sección 9, se analiza la transposición didáctica de los enunciados de las operaciones combinatorias elementales en relación al saber sabio y el saber a enseñar según lo evidenciado desde los libros de texto escolar, para ello se establece un contraste desde tres frentes, destacando similitudes y diferencias entre el libro de texto escolar, el texto fuente (saber sabio directo) y los problemas típicos (saber sabio asumido como referente). En la sección 10, se destaca desde lo analizado en las presentaciones de los libros de texto escolar, una serie de elementos potentes

y aspectos por mejorar en estos; y finalmente en la sección 11, se presentan las conclusiones, en relación con los objetivos propuestos y la pregunta problematizadora.

2. Formulación del Problema

El libro de texto escolar es uno de los recursos más usados en la escuela, tanto para el estudiante como para el profesor, destacándose por su gran utilidad en general. Dicho recurso ha predominado en la enseñanza y el aprendizaje, ya que permite organizar y seleccionar los contenidos a enseñar en el aula de clases (Moya, 2008, p. 134). Sin embargo, independientemente del conocimiento profesional del docente, cuando en los libros de texto escolar se presentan contenidos no acordes al nivel escolar, contexto y necesidades, como también incoherencias o errores conceptuales, se podría desfavorecer el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, los errores más comunes encontrados en los libros de texto escolar relacionados a las matemáticas, son los de tipo conceptual y de cálculo; Beyer (2014) destaca:

Si examinamos los textos escolares de matemáticas es posible que nos encontremos muchas sorpresas. Una de ellas es hallar en muchos de ellos un buen número de errores, algunos de los cuales incluso son de tipo conceptual. Muchos más son los malentendidos; y mayor aún son las deficiencias didácticas presentes en una buena cantidad de textos en uso en las aulas...(p. 15)

En efecto, Puche & Romero (2019), mencionan que “no cabe duda que tanto los libros de texto como el uso de otras herramientas y recursos alternativos cuenta con puntos débiles y puntos fuertes” (p.183).

En este sentido, la presentación de los libros de texto escolar está determinada por diversas transformaciones en los contenidos o saberes científicos a saberes a enseñar en el aula. Dicho proceso es denominado dentro de la Didáctica de las matemáticas como

transposición didáctica, en la que se debe vigilar que la esencia del saber matemático original no se pierda al adaptarse al saber a enseñar.

En cuanto al objeto matemático a analizar, las operaciones combinatorias elementales a pesar de su importancia en el conteo no son un campo de fácil comprensión tanto para los estudiantes como para los docentes. Al respecto, Guzmán et al. (1996) desarrollaron un trabajo de investigación en estudiantes con preparación matemática avanzada como una continuación de un estudio realizado en estudiantes de secundaria, en el que se contrastaron ambos grupos a partir de los resultados de la aplicación de unos cuestionarios similares y se infirió que la complejidad en los problemas combinatorios es independiente del nivel académico.

En relación a las posibles causas que pueden contribuir a que no sea una temática asimilable para los estudiantes en un primer momento, Vázquez et al. (2014) se refieren a “la falta de madurez matemática, la ausencia de una verdadera asimilación de los principios básicos de conteo, falta de imaginación y la insistencia de tratar de hallar reglas mecánicas para resolver problemas enumerativos; por citar algunas” (p.1). Esto implicaría la posible aparición de diversos sesgos en la solución de problemas al implementarse estrategias inadecuadas, mayormente presentes cuando no se provee de una visión amplia de esta temática y de las distintas formas de solución.

Entre otras razones, Larrahondo (2016), dice que la combinatoria ha sido omitida en la enseñanza por diferentes razones como la falta de preparación de los docentes y disposición de tiempo en el año lectivo; Martínez (2013), destaca que las operaciones combinatorias elementales son pocamente abordadas en el currículo nacional, lo que podría conllevar a que no se priorice su estudio.

En vista de esta revisión como futuros docentes, nos interesa indagar sobre las siguientes preguntas respecto a los libros de texto escolar del MEN “Vamos a aprender matemáticas 8° y 9° libro del estudiante”:

¿Qué caracteriza la presentación de la combinatoria en los libros de texto escolar y en qué difieren respecto de los referentes matemáticos?

¿Qué estrategias se proponen en los libros de texto escolar para la solución de problemas de combinatoria?, ¿Cuáles son los tipos de problemas que circulan en los libros de texto escolar asociados a la combinatoria?

A partir del análisis de los textos escolares, ¿Qué mejoras o aportes se podrían implementar para el tratamiento de las operaciones combinatorias elementales?

En este sentido, las anteriores preguntas pueden tener una convergencia hacia el siguiente cuestionamiento base del trabajo:

¿Qué caracteriza la transposición didáctica de las operaciones combinatorias presentada en los libros de texto “Vamos a aprender matemáticas 8° y 9° libro del estudiante”?

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

- Caracterizar la transposición didáctica de la presentación de las operaciones combinatorias elementales de los libros de texto escolar “Vamos a aprender Matemáticas - Libro del estudiante grado 8° y 9°”, estableciendo su pertinencia desde la aplicación del MVTEM.

3.2. Objetivos Específicos

- Establecer una categorización para la revisión de los elementos fundamentales de la combinatoria en los libros de texto escolar desde lo disciplinar, didáctico y curricular.

- Establecer un comparativo del tratamiento de las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar con lo presentado por los referentes.
- Determinar los elementos potentes, así como los aspectos por mejorar en los libros de texto escolar asociados a la presentación de las operaciones combinatorias elementales.

4. Justificación

Aunque el libro de texto es un recurso de gran utilidad en el contexto escolar, puede haber limitaciones en torno a la presentación de cierta temática al abordarse únicamente algunos elementos o desde un enfoque restringido, no considerando que existen diversas perspectivas u otras interpretaciones para un mismo concepto. Al respecto, Martínez (2006) destaca:

En primer lugar, el sujeto que aprende con los libros de texto, aprende que la cultura tiene un carácter estático, acabado y cerrado. Que no hay dialéctica, reconstrucción crítica, e incertidumbre. Aprende que el saber se organiza desde la Academia, y se presenta tal como es elaborado en la propia Academia: segmentado en disciplinas, especializado y ordenado temáticamente. La complejidad, la búsqueda de relaciones, la interacción disciplinar, la interconexión de saberes científicos, el conocimiento compartido, la mirada globalizadora, tienen aquí poco reconocimiento. (p. 2)

Adicionalmente, por ser la naturaleza de las matemáticas abstracta, se hace necesario un tratamiento de los saberes que se desean enseñar en los libros de texto escolar y propiciar un acercamiento crítico frente a ellos, de modo que este material logre estar adaptado a la realidad, nivel de formación y diferentes necesidades de los estudiantes, por lo cual la actividad del análisis de los libros de texto es esencial para la calidad educativa de nuestro país.

Este tipo de escenario lleva a reflexionar sobre la cualificación docente en la selección y utilización del libro de texto de matemáticas en la escuela. Mendoza et al. (2009), aluden a la importancia de que los docentes analicen, evalúen y usen libros de texto escolar conociendo sus límites e imperfecciones al ser un buen acumulador de temáticas, pues ningún profesor va a poder crear de la nada muchos contenidos en tan poco tiempo, también provee al docente una herramienta que puede servir como insumo para la creación de nuevos materiales y recursos, además de ser una herramienta que potencia el autoaprendizaje.

Ahora bien, respecto a la combinatoria en particular, podemos afirmar que una buena apropiación de este tipo de argumentos combinatorios, permite la maduración de las habilidades matemáticas asociadas a las operaciones formales así como el desarrollo del pensamiento de los estudiantes en diversos aspectos de la vida. De esta manera, aunque dentro de su dominio sea fundamental para el conteo, la combinatoria también brinda elementos que favorecen la toma de decisiones al considerar de manera crítica diversas posibilidades en un ambiente de incertidumbre y permite cimentar las capacidades argumentativas necesarias en la ciudadanía frente alguna situación determinada. Es decir, además de proveer un panorama amplio sobre las posibilidades de algún experimento o situación, permite desarrollar destrezas en cuanto a diversas alternativas de solución, lo cual se torna más provechoso que el tener como principal objetivo de enseñanza únicamente el aprendizaje de la temática. A propósito, Niss (1997) destaca:

La enseñanza de las matemáticas tiene lugar en una sociedad y es para seres humanos que vivirán en esa sociedad. Por lo tanto enseñanza de las matemáticas = f (las matemáticas, el papel de las matemáticas en la sociedad; la sociedad, su contenido cultural, político y económico, su estructura y

organización; el individuo, su puesto en la sociedad; los valores, de naturaleza cultural, ideológica y política). (p.14).

Además, esto conlleva a la necesidad de replantearse la enseñanza de la combinatoria a causa del excesivo uso de mecanismos sin sentido por parte de los estudiantes. Guzmán et. (1996) resaltan: “Pensamos que la resolución de problemas combinatorios requiere el conocimiento de una serie de elementos, no sólo conceptuales, sino de técnicas y destrezas, empleo adecuado de notación, capacidad de argumentación y su puesta en relación con los problemas dados” (p. 43).

El MEN, en sus referentes como los estándares básicos de competencias, para el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, propone la combinatoria como una herramienta de la probabilidad. Martínez (2013) menciona que el análisis combinatorio en los libros de texto es reducido hablando en términos de páginas, al igual que en los lineamientos curriculares nacionales en los que se refiere a la combinatoria de manera directa dos veces. Por tanto, es de vital importancia pensar en favorecer los ambientes de aprendizaje de la combinatoria desde los libros de texto escolar y su análisis crítico a nivel nacional.

Los libros de texto escolar “Vamos a aprender Matemáticas - Libro del estudiante grado 8° y 9°” que brinda el MEN, se encuentran disponibles en internet en formato PDF siendo asequibles mayormente para el sector de educación pública del país por su gratuidad para ser utilizados con frecuencia en el aula de clases. Además, el MEN (2018) dispuso la entrega de 8.6 millones de estos libros de texto escolar en todo el país.

Estos libros cuentan con características importantes como:

- Su fecha de edición es del 2017, correspondiendo esta a la más actual con la que pudimos disponer en cuanto a libros tipo proyecto a nivel nacional de distribución gratuita.

- Los libros de texto escolar orientados a los grados de escolaridad 8° y 9° son los únicos de la colección “Vamos a aprender Matemáticas - Libro del estudiante” que abordan directamente las operaciones combinatorias elementales.
- Son libros presentados por el MEN para el proceso pedagógico de enseñanza de alta calidad, por lo que deberían estar acorde con lo que se establece en los derechos básicos de aprendizaje, los estándares básicos de competencias y los lineamientos curriculares.
- Debido al año de publicación de los libros de texto se encuentran inmersos en el nuevo plan decenal de educación propuesto por el MEN, por lo cual deberían estar acordes a lo que se apunta durante este periodo para la educación colombiana.

5. Antecedentes

En cuanto al análisis de la combinatoria en los libros de texto escolares, Espinoza & Roa (2014) hicieron en España un estudio cualitativo y descriptivo sobre las temáticas afines al desarrollo de ese contenido en cuatro libros de texto, específicamente de cuarto grado. Posteriormente, describen el desarrollo teórico del tema de combinatoria en uno de los cuatro libros para clasificar y analizar las tareas detalladamente. En la sección de resultados, dejan evidenciada la separación del capítulo de combinatoria con el de probabilidad, además, los manuales carecen de contextualización con la vida cotidiana y diversos aspectos como: Ejercicios introductorios, notas históricas y metodología basada en juegos.

En Colombia, Martínez (2013), realizó una investigación sobre la presentación de los conceptos que intervienen en el análisis combinatorio en dos libros de texto escolar; Hipertexto 11 de editorial Santillana e Introducción al cálculo. Para tal propósito, utiliza unas categorías o aspectos fundamentales de análisis que proporciona el EOS (Enfoque Ontosemiótico), las cuales dan forma y definen un concepto para la identificación de los

elementos de significado del objeto matemático en cuestión. Para ambos libros de texto, la combinatoria se presenta como adjunta a los temas de probabilidad, al destacarse escasez e insuficiencia en los elementos de significación debido a que los temas de combinatoria son pocamente tratados en estos libros e incluso a nivel nacional por los referentes curriculares, lo cual repercute a que se le dedique poco tiempo de atención en el aula. Adicionalmente, resalta como debilidad el poco uso de representaciones gráficas en los ejercicios planteados y la solución de problemas; un diagrama de árbol por cada libro de texto. Luego, relaciona sus hallazgos con lo propuesto por los estándares curriculares planteados por el MEN para el grado 11°. En este estudio, se concluye que es necesario analizar los distintos objetos matemáticos a enseñar desde los elementos de significado que lo componen, ya que es un ejercicio enriquecedor al brindar nuevas herramientas a los docentes para la enseñanza.

Por otro lado, Larrahondo (2016) propone y justifica el uso de las historietas combinatorias ‘HC’ como un medio propicio para contextualizar los argumentos combinatorios a partir de una moraleja y su respectiva interpretación. Esta propuesta de enseñanza es abordada mediante cuatro historietas en la que se deja de manifiesto que los argumentos combinatorios son parte de la cotidianidad de los estudiantes, por ende, optar por estas estrategias contextualizadas contribuye a un aprendizaje significativo y trascendental, incentivándolos al proveer de sentido los problemas. Es decir, adoptar como foco situaciones que les sean comprensibles de modo que la interiorización no obedezca a mecanismos memorísticos durante el proceso de aprendizaje, sino que por el contrario esta tienda a movilizarse desde el plano de la argumentación y el sentido combinatorio de una manera más natural. Intentado así, concientizar que las matemáticas son, ante todo, un constructo social en especial, la combinatoria.

Cada uno de estos antecedentes de investigación nos acercan a la problemática en cuestión, en el sentido de proveer un panorama sobre el análisis de los libros de texto escolar, en los que se resaltan las dificultades emergentes que impliquen su enseñanza y aprendizaje, como también, una propuesta innovadora para el abordaje de las operaciones combinatorias elementales.

6. Marco Teórico

A continuación, se presentan los referentes teóricos que dan soporte al análisis de los libros de texto escolar, además de especificar la funcionalidad de cada uno. Entre ellos, se destacan referentes de tipo matemático (problemas típicos), didácticos (la teoría de la transposición didáctica y el MVTEM) y curriculares nacionales.

6.1. Referente Matemático

Las operaciones combinatorias son utilizadas para ordenar, agrupar y coleccionar elementos de un conjunto discreto finito o infinito numerable, por ello es importante distinguir la forma en la que se va a realizar algún experimento aleatorio y la naturaleza de los elementos en cuestión, es decir, si en los elementos es trascendental el orden o si son iguales, respectivamente. A partir de estas restricciones se determinan los problemas específicos elementales de la combinatoria. En este sentido, Álvarez (1999) menciona cinco problemas típicos formulados desde el lenguaje conjuntista, terminología de muestras y reparticiones de objetos a partir de modelos de bolas y urnas; que permiten describir los problemas básicos que resuelve el análisis combinatorio para cada problema matemático.

Tabla 1*Problema típico número 1*

	Versión	Describir y calcular
1	Formación de muestras con sustitución	El número de muestras ordenadas que se pueden formar al extraer r -bolas con sustitución de urna que contiene n
2	Repartición de objetos distintos con repetición	El número de reparticiones que se pueden hacer de r -bolas distintas en n -urnas de suerte que cualquier urna puede recibir más de una bola
3	Conjuntista	El número de elementos del producto cartesiano de orden r de un conjunto de n elementos.

Nota. Tabla tomada de “Introducción elemental a la teoría de probabilidad. Univalle. Dpto. de Matemáticas” de Álvarez; 1990, p.12.

Tabla 2*Problema típico número 2*

	Versión	Describir y calcular
1	Formación de muestras ordenadas sin sustitución	Muestras ordenadas que se pueden formar al extraer sin sustitución r -bolas de una urna que contiene n
2	Repartición de objetos distintos sin repetición	Distribuciones que se pueden hacer de r -bolas distintas en n urnas de suerte que una urna puede recibir a lo sumo una sola bola.
3	Conjuntista	r -uplas en el producto cartesiano de orden r de un conjunto de n elementos que tienen todas sus componentes distintas

Nota. Tabla tomada de “Introducción elemental a la teoría de probabilidad. Univalle. Dpto. de Matemáticas” de Álvarez; 1990, p.15.

Tabla 3*Problema típico número 3*

	Versión	Describir y calcular el número de:
1	Muestras no ordenadas sin sustitución	Muestras que se pueden formar al extraer sin sustitución r bolas de una urna que contiene n
2	Repartición de objetos iguales sin repetición	Reparticiones que se pueden hacer de r -bolas iguales en n -urnas receptoras de suerte que una urna pueda recibir a lo sumo una bola
3	Conjuntista	Subconjuntos de r elementos que se pueden formar con un conjunto de n elementos

Nota. Tabla tomada de “Introducción elemental a la teoría de probabilidad. Univalle. Dpto. de Matemáticas” de Álvarez; 1990, p.22.

Tabla 4*Problema típico número 4*

	Versión	Describir y calcular el número de:
1	Formación de muestras no ordenadas con sustitución	Muestras que se pueden formar al extraer con sustitución r -bolas de una urna que contiene n
2	Repartición de objetos iguales con repetición	Reparticiones que se pueden hacer de r -bolas iguales en r -urnas.
3	Conjuntista	Símbolos $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ que se pueden formar, tales que $1 \leq n_i \leq n; \quad i = 1, 2, \dots, r$

Nota. Tabla tomada de “Introducción elemental a la teoría de probabilidad. Univalle. Dpto. de Matemáticas” de Álvarez; 1990, p.31.

Tabla 5*Problema típico número 5*

Versión	Describir y calcular el número de:
1 Formación de muestras ordenadas con números de repetición $k_1, k_2, \dots, k_n$	Muestras ordenadas con sustitución que se pueden formar al extraer r bolas de una urna que contiene n de ellas de suerte que la bola k será extraída k_k veces para $k = 1, 2, \dots, n; \quad \left(\sum_{i=1}^n k_i = r \right)$
2 Repartición de r objetos diferentes entre n receptores con números de asignación u ocupación $k_1, k_2, \dots, k_n$	Reparticiones que se pueden hacer de r bolas distintas entre n -urnas de suerte que en la urna k se depositen exactamente k_k bolas para $k = 1, 2, \dots, n; \quad \left(\sum_{i=1}^n k_i = r \right)$
3 Conjuntista. Formación de particiones ordenadas.	Particiones ordenadas $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ que se pueden hacer de un conjunto E con r elementos de suerte que $\overline{E_k} = k_k$ para $k = 1, 2, \dots, n; \quad \left(\sum_{i=1}^n k_i = r \right)$

Nota. Tabla tomada de “Introducción elemental a la teoría de probabilidad. Univalle. Dpto. de Matemáticas” de Álvarez; 1990, p.37

Cada uno de estos problemas típicos dan una visión amplia de las versiones que pueden tener las operaciones combinatorias elementales. Por tal razón, como marco de referencia matemático provee elementos esenciales para identificar las interpretaciones presentes en los libros de texto escolar para esta temática.

6.2. Teoría de la Transposición Didáctica

Para el análisis de los libros de texto escolar se considera la presentación de las operaciones combinatorias elementales a partir de la teoría de la transposición didáctica adoptada por Chevallard en la educación matemática desde lo planteado por Verret en 1975 del campo de la Sociología, la cual proporciona un modelo epistemológico que relaciona el saber científico con lo que se desea enseñar.

Chevallard (1997) indica que la transposición didáctica se puede interpretar desde dos perspectivas; *stricto sensu* y *sensu lato*. La transposición didáctica “*stricto sensu*” (en sentido estricto), que es específicamente la transformación del contenido de saber preciso en su respectiva versión didáctica y la transposición didáctica “*sensu lato*” (en un amplio sentido), que se asume como una dimensión fundamental de la didáctica de las matemáticas, la cual se compone de la transición del contenido desde el objeto del saber al objeto a enseñar y del objeto a enseñar al objeto de enseñanza. En este sentido, la transformación de un contenido de saber de la comunidad sabia a un saber a enseñar está mediado por la noosfera o esfera de gentes que piensan (representantes del sistema de enseñanza y de la sociedad), consolidándose finalmente en el objeto de enseñanza que se desarrolla en la escuela.

Desde esta perspectiva, se contempla la perspectiva “*sensu lato*”, en la que el libro de texto escolar no es el punto de partida sino de llegada porque está dirigido a estudiantes, abarcando de manera implícita o explícita el proceso de transposición didáctica para su conformación.

Como se ha afirmado antes, la noosfera es el conjunto de personas encargadas de tomar las decisiones relacionadas a la educación, en este caso, las que intervienen en la creación y estructuración del libro de texto escolar. Inicialmente, los agentes de la noosfera realizan una selección de los saberes a enseñar a partir de diferentes materiales asociados a

fuentes de información, como los libros de texto de matemáticas o estadística. Estos se caracterizan por tener una configuración axiomática más que un tratamiento de carácter didáctico, en los que se evidencia la producción formal del conocimiento que a su vez ha sido transpuesto de otro saber sabio de referencia más riguroso. Seguido al proceso de selección, se hace necesario hacer una delimitación de los elementos considerados como pertinentes al enseñar, de modo que finalmente se realice su respectiva consolidación en el libro de texto escolar.

Al establecer los saberes a enseñar, se exige marcar hasta qué punto y perspectiva del saber sabio se adoptará. Este acto, según Chevallard (1997), es conocido como delimitación; proceso necesario en la preparación didáctica del saber, en la que intervienen diferentes transformaciones sobre los saberes matemáticos en cuanto al contenido: La desincretización del saber; la despersonalización y la programabilidad de la adquisición del saber. Por su parte, en cuanto a la transmisión se encuentran las transformaciones publicidad del saber y el control social de los aprendizajes. Estas transformaciones proveen unas categorías de análisis en las que se destacan aspectos necesarios a tener en cuenta en el análisis de los libros de texto escolar.

En referencia a las transformaciones: En la desincretización; el saber teórico se divide en saberes parciales a enseñar. En la despersonalización; el saber se separa del sujeto encargado de su producción, al no dar una dinámica subjetiva en la que se evidencia el proceso en que se fue construido como también del privarlo de problemáticas que permitieron su surgimiento. En la programabilidad; el saber evidencia una secuenciación razonada de los conocimientos, al establecerse una organización determinada cuyo fin es posibilitar el aprendizaje, aunque este no se dé en el mismo orden, al enfatizar que “el orden del

aprendizaje no es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber; el aprendizaje del saber no es el calco del texto del saber” (Chevallard, 1997, p. 74).

En relación a la publicidad del saber, ésta se refiere a la evidencia de la transcripción de los saberes en los libros de texto escolar u otros recursos didácticos, permitiendo un mayor control social sobre los aprendizajes, el cual corresponde a una validación de la concepción de los saberes desde la textualización.

En lo concerniente al saber, Kang & Kilpatrick (1992) destacan:

El conocimiento es frágil; como es comunicado repetidamente cambia tanto su forma como su significado. Guardar un cuerpo de conocimientos en un libro no controla su fragilidad, para mantener su significado constante. Aunque las matemáticas escolares tienen un aspecto constante, ya que deben ser declaradas previamente, la forma de conocimiento al ser presentada en un libro de texto no es estable. (p.5)

En efecto, Chevallard (1997) alude a la importancia de ejercer una vigilancia epistemológica, la cual es un mecanismo de control constante para que los conceptos que se enseñan estén soportados por los referentes teóricos, de manera que prevalezca una coherencia entre el saber sabio y el que se enseña, para que los contenidos matemáticos no sean consecuencia de un proceso de vulgarización del conocimiento por causa de carencias de saberes matemáticos.

La vigilancia epistemológica es ejercida por diversos agentes del sistema educativo en especial por los docentes. Este mecanismo de control permite hacer un seguimiento para el análisis de los contenidos en los libros de texto escolar, en el que las diversas interpretaciones desde la mirada profesional son las que caracterizan y evidencian este proceso de transposición didáctica.

Por otro lado, el MEN (1998) en los lineamientos curriculares nacionales caracteriza la transposición didáctica de la siguiente manera:

Para facilitar la enseñanza, aísla ciertas nociones y propiedades del tejido de actividades en donde han tomado su origen, su sentido, su motivación y su empleo. Ella los transpone en el contexto escolar. Los epistemólogos llaman transposición didáctica a esta operación. Ella tiene su utilidad, sus inconvenientes y su papel, aun para la construcción de la ciencia. Es a la vez inevitable, necesaria y en un sentido deplorable. Debe mantenerse vigilada. (p.13)

En este estudio, la transposición didáctica se ahonda en torno a las operaciones combinatorias elementales; saber a enseñar presente en los libros de texto escolar “Vamos a aprender matemáticas libro del estudiante 8° y 9°”. Este saber a enseñar es el resultado de la consulta de diversos saberes matemáticos en fuentes primarias y/o secundarias de información (seguramente transpuestas) además de la formación profesional de los autores de los libros de texto escolar, los problemas típicos que resuelve el análisis combinatorio.

Inicialmente, para objetivos de la caracterización de las operaciones combinatorias elementales se asume como saber sabio las interpretaciones de los problemas típicos por su gran nivel de detalle y visión no reduccionista de las operaciones. Por tanto, la presentación de la temática en estos libros de texto escolar compete al objeto de enseñanza el cual es el producto final de la transposición didáctica.

6.3. Modelo de Valoración de Textos Escolares de Matemáticas (MVTEM)

Monterrubio & Ortega (2012) construyeron un modelo de valoración de textos escolares de Matemáticas el cual ofrece una herramienta con varias posibilidades de uso entre ellas, el analizar libros de texto escolar de manera completa o un tópico de contenidos. Este modelo surge a partir de una metodología que denominaron “acumulación” en la que se

adoptan modelos ya existentes tanto de la educación en general como del área de Didáctica de las Matemáticas, obteniendo para el modelo un conjunto de indicadores de análisis compuesto por una serie de organizadores, categorías y subcategorías, los cuales son resultado de poner en práctica su primera propuesta del modelo al analizar libros de texto escolar concretos.

A continuación, se presentan los organizadores seleccionados junto a sus descripciones desde lo planteado por este modelo.

Tabla 6

Organizadores y su respectiva descripción del modelo MVTEM

Organizador	Descripción
Objetivos	Las aspiraciones que se pretenden desarrollar a nivel curricular
Contenidos	Conjunto de temas correspondiente al grado de escolaridad señalados en el currículo
Conexiones	Aquellas que permiten la relación entre las matemáticas y la vida cotidiana, como también con otras áreas y la historia.
Actividades	Conjunto de situaciones problema que se propone a los estudiantes para que desarrollen competencias desde la funcionalidad de las matemáticas.
Metodología	Modo en que las matemáticas se ponen a disposición de los estudiantes
Lenguaje	Manera en que se comunican las matemáticas incluyendo el lenguaje simbólico y gráfico.
Ilustraciones	Representaciones gráficas cuyo objetivo puede ser la ornamentación o apoyo necesario para la comprensión de los contenidos matemáticos.
Tecnologías de la información y la comunicación	Examinar las propuestas que presenta el texto escolar acerca del uso de la calculadora, ordenador e internet y diferentes programas tecnológicos.
Evaluación	Elementos valorativos que posibilitan una aproximación al estado de aprendizaje y autoevaluación de los estudiantes.
Enfatización	Forma en la que se resaltan los elementos más importantes en el libro de texto, como: Sombreados, subrayados o recuadros de definiciones o ejemplos, etc. Además, involucra el análisis de apartados de síntesis.

Nota. Matriz adaptada de las aportaciones del modelo MVTEM construido por Monterrubio & Ortega.

Este modelo nos aporta categorías de análisis para describir el tratamiento asociado al proceso de transposición didáctica en la presentación de las operaciones combinatorias elementales de los libros de texto escolar, enriqueciendo su análisis en la medida en que se detalla sobre las distintas transformaciones que surgen en este proceso.

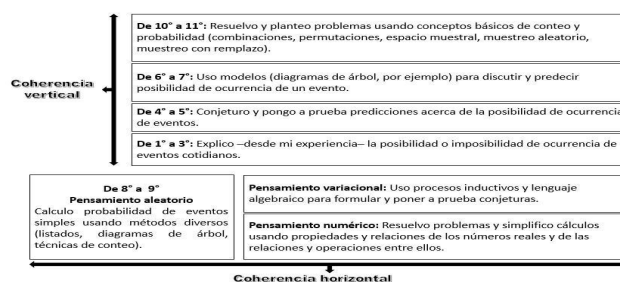
6.4. Referentes curriculares

Para el análisis de las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar, se tiene en cuenta los referentes curriculares nacionales, tales como: Los lineamientos de matemáticas, estándares básicos de competencia y los derechos básicos de aprendizaje (DBA) para el ciclo escolar de 8° a 9° grado. Desde lo planteado anteriormente, los materiales sobre combinatoria son limitados, incluso en estos referentes, evidenciándose la temática como un eje secundario al abordarse implícitamente como una herramienta de la probabilidad.

A continuación, se propone la coherencia vertical y horizontal elaborada a partir de los estándares de competencias que se desarrollan desde los indicios de las operaciones en la etapa inicial de la temática de probabilidad. Seguidamente, se destacan los enunciados de los derechos básicos de aprendizaje para ambos grados y sus respectivas evidencias de aprendizaje.

Figura 1

Coherencia vertical y horizontal adaptada de los referentes curriculares nacionales



Nota. Elaborada desde lo propuesto en los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (p. 78–89), por el MEN, 2006

Derechos básicos de aprendizaje para las operaciones combinatorias de 8° y 9°

DBA (2016) asociado a las operaciones combinatorias elementales para grado 8°:

Enunciado

Hace predicciones sobre la posibilidad de ocurrencia de un evento compuesto e interpreta la predicción a partir del uso de propiedades básicas de la probabilidad.

Evidencia de aprendizaje

- Identifica y enumera el espacio muestral de un experimento aleatorio
- Identifica y enumera los resultados favorables de ocurrencia de un evento indicado.
- Asigna la probabilidad de la ocurrencia de un evento usando valores entre 0 y 1.
- Reconoce cuando dos eventos son o no mutuamente excluyentes y les asigna la probabilidad usando la regla de la adición.

DBA (2016) asociado a las operaciones combinatorias elementales para grado 9°:

Enunciado

Encuentra el número de posibles resultados de experimentos aleatorios, con reemplazo y sin reemplazo, usando técnicas de conteo adecuada, y argumenta la selección realizada en el contexto de la situación abordada. Encuentra la probabilidad de eventos aleatorios compuestos.

Evidencia de aprendizaje

- Diferencia experimentos aleatorios realizados con reemplazo, de experimentos aleatorios realizados sin reemplazo.
- Encuentra el número de posibles resultados de un experimento aleatorio, usando métodos adecuados (diagramas de árbol, combinaciones, permutaciones, regla de la multiplicación, etc.).
- Justifica la elección de un método particular de acuerdo al tipo de situación.

- Encuentra la probabilidad de eventos dados usando razón entre frecuencias. (2016, p. 73)

A partir de estas sugerencias curriculares, como también, en lo referente a los pensamientos, sistemas y procesos generales relacionados a esta temática, surgen criterios de comparación para el análisis de los libros de texto escolar con lo planteado por el MEN. Según lo dicho, estos elementos se articulan en general con el MVTEM mayormente en los organizadores de contenidos, conexiones, objetivos y evaluación.

7. Metodología

El presente trabajo se enmarca en el enfoque cualitativo de investigación. En el que, según Hernández et al. (2014) se pueden desarrollar preguntas antes, durante y después de la recolección de datos; caracterizándose por la flexibilidad a cambios en los cuestionamientos que se pretenden responder durante el proceso, para afianzarlos y mejorarlos.

La estrategia investigativa que se emplea es la revisión documental: “técnica que consiste en la indagación sistemática de material impreso en busca de describir e interpretar, a partir de ciertas consideraciones conceptuales específicas, el contenido y la voz de quienes lo elaboraron” (Camargo, 2021, p.55).

Mediante esta metodología se definen las siguientes etapas que constituyen y determinan este estudio.

Etapas 1. Revisión de antecedentes de investigación.

En esta etapa se consultan estudios que estén a fines a la problemática a tratar, como también, materiales que contribuyan a una visión amplia acerca de la temática para la consolidación de algunos criterios acordes a los objetivos del trabajo en el análisis de los libros de texto escolar.

Etapas 2. Definición de categorías para la revisión de los libros de texto escolar.

En esta etapa se establecen unas categorías de análisis a partir del MVTEM para identificar elementos importantes en los libros de texto escolar que permitan hacer la descripción de la presentación y tratamiento de las operaciones combinatorias elementales.

Etapas 3. Análisis de la presentación de las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar.

En esta etapa se organiza y se describe de manera detallada el tratamiento que se le da a la temática en los libros de texto, lo cual contribuye a la caracterización del proceso de transposición didáctica que se logra evidenciar en su conformación.

Etapas 4. Conclusiones del estudio realizado.

En esta etapa se constatan las conclusiones generales obtenidas a partir del análisis previo y algunas reflexiones propias en cuanto al ejercicio de revisión documental.

8. Aplicación del MVTEM en los Libros de Texto Escolar

En esta sección se examinan algunos aspectos generales de los libros de texto escolar y específicos asociados a los bloques de contenidos de las operaciones combinatorias elementales. Para ello, se detalla sobre algunos organizadores y categorías puntuales seleccionadas del MVTEM.

8.1. Objetivos

8.1.1. Presentación de Objetivos: ¿Cómo se Presentan?

En esta categoría se tiene en cuenta la finalidad de los libros de texto a nivel general y la intención de aprendizaje de las unidades de “Estadística y probabilidad” destacando competencias que se pretenden desarrollar en cada temática que se relacionan con las operaciones combinatorias elementales.

Los objetivos generales de los libros de texto escolar se encuentran en sus portadas y presentaciones las cuales coinciden por hacer parte de un mismo proyecto, que apunta a

lograr una educación de calidad con la meta de hacer a Colombia la más educada en América Latina en 2025, buscando que el desarrollo del estudiante sea integral.

Los objetivos específicos de aprendizaje están en la apertura de cada unidad.

Grado 8°

La unidad 6 de este libro texto escolar se destaca como objetivo de aprendizaje el desarrollar destrezas como determinar y analizar las medidas de tendencia central y de posición no central para un conjunto de datos. Sin embargo, dentro de este objetivo no hay una alusión directa acerca de la combinatoria y de lo que se espera desarrollar con ella al interior de la unidad.

Grado 9°

La unidad 4 de este libro de texto escolar centra su objetivo de aprendizaje en la utilización de las medidas de tendencia central y dispersión. Al igual que en el libro de texto escolar del grado 8°, este objetivo tampoco hace referencia a las operaciones combinatorias elementales de manera explícita aunque en la presentación de la unidad sí se abordan.

En cuanto a los libros de texto escolar y su relación con los lineamientos, estándares básicos de competencias y DBA, es de esperar que los objetivos estén determinados por estos referentes curriculares que establece el MEN; ente encargado de fomentar y estructurar la política educativa nacional, el cual promueve este libro de texto escolar.

A continuación, se alude a la presencia de los objetivos desde los lineamientos curriculares y seguidamente su adecuación con respecto al nivel desde los estándares básicos de competencia y DBA.

8.1.2. Presencia de Objetivos

En esta categoría se consideran aspectos relacionados a la presencia de objetivos y los criterios que determinan su presencia.

Tal como se destacó previamente no hay presencia de objetivos ni criterios que los determinen. Sin embargo, en los lineamientos curriculares para el pensamiento aleatorio y sistema de datos se evidencia la temática en relación al conteo y la resolución de problemas mencionando lo siguiente en los conocimientos básicos:

Debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas. (MEN, 1998, p.47)

8.1.3. Adecuación de Objetivos Respecto al Nivel

En esta categoría se menciona la coherencia de los objetivos con lo propuesto por el MEN respecto al nivel.

Ambos libros de texto escolar no se refieren en ningún momento a la adecuación para el nivel de grado 8° y 9°. Sin embargo, el MEN para este conjunto de grados en los estándares básicos y los DBA propone los contenidos asociados a las operaciones combinatorias elementales.

Estándar Básico de 8° y 9°

El estándar básico del pensamiento aleatorio para los dos grados está articulado como una herramienta para el cálculo de probabilidades de eventos simples al resaltar la utilización de listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo.

DBA Grado 8°

Respecto a las evidencias de aprendizaje en el DBA asociado, la mayoría de ejemplos y ejercicios apuntan a la identificación del espacio muestral de un experimento aleatorio y de

los resultados favorables de ocurrencia de un evento indicado, como también de sus respectivas enumeraciones.

DBA Grado 9º

Respecto a las evidencias de aprendizaje en el DBA asociado, se logra percibir en la presentación que los ejemplos y ejercicios están encaminados a diferenciar experimentos aleatorios (si es realizado con reemplazo o sin reemplazo), además, de elegir y utilizar las operaciones combinatorias para el conteo de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

8.2. Contenidos

8.2.1. Presentación de Contenidos

En esta categoría se menciona de manera general la organización del texto y la unidad de interés.

Grado 8º

El libro de texto escolar está organizado en seis unidades divididas en temáticas. Las unidades están organizadas de acuerdo a los cinco pensamientos planteados en los referentes curriculares a nivel nacional. A su vez cada temática aborda un contenido en específico.

A continuación se presenta la distribución de la unidad 6 correspondiente al pensamiento aleatorio bajo el título “Estadística y probabilidad”.

Unidad 6: Pensamiento aleatorio

Estadística y probabilidad

1. Distribución de frecuencias de datos agrupados
2. Diagrama de barras y diagramas circulares
3. Diagrama de puntos y de líneas
4. Pictogramas

5. Histograma y polígonos de frecuencias
6. Medidas de tendencia central
7. Medidas de dispersión
8. Diagrama de árbol. Principio de multiplicación.
9. Variaciones
10. Probabilidad de sucesos

Grado 9º

Este libro de texto escolar cuenta con la misma estructura a diferencia de que la unidad 4 es la de interés. A continuación se presenta la distribución por temáticas de esta unidad.

Unidad 4: Pensamiento aleatorio

Estadística y probabilidad

1. Terminología estadística. Tema transversal: Estilos de vida saludable.
2. Gráficas estadísticas. Tema transversal: Estilos de vida saludable.
3. Histogramas. Tema transversal: Educación ambiental.
4. Medidas de tendencia central.
5. Medidas de posición no central.
6. Diagrama de caja y bigotes.
7. Medidas de dispersión.
8. Inferencias de poblaciones. Estimadores puntuales.
9. Variables estadísticas bidimensionales. Dependencia.
10. Correlación lineal. Tema transversal: Educación ambiental.
11. Diagrama de árbol.
12. Permutaciones.

13. Variaciones y combinaciones. Tema transversal: Educación para la sexualidad y la ciudadanía.
14. Probabilidad frecuencial.
15. Clases de eventos.

8.2.2. Presencia de Contenidos

En esta categoría se identifican las temáticas asociadas al tratamiento de las operaciones combinatorias elementales al interior de la unidad.

Grado 8°

Las temáticas 8 y 9 de esta unidad con los nombres de “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación” y “Variaciones” respectivamente, son las que se encuentran relacionadas a las operaciones combinatorias elementales. En ellas se involucran el principio de multiplicación, el diagrama de árbol y las operaciones combinatorias de variaciones sin y con repetición.

Grado 9°

En este caso las temáticas de interés corresponden a la 11, 12 y 13, con los nombres de “Diagrama de árbol”, “Permutaciones” y “Variaciones y combinaciones” respectivamente.

En su contenido se presenta el diagrama de árbol, permutaciones sin y con repetición, variaciones sin y con repetición, y combinaciones sin y con repetición.

8.2.3. Fundamentación

En esta categoría se especifica la fuente bibliográfica matemática referenciada en el libro de texto escolar por los autores como posible material de apoyo para la construcción de la unidad.

Grado 8° y 9°

Entre las posibles fuentes, el material más afín al tratamiento de las operaciones combinatorias elementales en ambos libros textos escolares corresponde a la primera edición del libro de “Probabilidad y estadística” de Spiegel, M. R. (1975). Específicamente, su capítulo 1 aborda el análisis combinatorio en los temas: Principio fundamental de cuenta, diagramas de árbol, permutaciones, combinaciones, coeficientes binomiales, aproximación de stirling $n!$. Esta consideración es solo una aproximación, pues los autores naturalmente disponen de su bagaje profesional y de otras fuentes además de las referenciadas.

8.2.4. Claridad de la Exposición

En esta categoría se mencionan elementos relevantes acerca de la forma en que se presenta la escritura en el libro de texto escolar para su lectura y comprensión.

Grado 8° y 9°

En ambos textos escolares se dispone de una serie de apartados determinados por la siguiente ruta didáctica que orienta la organización del desarrollo de los contenidos:

- Saberes previos; en este ítem se recuerda lo que el estudiante ya sabe y es necesario para adentrarse en el nuevo tema.
- Conoce; se desarrolla los contenidos del tema y sintetiza los conceptos básicos que el estudiante debe aprender.
- Analiza; se establece la conexión entre los conocimientos previos y los nuevos contenidos mediante una situación problema.
- Ejemplos; se confirma la aplicación inmediata de los conceptos explicados.
- Actividades de aprendizaje; se aplica y se refuerza lo que el estudiante ha aprendido
- Práctica más; se presentan más actividades relacionadas con los temas de la unidad para desarrollar las habilidades propias de la actividad matemática.

- Resolución de problemas; se propone problemas cuyo foco es la utilización de diferentes estrategias. También se da un ejemplo resuelto como guía para luego colocar en práctica la estrategia estudiada.
- Evaluación del aprendizaje; en esta sección se aplican los temas vistos y se refuerzan los conocimientos.
- Temas transversales; en cada sección hay entre tres y cinco actividades de reflexión en pro a que los conocimientos de los estudiantes trasciendan lo académico buscando desarrollar competencias integradoras a su contexto más inmediato.
- Procesos cognitivos; indicativos que se pretenden abarcar con la realización de las actividades, estos se distinguen en seis categorías (memoria, comprensión, análisis, aplicación, síntesis, evaluación) acompañadas con su respectiva figura (cuadrado, círculo, rombo, pentágono, triángulo, estrella) y color (amarillo, azul, rosado, verde, morado, fucsia). Estos indicativos aparecen en las “Actividades de aprendizaje”, en “Práctica más” y “Evaluación del aprendizaje”.
- Notas; breve escrito de tipo informativo sobre el desarrollo de las actividades, por ejemplo: Recuerda que estas actividades las debes realizar en tu cuaderno.

8.2.5. Teoría Demostrada

En esta categoría se pretende resaltar aspectos relevantes en torno a las demostraciones de la teoría en el libro de texto escolar.

Grado 8° y 9°

Los libros de texto escolar no hacen ningún tipo de demostraciones matemáticas rigurosas que justifiquen la teoría establecida en cada temática.

8.2.6. Rigor en los Contenidos

En esta categoría se pretende analizar el formalismo del tratamiento que se le da a la presentación de los contenidos en el libro de texto escolar.

Grado 8° y 9°

Las presentaciones de los enunciados de cada temática evidencian un formalismo similar al de un libro de texto universitario o de otro nivel superior. Estas evidencias son manifiestas en la sección 9.

8.2.7. Actualidad de los Contenidos

En esta categoría se revisa que tan actual son los contenidos y el grado de adecuación de las situaciones presentadas en los textos escolares.

Grado 8°

La contextualización de los ejemplos y ejercicios es acorde a nuestra actualidad por tratarse de situaciones aún vigentes, como los juegos de azar (dados, monedas, baraja de cartas, urnas), escenarios cotidianos (prendas de vestir, deportes, rutas de bus, organización de grupos), además, de algunos conocidos por difusión en los medios de comunicación como es el caso de los premios Óscar.

Grado 9°

Análogamente, las situaciones que se emplean en este grado de escolaridad para los ejemplos y ejercicios involucran los juegos de azar (monedas, dados, baraja de cartas, ruleta). y escenarios cotidianos (Menús de comidas, prendas de vestir, claves de seguridad, eventos sociales, organización de grupos, deportes, rutas de buses,...,etc).

8.2.8. Ejemplos a lo Largo del Desarrollo de la Teoría

En esta categoría se da a conocer los ejemplos presentes en el libro de texto y su tratamiento en torno al desarrollo de la teoría.

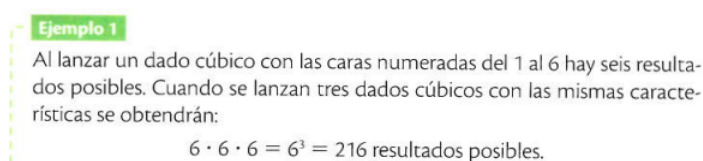
Grado 8°

En el libro de texto hay presente de manera explícita tres ejemplos; un ejemplo en el tema “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación” y dos ejemplos en el tópico de “Variaciones”.

DIAGRAMA DE ÁRBOL. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Figura 2

Ejemplo 1 sobre diagrama de árbol y principio de multiplicación en el libro de texto escolar



Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 194), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

La ejemplificación de esta temática se encuentra después de la presentación del principio de la multiplicación, su función es aplicar el principio para determinar la cantidad de resultados posibles al lanzar tres dados cúbicos cada uno con seis opciones de salir. En el que cada factor indica los posibles resultados de lanzar un dado y su vez los tres factores en conjunto representan los tres dados idénticos con los que se realiza el experimento.

VARIACIONES

Figura 3

Ejemplo 1 de la temática de variaciones en el libro de texto escolar

Ejemplo 1

En un curso de 20 estudiantes se realiza un sorteo para otorgar dos premios al azar. Para saber de cuántas formas diferentes se pueden repartir los premios, se representa cada uno de los estudiantes con $a_1, a_2, \dots, a_{20}$. Por lo tanto, hay 20 formas de asignar el primer premio y 19 de asignar el segundo (una vez asignado el primero). Aplicando el principio de multiplicación se obtiene $20 \cdot 19 = 380$ maneras diferentes de asignarlos (Figura 6.28).

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 196), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

Figura 4.

Ejemplo 2 de la temática de variaciones en el libro de texto escolar

Ejemplo 2

Si en la situación del Ejemplo 1, se indica que los premios pueden ser ganados por el mismo estudiante, se tendrían 20 formas de asignar cada uno de los premios, así que, aplicando de nuevo el principio de multiplicación se obtienen $20 \cdot 20 = 400$ maneras diferentes de asignarlos (Figura 6.29).

Estos distintos grupos ordenados de dos estudiantes (repetidos o no), elegidos de entre los 20 que participan, se llaman variaciones de 20 elementos tomados de dos en dos.

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 197), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

En cuanto al tema de “Variaciones” se identifican dos ejemplos; el primero está dentro de las variaciones sin repetición, en él se analiza las posibles maneras de otorgar dos premios al azar entre veinte estudiantes y el segundo ejemplo se encuentra al interior de las

variaciones con repetición, en él se retoma el ejemplo anterior pero con la condición que los dos premios pueden ser ganados por un mismo estudiante. Estos dos problemas enmarcados en un mismo escenario logran concientizar sobre la influencia de las condiciones de repartición en el resultado del conteo y el tipo de estrategia a utilizar en cada problema.

Grado 9°

En este libro hay presente un ejemplo para la temática de “Diagrama de árbol” y uno para “Permutaciones” específicamente permutaciones con repeticiones. En cambio, para la temática de “Variaciones y combinaciones” no hay ejemplos.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Figura 5.

Ejemplo 1 de la temática de diagrama de árbol en el libro de texto escolar

Ejemplo 1
Un determinado automóvil se fabrica con dos tipos de motores: diésel y gasolina, en cinco colores: blanco, rojo, azul, verde y negro, y con tres acabados: básico, semilujo y lujo. Para determinar cuántos modelos diferentes se construyen, se representan los motores por D y G; los colores por B, R, A, V y N, y los acabados por Ba, SL y L.
Se forma el diagrama de árbol de la Figura 4.34 y se observa que se construyen $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ modelos diferentes.

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 9.pdf* (p. 122), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

En este ejemplo se identifica la aplicación del principio de multiplicación en cuanto a la disponibilidad de motores, colores y acabados para la construcción de los diferentes modelos de automóviles. Correspondiendo el producto $2 \cdot 5 \cdot 3$ a las distintas opciones de

automóviles, donde el número 2 representa la cantidad de opciones de motores, el 5 la cantidad de opciones de colores y el 3 la cantidad de opciones de acabados.

PERMUTACIONES

Figura 6

Ejemplo 1 sobre la temática de permutaciones en el libro de texto escolar.

Ejemplo 1

Con las letras de la palabra TELÉFONO, se puede formar una permutación de ocho elementos, donde dos de ellos se repiten una vez cada uno, y los cuatro elementos restantes son diferentes entre sí.

Luego, hay $P_8^{2,2,1,1,1,1} = \frac{8!}{2!2!1!1!1!1!} = 10080$ ordenaciones diferentes.

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 125), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

Para esta temática de permutaciones con repetición, el texto escolar propone un ejemplo con las letras de la palabra “TELÉFONO” para el cual se debe de tener en cuenta el número de veces que se repiten algunas letras tal como lo indica el enunciado.

Sin embargo, se evidencia un error al asumir las letras “E” y “É” como indistinguibles cuando no lo son, destacando que dos de estos elementos se repiten una vez cada uno.

Teniendo en cuenta esto, únicamente el elemento “O” se repite por lo cual el número de ordenaciones diferentes sería $\frac{8!}{2!1!1!1!1!1!1!} = 20160$.

8.2.9. Temas Transversales en los Contenidos

En esta categoría se describen los temas transversales que proporciona el libro de texto escolar en los contenidos como insumo para la reflexión y análisis frente a los intereses de la sociedad.

Grado 8° y 9°

Se establecen tres temas transversales sobre los cuales a lo largo de las secciones en los libros de texto escolar se proponen actividades de distintos tipos, estos son: Educación para la sexualidad y ciudadanía, Educación ambiental y estilos de vida saludable. A continuación, se presenta la descripción de cada uno para ambos textos:

Educación para la sexualidad y ciudadanía: Con este tema desarrollarás competencias para ejercer, respetar y promover los derechos humanos, los cuales están presentes en las relaciones cotidianas de los estudiantes.

Educación ambiental: Plantea actividades, ejemplos y situaciones en las que podrás reflexionar sobre las relaciones entre el individuo y su entorno natural, como proceso interactivo, y la protección y el cuidado de los recursos naturales y los seres vivos.

Estilos de vida saludable: Presenta actividades, ejemplos y situaciones con las cuales aprenderás a tomar decisiones sobre tu salud y tu bienestar físico, emocional e intelectual, tanto individual como colectivo. (MEN, 2017, p.5)

8.3. Conexiones

En este organizador se establece la relación de las operaciones combinatorias con diferentes contextos como: Matemáticas, historia de las Matemáticas, otras disciplinas y con la vida real.

Al respecto, en los lineamientos curriculares se propone al contexto como un aspecto importante a considerar dentro del currículo y particularmente en el diseño de experiencias didácticas desde las mismas matemáticas, la vida diaria y otras ciencias; pues son estos contextos los que dotan de sentido a las matemáticas. (MEN, 1998, p.18-19)

Grado 8° y 9°

En los libros de texto escolar se encuentra una relación explícita de las operaciones combinatorias elementales con la vida real, ya que la mayoría de los ejemplos y ejercicios se establecen desde un contexto cercano, la otra parte de ellos tienen que ver con las matemáticas mismas. Por el contrario, no se aprecian elementos contextuales de tipo histórico o afines a otras disciplinas.

8.4. Actividades

8.4.1. Adecuación de las Actividades a los Objetivos

En esta categoría se resalta la correspondencia de los ejercicios propuestos en cada actividad con los objetivos, entendiéndose como objetivos aquellos planteamientos acordes a los conocimientos básicos en el pensamiento aleatorio propuestos por el MEN en los lineamientos, dentro de los cuales se consideran las estrategias como la simulación de experimentos y de conteos de acuerdo a lo mencionado en la categoría “Presencia de objetivos” del organizador de contenidos.

Grado 8°

El libro de texto escolar en las “Actividades de aprendizaje” que presenta no se evidencia la simulación de experimentos, ya que no hay un registro de las diferentes realizaciones de un experimento aleatorio. Sin embargo, se refiere de manera explícita a la palabra experimento en el punto 1 de la actividad para la temática “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación”, proponiendo diferentes situaciones que involucran el azar tales como: El lanzamiento de dados, de monedas, bolas de urnas y la selección de una carta de una baraja española como de sus respectivas composiciones. Todos los ejercicios en general están orientados al conteo de los posibles resultados de ocurrencia de diferentes eventos.

Grado 9°

En las “actividades de aprendizaje” de este libro de texto todos los ejercicios consideran las estrategias de conteo para situaciones contextuales análogas a la del texto de grado 8°, estando acordes con lo propuesto por las directrices en lo que se refiere a conteo de los posibles resultados. Tampoco se considera la simulación de experimentos en el tratamiento de las temáticas de las operaciones combinatorias elementales.

Comentario Adicional: La simulación de experimentos se tiene en cuenta únicamente en el libro de texto escolar de grado 8° para la temática de “Probabilidad de sucesos”. Al respecto, en el ejemplo 1, se aborda la convergencia de la probabilidad del suceso obtener cara, a partir de la tendencia de la frecuencia relativa de dicho suceso. En este, se registra para un número de tiros de 20 hasta 200 los resultados de las realizaciones del experimento indicando para cada caso la cantidad de caras.

8.4.2. Adecuación de las Actividades a los Contenidos

En esta categoría se menciona la coherencia entre las actividades propuestas y los contenidos del libro de texto escolar

Grado 8° y 9°

Estos libros de texto escolar en las “Actividades de aprendizaje” de la temáticas propone situaciones problema acordes a los presentados previamente en las situaciones introductorias y los ejemplos. Apuntando a un mismo objetivo sin salirse del tema central, con características similares al prototipo presentado inicialmente en el libro de texto pero con contextos distintos.

No obstante, en ambos libros de texto escolar se proponen ejercicios referentes a la temática de permutaciones circulares la cual previamente no se le ha dado un tratamiento o espacio en las presentaciones.

8.4.3. Adecuación de las Actividades respecto al Nivel

En esta categoría se menciona la adecuación de las actividades respecto al ciclo escolar para lo cual se tiene en cuenta evidencias de aprendizaje establecidas en los DBA especificadas anteriormente en la categoría de “Adecuación de objetivos respecto al nivel”.

Grado 8º

Teniendo en cuenta las evidencias de aprendizaje, en cuanto a la identificación y enumeración del espacio muestral y de los resultados favorables de ocurrencia de un evento indicado, todos los ejercicios de las “Actividades de aprendizaje” del tópico de “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación” están encaminados a este fin. En especial, tres ejercicios y la “Evaluación del aprendizaje” están enfocados de manera explícita a la utilización del diagrama de árbol a excepción de los restantes cuya resolución no hace necesaria su aplicación. De igual manera, en el tópico de “Variaciones” los tres ejercicios propuestos y su respectiva “Evaluación del aprendizaje” se encuentran acordes a las evidencias respecto a este nivel escolar.

Grado 9º

Teniendo en cuenta las evidencias de aprendizaje, en cuanto a la diferenciación de experimentos aleatorios y del rol de la elección como de la utilización de los métodos asociados a las operaciones combinatorias elementales, todos los ejercicios de las “Actividades de aprendizaje” están encaminados a estas evidencias. A continuación se hacen algunas especificaciones.

En las actividades de aprendizaje de “Diagrama de árbol” las evidencias quedan determinadas de manera explícita en tres ejercicios y en un ítem de la “Evaluación del aprendizaje”, en los que se destaca la utilización del diagrama a diferencia del resto de ejercicios, que no necesariamente implican la aplicación de esta herramienta.

En las actividades de las temáticas “Permutaciones”, “Variaciones y combinaciones” es similar la manera en cómo incitan a estas evidencias. En este sentido, cada temática plantea su grupo de ejercicios acordes al nivel. Además, la elección de la operación combinatoria se reduce a dos en la temática de “Permutaciones”, bien sea, a favor de variaciones sin o con repetición. De la misma manera la temática “Variaciones y combinaciones” dejan a elección las cuatro operaciones combinatorias que desprende esta temática (variaciones sin o con repetición, combinaciones sin o con repetición).

Grado 8° y 9°

En relación a la evidencia que apunta a la elección, en ambos libros de texto escolar no se presenta alguna sección de ejercicios en la que haya variedad de temáticas, para potenciar la elección de las operaciones combinatorias en las diferentes temáticas de modo que la elección, no esté determinada de antemano por la temática abordada inmediatamente en la unidad sino que sea consciente.

8.4.4. Actividades Propuestas

En esta categoría se describen aspectos generales que caracterizan las actividades. Para cada temática hay una actividad compuesta por ejercicios que se clasifican de acuerdo a los cinco procesos generales establecidos por el MEN, los cuales se indican previamente al planteamiento de los ejercicios según las competencias que promueven, además, se propone una actividad respecto al tema transversal de “Educación para la sexualidad y ciudadanía” para cada uno de los libros de texto escolar de grado 8° y 9°.

En estas actividades no se encuentran elementos que inciten a los estudiantes a realizar una búsqueda adicional para poder desarrollarlas.

8.4.5. Ejercicios Propuestos

En esta categoría se describen los ejercicios propuestos en la sección de “Actividades de aprendizaje” que se encuentran al final de cada temática, al igual que los que se plantean al finalizar toda la unidad en la sección de “Práctica más” relacionados al tema de interés, destacando los aspectos más importantes tales como la clasificación de los ejercicios de acuerdo a los procesos generales según el MEN y los procesos cognitivos resaltados en los textos escolares.

Grado 8°

DIAGRAMA DE ÁRBOL. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Ejercicio 1: Este ejercicio se compone de seis ítems en los que se proponen diferentes experimentos con monedas, dados, urnas y barajas de cartas para los que se necesita hallar el espacio muestral. Se cataloga como de ejercitación y memoria debido a que en cada experimento se debe considerar la estructura del diagrama de árbol para enlistar los elementos del espacio muestral.

Ejercicio 2: En este ejercicio se requiere saber cuántas opciones para vestirse deportivamente tiene Sonia, teniendo a su disposición 2 pantalones, 4 camisetas y 3 pares de zapatillas. Adicionalmente, el ejercicio establece compartir la respuesta con algún otro compañero y juntos elaborar una conclusión al respecto. Se cataloga como de razonamiento y aplicación. Esto se evidencia al incitar su enunciado a la acción de comparar, buscando conocer las respuestas de los demás, saber cómo hicieron para llegar a ella y que cada uno comunique su postura, bien sea, desde la aplicación de diagrama de árbol o el principio de la multiplicación.

Ejercicio 3: En este ejercicio se necesita saber de cuántas formas posibles se pueden combinar las letras de la palabra “amor”, en un primer momento sin importar si las palabras tienen sentido y luego con la condición de que sí lo tenga. Se cataloga como de razonamiento

y comprensión. Esto se logra percibir ya que para solucionar el problema debe haber un reconocimiento en la conformación de las palabras con y sin sentido, al enlistar los diferentes posibles resultados. Este ejercicio aunque es abordado en esta temática su naturaleza corresponde a la de permutaciones sin repetición pues su solución requiere de ordenar linealmente las 4 letras.

Ejercicio 4: En este ejercicio se propone formular una situación a partir de un diagrama de árbol dado y seguidamente resolverla. En este diagrama se relaciona el deporte de natación con los estilos pecho, espalda, mariposa; gimnasia con rítmica y artística; y atletismo con 100 metros planos, relevos y maratón. Este se cataloga como de modelación y aplicación debido a que se incita a plantear una situación que se adapte a esta representación desde la aplicación del diagrama de árbol.

Ejercicio 5: En este ejercicio, se plantea que un equipo de baloncesto desea elaborar una bandera con 2 franjas horizontales de diferente color para lo cual necesitan saber cuantas son las opciones de color que se pueden formar a partir de 4 colores; azul, amarillo, blanco y verde. Se cataloga como resolución de problemas y análisis porque para su solución se requiere del principio de la multiplicación teniendo en cuenta las opciones de color disponible para las 2 franjas.

VARIACIONES

Ejercicio 1: Hace alusión a las posibles rutas que tiene un autobús para ir de un punto A a uno B haciendo una parada en un punto intermedio C antes de llegar al destino. Para este recorrido cuenta con 3 posibles rutas hasta la parada y 5 posibles rutas de la parada al destino. El ejercicio se cataloga como de resolución de problemas y aplicación. En este ejercicio no se evidencia la temática de variaciones porque su objetivo se adapta a la aplicación del principio de multiplicación.

Ejercicio 2: Se pregunta sobre las posibles maneras de conceder 24 premios Óscar entre 5 candidatos en cada categoría. La premiación se hace en distintas categorías como: Mejor película, mejor actriz, mejor fotografía, etc. Se cataloga como resolución de problemas y análisis. Este ejercicio corresponde a la temática de variaciones pues para su resolución se hace necesario hacer tanteo o una especie de esquema de diagrama de árbol en el que las ramas de cada uno de los 24 premios están asociadas a 5 diferentes candidatos que en general pueden ser diferentes.

Ejercicio 3: Se plantea un enunciado en el que se desea saber de cuántas formas un profesor puede asignar 5 asientos de la primera fila de clase entre 22 estudiantes. Se cataloga como de resolución de problemas y comprensión al referirse la situación a una asignación lineal de los asientos para la que solo es posible asignar un asiento a un estudiante. La fórmula combinatoria asociada es la de variaciones sin repetición.

Por último, en la sección de “Práctica más” hay un ejercicio referente a la temática de “Diagrama de árbol” en el que se resaltan los procesos de comunicación y de comprensión.

Ejercicio 6: En este ejercicio se pretende hallar el espacio muestral de dos situaciones; la primera corresponde al resultado de la suma del lanzamiento de dos dados diferentes (tetraédrico y octaédrico) y la segunda se refiere a la elección de dos tarjetas de tres opciones que han sido marcadas con letras y una tercera marcada con número de entre dos opciones. Evidentemente se debe comunicar los resultados, bien sea de manera oral o escrita, sin embargo, es necesario explicitar en el enunciado el propósito al que apunta con relación al proceso especificado.

Grado 9º**DIAGRAMA DE ÁRBOL**

Ejercicio 1: Este ejercicio se compone de cuatro ítems que presentan distintas situaciones para las cuales se debe elaborar su respectivo diagrama de árbol. La primera de ellas está relacionada a las distintas maneras de combinar 3 colores de medias con 2 colores de zapatos; la segunda a las distintas formas de seleccionar un menú a partir de 3 opciones para ensalada, 3 opciones de carnes, 5 de jugos y 2 de postre; la tercera se refiere a las diferentes maneras de organizar parejas de baile a partir de 5 hombres y 7 mujeres; y la última a las distintas opciones de mezclar 3 frutas con 2 tipos de líquidos. Estos ejercicios se catalogan como de ejercitación y memoria porque un mismo procedimiento que es la utilización del diagrama de árbol debe adaptarse a las diferentes condiciones que se dan en cada contexto.

Ejercicio 2: El contexto de este ejercicio es una heladería en la que se venden diferentes tipos de conos sencillos con sabores como: vainilla, fresa y arequipe; a los cuales se les puede adicionar una salsa, sea de mora, crema de leche y leche condensada. Se cataloga en los procesos de resolución de problemas y memoria al estar las preguntas orientadas a reconocer las diferentes opciones de seleccionar los sabores de cono y salsas.

Ejercicio 3: Este ejercicio consiste en establecer cuántos resultados pueden obtenerse en el lanzamiento de dos dados numerados del 1 al 6. Para ello recomienda formar un diagrama de árbol para la visualización de los posibles resultados. Se cataloga dentro de los procesos de resolución de problemas y memoria porque la pregunta da indicios de la utilización del diagrama de árbol para su solución.

Ejercicio 4: En este ejercicio se propone calcular los posibles códigos para un candado compuesto por dos letras y dos números a partir de la elaboración de un diagrama de árbol.

Se cataloga como de resolución de problemas y análisis, en la que se contempla el uso del diagrama de árbol como estrategia para su solución.

Ejercicio 5: En este ejercicio se necesita saber de cuántas formas posibles se pueden combinar las letras de la palabra “ROMA”, en un primer momento sin importar si las palabras tienen sentido y luego con la condición de que sí lo tenga. Se cataloga como de resolución de problemas y memoria, en la que la aplicación del diagrama de árbol no es inmediata. Sería pertinente considerarlo por la naturaleza del problema en la temática de permutaciones sin repetición.

Ejercicio 6: En el planteamiento del ejercicio se menciona que los equipos A, B, C y D son equipos semifinalistas. Al respecto, el ejercicio propone el uso del diagrama de árbol para representar las posibles finales que pueden darse. Su naturaleza corresponde a la combinación de 4 elementos tomados de 2 en 2. Se cataloga dentro de los procesos resolución de problemas y aplicación dado que en este ejercicio no se trata de sólo aplicar a memoria el diagrama de árbol sino que posterior a su aplicación se debe de eliminar las finales repetidas.

Ejercicio 7: En este ejercicio se busca establecer un diagrama de árbol en el que se visualice las diferentes posibilidades de elegir una nueva junta directiva a partir de 3 candidatos para presidente, 2 para secretario y 2 para tesorero. Se cataloga como de resolución de problemas y aplicación ya que la situación incluye condiciones de orden a partir de la jerarquía de los cargos.

Ejercicio 8: Este ejercicio corresponde a una situación de extracción de tamaño 2 con sustitución de una caja que contiene 3 balotas de diferentes colores. Se cataloga dentro de los procesos de resolución de problemas y aplicación al requerirse de una estrategia como el principio general del recuento en 2 etapas, además, este problema por su naturaleza corresponde a uno de variaciones simples con repetición de 3 elementos tomados de 2 en 2.

PERMUTACIONES

Ejercicio 1: Este ejercicio propone cinco ítems diferentes, los cuales deben analizarse y resolver según lo pedido. El primero propone cuantos grupos de letras puede darse a partir de las letras de la palabra “PERA” y cuantos cuando la primer letra es la “P”; el segundo cuántos grupos de letras puede establecerse con las letras a, b, c, d y g sin que se repitan; el tercero cuántos grupos de palabras pueden formarse con las letras de la palabra “COLOMBIA”; el cuarto cuántas jugadas pueden efectuarse eligiendo 6 números del 1 al 49; y el quinto plantea de cuántas formas puede organizarse las letras de la palabra “LIBRO”. Se cataloga como de razonamiento y aplicación, ya que debe reconocerse qué tipo de permutación trata cada ítem para aplicar correctamente alguna de estas dos fórmulas combinatorias dando respuesta a lo que se pide.

Ejercicio 2: En este ejercicio se destaca para una partida de cartas la repartición de 4 de ellas a cada jugador para iniciar el juego, una vez hecha la repartición se requiere saber el número de ordenaciones que se le pueden hacer a este conjunto de 4 cartas. Se cataloga dentro de los procesos de resolución de problemas y aplicación, en el que para su solución hay diversas estrategias como el tanteo para listar los elementos o la aplicación de la fórmula combinatoria de permutaciones sin repetición.

Ejercicio 3: Este ejercicio propone una situación análoga a la anterior y también es justificada bajo los mismos procesos, solo que esta vez el ordenamiento es para 6 libros de consulta frecuente en una estantería.

Ejercicio 4: Este ejercicio hace referencia a una caja fuerte con 10 cifras en la clave para su acceso. Estas deben contener 5 doses, 3 cincos y 2 veces el seis. En este sentido, se plantea la pregunta sobre las posibles claves que se pueden formar de 10 cifras. Se cataloga dentro de

los procesos de resolución de problemas y aplicación dado que el ejercicio amerita por su gran cantidad de resultados la utilización de la fórmula de permutaciones con repetición.

Ejercicio 5: Este ejercicio propone una situación análoga a la anterior que también es justificada bajo los mismos procesos, pero esta vez se plantea que un equipo de baloncesto ha ganado un campeonato con un registro de 10 partidos ganados, 2 empatados y 4 perdidos.

Ejercicio 6: Este ejercicio propone una situación análoga a la anterior que también es justificada bajo los mismos procesos, pero esta vez, se trata del conteo de las llegadas a la meta de unos competidores de una carrera, los cuales son distinguidos por sus camisetas; 5 tienen camiseta blanca, 3 camiseta azul y 8 camiseta roja.

Ejercicio 7: Este ejercicio es muy similar al ejercicio 5 al buscar establecer de cuántas maneras un equipo de fútbol que participa en 12 juegos puede obtener 7 juegos ganados, 3 empatados y 2 perdidos. Se cataloga como resolución de problemas y memoria, en el que para resolución se requiere de la fórmula de permutación con repetición.

Ejercicio 8: Este ejercicio trata de un banquete de bodas en el que se necesita saber de cuántas formas pueden sentarse 8 personas en una mesa redonda con la misma capacidad, para el cual se requiere del uso de permutaciones circulares de acuerdo a las condiciones del ejercicio.

En primera instancia se debe considerar el total de individuos mientras que para el caso en que 2 personas quieran quedar juntas se debe acudir al total de individuos menos uno como estrategia heurística; es decir, 2 elementos tomarlos como uno porque estas 2 personas siempre van a estar juntas independientemente de su ordenamiento respecto de las otras. Sin embargo, hasta ese momento las ordenaciones circulares no se han abordado al interior de la temática de permutaciones.

Respecto a esto, Álvarez (1990) plantea la fórmula para las permutaciones circulares de n elementos, donde $n \geq 1$. Esta se obtiene reescribiendo de manera equivalente una sola ordenación circular de estos elementos como una sucesión de n ordenamientos lineales variando los primeros elementos. Así, por proporcionalidad se obtiene que el número de ordenamientos circulares para n elementos es $(n - 1)!$. En este sentido, los ordenamientos circulares son invariantes a las rotaciones.

El incluir este tipo de contenidos en la enseñanza provee una visión más amplia pues una misma cantidad de elementos pueden ser ordenados de manera lineal o circular según sea la especificidad y supuestos del contexto.

VARIACIONES Y COMBINACIONES

En esta temática todos los ejercicios están clasificados dentro de los procesos de resolución de problemas y aplicación.

Ejercicio 1: Este ejercicio considera las posibles reparticiones de 3 premios entre 16 competidores en una carrera de caballos, en la cual se supone que no hay empates. En este debe reconocerse la no repetición de los premios entre los galardonados y el orden, para posteriormente aplicar la fórmula de variaciones sin repetición.

Ejercicio 2: Este ejercicio considera 30 miembros de una asociación ecológica para la elección de los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero. Al respecto, el problema hace referencia al conteo de las posibilidades de ocupar estos cargos aplicando las variaciones sin repetición.

Ejercicio 3: Este ejercicio busca establecer de cuántas maneras un profesor puede asignar 5 sillas de la primera fila a 22 estudiantes que quieren sentarse en ellas. La operación combinatoria asociada es la de variaciones sin repetición.

Ejercicio 4: En este ejercicio se propone saber cuántos números de 3 cifras distintas pueden hacerse con los dígitos impares y cuántos con los pares. La operación combinatoria a aplicar corresponde a la de variaciones con repetición.

Ejercicio 5: En este ejercicio la situación propuesta gira en torno a una ruta de bus intermunicipal que recorre 10 poblaciones, en ella se busca la cantidad de billetes diferentes necesarios para su imprenta.

En este el orden importa por la organización de la información en el billete, además, la no repetición de los resultados está determinada en el enunciado al inferirse que la ciudad de destino es diferente a la de origen. En este sentido, el conteo se podría deducir de considerar dos opciones para la impresión de los billetes, es decir, si se trata del boleto de ida o de ida y vuelta.

Por tanto, la aplicación correspondería a la de la fórmula de variación sin repetición, además de la composición de los resultados de ambas opciones mediante el principio de la suma.

Ejercicio 6: En este ejercicio se busca saber cuántos horóscopos diferentes pueden hacerse para una revista semanalmente, teniendo en cuenta que este contempla 5 categorías (salud, amor, familia, amistades y dinero) a las cuales se les asigna un número del 0 al 5. La operación combinatoria asociada es la de variaciones con repetición, además de multiplicarla por el número 12 que representa la cantidad de signos zodiacales.

Ejercicio 7: La situación de este ejercicio se enmarca en el menú que ofrece un restaurante, el cual cuenta con 5 opciones de comidas rápidas por lo que se pretende saber la cantidad de pedidos diferentes que puede hacer un grupo de 6 amigos. La operación combinatoria asociada es la de variaciones con repetición ya que cada amigo es distinguible y puede repetir

opciones de comida.

Ejercicio 8: En este ejercicio se necesita saber de cuántas formas se puede pintar 6 bolas de golf con 3 colores diferentes. La operación combinatoria a aplicar en este ejercicio corresponde a la de combinaciones con repetición cuya solución no necesariamente requiere de la aplicación directa de la fórmula combinatoria.

La presente situación es equivalente a la de colocar en 3 baldes de pintura las 6 bolas con el requisito de que cualquiera de los 3 baldes tenga por lo menos una bola. Al respecto, la situación se plantearía desde el conteo de todas las posibles soluciones enteras positivas de la ecuación $C_1 + C_2 + C_3 = 6$; donde el valor de cada tripla representa la frecuencia en la que fueron pintadas cada una de las bolas de acuerdo a estos tres tipos de color.

Ejercicio 9: En este ejercicio se contempla una ruleta en la cual puede salir como resultado cualquier número natural entre 0 y 36 y se indaga sobre la cantidad de resultados posibles al girar la ruleta tres veces. En este escenario se aplica una variación con repetición pues hay distinción en cuanto a los 3 intentos de giro y los resultados se pueden repetir en cualquiera de estos.

Finalmente en cuanto a la sección de “Práctica más” se proponen cuatro ejercicios relacionados a las temáticas de permutaciones y combinaciones que se catalogan en los procesos de resolución de problemas y análisis.

Ejercicio 6: En este ejercicio se necesita saber cuántas claves telefónicas con 6 dígitos pueden obtenerse teniendo en cuenta que los dígitos no deben repetirse. De acuerdo a estas condiciones no corresponde a las temáticas establecidas, ya que debe aplicarse la operación

combinatoria de variaciones sin repetición debido a la importancia del orden y la no repetición.

Ejercicio 7: En este ejercicio la situación se refiere a las diferentes maneras en que puede vestirse un equipo de fútbol con 3 estilos de camisetas, 2 pantalones y 3 de medias. La resolución del problema no requiere las operaciones establecidas, por el contrario si de la aplicación del principio de multiplicación bajo el supuesto de que todos los integrantes del equipo incluido el arquero se uniforman igual independientemente de la opción elegida.

Ejercicio 8: En este ejercicio se requiere saber cuantas motos pueden matricularse a partir del sistema de 3 letras y 2 números. Por lo cual no corresponde a las operaciones combinatorias indicadas, sino que incluye el empleo de la operación combinatoria de variaciones con repetición y la aplicación del principio de multiplicación.

Ejercicio 9: En este ejercicio se menciona que hay 8 regalos para premiar a los 4 mejores estudiantes del salón con la condición de que a cada uno se le den 2 regalos. La operación combinatoria para el cálculo de las maneras en cómo los regalos pueden distribuirse entre los 4 estudiantes, de modo que cada uno tenga el mismo número de regalos corresponde a la de permutaciones con repetición. Lo cual también puede interpretarse como las reparticiones de 8 bolas en 4 urnas con iguales números de ocupación.

Grado 8° y 9°

De manera general, cabe resaltar que no se establece, ni se presenta una solución alternativa a los ejercicios propuestos y que su solución no necesariamente implica la aplicación directa del simbolismo de las fórmulas combinatorias sino que también es posible

solucionarlos a partir de diferentes estrategias heurísticas como la enumeración, tanteo, utilización del diagrama de árbol, etc.

8.4.6. Ejercicios Resueltos

En esta categoría se detallan aquellos ejercicios para los cuales se propone una solución en el desarrollo de las temáticas.

Grado 8º

DIAGRAMA DE ÁRBOL. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

En esta temática se establece un solo ejercicio con su respectiva solución, cuyo propósito es determinar la cantidad de modelos de camisas que pueden darse a partir de tres criterios dados como: Tallas (S, L, M, XL), motivos (Serio, Divertido) y colores (Rojo, Verde). Para este ejercicio se presenta el diagrama de árbol en el que se visualiza la cantidad de combinaciones posibles y la operación que se utiliza.

VARIACIONES

Sobre esta temática se presenta un solo ejercicio resuelto, que es propuesto con el objetivo de saber las posibles maneras de elegir el representante y el coordinador de convivencia de un grupo de grado octavo para los cuales hay cuatro candidatos. Para su solución se presenta la operación que se hace y una tabla que contiene las posibles combinaciones para los cargos entre los candidatos.

Grado 9º

DIAGRAMA DE ÁRBOL

En esta temática se encuentra un solo ejercicio resuelto, el cual consiste en la cantidad de modelos de sudadera que recibe la dueña de un almacén al pedir sudaderas de color blanca y negra en tallas pequeña, mediana, grande y extragrande. Para su solución se presenta un diagrama de árbol en el que se relacionan los dos colores con cada talla, los resultados de las

posibles de las combinaciones y la operación que se utiliza. Sin embargo, se encuentra un error tipográfico cuando se hace la relación entre el color negro y las tallas que podría generar confusión.

PERMUTACIONES

Sobre esta temática se establece un solo ejercicio resuelto en el que se requiere saber de cuántas maneras pueden clasificarse tres competidoras para recibir las medallas de oro, plata y bronce en una competencia de nado sincronizado. Para su solución se presenta un diagrama de árbol en el que las diferentes etapas representan cada uno de los puestos, finalmente los posibles resultados y la operación que se utiliza.

VARIACIONES Y COMBINACIONES

Para esta temática se establece un solo ejercicio resuelto en el que se quiere calcular las distintas maneras que tienen cuatro equipos de fútbol para obtener los títulos de campeón o subcampeón en un torneo. Para la solución se presenta su respectivo diagrama de árbol en el que se visualizan los posibles resultados y la operación que se utiliza.

8.5. Temas Transversales en las Actividades

En esta categoría se mencionan los aspectos relacionados a los temas transversales que logran evidenciarse en las actividades propuestas.

Los ejercicios que se proponen en ambos libros de texto escolar, no apuntan a una reflexión o análisis de los problemas sociales, ambientales o directamente personales. Sin embargo, en las “Actividades de aprendizaje” de estos libros de texto escolar se presentan dos apartados en los que se aborda un tema transversal.

Grado 8º

En la temática de “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación” el tema transversal está dado como “Educación para la sexualidad y la ciudadanía”. En este, se hace

una pequeña reflexión sobre la importancia de las acciones y decisiones que tomemos para el cumplimiento de nuestro plan de vida y se propone realizar una lista de proyectos personales y estrategias para llevarlos a cabo.

En esta actividad no se percibe explícitamente la relación con la temática previamente abordada. Sin embargo, al plantear listar los proyectos personales y tres maneras diferentes para realizarlos, podría pensarse en la creación de un diagrama de árbol en el que se evidencien los proyectos de vida propuestos por los estudiantes con las respectivas explicaciones de los pasos a seguir para la realización de cada uno.

Grado 9º

En la temática de “Variaciones y combinaciones” también se presenta desde el mismo tema transversal un aporte, en el que se especifica las distintas opciones de estudio que tiene una persona luego de terminar el colegio y se pregunta la importancia que tiene para los estudiantes realizar estudios de educación superior. En este, se percibe una relación en general con las temáticas abordadas, al pedirse todas las opciones de estudio que podría tener una persona.

8.6. Metodología

8.6.1. Aspectos Metodológicos

En esta categoría se evidencian los aspectos o pasos que sigue el libro de texto para lograr su objetivo.

Grado 8º y 9º

Ambos libros de texto escolar usan una metodología tradicional para la presentación de las temáticas; primero se inicia con una breve contextualización de lo que se quiere estudiar y se brinda un ejemplo inicial al respecto, después se introduce la temática con su

respectiva teoría y se dan unos ejemplos donde esta se aplica, luego se proponen algunos ejercicios para el lector y finalmente se presenta un evaluación en torno a la temática.

8.6.2. *Materiales Didácticos*

En esta categoría se destacan los diferentes recursos o herramientas didácticas tenidas en cuenta por los autores en la presentación de las operaciones combinatorias, en especial si en el libro de texto escolar se utilizan o se construyen.

Grado 8° y 9°

En la presentación de ambos libros de texto escolar en lo relacionado a las operaciones combinatorias elementales no se propone el uso de materiales didácticos fuera del papel y el lápiz. Pero frente a otras temáticas si se sugiere el uso de materiales didácticos desde las TICS, como la calculadora y diferentes software.

Para esta temática podría considerarse el uso de materiales que permitan la exploración desde la experiencia con objetos tangibles como por ejemplo los recursos del laboratorio de matemáticas, lo cual propicia un acercamiento diferente al que comúnmente permite el papel y el lápiz.

8.6.3. *Metodología de la Evaluación*

En esta categoría se describe la metodología de evaluación adoptada, la manera en cómo se articula y su finalidad en el aprendizaje.

Grado 8° y 9°

En ambos libros de texto escolar una vez presentada cada temática se establecen una serie de ejercicios que también contienen la evaluación de aprendizaje de lo previamente abordado. Adicionalmente en la parte final de cada unidad, se propone la evaluación del aprendizaje de esta a nivel general.

En cuanto a esta sección general de la “Evaluación del aprendizaje” se establecen una serie de ejercicios organizados desde las temáticas abordadas en cada unidad. Estos ejercicios se clasifican de acuerdo a los cinco procesos generales contemplados en los lineamientos curriculares, por lo cual cada uno se enfoca en el desarrollo de alguna competencia matemática en específico.

En este sentido, en el libro de texto de grado octavo, la evaluación del aprendizaje relacionada a las operaciones combinatorias está determinada con el rótulo de “técnicas de conteo”, mientras que en el libro de texto escolar de grado noveno se encuentra como “permutaciones y combinaciones”.

Se logra identificar una coherencia entre planteamiento de los ejercicios en la evaluación del aprendizaje y los procesos generales especificados, no obstante, incrementar la cantidad de ejercicios podría enriquecer la evaluación si se propone variedad en torno a las temáticas del diagrama de árbol, principio de multiplicación y las variaciones con o sin repetición. Adicionalmente, sería relevante darle un enfoque diferente a la evaluación en general que logre diferenciarla con lo propuesto en la evaluación después de cada temática y no únicamente desde la clasificación de los procesos generales.

8.6.4. Enseñanza Personalizada

En esta categoría se busca dejar en manifiesto los elementos del libro de texto relacionados a la enseñanza personalizada desde la inclusión y atención de las distintas necesidades educativas especiales las cuales son condiciones físicas y cognitivas que pueden presentar los estudiantes y que afectan directamente sus procesos de aprendizaje.

Grado 8° y 9°

Estos libros de texto escolar en su presentación tienen una forma estándar predeterminada, orientada al grupo de estudiantes de cada nivel. En la que no se contempla elementos en los contenidos que puedan caracterizarse como de tipo personalizado.

La enseñanza personalizada figuraría por parte de los docentes desde el tratamiento que le den a los libros de texto escolar, en el que se tenga en cuenta las distintas necesidades y niveles de formación de los estudiantes. Desde esta perspectiva, el MEN adopta una postura no exhaustiva para la estructura del libro de texto escolar coherente a los referentes curriculares nacionales al promover este tipo de material, como material de apoyo para el desarrollo de las temáticas.

8.6.5. Estimular la Creatividad

En esta categoría se constatan los aspectos o elementos que se evidencian en el libro de texto, relacionados al desarrollo de la capacidad creativa de los estudiantes.

En este sentido, cabe destacar que resolver situaciones en las que intervengan las operaciones combinatorias elementales en general, requiere de habilidad para definir la forma más conveniente de desarrollarlas, la estrategia o herramienta que más se adapte a la situación.

Grado 8°

En la temática de “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación” se propone un ejercicio de modelación en el que se plantea crear y resolver una situación a partir de un diagrama de árbol en el que se relacionan tres deportes con sus respectivos estilos de competencia.

Asimismo en la “Evaluación del aprendizaje” de esta sección se sugiere plantear un problema en un contexto y resolverlo a partir de un diagrama de árbol que relaciona los “niños” con las “niñas”. La formulación de dichas situaciones y su desarrollo estimulan la

creatividad de los estudiantes y su capacidad de afrontarlas, brindándoles una autonomía y responsabilidad sobre la misma.

Grado 9º

En el libro de texto escolar de grado noveno no se evidencian elementos o ejercicios con los que se pueda estimular la creatividad, pues lo que se propone se resumen en resolver situaciones desde la aplicación de una fórmula.

8.6.6. Educación en la Atención a la Diversidad como Metodología

En esta categoría se destaca si el tratamiento de algunos contenidos involucra diferentes perspectivas; bien sea, sociales, culturales y/o políticas.

Grado 8º y 9º

En las actividades propuestas para ambas unidades, no se incluyen problemáticas o situaciones contextualizadas a partir de estas perspectivas para el desarrollo de las operaciones combinatorias elementales. Posiblemente en las unidades restantes si se tomen en consideración algunas de ellas.

8.6.7. Resolución de Problemas como Metodología

En esta categoría se describe la metodología adoptada por el libro de texto escolar en relación a la resolución de problemas.

Grado 8º y 9º

Los libros de texto escolar de manera explícita no especifican que la metodología adoptada es la de resolución de problemas. Sin embargo, la mayoría de los ejemplos introductorios y los ejercicios propuestos están dados desde situaciones problema, lo cual es coherente a lo propuesto por el MEN en los lineamientos curriculares en torno a los conocimientos básicos del pensamiento aleatorio y sistemas de datos, los tres tipos de contexto y los seis procesos generales, en los que esta es evidenciada como un factor central.

Por otro lado, en el apartado de “Resolución de problemas” al final de la unidad en el libro de texto escolar de grado noveno, se expone para la solución de un problema la estrategia de descomponerlo en partes. Para ello divide un problema en cuatro etapas las cuales corresponden a: “Comprende el problema”, “Crea un plan”, “Ejecuta el plan” y “Comprueba la respuesta”.

El problema resuelto que colocan como ejemplo está enfocado en el viaje de 12 personas en 3 automóviles con 4 asientos, además, cada dueño es el conductor. La pregunta está orientada al cálculo de las diferentes maneras en que las 9 personas restantes pueden sentarse, con la condición de que la disposición de las personas al interior de los autos no sea relevante.

Las etapas están orientadas a reconocer inicialmente los datos que da el problema y lo que pide. Luego, considera las maneras en que se pueden ordenar las personas en cada vehículo ya habiendo sido asignadas 3 de ellas en cualquier vehículo para así aplicar el principio de la multiplicación. Posteriormente, plantea el mismo escenario pidiendo verificar la respuesta para el caso en el que la posición de cada persona en el vehículo sea relevante.

Después, el libro de texto escolar propone una situación del registro de inventario que realiza una empresa que utiliza series con una letra inicial, seguida de 3 números que pueden estar repetidos, sin tener en cuenta el cero. Para calcular las diferentes series de registro propone aplicar la estrategia anteriormente mencionada.

Posteriormente, plantea otro problema en el contexto de 4 amigos que deciden ir a almorzar después de un encuentro de muchos años. Como el restaurante les asigna una mesa con capacidad para 4 personas, el ejercicio pregunta sobre las diferentes formas en que pueden sentarse los amigos. Por tanto, la fórmula combinatoria a aplicar corresponde a las permutaciones de 4 elementos.

Por último, en esta parte el libro de texto escolar propone inventar un problema y resolverlo a partir de la información de la situación, en la que Andrés debe transporte desde Bogotá a Santa Marta pasando por Medellín. Para tal objetivo, tiene a su disposición medios de transporte como avión, carro particular y transporte público para ir hasta Medellín. Por su parte, para el recorrido restante desde Medellín hasta Santa Marta cuenta con medios de transporte como avión o transporte público.

8.7. Lenguaje

En este organizador se identifican categorías relacionadas a la manera en que se comunican los contenidos, destacándose el lenguaje habitual, simbólico, etc.

De manera general, los libros de texto escolar usan un lenguaje sencillo y cotidiano para los estudiantes, quizás exceptuando algunos términos técnicos asociados a la Matemática, tal como: Enésimo objeto, diagrama de árbol, octaédrico regular o tetraédrico, capicúas.

Se hace uso de un lenguaje simbólico específico en los enunciados de cada temática, empleando subíndices, superíndices, la potencia y el factorial de un número.

- El principio de multiplicación se denota como $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_n$ para n etapas y $n \cdot m$ para dos de estas.
- Para las variaciones hay 4 notaciones, dos para cada tipo, que son: $V_{m,n}$ o V_m^n (sin repetición), $VR_{m,n}$ o VR_m^n (con repetición).
- Para las permutaciones hay 2 notaciones, una para cada tipo, que son: P_n (sin repetición) y $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ (con repetición).

- Para las combinaciones hay tres notaciones, una para un tipo y dos para el otro, que son: $C_{m,n}$ (sin repetición), $CR_{m,n}$ o $C'_{m,n}$ (con repetición).

Además se evidencian otros como el lenguaje descriptivo, explicativo, imperativo e interrogativo. El lenguaje descriptivo hace énfasis en los detalles y definiciones. En especial, se destaca en los enunciados de los principios y las operaciones combinatorias abordadas al incluir su utilidad y las propiedades que los caracterizan.

El uso de lenguaje explicativo se evidencia en los ejercicios introductorios y en los ejemplos con el fin de aclarar el significado, la aplicación de los principios y operaciones combinatorias que presentan el libro de texto escolar de manera un tanto formal.

El lenguaje imperativo pretende incitar al lector a llevar a cabo una acción. Este se evidencia en los ejercicios a partir de expresiones como: “Halla...”, “Especifica...”, “Representa...”, “Compara...”, “Formula...”, “Utiliza...”, “Considera...”, “Responde...” y “Realiza...”.

Este tipo de términos desde la perspectiva planteada por los libro de texto escolar, podrían limitar al estudiante en cuanto al uso de diferentes métodos o estrategias para la resolución de un problema; como por ejemplo el fijar la utilización del diagrama de árbol en algunos ejercicios, lo cual al enfrentarse al problema no les brindaría la libertad de explorar otros maneras de hacerlo.

Por último, el lenguaje interrogativo es el más recurrente en estos libros pues los ejercicios que se plantean en las distintas secciones, se realizan a partir de distintos cuestionamientos en torno a cada temática.

8.8. Ilustraciones

En este organizador se describen los distintos recursos visuales (imágenes, tablas y diagramas) utilizados en el libro de texto escolar destacando su función y adecuación.

Nota: La ampliación del contexto de los ejercicios se encuentra en el organizador de actividades.

Grado 8°

Para las temáticas de interés dentro de la unidad hay un total de 8 ilustraciones, de las cuales 5 corresponden a diagramas de árbol y 3 a tablas.

DIAGRAMA DE ÁRBOL Y PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

En la apertura de esta temática se presenta una tabla en la que se contemplan las diferentes opciones que deben tener en cuenta dos estudiantes para el diseño de camisetas a partir de tres criterios. Seguidamente, se sintetizan estas opciones desde una representación gráfica del diagrama de árbol.

En las “Actividades de aprendizaje” hay una imagen y un diagrama de árbol. La imagen hace parte del ejercicio 2 que se propone. En esta se aprecia al personaje frente a un caballete de ropa con cada uno de los zapatos, pantalones y camisas que tiene a su disposición. El diagrama de árbol corresponde al ejercicio 4.

En la “Evaluación del aprendizaje” hay un diagrama de árbol para el que se debe crear una situación y resolverla.

VARIACIONES

En el ejercicio introductorio de esta temática se establece una tabla que contempla las diferentes opciones de organización que hay para un comité con dos cargos.

En los dos ejemplos de los contenidos de variaciones con y sin repetición se evidencia para cada uno, un diagrama de árbol esquematizando la repartición de dos premios. Sin embargo, en ambos casos solo especifican para un elemento las diferentes ramas sin dejar indicadas las opciones restantes.

En este sentido, la representación del diagrama estaría incompleta a diferencia del enunciado del ejemplo que si expone las posibles asignaciones. Lo que podría generar dificultades debido al grado de abstracción en el que se consideran conteos con gran cantidad de resultados posibles, a diferencia del resto de diagramas que al poseer menor enumerabilidad de realizaciones, es posible apreciarlos de manera completa con mayor detalle.

Grado 9º

Para las temáticas de interés dentro de la unidad hay un total de 12 ilustraciones, de las cuales 4 corresponden a diagramas de árbol y 8 a imágenes.

DIAGRAMA DE ÁRBOL

En la apertura de esta temática se presenta una imagen de unas sudaderas de diferentes colores, luego se establece su respectivo diagrama de árbol de acuerdo a la situación presentada.

En el ejemplo 1, se establece un diagrama de árbol que representa la situación de las opciones de modelos diferentes se dispone para un automóvil.

En las “Actividades de aprendizaje” hay dos imágenes; la primera hace parte del ejercicio 2, en la que se ve diferentes sabores de cremas y la segunda hace parte del ejercicio 6, en la que se observa dos jugadores de baloncesto, uno de ellos apunto de anotar una cesta.

PERMUTACIONES

En la apertura de esta temática se presenta una imagen en la que se ve una nadadora en una piscina, luego se establece su respectivo diagrama de árbol de acuerdo a la situación que se aborda.

En la “Evaluación del aprendizaje” se presenta una imagen para el único ejercicio que se propone en esta sección, en la que se visualizan ejecutivos en una reunión.

VARIACIONES Y COMBINACIONES

En la apertura de esta temática se presenta una imagen en la que se ve dos jugadores de fútbol compitiendo por patear un balón, luego se establece un diagrama de árbol referente a la situación planteada.

En las “Actividades de aprendizaje” se presentan dos imágenes; en la primera de ellas se ve unos jinetes compitiendo que hace parte del ejercicio 1 y la segunda presenta la imagen de una ruleta de un casino.

Grado 8° y 9°

Las ilustraciones dadas se encuentran más orientadas a armonizar estéticamente los libros de texto escolar que como un apoyo para la comprensión del ejercicio. Esto se logra evidenciar al estar las imágenes como un adorno al contexto del problema.

8.9. Tecnologías de la Información y de la Comunicación

En este organizador se destacan las herramientas o recursos tecnológicos que hace mención el libro de texto escolar para el desarrollo de las temáticas.

Grado 8° y 9°

Los libros de texto escolar no consideran ninguna herramienta tecnológica para abordar tareas afines a las operaciones combinatorias como la resolución de ejercicios o problemas a partir del uso de ordenador, calculadora e internet. Al respecto, en la unidad de “Estadística y probabilidad” del libro de texto escolar de grado 8°, hay una actividad para realizar en un ordenador pero en relación al contenido de probabilidad. Sin embargo, su tratamiento es limitado pues el objetivo era el de construir una ruleta en “Powerpoint” más que el potenciar y afianzar la temática, dejando el objetivo de la actividad de manera libre al sugerir al estudiante reforzar los conocimientos del contenido a partir de esta construcción.

Teniendo en cuenta que la tecnología actualmente es una herramienta de gran impacto en la sociedad especialmente para la educación, sería pertinente involucrar actividades que demanden el uso de herramientas tecnológicas para la resolución de problemas combinatorios, específicamente, aquellas que demanden mayor dificultad abordar desde otros medios.

Por otro lado, el simular los resultados de un experimento aleatorio sería una buena manera de incluir las herramientas tecnológicas por ejemplo, proponiendo a los estudiantes completar los posibles resultados del espacio muestral o de algún subconjunto del mismo en caso de que la realización del experimento dé solo algunos valores.

8.10. Evaluación

8.10.1. Momento de la Evaluación

En esta categoría se destacan los diferentes momentos y funciones que se logran evidenciar respecto a la evaluación en el libro de texto escolar.

En la apertura de cada temática hay indicios de evaluación desde la propuesta de las situaciones iniciales, las cuales buscan que emerjan los conocimientos previos a cada temática y así dar un acercamiento intuitivo hacia lo que se desea enseñar.

Un segundo momento de evaluación, es evidenciado en los ejercicios de las “Actividades de aprendizaje” y “Evaluación del aprendizaje” que se proponen posteriormente de la presentación formal de las operaciones combinatorias elementales. Cabe destacar aquí que no se halla una distinción notable entre los ejercicios propuestos como actividades con los de evaluación, puesto que su estructura y alcance son similares. A excepción de dos preguntas abiertas propuestas en la evaluación del libro de texto de grado 8°, en las cuales se pide explicar la estrategia utilizada para la realización del conteo además de proponer un ejemplo de experimento aleatorio.

La evaluación de las temáticas se evidencia de manera directa en la sección que lleva como título “Evaluación del aprendizaje”, la cual se presenta en la última parte de las “Actividades de aprendizaje” para la valoración inmediata de la temática abordada como también al finalizar las unidades de aprendizaje para algunas temáticas.

8.10.2. Contenidos Evaluados

En esta categoría se mencionan las actividades de evaluación propuestas en el libro de texto escolar que contemplan los contenidos relacionados a las operaciones combinatorias.

Grado 8°

DIAGRAMA DE ÁRBOL. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Con respecto a la temática “Diagrama de árbol. Principio de multiplicación” se propone un ejercicio en el que se establece un diagrama de árbol que relaciona niños y niñas con el que se pide plantear y resolver una situación que se desarrolle mediante este diagrama.

VARIACIONES

En cuanto a “Variaciones” se plantean dos ejercicios; el primero de ellos se origina en una cumbre de presidentes en la que se necesita saber de cuántas maneras diferentes se pueden ubicar en fila para una foto, al igual que en una mesa circular. Frente a ello el libro de texto escolar evalúa algo que no presenta al preguntar sobre el conteo de disponer elementos u objetos sobre un arreglo circular, lo cual requiere un tratamiento diferente al de los arreglos lineales.

En el segundo ejercicio se requiere saber cuántas combinaciones se pueden dar con las letras de la palabra “amigo”, además, cuántas empezarían por “A” y “AMI”. Al respecto, el libro de texto escolar no hace una distinción entre las letras mayúsculas y minúsculas lo

que se hace necesario ya que son diferentes los caracteres que conforman las palabras “amigo” y “AMIGO”.

8.10.3. Evaluación del Aprendizaje

Finalizando esta unidad, en la sección de “Evaluación del aprendizaje” se presentan otros tres ejercicios bajo el rótulo de técnicas de conteo asociados a los procesos generales de ejercitación, modelación y resolución de problemas. En los dos primeros se indica que son preguntas abiertas y el tercero que es de tipo refuerzo. Al respecto no hay una previa justificación o ampliación de estas características.

El primer ejercicio corresponde a ejercitación y cuestiona sobre la cantidad de números de dos cifras posibles que se pueden formar respecto a dos conjuntos referenciales que se proponen, el segundo destacado como modelación propone la creación de un ejemplo contextualizado resaltando que el experimento debe ser aleatorio y constar de 36 posibilidades diferentes en los resultados, por último el tercer ejercicio referenciado como de resolución de problemas se enmarca en el contexto de girar una ruleta con números desde el 0 al 36 y se pregunta sobre los posibles resultados de girarla tres veces.

Grado 9º

DIAGRAMA DE ÁRBOL

Por parte de la evaluación, hay dos ejercicios. El primero está enfocado a la aplicación del diagrama de árbol para el lanzamiento de un dado y una moneda uno a la vez. El segundo, está compuesto por cuatro ítems que requiere de estrategias adicionales como por ejemplo, la utilización de bits al resultar grande la enumeración del conteo.

El segundo ejercicio, considera números de 5 cifras en el que se cuestiona sobre cantidad de números que se puedan formar con las condiciones de ser capicúas, impares, de

cifras distintas, además, del cumplimiento de condiciones simultáneas como que los números sean pares, capicúas y mayores que 50000.

Para ninguno de estos ítems el diagrama de árbol no es una herramienta eficaz para su respectivo análisis, ya que en esta situación es oportuno considerar un modelo de 5 bits o casillas en las que se distribuyen los elementos u objetos; en este caso números con la condiciones indicadas en cada pregunta. Tampoco, hay ejemplos que involucren este tipo de problemas como preparación a la actividad evaluativa.

PERMUTACIONES

Se presenta un ejercicio con dos ítems, que es prácticamente el mismo que el primer ejercicio de la “Evaluación del aprendizaje” de la temática de “Variaciones”. El único cambio es que sustituye a la reunión de 12 alcaldes menores por la de 12 presidentes en una cumbre europea.

El ítem 1 de permutaciones sin repetición es acorde a la evaluación del aprendizaje. Sin embargo, a pesar de que esta temática lleva el nombre de permutaciones en ningún momento se aborda las permutaciones circulares, por lo cual en el ítem 2 habría una incoherencia con los contenidos propuestos en esta temática al evaluar de nuevo algo que no presenta el libro de texto escolar.

VARIACIONES Y COMBINACIONES

Finalmente, para esta temática se presentan dos ítems. En el primero, se necesita saber cuántos triángulos pueden formarse con 10 puntos en el espacio, bajo la hipótesis de que 3 no están alineados por lo que bastaría con analizar las combinaciones de 10 puntos tomados de 3 en 3.

Por su parte, el ítem 2 plantea una situación en la que una empresa ofrece 5 vacantes,

3 de ellas para mujeres y 2 para hombres de un total de 12 y 15 respectivamente. En su primer planteamiento, indica las posibles formas en que pueden cubrirse las vacantes teniendo en cuenta que todos los salarios son iguales, lo cual indica que el orden no es un aspecto a considerar, resultando así una 5-upla no ordenada. En este sentido, el registro simbólico del problema se expresa en términos de operaciones combinatorias como el producto de las combinaciones $\binom{12}{3} \times \binom{15}{2}$. Análogamente, se presenta el segundo planteamiento como una variante del primer ítem, al demarcar diferencias salariales para las plazas de las mujeres obteniéndose así el conteo resultante corresponde a la multiplicación de una combinación y una variación $\binom{15}{2} \times V_{12,3}$.

Por tanto, el contexto del problema demarca las configuraciones que deben de considerarse para ambos ítems, tal como se destaca en este proceso de evaluación al utilizarse un escenario de las matemáticas mismas y otro de la vida diaria.

Los ejercicios propuestos en esta sección están clasificados dentro de las temáticas de permutaciones y combinaciones. En total son tres ejercicios clasificados con los procesos de resolución de problemas y evaluación.

Ejercicio 11: Este ejercicio se considera como una actividad de aplicación al preguntar sobre las maneras en que pueden sentarse 6 amigos que van al cine y compran 6 entradas con asientos consecutivos. Para efecto de la pregunta, la operación combinatoria a aplicar corresponde a las permutaciones ordinarias de n elementos o lo que es lo mismo a la ordenación de cada uno de los 6 amigos en las sillas.

Ejercicio 12: Este ejercicio también es considerado como actividad de aplicación. La

situación está enfocada a las formas en que pueden distribuirse 6 grupos en 6 salones de un pasillo de un colegio. Análogamente, la operación a aplicar es la de permutaciones sin repetición.

Ejercicio 13: Este ejercicio está propuesto como de resolución de problemas. El escenario en el que se enmarca la situación es en un polideportivo con 5 puertas, en las que se puede tanto entrar como salir. Al respecto, se pregunta sobre el número de maneras en que una persona puede acceder y salir del mismo, lo cual no está orientado a la mera aplicación de una fórmula sino que requiere de una estrategia de resolución de problemas.

Una manera de solucionar el problema es dividir el problema en dos partes. Para ello, se considera primero el escenario en el que la persona entra y sale por la misma puerta. Para las opciones restantes en las que la puerta de entrada y de salida son diferente, el problema se podría interpretar equivalentemente como la ordenación lineal de los siguientes caracteres E, S, N, N, N (E: Acceder, S: Salir, N: No elige la puerta). En este último caso, la operación a aplicar es la permutación de 5 elementos con 3 de estos repetidos, la cual da como resultado la distribución de cada uno de los caracteres en 5-uplas ordenadas, de donde cada una de ellas representan las posibles elecciones para acceder y salir por cada una de las puertas. Por tanto, al unir ambas partes se obtiene que el número de formas corresponde a $5 + \frac{5!}{1! 1! 3!}$.

8.10.4. Autoevaluación

En esta categoría se describe la manera en que el libro de texto escolar promueve la autoevaluación por parte de los estudiantes, es decir, si hay mecanismos de control que les permita autogestionar su aprendizaje como también validarlo.

Grado 8° y 9°

Referente a ello, en ninguno de los libros de texto escolar hay registro de las respuestas o de algunos resultados de los ejercicios propuestos. Por tanto, los estudiantes no cuentan con un mecanismo de control para cuestionar las respuestas obtenidas y procedimientos usados en caso de presentarse algún error o inconveniente al desarrollar alguno de los ejercicios. La única excepción se encuentra en la sección “Resolución de problemas”, en donde en un ejercicio se propone comprobar a partir de una respuesta, el resultado de la modificación del problema que colocan como ejemplo para explicar la estrategia de dividir el problema en partes.

8.11. Enfatización**Grado 8° y 9°**

En este organizador se consideran las categorías del empleo de recursos gráficos y apartado de resumen, síntesis, para dar una descripción de los elementos visuales que permiten una mayor organización y claridad en la presentación de las temáticas.

Los libros de texto escolar emplean una serie de elementos visuales que permiten resaltar detalles que ayudan a diferenciar los títulos, los subtítulos y las diferentes categorías de los apartados.

En este sentido, genera mayor estética y organización a la presentación al emplear diferentes tamaños de letra, enumeración (unidad, temáticas y contenidos), subrayado, negrilla, viñetas y diferentes colores. Posibilitando así, una lectura en la que se logre identificar aspectos de interés a partir de características visualmente llamativas.

En las presentaciones no se encuentran resúmenes o apartados en los que se sintetice lo más relevante de los contenidos abordados con la intención de que los estudiantes tengan medios para que contrasten o unifiquen las temáticas. Esto ayuda en la obtención de una

visión global, concreta y no parcializada de los contenidos, buscando plasmar desde su estructura la relación que pueda haber entre ellos. Al respecto, podrían considerarse por ejemplo el uso de esquemas, diagramas o tablas; en los que se clasifiquen las operaciones combinatorias elementales, los principios fundamentales del conteo, la naturaleza de los experimentos y de sus elementos.

9. Saber Matemático y Transposición Didáctica en los Libros de Texto Escolar

En esta sección se analiza la transposición didáctica en relación al saber sabio y el saber a enseñar según lo evidenciado en el libro de texto escolar. Para ello, se realiza una comparación de la presentación de las operaciones combinatorias elementales con lo propuesto por Spiegel (1975) la cual según el material bibliográfico del libro de texto escolar es su fuente principal para esta temática. Posteriormente, se contrasta con lo propuesto por Álvarez (1990) especificando el principio y los problemas típicos que caracterizan su presentación.

9.1. Diagrama de Árbol. Principio de Multiplicación

Texto Fuente (Saber Sabio)

Figura 7

Enunciado del principio fundamental de cuenta, diagrama de árbol en el texto fuente

Si una cosa puede realizarse en n_1 maneras diferentes y después de esto una segunda cosa puede realizarse en n_2 maneras diferentes, . . . , y finalmente una k -ésima cosa puede realizarse en n_k maneras diferentes, entonces todas las k cosas pueden realizarse en el orden especificado en $n_1 n_2 \dots n_k$ maneras diferentes.

Nota. Tomado de *Probabilidad y Estadística* (p.9), por Spiegel, M. R. (1975).

El enunciado del principio de multiplicación en el texto fuente se presenta desde la realización de tareas o cosas en diferentes etapas.

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 8

Enunciado de la temática de árbol, principio de multiplicación en el libro de texto escolar

Si hay n_1 opciones para elegir un objeto, n_2 opciones para elegir un segundo objeto, n_3 para elegir un tercero, etc., y para elegir un enésimo objeto hay n_n opciones, el número total de maneras de elegir los distintos objetos es el producto: $n_1 \cdot n_1 \cdot n_1 \cdot \dots \cdot n_n$.

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 194), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

En el enunciado del principio el libro de texto escolar incurre en un error tipográfico, al indicar los tres primeros factores como iguales, lo cual no necesariamente es cierto. En general, $n_1 \neq n_2 \neq n_3 \neq \dots \neq n_n \neq n_1$.

Saber Sabio

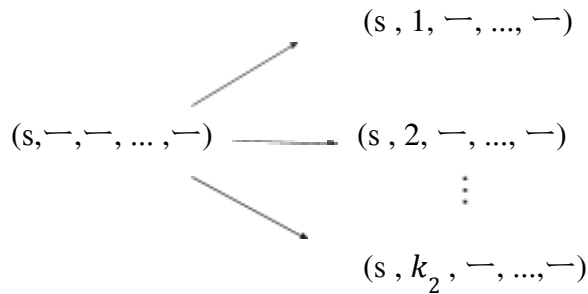
El principio del producto se extiende a r -uplas en general, correspondiendo al cardinal del producto cartesiano de E_i conjuntos no vacíos cada uno con k_i elementos para

$i = 1, 2, \dots, r$. Se argumenta el principio mediante el análisis de una ley de formación de las r -uplas de donde la primer componente puede ser llenada de k_1 maneras, la segunda de k_2 opciones pues E_2 tiene k_2 elementos una vez ha sido fijada la primera componente para algún i . La primer fase se justifica a partir de la siguiente sucesión de r -uplas, de donde las $(r - 1)$ opciones restantes son arbitrarias dentro del conjunto de los números naturales. De la siguiente manera:

$$(1, -, -, \dots, -), (2, -, -, \dots, -), \dots, (k_1, -, -, \dots, -)$$

En la segunda fase, se puede visualizar para un valor fijo s en la primera componente el

siguiente esquema.



Este esquema corresponde a una opción para la primer posición de entre los k_1 valores, es decir, hay $1 \cdot k_2 = k_2$ r -uplas al variar los valores de la segunda posición.

Reiterando este argumento se obtiene la denominada regla del producto

$$\overline{E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r} = k_1 k_2 \dots k_r$$

De donde

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r \equiv lN_{k_1} \times lN_{k_2} \times \dots \times lN_{k_r}$$

$$lN_{k_1} \times lN_{k_2} \times \dots \times lN_{k_r} = \{(n_1, n_2, \dots, n_r) : 1 \leq n_i \leq k_i ; n_i, k_i \in lN ; (i = 1, 2, \dots, r)\}$$

(Álvarez, 1990, p.1-4)

La justificación de esta técnica de conteo considera r -uplas ordenadas formadas a partir del producto cartesiano entre una sucesión finita de conjuntos, cada uno con valores naturales en sus elementos.

Transposición Didáctica

La estructura de la presentación del libro de texto escolar es similar a la del texto fuente. El cambio se percibe al sustituir la acción de realizar una cosa por la de elegir un objeto.

En cuanto a la desincretización, el libro de texto escolar, a diferencia de lo expuesto en

el saber matemático, presenta el enunciado del principio del producto sin referirse al cardinal del producto cartesiano de n conjuntos dentro de los naturales.

En relación a la despersonalización del saber, se percibe que el contenido es presentado de manera objetiva, en el sentido de que no hay apreciaciones propias de ninguna persona o de algún colectivo. Tampoco se evidencian elementos o problemas históricos que permitieron el desarrollo de los contenidos a través del tiempo, con el fin de concientizar que las matemáticas siguen en construcción y que no son un producto acabado e irrefutable.

En cuanto a la programabilidad del saber, se introduce la técnica de diagrama de árbol como una continuación coherente a la temática “Experimento y sucesos aleatorios” presentada en el libro del estudiante de grado 7° de esta misma colección, al referirse a listas de resultados de un experimento. Por tanto, el diagrama de árbol en este caso es un preámbulo para abordar el conteo de los elementos al visualizarse los resultados en sus últimas ramas.

Este principio se aplica en el libro de texto escolar para determinar el número de combinaciones en que puede suceder un experimento con n pasos, para lo cual se indica la frecuencia de los elementos de cada tipo de objeto o colección según sea la fase con su respectivo subíndice. Aunque, no se aclara la interpretación de los subíndices dentro del principio, el número de opciones no depende del orden en que se realice el experimento, debido a que el producto de números naturales es conmutativo.

9.2. Variaciones

9.2.1. Variaciones Con Repetición

Texto Fuente (Saber Sabio)

El texto fuente no considera en sus contenidos las variaciones con repetición, lo cual no permite contrastar con exactitud lo presentado por el libro texto escolar, debido a que no se explicitan otras fuentes de consulta para esta temática.

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 9

Enunciado de la temática de variaciones con repetición en el libro de texto escolar

Se llaman **variaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n , a los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, tal que:

- En cada grupo haya n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si se diferencian en algún elemento o en el orden de colocación de los mismos.

El número de todas las variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $VR_{m,n}$ o VR_m^n .

$$VR_{m,n} = \underbrace{m \cdot m \cdot m \cdot \dots \cdot m}_{n \text{ factores}} = m^n$$

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 197), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

El enunciado del libro de texto escolar de variaciones con repetición considera la formación de grupos con sus respectivas condiciones de relevancia en el orden y de la posible repetición de elementos.

Saber Sabio

A continuación, se amplía su interpretación a partir del problema típico asociado a esta operación.

En cuanto a las variaciones con repetición, se denota como el problema típico 1, en el cual acude al igual que en el principio de multiplicación al producto cartesiano entre r conjuntos no vacíos tal que $E_1 = E_2 = \dots = E_r = E$ de donde E contiene n elementos, identificando así a LN_n con cualquier conjunto de n elementos. Bajo estas restricciones, el producto cartesiano se interpreta dependiendo de la versión del problema como el conjunto de extracciones de r bolas con sustitución de una urna con n bolas, la repartición con repetición de r objetos distinguibles entre n receptores distintos, o como una r -upla ordenada a partir de n elementos arbitrarios. De este modo, define las variaciones con repetición como el cardinal del siguiente producto cartesiano.

Así, $p'(n, r) = \overline{LN_n^r} = n^r$; con

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_r \equiv E^r \equiv LN_n^r = \{(n_1, n_2, \dots, n_r) : 1 \leq n_i \leq n; n_i, n \in LN; (i = 1, 2, \dots, r)\}$$

Esta fórmula se justifica a partir de un argumento inductivo acudiendo particularmente y por razones prácticas a argumentos combinatorios para el conteo de muestras ordenadas con sustitución construyéndose $\wp'(n, r)$ a partir de $\wp'(n, 1)$ expresando esta ley de formación como:

$$\wp'(n, k) = \wp'(n, k-1) \times \wp'(n, 1) ; 1 < k \leq r$$

$$\overline{\wp'(n, k)} = p'(n, k) = p'(n, k-1) \cdot n$$

Respecto a la equivalencia de las versiones, las reparticiones de r objetos distintos en n urnas se traduce a la versión de la selección de muestras, interpretando la escogencia de las urnas para cada uno de los r objetos como la selección de r urnas entre n urnas. La equivalencia con la versión conjuntista queda determinada por la definición del producto cartesiano de n elementos, los cuales resultan como homólogos a las n bolas contenidas en una urna según la

versión de muestras. (Álvarez, 1990, p. 12-13)

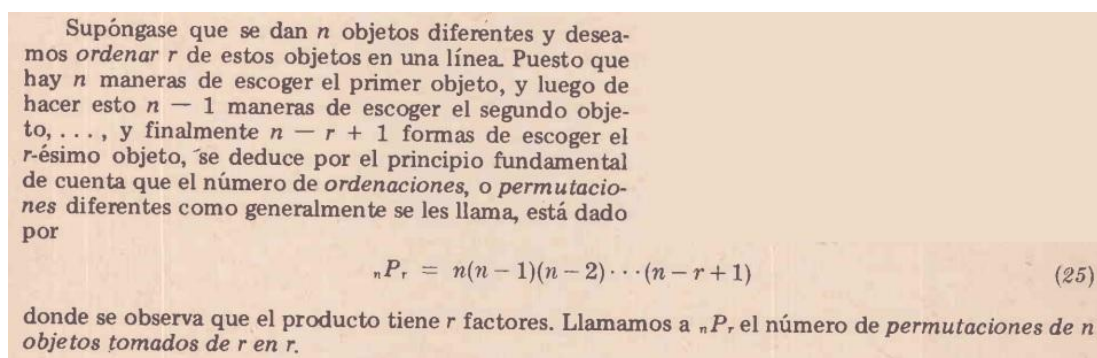
La versión adoptada por el libro de texto escolar es la versión de muestreo, al mencionar que la operación corresponde al número de formas de seleccionar m elementos tomados de n en n para la formación de distintos grupos.

9.2.2 Variaciones sin Repetición

Texto Fuente (Saber Sabio)

Figura 10

Enunciado de la temática de variaciones sin repetición en el texto fuente



Nota. Tomado de *Probabilidad y Estadística* (p.10), por Spiegel, M (1975).

En el enunciado del texto fuente, se abordan las variaciones sin repetición bajo el nombre de permutaciones desde un ordenamiento lineal de r elementos a partir de un total de n elementos, acudiendo a argumentos de tipo combinatorio para la justificación de la fórmula la cual es expresada en sus dos formas equivalentes. A continuación se muestra la forma factorial equivalente.

Figura 11

Forma factorial equivalente de la operación combinatoria en el texto fuente.

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Nota. Tomado de *Probabilidad y estadística* (p.10), por Spiegel, M. R. (1975).

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 12

Enunciado de la temática de variaciones sin repetición en el texto escolar.

Se llaman **variaciones ordinarias** o **variaciones sin repetición** de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$), a los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos distintos.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento o en el orden de colocación.

El número de todas las variaciones ordinarias de m elementos tomados de n en n se denota por $V_{m,n}$ o V_m^n .

$$V_{m,n} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}_{n \text{ factores decrecientes consecutivos}} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 8.pdf* (p. 196), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

El enunciado de las variaciones sin repetición está presentado desde la interpretación de formación de grupos. Posterior a la descripción de la operación combinatoria, se especifica la fórmula en términos del producto de n factores además de su forma factorial.

Saber Sabio

Para el problema típico 2 se establece una interpretación análoga que la establecida en el problema típico 1 desde el tratamiento de cada una de sus versiones equivalentes. Los cambios están en las restricciones en cuanto a la forma de realizar las extracciones, las reparticiones y las condiciones para las componentes de la r -upla. Además, presenta un argumento de tipo combinatorio en la interpretación del muestreo a partir de la estipulación de una muestra ordenada sin sustitución de n elementos en una urna, al referir, que la primera extracción se puede hacer de n formas, la segunda de $(n - 1)$ formas, la tercera de $(n - 2)$ y así sucesivamente hasta la r -ésima extracción con $(n - r + 1)$ formas. Por el principio de

la multiplicación se obtiene que el número de maneras diferentes de extraer las primeras r bolas se expresa como:

$$p(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \cdots (n - r + 1)$$

También indica la ley de formación desde el caso del producto cartesiano de varios conjuntos a partir de un argumento inductivo, el cual permite generar para cada $(k - 1)$ upla del $\wp(n, k - 1)$ conjunto tantas k uplas de $\wp(n, k)$ como números diferentes que se puedan encontrar en las componentes de la $(k - 1)$ -upla, este número corresponde a $(n - k + 1)$, es decir, se anexa un elemento k a la $(k - 1)$ -upla diferente a los $(k - 1)$ elementos previamente fijados. Para fines prácticos ilustra el esquema de formación con dos arreglos matriciales mostrando el paso de $\wp(n, 2)$ a $\wp(n, 3)$

Para k arbitrario $1 \leq k \leq r \leq n$; $i = 1, 2, \dots, k - 1$

$$\wp(n, k) = \{(n_1, \dots, n_k) | (n_1, \dots, n_{k-1}) \in \wp(n, k - 1), 1 \leq n_k \leq n, n_k \neq n_i\}$$

$$p(n, k) = \overline{\wp(n, k)} = \overline{\wp(n, k - 1)} \cdot (n - k + 1) = p(n, k - 1) \cdot (n - k + 1)$$

Las equivalencias entre el muestreo y la repartición se logra percibir al traducir la repartición sin repetición de r elementos entre n urnas como un mecanismo de selección de urnas, de modo que a lo sumo cada urna tenga un objeto, es decir, el problema se puede interpretar como la selección sin sustitución de k urnas de un total de n urnas. (Álvarez, 1990, p.15-17)

La versión adoptada por el texto escolar es la versión de muestreo, al mencionar que la operación corresponde al número de formas de seleccionar m elementos tomados de n en n para la formación de distintos grupos.

Transposición Didáctica

En relación a la transposición didáctica de la temática de variaciones, se logra percibir para las variaciones sin repetición que la presentación del enunciado cambia del texto fuente

al texto escolar, al manifestarse explícitamente en este último las condiciones que debe cumplir el problema para aplicarse la operación. Además, en este se utiliza el término de variaciones sin repetición en vez de permutaciones como en el texto fuente, se usa una nueva notación y se resalta los n factores decrecientes consecutivos en la operación.

En cuanto a la desincretización, la presentación del texto escolar se reduce a la versión de muestreo de acuerdo a los problemas típicos al no considerar el problema bajo la interpretación de repartición o desde el cardinal del producto cartesiano respectivo.

Respecto a la despersonalización, se evidencia una inclinación por acuñar otros términos o notaciones en la presentación que el libro de texto escolar utiliza para las variaciones.

Referente a la programabilidad del saber puede inferirse que esta temática de variaciones se establece luego de la presentación del principio de multiplicación pues de su aplicación resultan estas operaciones, por lo que se hace necesario aclarar previamente su funcionamiento.

Adicionalmente, en el tema de variaciones sin repetición el enunciado de la operación combinatoria para el grado 8° no incluye la definición del factorial de un número previo al enunciado o durante el mismo, quedando el simbolismo matemático expresado a través de la fórmula sin ningún sentido aplicativo. No obstante, en el del grado 9° si se especifica su definición previo a su desarrollo en el contenido de permutaciones sin repetición.

9.3. Combinaciones

9.3.1. Combinaciones sin Repetición

Texto fuente (saber sabio)

Figura 13

Enunciado de la temática de combinaciones sin repetición en el texto fuente

El número total de combinaciones de r objetos seleccionados de n (también llamadas las combinaciones de n cosas tomadas de r en r) se denota por ${}_nC_r$ ó $\binom{n}{r}$. Tenemos (véase Problema 1.36)

$$\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (29)$$

que también puede escribirse como

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!} \quad (30)$$

Nota. Tomado de *Probabilidad y Estadística* (p.11), por Spiegel, M. R. (1975).

El texto fuente da una introducción a las combinaciones haciendo un contraste con lo que son las permutaciones sin repetición de 3 elementos, destacando que las combinaciones de n elementos tomados de r en r a diferencia de las permutaciones corresponden a distribuciones de objetos en los que no es relevante considerar el orden.

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 14

Enunciado de la temática combinaciones sin repetición en el libro de texto escolar

Las combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n ($n \leq m$) son los distintos grupos que pueden formarse con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos diferentes.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento pero no en el orden de colocación.

El número de combinaciones sin repetición de m elementos tomados de n en n se representa por $C_{m,n}$ y es igual a:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! n!}$$

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 9.pdf* (p. 126), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

El enunciado del libro de texto escolar para las combinaciones sin repetición considera la formación de grupos con las condiciones de que el orden no sea relevante y que los elementos sean distinguibles.

Saber Sabio

En el problema típico 3 se presentan las combinaciones sin repetición a partir del conjunto de r -uplas no ordenadas de lN_n . Al respecto, define los siguientes conjuntos equivalentes

$$C(n, r) = \{\{n_1, n_2, \dots, n_r\} | 1 \leq n_i \leq n, n_i \neq n_j; i = 1, 2, \dots, r\}$$

$$C(n, r) = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n) | \bar{S} = r\}$$

Bajo las tres versiones, estos conjuntos representan a las muestras no ordenadas de tamaño r sin sustitución de un total de n elementos, a las reparticiones de r bolas no distinguibles entre n urnas de modo que cada urna contenga como máximo una bola y desde la parte conjuntista hacen referencia a los posibles subconjuntos de tamaño r de los n primeros números naturales. La versión conjuntista es evidente al corresponder los elementos del conjunto anterior a elementos del conjunto de partes de lN_n con la restricción de que el cardinal del conjunto sea r , es decir, los posibles subconjuntos de r elementos.

La equivalencia entre las versiones de muestreo y de repartición se justifica, al concebir la repartición de las r bolas iguales entre las n urnas receptoras como un mecanismo de selección de r urnas. Este mecanismo de selección es equivalente a extraer r bolas sin sustitución de una urna que contiene n de ellas sin que el orden de extracción sea relevante.

Para el calcular la cantidad de elementos $c(n, r)$ del conjunto $C(n, r)$ se utiliza un argumento de tipo combinatorio el cual consiste en establecer una correspondencia uno a uno entre las muestras no ordenadas y muestras ordenadas. En este sentido, cada muestra no

ordenada $\{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ genera $r!$ muestras no ordenadas sin sustitución de los mismos elementos. Luego, por proporcionalidad se debe de cumplirse la siguiente relación entre $p(n, r)$ y $c(n, r)$

$$c(n, r) = \frac{p(n, r)}{p(r, r)} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Para la construcción del conjunto se sigue un método inductivo partiendo desde muestras de orden 1 hasta muestras de orden 3 a partir de n elementos el cual puede ser extendido en general a muestras de orden r . El conjunto de muestras de orden r se construye al fijar las muestras de orden $(r - 1)$ y añadir un último elemento diferente a los restantes a cada una de estas muestras. (Álvarez, 1990, p.21-25)

El libro de texto escolar adopta implícitamente en el enunciado de la operación combinatoria la versión conjuntista del problema típico, al destacar la formación de grupos de tamaño n a partir de m elementos.

Transposición Didáctica

En cuanto a la desincretización, la operación se independiza de su relación con las variaciones sin repetición y las permutaciones sin repetición, al no destacarse en el libro de texto escolar la equivalencia de las combinaciones con el cociente entre estas dos operaciones a diferencia del texto fuente. Además, para su presentación el libro de texto escolar solo tiene en cuenta en el enunciado la versión conjuntista del problema combinatorio, sin aludir a las otras dos versiones.

La descontextualización de la operación es evidente al estar la operación expresada en su generalidad para elementos cualesquiera n, m enteros con $n \leq m$. Adicionalmente, la versión de problema típico se reduce a la interpretación conjuntista.

La despersonalización se percibe nuevamente en el texto escolar por la notación que adecua para la operación combinatoria. Además, en el libro de texto escolar no se denota la operación como equivalente a los coeficientes binomiales o números combinatorios, lo cual tiene conexiones directas con el álgebra en la expansión de binomios elevados a un exponente entero finito, mayor o igual a cero.

Por el lado de la programabilidad del saber, hay preferencia en presentar primeramente las variaciones con y sin repetición para luego presentar las combinaciones al igual que en el texto fuente. Al igual que en las variaciones hay dos condiciones explícitas en el enunciado relacionadas al orden y a la no repetición de los elementos.

Respecto al tratamiento previo al enunciado, el texto fuente en su exposición hace una distinción entre variaciones y combinaciones sin repetición, al indicar que las combinaciones abc y bca corresponden a la misma combinación. Este tipo de ejemplificaciones a partir de caracteres particulares no es tenido en cuenta en el libro de texto escolar.

9.3.2. Combinaciones con Repetición

Texto Fuente (Saber Sabio)

En el texto fuente no se presentan las combinaciones con repetición. Al respecto, no hay una referencia para destacar diferencias en la presentación al ser esta la única fuente referenciada asociada a la combinatoria.

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 15

Enunciado de la temática de combinaciones con repetición en el libro de texto escolar

Combinaciones con repetición de m elementos tomados de n en n son los distintos grupos que se pueden formar con los m elementos, de manera que:

- En cada grupo haya n elementos repetidos o no.
- Dos grupos son distintos si difieren en algún elemento, pero no en el orden de colocación.

El número de **combinaciones con repetición** de m elementos tomados de n en n se representa por $CR_{m,n}$ o $C'_{m,n}$ y se calcula mediante la expresión:

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = C_{m+n-1,n}$$

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 9.pdf* (p. 126), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

El enunciado del libro de texto escolar para las combinaciones con repetición considera la formación de grupos con las condiciones de que el orden no sea relevante y que los elementos sean indistinguibles.

Saber Sabio

En el problema típico 4, se presenta las combinaciones con repetición a partir del conjunto de r -uplas no ordenadas con repetición de IN_n

$$C'(n, r) = \{\{n_1, n_2, \dots, n_r\} | 1 \leq n_i \leq n; i = 1, 2, \dots, r\}$$

Desde las tres versiones, este conjunto representa a las muestras no ordenadas de tamaño r con sustitución de un total de n elementos, a las reparticiones de r bolas iguales en n urnas sin restricción alguna sobre de repartición y desde la parte conjuntista hacen referencia a los posibles multiconjuntos de tamaño r de los n primeros números naturales. La estrategia

utilizada para demostrar la equivalencia de las tres versiones, es la misma que la usada en los problemas típicos previamente mencionados.

La versión conjuntista del problema puede traducirse a la versión de repartición de r bolas iguales en n urnas. En este sentido, resalta la solución propuesta por William Feller apoyando su justificación con la segunda versión. La representación del problema es traducida a un modelo de $(n + 1)$ barras y r estrellas las cuales se distribuyen aleatoriamente entre las n urnas representadas como los espacios comprendidos entre las $(n + 1)$ barras. Sea k_i la cantidad de objetos asignados a la urna i para $i = 1, 2, \dots, n$; tal que $k_1 + k_2 + \dots + k_n = r$. A continuación se ilustra la representación esquemática del modelo.

$$\begin{array}{ccccccc} & k_1 & & k_2 & & & k_n \\ | & & | & & | & \cdot & | \\ * & \dots & * & * & \dots & * & * \end{array}$$

El argumento clave es considerar las $(n - 1)$ barras a excepción de la primera y la última junto a las r estrellas como objetos arbitrarios. Por tanto, el número de reparticiones distinguibles corresponde a las formas de seleccionar r lugares entre $(n + r - 1)$ lugares totales, concluyendo así.

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} \quad (\text{Álvarez, 1990, p. 31-32})$$

La presentación del enunciado en el libro de texto escolar para esta operación combinatoria corresponde a la versión del problema típico de muestreo.

Transposición didáctica

En cuanto a la desincretización, no se considera en la presentación del enunciado del libro de texto escolar, las versiones de repartición y conjuntista para la interpretación de la operación de combinaciones con repetición. La descontextualización de la operación es evidente al estar la operación expresada en su generalidad para elementos cualesquiera n, m

naturales con $n \leq (m + n - 1)$.

Respecto a la programabilidad del saber, el libro de texto escolar presenta este tipo de combinaciones antes que las combinaciones sin repetición. Lo cual es coherente, puesto que las combinaciones con repetición se definen en términos de un número combinatorio.

En relación al tratamiento de la operación en el libro de texto escolar, la fórmula combinatoria carece de justificación quedándose en la mecanización de un algoritmo. Por tal razón, no es suficiente con transcribir la operación. En este sentido, es necesario que para el tratamiento de esta operación se adopten herramientas heurísticas para su enseñanza.

Por tanto, resultaría innovador hacer una adecuación didáctica al modelo de estrellas y urnas en casos concretos, cuestionando la repartición de los objetos entre una cantidad fija de receptores de modo que se reconstruya desde este tipo de estrategias la operación.

Finalmente, es importante que se proporcionen ejemplos en este tipo de temáticas para aclarar y consolidar el conocimiento relacionándolo con un contexto.

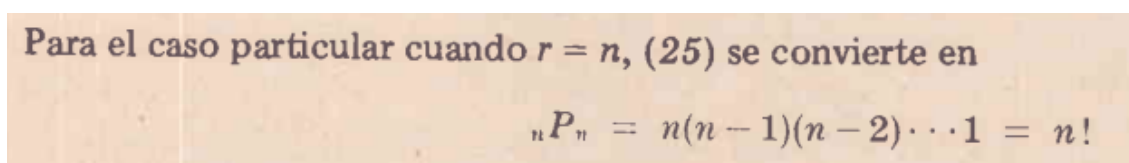
9.4. Permutaciones

9.4.1. Permutaciones sin Repetición

Texto Fuente (Saber Sabio)

Figura 16

Enunciado de la temática de permutaciones sin repetición en el texto fuente.



Nota. Tomado de *Probabilidad y Estadística* (p.10), por Spiegel, M. R. (1975).

El texto fuente aborda las permutaciones sin repetición como un caso particular de permutaciones de n elementos tomados de r en r cuando ambos parámetros coinciden.

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 17

Enunciado de la temática de permutaciones sin repetición en el texto escolar

El número de **permutaciones sin repetición** de n elementos se representa por P_n y es igual a $P_n = n(n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

El número $n(n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ se llama **factorial de n** y se simboliza por $n!$, siendo n un número natural.

Los factoriales de 0 y de 1 se definen así: $0! = 1! = 1$.

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 9.pdf* (p. 124), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

El libro de texto escolar en el enunciado de la operación introduce inicialmente la fórmula y luego el factorial del número n , como una operación equivalente a las permutaciones sin repetición del total de elementos, además, define 0 y 1 factorial. Por tanto, la presentación descontextualizada de las permutaciones sin repetición como equivalente a la definición del factorial de un número, tiene pocas implicaciones en términos de las operaciones combinatorias al carecer de la interpretación de ordenamiento. En este sentido, la operación prioriza lo algebraico, en vez de su aplicación a un problema, desde la versión de muestreo, repartición o conjuntista.

Saber Sabio

Análogamente, las permutaciones como un caso particular del problema típico 2 para el que da una interpretación de ordenamientos de n objetos. Para ello, toma $n = r$.

$$p(n, r) = p(n, n) = n!$$

Al respecto, da un ejemplo para el cálculo del número de maneras diferentes como pueden ordenarse 5 libros distinguibles. (Álvarez, 1990, p. 18)

Transposición Didáctica

En cuanto a la desincretización, no hay una conexión explícita entre esta temática con la de variaciones sin repetición. Pareciera que ambos contenidos no estuviesen relacionados entre sí cuando bien se sabe que las permutaciones sin repetición se deducen de las variaciones sin repetición. En el libro de texto escolar, no hay una interpretación del enunciado que se pueda asociar a alguna de las versiones del problema típico.

En relación a la despersonalización, se evidencia una preferencia por utilizar una notación en el libro de texto escolar diferente a la del texto fuente. Adicionalmente, el texto fuente se refiere al resultado de la operación como las permutaciones de n elementos tomados de n en n mientras que el texto escolar lo expresa como permutaciones sin repetición de n elementos. La interpretación adoptada por el texto escolar es la misma que la del texto fuente, la cual corresponde a las ordenaciones en las que intervienen a la vez todos los elementos y solo varía el orden de la colocación de los mismos.

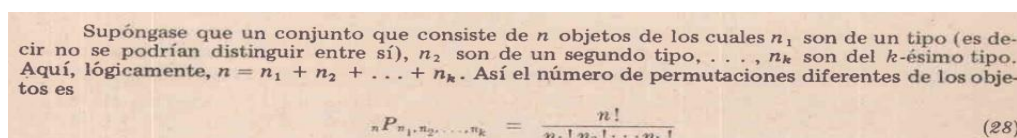
En lo que se refiere a la programabilidad del saber, la ubicación de las permutaciones sin repetición está antes de variaciones sin repetición. Por tanto, el texto escolar parte desde la operación más específica y termina en lo general contrario a lo que se presenta el texto fuente y en general la teoría.

9.4.2. Permutaciones con Repetición

Texto Fuente (Saber Sabio)

Figura 18

Enunciado de la temática de permutaciones con repetición en el texto fuente



Supóngase que un conjunto que consiste de n objetos de los cuales n_1 son de un tipo (es decir no se podrían distinguir entre sí), n_2 son de un segundo tipo, . . . , n_k son del k -ésimo tipo. Aquí, lógicamente, $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$. Así el número de permutaciones diferentes de los objetos es

$${}_nP_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (28)$$

Nota. Tomado de *Probabilidad y Estadística* (p.10), por Spiegel, M. R. (1975).

Libro de Texto Escolar (Saber a Enseñar)

Figura 19

Enunciado de la temática de permutaciones con repetición en el texto escolar

Permutaciones con repetición de n elementos, donde el primer elemento se repite n_1 veces; el segundo, n_2 veces; ... , el último, n_k veces (donde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), son los distintos grupos que se pueden formar, de manera que:

- En cada grupo de n elementos, el primer elemento está n_1 veces; el segundo, n_2 veces, y así sucesivamente.
- Un grupo se diferencia de otro únicamente por el orden de colocación de sus elementos.

El número de **permutaciones con repetición** de n elementos, donde el primer elemento se repite n_1 veces; el segundo, n_2 ..., y el último, n_k veces, se representa por $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$. Su valor es:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Nota. Tomada de la edición digital *Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 9.pdf* (p. 124), elaborada por Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., Malagón Montaña, J. (Eds.), 2017.

La presentación del texto escolar es idéntica a la del texto fuente. En ambas presentaciones se tiene en cuenta k clases de objetos, de las cuales por lo menos una contiene repetidamente objetos de dicha clase. Por tanto, el objeto i en la conformación de cada grupo ordenado de tamaño n se encuentra dispuesto n_i veces respectivamente para $i = 1, 2, \dots, n$.

Saber Sabio

El problema típico 5, presenta las permutaciones con repetición desde la versión conjuntista partiendo de una n -partición $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ ordenada de un conjunto E con r elementos, de donde cada subconjunto de la partición tiene una determinada cantidad de elementos. Dicha partición puede contener el conjunto vacío varias veces a diferencia de las particiones no ordenadas cuya frecuencia de aparición es como máximo una. Esta versión del problema es equivalente a la de repartición, al interpretarse cada elemento de la partición

como el conjunto de urnas receptoras y a sus respectivos elementos como las bolas distinguibles repartidas en cada urna. Para la equivalencia entre la versión de muestreo y repartición se examina el siguiente conjunto.

$$\wp'(n, r; r_1, r_2, \dots, r_n) = \{(n_1, n_2, \dots, n_r) \in \wp'(n, r) | r_k \text{ de las } n_i \text{ son iguales a } k; (k = 1, 2, \dots, n)\}$$

con la restricción de que $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$

El cual, se puede utilizar para describir el conjunto de muestras con los números de repetición $r_1, r_2, \dots, r_n$ para los elementos $1, 2, 3, \dots, n$; así como para describir el conjunto de formas de repartir r objetos diferentes entre n receptores con la condición de que a los receptores $1, 2, 3, \dots, n$ le correspondan $r_1, r_2, \dots, r_n$ objetos respectivamente.

El cardinal de este conjunto dependiendo de la versión considerada permite contar las particiones ordenadas, las muestras ordenadas o la cantidad de reparticiones de objetos diferentes con números de ocupación. Para el cálculo del cardinal se utiliza un argumento combinatorio inductivo desde la versión de repartición. Por tanto, la formas como se pueden colocar r_1 bolas en la primera urna con r dadas, está determinada por el número

combinatorio $\binom{r}{r_1}$. Seguidamente dada esta asignación, las formas de colocar r_2 bolas en la

segunda urna con las demás bolas corresponde al número $\binom{r-r_1}{r_2}$, por lo que conjuntamente

las formas de colocar $r_1 + r_2$ bolas está dada por $\binom{r}{r_1} \binom{r-r_1}{r_2}$.

Reiterando esta argumento para las $(n - 2)$ urnas restantes, se obtiene que el número de maneras diferentes como se pueden repartir r bolas distinguibles en n urnas con números de ocupación $r_1, r_2, \dots, r_n$ está dado por la siguiente expresión:

$$\overline{\wp'(n, r; r_1, r_2, \dots, r_n)} = p'(n, r; r_1, r_2, \dots, r_n) = \binom{r}{r_1} \binom{r-r_1}{r_2} \binom{r-r_1-r_2}{r_3} \dots \binom{r-r_1-\dots-r_{n-1}}{r_n}$$

$$= \binom{r}{r_1, r_2, \dots, r_n} = \frac{r!}{(r_1!)(r_2!)\dots(r_n!)}$$

Partiendo de la versión de muestreo, desde su aplicación resulta otra versión equivalente de este problema típico. Las muestras ordenadas de la primera versión, se pueden considerar como la formación de muestras ordenadas de subconjuntos de elementos repetidos de orden r a partir de n elementos. Por tanto, este problema es equivalente a describir y calcular el número de ordenamientos lineales de r elementos clasificados en n grupos de los cuales

cada uno respectivamente cuenta con $r_1, r_2, \dots, r_n$ objetos iguales tales que $\sum_{i=1}^n r_i = r$.

(Álvarez, 1990, p.35-39)

El libro de texto escolar aborda las permutaciones con repetición bajo la interpretación de esta última versión que es concebida como una aplicación del problema típico 5, pues considera la operación como el conteo de los distintos grupos que se pueden formar linealmente a partir de unas clases de repetición, bajo la restricción de la importancia del orden en los elementos repetidos, los cuales son indistinguibles al interior de cada grupo de clasificación.

Transposición Didáctica

En cuanto a la despersonalización, la notación para expresar la operación combinatoria en el texto escolar es diferente a la adoptada por el texto fuente.

La desincretización se hace evidente al separar las ordenaciones lineales sin repetición de las ordenaciones lineales con repetición. Este último tipo de ordenación es una generalización de las permutaciones lineales sin repetición, al resultar su fórmula

combinatoria cuando $n_1 = n_2 = \dots = n_k = 1$. El libro de texto escolar aborda las

permutaciones con repetición bajo una interpretación adicional del problema típico 5.

La descontextualización se logra percibir en la forma en como es presentado el enunciado, el cual no está determinado por un contexto específico al estar el modelo que plantea la fórmula combinatoria expresado en términos de la organización de elementos, los cuales estarán determinados dependiendo el contexto de aplicación.

La programabilidad del saber, se visualiza al dejar explícito el libro de texto escolar en el enunciado de la operación combinatoria las condiciones que caracterizan la naturaleza del problema combinatorio, destacando la repetición de los elementos y de lo que diferencia un grupo de otro dejando como implícita la relevancia del orden. Además, primero se presentan las permutaciones ordinarias y después las permutaciones con repetición, partiendo así desde lo particular a lo general.

10. Elementos Potentes y Aspectos por Mejorar en los Libros de Texto Escolar

La descripción previa de los textos desde el MVTEM y la transposición didáctica nos brindan una información completa de cómo son abordadas las operaciones combinatorias en los textos escolares de grado 8° y 9°. A continuación, se destaca desde lo presentado en los libros de texto una serie de elementos potentes y aspectos por mejorar, entendiendo por elementos potentes todos aquellos tratamientos que se dan en los libros de texto a favor de la pertinencia en el proceso de transposición didáctica y como aspectos por mejorar aquellos que no.

Tabla 7

Elementos potentes y aspectos por mejorar en los libros de texto escolar de 8° y 9°

Elementos potentes	Aspectos por mejorar
Cada uno de los enunciados de las operaciones combinatorias elementales son presentados	Los enunciados presentados en los textos escolares son similares en su mayoría a los del

	texto fuente, por lo que se podría matizar su presentación en el sentido de ahondar en otras interpretaciones.
En los enunciados se explicitan las condiciones en relación a los parámetros para la aplicación de las operaciones, al indicar si importa o no el orden y si hay repetición o no de los elementos de estudio	Proponer ejemplos en los que se apliquen las fórmulas combinatorias para casos particulares
En la presentación se consideran las temáticas de principio de multiplicación y de diagrama de árbol	Proponer otras alternativas adicionales al diagrama de árbol como recurso del principio general del recuento Corregir error tipográfico en el enunciado del principio para indexación de los n factores en el grado 8° Corregir error tipográfico en los resultados de aplicación del diagrama de árbol en un planteamiento introductorio para el grado 9° Proponer el principio de la suma
La presentación de ejercicios resueltos como apertura a las temáticas al relacionar los saberes previos con lo que se desea desarrollar. Estos ejercicios se caracterizan por poder ser abordados desde un tratamiento intuitivo y no solamente desde la aplicación de fórmulas	Proponer por lo menos un ejercicio resuelto para las variaciones con repetición en ambos grados. De igual manera para las permutaciones con repetición y combinaciones (sin y con repetición)
La exposición de la estrategia de descomponer el problema en partes como una alternativa para la resolución de problemas	Proponer otras estrategias para resolver problemas (tanteo, enumeración sistemática, ilustración de un esquema, etc) y no acude a representaciones equivalentes a estos
Los ejemplos y ejercicios se abordan desde el contexto de las matemáticas mismas y de la vida diaria	Proponer por lo menos un ejemplo y ejercicio desarrollado desde el contexto de otras disciplinas Los ejemplos y ejercicios son similares en su estructura. Por tanto, la dinámica de resolución para muchos casos se puede repetir y volver mecánica, sería pertinente una diferencia significativa de un planteamiento a otro
Las actividades están divididas por temáticas	Las actividades para las temáticas de variaciones del grado 8° y de permutaciones para el grado 9° , evalúan la temática de permutaciones circulares

	sin haberlas presentado.
Los ejemplos desarrollados no tienen como objetivo central la aplicación de fórmulas	Asumir en el ejemplo de permutaciones con repetición las letras E y É de la palabra “TELÉFONO” como indistinguibles La cantidad de ejemplos es muy reducida; 3 para el grado 8° y 2 para el grado 9°
Los contenidos están divididos por temáticas en las que se distinguen las operaciones combinatorias con repetición y sin repetición	Se repiten innecesariamente las temáticas del principio de multiplicación, diagrama árbol y variaciones en ambos grados Proponer elementos de tipo histórico
El lenguaje es sencillo y claro en lo referente a los ejemplos	Proponer ejemplos para permutaciones sin repetición, variaciones y combinaciones sin y con repetición para el de grado 9°
La presentación de los libros de texto es clara y ordenada según lo evidenciado por las diversas anotaciones de la ruta didáctica propuesta	Proponer una síntesis que recapitule a modo de ayuda todas las operaciones combinatorias
En cada enunciado de las operaciones combinatorias se evidencia una sola interpretación, bien sea, desde la versión de muestreo, conjuntista o desde la nueva interpretación del problema típico 5	Proponer en por lo menos un enunciado la versión de repartición como interpretación de la operación combinatoria.
La evaluación se presenta al concluir cada temática y al final de las unidades	Proponer ejercicios de las evaluaciones que se diferencien significativamente de los que los que hacen parte de las actividades. El ejercicio de la temática de permutaciones para grado 9° es idéntico a uno de los ejercicios de variaciones del grado 8°. La única diferencia, es que el colectivo de presidentes que acuden a una cumbre es sustituido por uno de alcaldes menores
Coherencia con los referentes curriculares nacionales	Proponer objetivos claros por cada temática que justifiquen su funcionalidad

Nota. Tabla de elaboración propia.

11. Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones, a la luz de los objetivos propuestos y la pregunta de investigación, teniendo en cuenta los resultados y análisis obtenidos en el presente trabajo.

Respecto al primer objetivo específico se puede afirmar que el estudio permitió detallar en los libros de texto escolar, desde la aplicación del MVTEM sobre diez categorías denominadas organizadores, cada uno orientado en algún aspecto, unos en relación a su estructura y otros más al contenido. En este sentido, para la unidad de combinatoria se resalta: lo que se espera del libro de texto escolar (objetivos, enfatización), los saberes y su interrelación con otros campos (contenidos, conexiones), la organización de las temáticas y su manera de abordarlas (actividades, metodología, enfatización), elementos visuales y de escritura (ilustraciones, lenguaje), recursos tecnológicos (TIC) y la valoración (evaluación). Este modelo fue clave para la descripción y el análisis de la forma en como se presentan las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar además de sus implicaciones sobre las mismas. Al respecto, los libros de texto escolar en su estructura dan parcialmente respuesta a lo propuesto por el MEN en los referentes curriculares nacionales desde la propuesta de sus orientaciones generales, pues hace falta ahondar sobre las distintas interpretaciones de los modelos combinatorios para que la presentación de los libros de texto escolar no corresponda al prototipo tradicional de exposición de contenidos, de modo que permita dar cuenta de las diversas habilidades que implican el ser matemáticamente competente y así evitar en gran medida la excesiva mecanización de las fórmulas combinatorias sin darle ninguna significación.

Respecto al segundo objetivo específico, se obtuvo desde el análisis de la transposición didáctica al comparar entre el saber escolar y el saber sabio que la interpretación de los modelos combinatorios más utilizada según la clasificación de análisis combinatorio establecida por Álvarez (1990), es la relacionada a esquemas de selección (muestreo) a diferencia de la versión de repartición (correspondencia entre elementos) y conjuntista (partición de un conjunto o la formación de subconjuntos de un conjunto dado). Además, la presentación de las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto está determinada principalmente por diferentes enunciados combinatorios y una serie de ejemplos para algunas temáticas. En este sentido, los enunciados se caracterizan por ser desde la formalidad matemática semejantes o idénticos en comparación a lo presentado a nivel universitario; saber sabio (texto fuente) al cual acudió el MEN como fuente principal de consulta para la estructuración del contenido en los libros de texto asociado a estas temáticas. Este panorama cambia un poco respecto a los ejemplos que abordan los libros de texto escolar, al notarse una adecuada adaptabilidad de estos para el ciclo escolar de 8° y 9° grado. Sin embargo, su extensión es muy reducida en algunos de los temas abordados u omitidos en el peor de los casos.

En cuanto a las estrategias y los tipos de problemas que propone los libros de texto escolar, la única estrategia que proponen para la resolución de problemas combinatorios es la de dividir el problema en partes dejando por fuera otras como el tanteo, el planteamiento de fórmulas recursivas, la fijación y la variación del número de elementos en bits o casillas, esquemas gráficos diferentes al diagrama de árbol, tablas de doble entrada, etc. Por otro lado, los problemas que circulan en los libros de texto son planteados solamente desde el contexto de las matemáticas y de la vida cotidiana. Asimismo, las interpretaciones giran en torno al muestreo y los ordenamientos lineales. Tal como se mencionó anteriormente, la versión de

repartición y conjuntista no son tenidas en cuenta en los enunciados combinatorios de las temáticas. No obstante, la repartición es considerada dentro de algunos ejemplos y ejercicios propuestos.

Respecto al tercer objetivo específico, se logró establecer una síntesis de los resultados los cuales fueron clasificados en elementos potentes y aspectos por mejorar a partir de la perspectiva del MVTEM y de la transposición didáctica. Entre los aspectos a rescatar de los libros de texto escolar, está la adecuada organización del hilo conductor de la lectura a través de una ruta didáctica. También, cuentan parcialmente con una organización coherente desde la parte curricular según lo propuesto por el MEN para este ciclo escolar. En cuanto a la planificación de las temáticas el libro de texto de grado 8° cuenta con una ejemplificación por temática, por su parte el texto escolar de 9° repite temáticas que ya han sido abordadas en 8° careciendo de ejemplificaciones las nuevas temáticas. Por tanto, entre las mejoras que pueden implementarse está el planificar las temáticas de modo que no se repitan de un grado a otro, aprovechando mejor cada espacio que ha sido destinado para las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto escolar. Entre otro aspecto, está las correcciones tipográficas que en contadas ocasiones tergiversa el aprendizaje del contenido y la rigurosidad de los enunciados propuestos. Análogamente, se podría hacer modificaciones en la forma de la evaluación que utiliza los libros de texto escolar ya que los ejercicios propuestos tienen una estructura idéntica. Además, no dan lugar a situaciones que involucren la reflexión o verdaderos desafíos para los estudiantes, por lo cual este tópico es una gran oportunidad para mejorar porque los libros de texto escolar están muy limitados en esta parte.

Por otra parte, la transposición didáctica más allá de comparar el saber sabio y el saber a enseñar, también permite ahondar en las posibles formas de evitar dificultades desde

la vigilancia epistemológica de los saberes que se desean enseñar. Entre sus posibles implicaciones alrededor de las operaciones combinatorias elementales en la enseñanza y aprendizaje está: Proponer ejemplos que se movilicen desde la intuición, sin que esto sea un obstáculo a la posterior formalización de las operaciones; posibilitar escenarios de aprendizaje que permita ahondar en el significado de los principios de la suma y multiplicación, ya que las demás operaciones dependen de su aplicación; finalmente, dar especial atención a las interpretaciones de las operaciones combinatorias, desde las diferentes versiones de los problemas típicos. Todo ello, con el fin de que la enseñanza sea diferente, en el sentido de que las operaciones no se enseñen paradójicamente como operaciones, sino como si se tratase de un experimento en el que los estudiantes logren pensar en la acción de muestrear, repartir o partir (segmentar). Lo cual, contribuiría a potenciar la imaginación durante su aprendizaje evitando en la medida de lo posible la memorización y mecanización de fórmulas sin ningún sentido práctico.

Para docentes que potencialmente utilicen los libros de texto, estos corresponden a buenos insumos para la creación de actividades. No obstante, es recomendable que se adapten nuevas situaciones de acuerdo a la realidad contextual de los estudiantes, para así sacar mayor provecho de los hallazgos del presente estudio y de la dinámica que condicione el aula.

La combinación; transposición didáctica y MVTEM proveen una sólida referencia para analizar libros de texto escolar. En especial, recomendamos por la extensión del modelo que se utilicen solo aquellas categorías que estén más aterrizadas a los diferentes objetivos de investigación que puedan surgir en este campo, y además, que su aplicación sea en relación a alguna temática y no en un libro completo por practicidad.

Este trabajo sirve como insumo para futuras ediciones de los libros de texto escolar. Entre sus proyecciones posibilita un punto de referencia para la creación de un módulo de aprendizaje en el que se incluya las distintas versiones del análisis combinatorio, que permitan concebir las operaciones combinatorias elementales desde la acción y no sólo desde la rigurosidad matemática del saber sabio al contemplarse esta temática desde su estructura de r -uplas.

De manera general, este tipo de metodologías de estudio permite establecer un control de la presentación de los contenidos en libros de texto escolar a través de la revisión, indagación y sistematización de diferentes marcos teóricos e instrumentos como la transposición didáctica y el MVTEM. Por tanto, el rol del docente es esencial en este ejercicio ya que su formación le permite identificar y decidir sobre la pertinencia de la presentación de alguna temática en los libros de texto escolar.

12. Referencias

- Álvarez, J. (1990). Análisis combinatorio. En Introducción elemental a la teoría de probabilidad (p. 1– 48).
- Beyer, W. O. (2014). Los textos escolares y el error en matemáticas. *Revista Del Programa de Matemáticas*, I(1), (p.1–25).
- Camargo, L. (2021). Principales estrategias cualitativas empleadas en educación matemática. En Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática: Recursos para la captura de información y el análisis. (1st ed., pp. 47–80).
- Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica Del Saber Sabio Al Saber Enseñado (V. Gómez (ed.); Segunda). [https://nelsonreyes.com.br/LIVRO_LA_TRANSPOSICION DIDACTICA.pdf](https://nelsonreyes.com.br/LIVRO_LA_TRANSPOSICION_DIDACTICA.pdf)
- Espinoza, J., Roa, R. (2014). La combinatoria en libros de texto de matemática de educación secundaria en España. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 277-286). Salamanca: SEIEM.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. (p.127–170).
- Gil Fuentes, L., Roldán Hernández, D., & Malagón Montaña, J. (Eds.). (2017). Vamos a aprender Matemáticas Libro del estudiante 9.

- Godino, J. D., & Batanero, C. (2016). Implicaciones de las relaciones entre Epistemología e Instrucción Matemática para el Desarrollo Curricular: el caso de la Combinatoria. *La Matematica e La Sua Didattica*, 24, (p.1–20).
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, B. (2014). Definiciones de los enfoques cuantitativo y cualitativo, sus similitudes y diferencias. In M. I. R. Martínez (Ed.), *Metodología De La Investigación* (Sexta, pp. 1–20).
<http://observatorio.epacartagena.gov.co/wp-content/uploads/2017/08/metodologia-de-la-investigacion-sexta-edicion.compressed.pdf>
- Hugo, V., Guevara, V., Adán, H., Suárez, C., & Tajonar, F. S. (n.d.). *Combinatoria : ¿Por Qué Es Tan Difícil Para Algunos ?* (p.1–7).
- Kang, W., & Kilpatrick, J. (1992). Transposición Didáctica en libros de texto de Matemáticas. *Learning of Mathematics*, 12(1), (p.2–7).
- Larrahondo, M. (2016). uso alternativo de argumentos combinatorios mediante historietas combinatorias. (p. 221–223).
- Martinez, B. J. (2006). *Pedagogía escolástica y curriculum tecnocrático*. (p.1–9).
- Martínez, I. (2013). ¿Cómo se presentan los conceptos de Análisis Combinatorio en los libros de texto escolares en Colombia?”. Universidad Pedagógica Nacional.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. (p.46–89).

MEN. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje DBA versión 2.

[http://iedar.edu.co/DBA/DBA MATEMATICAS 2 EDISION.pdf](http://iedar.edu.co/DBA/DBA%20MATEMATICAS%20EDISION.pdf).

Mendoza, M. Á. G., Piedrahita, M. V. A., & J, G. N. G. (2009). Libros de texto escolar:

imperfecciones necesarias, inherentes y contingentes. In Geoffin Ninoska Gallego

Cortez (Ed.), *Saber y evaluación de libros de texto escolar* (primera ed, pp. 19–54).

MINEDUCACIÓN. (2017). *Matemáticas 8 - Vamos a aprender.pdf*.

Ministerio de Educación de Colombia [Mineducación]. (2018, 08 de febrero). Comunicado de prensa / Rectificación [Comunicado de prensa].

<https://www.mineduacion.gov.co/portal/salaprensa/Noticias/366216:Mineduacion-entrega-gratis-8-6-millones-de-textos-escolares-en-todo-el-pais>

Monterrubio, C., & Ortega, T. (2012). Creación y aplicación de un modelo de valoración de textos escolares matemáticos en Educación Secundaria. *Revista de Educación*, (p.471– 496).

Morales, J. A., & Frisancho, S. (2013). Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial. 5, (p.130–156).

Moya, C. (2008). Aproximación al concepto y tratamiento de texto escolar. *Cuadernos de Lingüística Hispánica*, 11, (p.133–152).

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3324358>

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., & Godino, J. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria (Vol. 8, Issue 1).

Niss, M. (1997). ¿Por qué enseñamos matemáticas en la escuela? En L. Puig (Ed.), *Investigar y enseñar* (1st ed., pp. 7–16).

<http://funes.uniandes.edu.co/672/2/Puig1997Investigar.pdf>

Puche, S. M., & Romero, Á. A. (2019). Ventajas e inconvenientes del uso del libro de texto en las aulas de Educación Primaria. Percepciones y experiencias de docentes de la Región de Murcia. *Revista Electronica Interuniversitaria de Formacion Del Profesorado*, 22(2), (p.179–197).

Roa, R., Batanero, C., & Godino, J. D. (2001). Dificultad de los problemas combinatorios en estudiantes con preparación matemática avanzada. (p. 33–47).

Santos Del Cerro, J., De Paz Cobo, S. (2014). Leibniz y los múltiples “usos” de su arte combinatoria. aspectos matemáticos. en *historia de la probabilidad y la estadística* (vii) (1st ed., p. 187–208).

Santos-Trigo, M. (2008). *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. *Investigación En Educación Matemática XII*, (p.1–27).

Spiegel, M. R. (1975). *Probabilidad y Estadística*. México: Mc–Graw–Hill (p.9–11)