Vol. XVIII, N° 1, Junio (2010)
Matemáticas: 71–82

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Ruina del asegurador con criterios de confiabilidad

Gerardo Arango O.
Universidad EAFIT

César E. Escalante C.
Delima Marsh S.A.

Recibido Ene. 19, 2009 Aceptado Abr. 06, 2010

Abstract

In this paper we present the classical problem of the insurer's ruin in terms of renewal theory. Four equations for the probability of ruin of the insurer and their equivalences are deducted and an upper bound and two lower bounds are computed, under the assumption that the loss distribution belongs in one of the classes NBU, NBUE or DMRL. The results are known, but they are scattered in the referenced publications. The unified presentation of the material and the detailed explanations are innovative. The article is of interest for the actuary and the specialist in reliability, because various tools, belonging in the field of reliability, are naturally used in contexts that are different, but suggestive of ideas of interaction between these fascinating fields of knowledge.

Keywords: Ruin, bounds of reliability, class of distributions, aging

MSC(2000): 62P05

Resumen

El presente artículo presenta el problema clásico de la ruina del asegurador en términos de la teoría de renovación. Se deducen cuatro ecuaciones equivalentes para la probabilidad de ruina del asegurador y se calculan en detalle tres cotas para ésta: una cota superior y dos cotas inferiores, bajo los supuestos que la cuantía de las pérdidas individuales pertenecen a las distribuciones clase NBU, NBUE y DMRL. Los resultados son conocidos, pero se encuentran dispersos en las publicaciones referenciadas. Es novedosa la presentación unificada del material y las explicaciones detalladas. El artículo es de interés tanto para el especialista en confiabilidad como para el actuario porque se operan de manera natural varias herramientas del campo de la confiabilidad en un contexto distinto, pero sugerente de ideas de interacción entre estos dos campos fascinantes del conocimiento.[1]

Palabras y frases claves: Ruina, cotas de confiabilidad, clases de distribuciones, envejecimiento

1 Introducción

En teoría clásica de la ruina de un asegurador los reclamos se hacen de acuerdo con un proceso homogéneo de Poisson con razón λ. Las cuantías de los reclamos individuales $Y_1, Y_2, \ldots$ son variables aleatorias (v.a.) no negativas, independientes, idénticamente distribuidas e independientes del proceso de Poisson de los reclamos, con función de distribución (fd) común F y valor esperado finito $E(Y) = \mu$ (la v.a. Y representa a una cualquiera de las v.a. Y_i). El capital inicial del asegurador es x y los ingresos o primas se producen a razón constante c por unidad de tiempo.

[1] Artículo escrito dentro del proyecto 45-000031 de 2008 de la Universidad EAFIT.

Sea $M(t)$ el número de reclamos presentados en el lapso $[0,\, t]$. El proceso estocástico $\{U\,(t)\,,\ t \geq 0\}$ (con $U\,(0) = x$) que indica el capital del asegurador en el instante t es entonces $U(t) = x + ct - \sum_{i=1}^{M(t)} Y_i$. Una expectativa razonable para el asegurador es que $E\,[U\,(t)] > x$, esto es, $E\,[U(t)] = x + c\,t - E\left[\sum_{i=1}^{M(t)} Y_i\right] = x + c\,t - (\lambda t)\,\mu > x$, que es equivalente a que $\lambda\mu/c < 1$. El número $\lambda\mu/c$ se denota por ρ, se llama *carga de seguridad relativa* y es uno de los parámetros básicos del proceso ([4] y [7]).

El asegurador se arruina si en algún momento $t > 0$ las pérdidas superan los ingresos, esto es, si $\sum_{i=1}^{M(t)} Y_i > x + c\,t$. Así, la probabilidad de ruina del asegurador con capital inicial x es entonces

$$p\,(x) = \Pr\left[\sum_{i=1}^{M(t)} Y_i > x + ct \text{ para algún } t > 0\right]. \tag{1}$$

Aunque por razones históricas se denomina *el problema de la ruina del asegurador*, es evidente que el modelo también puede aplicarse a un *fondo de autoseguro*, donde los aportes equivalentes a las primas de seguro los *pagarían* los centros de costos de la empresa que tienen los riesgos cubiertos por el fondo de autoseguro.

En matemática de los riesgos se estudian también algunas variaciones del problema clásico de la ruina del asegurador, a saber: el modelo expuesto, pero en un lapso finito $[0, \tau]$ y los correspondientes modelos (con horizonte de tiempo infinito o finito) con mediciones discretas del tiempo ([4]). Por otra parte, en gestión de riesgos existen desarrollos vía simulación Monte Carlo para la estimación de la probabilidad de ruina de un asegurador (o de un fondo de autoseguro) que cubre un número determinado de riesgos, o parte de ellos, cada uno de los cuales está caracterizado por un modelo de frecuencia y uno de severidad individual, deducibles, y tienen en cuenta la inflación y los intereses.

Los objetivos del artículo son, dentro de la teoría clásica de la ruina del asegurador, presentar varias ecuaciones para la probabilidad de ruina $p\,(x)$ y obtener algunas cotas basadas en criterios de confiabilidad, específicamente cuando las cuantías de las pérdidas individuales Y_i pertenecen a las distribuciones clase NBU, NBUE y DMRL ([4], [7] y [6]). Los resultados son conocidos y se encuentran dispersos en las publicaciones referenciadas en la bibliografía. Es novedosa la presentación conjunta del material en el orden expuesto y las explicaciones detalladas, pues en las obras y artículos de referencia algunos de los resultados aparecen justificados en forma bastante breve.

El artículo es de interés para el especialista en confiabilidad en cuanto se presenta una relación entre las clases de distribuciones (clases de envejecimiento, en su argot) con un problema en principio lejano de su interés, como es el de la ruina del asegurador. De manera similar es novedoso para el actuario ver cómo se obtienen resultados de interés teórico–práctico a partir del estudio del problema de la ruina con potentes herramientas tomadas del campo de la confiabilidad.

En todo caso el artículo busca despertar el apetito de conocimiento en estos dos campos fascinantes como son la teoría de riesgos y la confiabilidad.

2 Ecuaciones para la probabilidad de ruina $p\,(x)$

En esta sección presentamos, para $p\,(x)$, una ecuación integro-diferencial, una ecuación integral, una apoyada en la teoría de la renovación y por último una ecuación basada en una suma geométrica particular ([4], [7] y [6]).

2.1 Ecuación integro-diferencial

Proposición 1. *La probabilidad de ruina* (1) *satisface la ecuación integro-diferencial*

$$p'\,(x) = \frac{\lambda}{c} p\,(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x p\,(x-y)\, dF\,(y) - \frac{\lambda}{c} \overline{F}\,(x)\,,\ x \geq 0. \tag{2}$$

Demostración. ([4] y [7]). Fijemos el capital inicial del asegurador $x \geq 0$ y calculemos $p\,(x - \Delta x)$ para un valor *pequeño* Δx condicionando sobre lo que sucede en las primeras $\Delta t = \Delta x / c$ unidades de tiempo.

- En ausencia de reclamos el capital del asegurador pasa de $x - \Delta x$ a x, y esto ocurre con probabilidad $(1 - \lambda\,\Delta t) + o\,(\Delta x) = (1 - \lambda\,\Delta x/c) + o\,(\Delta x)$.
- En Δt ocurre un reclamo con probabilidad $\lambda\,\Delta x/c + o\,(\Delta x)$. Supongamos que la cuantía del reclamo es y.
  - Si $0 < y < x$, no hay ruina, y la probabilidad de ruina luego del reclamo es $p\,(x-y)$.
  - Si $y > x$, es la ruina: $p\,(x-y) = 1$.

En consecuencia, por la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} p\,(x - \Delta x) = {} & \left(1 - \frac{\lambda \Delta x}{c}\right) p\,(x) + \frac{\lambda \Delta x}{c} \int_0^x p\,(x-y)\, dF\,(y) \\ & + \frac{\lambda \Delta x}{c} \int_x^\infty dF\,(y) + o\,(\Delta x)\,, \end{aligned}$$

lo que es equivalente a

$$\frac{p\,(x) - p\,(x-\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\lambda}{c} p\,(x) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x p\,(x-y)\, dF\,(y) - \frac{\lambda}{c} \overline{F}\,(x) - \frac{o\,(\Delta x)}{\Delta x},$$

donde $\overline{F}\,(x) = \Pr\,(Y > x)$ es la función de supervivencia o función cola de Y. Tomando límites en ambos lados de la anterior ecuación cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos la ecuación integro-diferencial (2). □

2.2 Ecuación integral

Para obtener una ecuación integral para $p(x)$ equivalente a (2), precisamos del siguiente lema ([4]).

Lema 1. *Para una función k y una función diferenciable l*

$$\frac{d}{dx}\int_0^x l(x-y)\,k(y)\,dy = l(0)\,k(x) + \int_0^x l'(x-y)\,k(y)\,dy. \tag{3}$$

En la siguiente proposición aparece la probabilidad $p(0)$ de que el asegurador (o el dueño del fondo de autoseguro) se arruine cuando inicia con un aporte nulo ([4], [7]).

Proposición 2. *La probabilidad de ruina* (1) *satisface la ecuación integral*

$$p(x) = p(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^x p(x-y)\,\overline{F}(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy,\ x \geq 0 \tag{4}$$

Demostración. Sea

$$h(x) = p(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^x p(x-y)\,\overline{F}(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^x \overline{F}(y)\,dy,\ x \geq 0. \tag{5}$$

Diferenciando respecto de x ambos lados de (5) y basados en (3), obtenemos

$$h'(x) = \frac{\lambda}{c}\left[p(0)\,\overline{F}(x) + \int_0^x p'(x-y)\,\overline{F}(y)\,dy - \overline{F}(x)\right]$$

Integrando por partes, con $u = \overline{F}(y)$ y $dv = p'(x-y)\,dy$, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^x p'(x-y)\,\overline{F}(y)\,dy &= -\overline{F}(y)\,p(x-y)\Big|_0^x - \int_0^x p(x-y)\,dF(y)\\ &= -\overline{F}(x)\,p(0) + p(x) - \int_0^x p(x-y)\,dF(y).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$h'(x) = \frac{\lambda}{c}\left[p(x) - \int_0^x p(x-y)\,dF(y) - \overline{F}(x)\right] = p'(x),$$

según la ecuación (2). Además, como $h(0) = p(0)$, entonces $p(x) = h(x)$ para todo $x \geq 0$. □

2.3 Ecuación desde la teoría de renovación

Presentamos primero los elementos mínimos necesarios de la teoría de renovación usando una notación neutra que no interfiera con la ya introducida en el problema de la ruina que nos ocupa.

Sea $\{Z_1,\ Z_2,\ \ldots\}$ una sucesión de v.a. no negativas con fd común G y media finita ν. La v.a. Z_k se interpreta como el tiempo entre las ocurrencias de los eventos $k-1$ y k. Sean $S_0 = 0$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k$ para $n = 1,\ 2,\ \ldots$, de manera que S_n indica el instante de ocurrencia del $n-$simo evento o de la $n-$sima renovación. Para cada $t \geq 0$, sea

$$N(t) = \text{ El mayor entero } n \geq 0 \text{ para el cual } S_n \leq t.$$

Entonces la v.a. $N(t)$ representa el número de eventos acaecidos en $[0,\ t]$. El proceso estocástico de conteo $\{N(t),\ t \geq 0\}$ se denomina *proceso de renovación* generado por los tiempos entre ocurrencias $Z_1,\ Z_2,\ \ldots$.

Una cantidad importante en un proceso de renovación es la v.a. $R(t)$ definida como el tiempo transcurrido desde el instante t hasta la próxima renovación posterior a t, esto es, $R(t) = S_{N(t)+1} - t$.

Se observa que $S_{N(t)+1}$ es el instante de la primera renovación ocurrida después de t. La v.a. $R(t)$ es llamada *exceso o vida residual en* t. Como puede verse en [7], el valor esperado de $R(t)$ está dado por

$$E[R(t)] = \{1 + E[N(t)]\}\,\nu - t. \tag{6}$$

En particular, $E[R(0)] = E(S_1) = E(Z_1) = \nu$.

Para una v.a. no negativa Z con esperanza finita y fd G tal que $G(0) = 0$, y para todo $z \geq 0$, $G(z) < 1$, se verifica que $E(Z) = \int_0^\infty \overline{G}(z)\,dz$ o, en forma equivalente, $\int_0^\infty \left[\overline{G}(z)/E(Z)\right] dz = 1$, lo cual implica que $g_e(z) = \overline{G}(z)\big/E(Z)$ es una función de densidad de probabilidad (fdp) (aún si G no es absolutamente continua); véase [8]. La fd correpondiente es $G_e(z) = 1 - \overline{G}_e(z) = \int_0^z \left[\overline{G}(t)/E(Z)\right] dt$, $z \geq 0$, y es llamada *distribución de equilibrio de* G (o de Z); esto es, la *variable aleatoria de equilibrio* Z_e (asociada a Z) tiene fd de equilibrio G_e. La esperanza de la v.a. de equilibrio está dada por (véase [8])

$$E(Z_e) = \frac{E\left(Z^2\right)}{2E(Z)}. \tag{7}$$

Volvamos al problema de la ruina, y estudiemos el proceso de renovación con tiempos entre llegadas independientes $X_1,\ X_2,\ \ldots$ que se distribuyen de acuerdo con la distribución de equilibrio de F, la fd de Y. Así,la fdp de las v.a. X_k es $f_e(x) = F_e'(x) = \overline{F}(x)/\mu$.

Sea $N(x)$ el número de renovaciones ocurridas en el intervalo $[0, x]$. Calculemos $q(x) = E\left[\rho^{N(x)+1}\right]$, donde, recordemos, $\rho = \lambda\mu/c < 1$ es el factor de carga del proceso del asegurador. Condicionando sobre X_1, obtenemos

$$q(x) = \int_0^\infty E\left[\rho^{N(x)+1} | X_1 = y\right] \left[\overline{F}(y)/\mu\right] dy,$$

y dado que $X_1 = y$, el número de renovaciones en $[0, x]$ es igual a $1 + N(x - y)$ si $y \leq x$ y es igual a 0 si $y > x$. En consecuencia

$$E\left[\rho^{N(x)+1} | X_1 = y\right] = \begin{cases} E\left[\rho^{1+N(x-y)+1}\right] = \rho E\left[\rho^{N(x-y)+1}\right], & y \leq x \\ E\left(\rho^{0+1}\right) = \rho, & y > x \end{cases}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} q(x) &= \int_0^x \rho q(x-y) \frac{\overline{F}(y)}{\mu} dy + \rho \int_x^\infty \frac{\overline{F}(y)}{\mu} dy \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^x q(x-y) \overline{F}(y) \, dy + \rho - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \overline{F}(y) \, dy \\ &= q(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^x q(x-y) \overline{F}(y) \, dy - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \overline{F}(y) \, dy, \end{aligned}$$

pues $q(0) = \rho$. La anterior ecuación tiene la misma forma de (4) y se puede escribir como una ecuación de renovación estándar:

$$q(x) = a(x) + \int_0^x q(x-y) \, b(y) \, dy, \ x \geq 0, \tag{8}$$

donde las funciones $a(x)$ y $b(x)$ están dadas por

$$a(x) = q(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^x \overline{F}(y) \, dy \quad \text{y} \quad b(x) = \frac{\lambda}{c} \overline{F}(x), \ x \geq 0,$$

excepto que la función $b(x)$, para $x \geq 0$, no es una fdp propia: $b(x)$ es no negativa, pero

$$\int_0^\infty b(x) dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \overline{F}(x) \, dx = \frac{\lambda\mu}{c} = \rho < 1.$$

Así que b es la densidad de una distribución cuya masa total es menor que 1 con un *defecto* de $1 - \rho$, razón por la cual la ecuación (8) recibe el nombre de *ecuación de renovación defectuosa*.

En consecuencia, según el teorema 8.1.2 de [7] (página 309) sobre la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de renovación y el *Caso* (b)*: distribución defectuosa*, del análisis de la misma ecuación realizada en [2] (página 523), la ecuación (8) (y por tanto (4)) tiene solución única. Por lo anterior, $p(x) = q(x)$ para todo $x \geq 0$, con lo que se ha probado la siguiente proposición.

Proposición 3. *La probabilidad de ruina* (1) *satisface la ecuación*

$$p(x) = E\left[\rho^{N(x)+1}\right], \ x \geq 0, \tag{9}$$

donde $\{N(t), \ t \geq 0\}$ *es el proceso de renovación con tiempos entre ocurrencias cuya distribución de probabilidad es la distribución de equilibrio* F_e*.*

Ejemplo 1. Si el asegurador comienza sin capital inicial, esto es, $U(0) = x = 0$, entonces, puesto que $N(0) = 0$, tenemos que $p(0) = E\left[\rho^{N(0)+1}\right] = \rho$.

Ejemplo 2. Si la fd F de la cuantía de reclamos individuales Y es exponencial con media μ, entonces F_e también lo es. De aquí que $N(x)$ tiene distribución de Poisson con media x/μ, y por consiguiente

$$\begin{aligned} p(x) = E\left[\rho^{N(x)+1}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\rho^{k+1}e^{-x/\mu}\frac{(x/\mu)^k}{k!}\right] \\ &= \rho e^{-x/\mu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\rho x/\mu)^k}{k!} = \rho e^{-x(1-\rho)/\mu} \end{aligned} \tag{10}$$

Más adelante usaremos (10) en la búsqueda de una cota para $p(x)$ cuando $F \in$ NBU. En la Tabla 1 se especifican los componentes de tres modelos con cuantías de reclamos exponenciales. La Figura 1 ilustra las tres probabilidades de ruina. Como se indica en el ejemplo anterior, $p(0) = \rho$, razón por la cual $p_1(0) = p_2(0) = 3/4$ y $p_3(0) = 5/8$.

i	μ_i	λ_i	c_i	ρ_i	$p_i(x)$
1	250,0	1,2	400	3/4	$(3/4)\,e^{-x/1000}$
2	337,5	1,0	450	3/4	$(3/4)\,e^{-x/1350}$
3	500,0	0,4	320	5/8	$(5/8)\,e^{-3x/4000}$

Tabla 1: Tres ejemplos para $p(x)$ con cuantías de pérdidas individuales exponenciales

2.4 Ecuación desde una suma aleatoria geométrica

Sea H una v.a. geométrica con función de probabilidad $\Pr(H = k) = \rho^k(1-\rho)$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$, estadísticamente independiente de los tiempos entre llegadas X_k, donde ρ es la carga de seguridad relativa del proceso original. Estudiemos, en el mismo proceso de renovación de la sección anterior, la suma aleatoria geométrica

$$\sum_{k=1}^{H} X_k = \begin{cases} 0, & H = 0 \\ X_1 + X_2 + \cdots + X_H, & H \geq 1. \end{cases}$$

Calculemos $\Pr\left(\sum_{k=1}^{H} X_k > x\right)$, la probabilidad de que la suma de las H primeras X_k excedan x. Dado que $N(x) + 1$ es el número total de renovaciones contadas desde el instante 0 hasta el momento de la primera renovación posterior a x, entonces $N(x)+1 = \min\{n : \sum_{k=1}^{n} X_k > x\}$. Por tanto, condicionando sobre

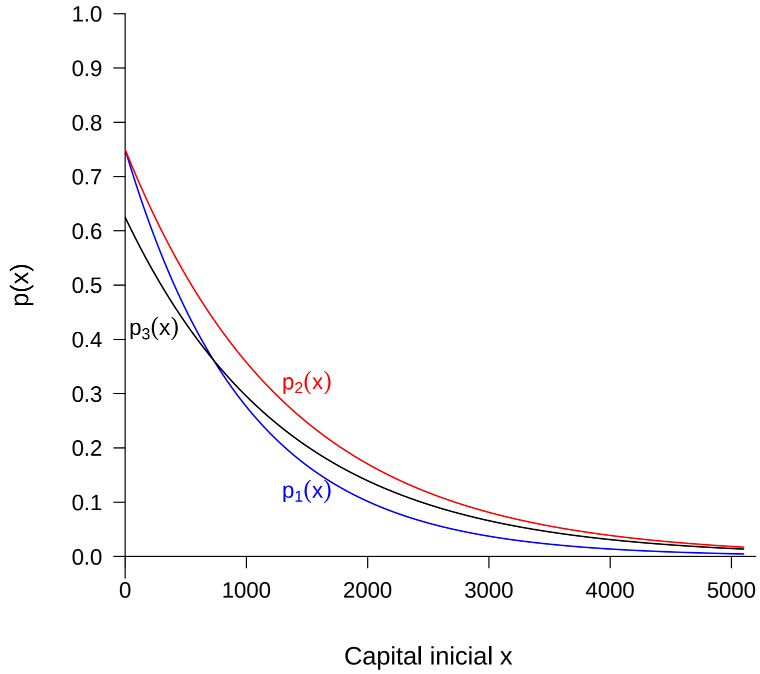

Figura 1: Probabilidades de ruina en el Ejemplo 2.

el número de renovaciones en el intervalo $[0, x]$, obtenemos

$$\begin{aligned}\Pr\left(\sum_{k=1}^{H} X_k > x\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr\left(\sum_{k=1}^{H} X_k > x \middle| N(x) = j\right) \Pr[N(x) = j] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr(H \geq j+1) \Pr[N(x) = j] = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{j+1} \Pr[N(x) = j] \\ &= E\left[\rho^{N(x)+1}\right],\end{aligned}$$

lo que constituye, por (9), la prueba de la siguiente proposición.

Proposición 4. *La probabilidad de ruina* (1) *satisface la ecuación*

$$p(x) = \Pr\left(\sum_{k=1}^{H} X_k > x\right), \ x \geq 0, \tag{11}$$

donde H es una v.a. geométrica con parámetro ρ y las v.a. X_k se distribuyen de acuerdo con la fd de equilibrio F_e.

3 Cotas para $p(x)$ basadas en criterios de confiabilidad

En esta sección se obtiene una cota superior y dos cotas inferiores basadas en el supuesto que la distribución de las cuantías de las pérdidas individuales F

pertenece a una clase específica de distribuciones; cuando esto sucede, también se dice que la v.a. misma pertenece a dicha clase. Las cotas mencionadas fueron presentadas en forma lacónica por S. Ross en [6]; damos acá las explicaciones detalladas. Para el cálculo de las cotas requerimos los siguientes conceptos y resultados de confiabilidad.

3.1 Preliminares de confiabilidad

Sean V y Z dos v.a. con fd D y G, y fdp d y g, respectivamente. Se dice que V precede a Z en el *orden estocástico usual* ($V \leq_{st} Z$), si para todo t real, $\overline{D}(t) \leq \overline{G}(t)$. Para un número aleatorio H de v.a. V_k e igual número de v.a. Z_k tales que $V_k \leq_{st} Z_k$ para $k = 1, 2, \ldots, H$, se verifica $\sum_{k=1}^{H} V_k \leq_{st} \sum_{k=1}^{H} Z_k$. Véase [5].

En adelante supondremos que Z es una v.a. no negativa con media finita, fdp g y fd G tal que $G(0) = 0$ y $G(t) < 1$ para todo $t > 0$. La tasa de riesgo de la v.a. Z se define por $\lambda(t) = g(t)/\overline{G}(t)$, $t \geq 0$. La v.a. V precede a la v.a. Z en el *orden de tasa de riesgo* ($V \leq_{hr} Z$), si para todo $t \geq 0$, $\overline{D}(t)/\overline{G}(t) \downarrow t$, o en forma equivalente, si para todo $t \geq 0$, $\mu(t) \geq \lambda(t)$, donde $\mu(t)$ es la tasa de riesgo de V. Si $V \leq_{hr} Z$, entonces $V \leq_{st} Z$.

La v.a. Z es de la clase IHR (DHR) o tiene *tasa de riesgo creciente* (*decreciente*) (Incresing (Decresing) Hazard Rate) si para todo $t \geq 0$, $\lambda(t) \uparrow (\downarrow) t$.

Para todo real no negativo t la v.a. $Z - t$ dado que $Z > t$ se denomina *exceso de pérdida o tiempo de vida residual*, la denotamos por $Z_t = [Z - t | Z > t]$ y representa la cuantía individual de la pérdida superior a t a cargo del asegurador en nuestro problema en estudio o el tiempo de funcionamiento o vida residual de un componente u organismo dado que ha funcionado o sobrevivido hasta el tiempo t. Su fd queda determinada por la fd G de Z: $\overline{G}_t(z) = \Pr(Z_t > z) = Pr(Z - t > z | Z > t) = \overline{G}(t+z)/\overline{G}(t)$. La esperanza de Z_t se denomina *exceso de pérdida media o vida residual media*, y es

$$E(Z_t) = \int_0^\infty \Pr(Z_t > z)\, dz = \frac{\int_t^\infty \overline{G}(z)\, dz}{\overline{G}(t)}. \tag{12}$$

La tasa de riesgo de la v.a. de equilibrio Z_e asociada a Z es, por (12),

$$\lambda_e(t) = \frac{g_e(t)}{\overline{G}_e(t)} = \frac{\overline{G}(t)/E(Z)}{\int_t^\infty \left[\overline{G}(z)/E(Z)\right] dz} = \frac{1}{E(Z_t)}. \tag{13}$$

La v.a. Z es de la clase DMRL (IMRL) o tiene *vida residual media decreciente* (*creciente*) (*Decreasing* (*Increasing*) *Mean Residual Life*) si para todo $t \geq 0$, $E(Z_t) \downarrow (\uparrow) t$.

La v.a. Z es de la clase NBU (NWU) o *nueva mejor* (*peor*) *que usada* (*New Better* (*Worse*) *than Used*) si para todo $t \geq 0$, $Z_t \leq_{st} (\geq_{st}) Z$. En consecuencia,

$$Z \in \text{NBU}\,(\text{NWU}) \Leftrightarrow \overline{G}_t(z) \leq (\geq) \overline{G}(z) \Leftrightarrow \overline{G}(t+z) \leq (\geq) \overline{G}(z)\,\overline{G}(t) \tag{14}$$

para todo t y z no negativos.

La v.a. Z es de la clase NBUE (NWUE) o *nueva mejor (peor) que usada en valor esperado (New Better (Worse) than Used in Expectation)* si para todo $t \geq 0$, $E(Z_t) \leq (\geq) E(Z)$. Por tanto,

$$Z \in \text{NBUE (NWUE)} \Leftrightarrow \frac{\int_t^\infty \overline{G}(z)\,dz}{\overline{G}(t)} \leq (\geq) E(Z) \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \frac{E(Z) - \int_0^t \overline{G}(z)\,dz}{E(Z)} \leq (\geq) \overline{G}(t)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\int_0^t \overline{G}(z)\,dz}{E(Z)} \leq (\geq) \overline{G}(t) \Leftrightarrow \overline{G}_e(t) \leq (\geq) \overline{G}(t)$$

$$\Leftrightarrow Z_e \leq_{st} (\geq_{st}) Z. \tag{16}$$

La v.a. Z es de la clase HNBUE (HNWUE) o *nueva mejor (peor) que usada en valor esperado de manera armónica (Harmonic New Better (Worse) than Used in Expectation)* si $Z_e \leq_{st} (\geq_{st}) V$, donde V es una v.a. exponencial con media $E(V) = E(Z)$.

Se verifican la siguientes relaciones: IHR $\Rightarrow$ DMRL $\Rightarrow$ NBUE $\Rightarrow$ HNBUE e IHR $\Rightarrow$ NBU $\Rightarrow$ NBUE $\Rightarrow$ HNBUE, y las relaciones duales DHR $\Rightarrow$ IMRL $\Rightarrow$ NWUE $\Rightarrow$ HNWUE y DHR $\Rightarrow$ NWU $\Rightarrow$ NWUE $\Rightarrow$ HNWUE ([5]).

3.2 Cota superior para $p(x)$ cuando $Y \in$ NBU

Proposición 5 (Cota superior).

$$F \in \text{NBU} \Rightarrow p(x) \leq \rho e^{-x(1-\rho)/\mu} \tag{17}$$

Demostración. Sea $\pi(x)$ la probabilidad de ruina en el caso en el que la distribución de las cuantías de las pérdidas individuales Z_k sean exponenciales con media $E(Y) = \mu$. Sabemos por el Ejemplo 2 y la Proposición 4 que

$$\pi(x) = \rho e^{-x(1-\rho)/\mu} = \Pr\left(\sum_{k=1}^{H} Z_k > x\right),\ x \geq 0,$$

donde $\Pr(H = k) = \rho^k (1-\rho),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ y H es estadísticamente independiente de los tiempos entre llegadas (exponenciales) Z_k. Como por hipótesis, $F \in$ NBU, entonces $\overline{F}(u) \leq \overline{F}(u-t)\,\overline{F}(t)$; por tanto, por (13)

$$\lambda_e(t) = \frac{1}{\int_t^\infty \frac{\overline{F}(u)}{\overline{F}(t)}du} \geq \frac{1}{\int_t^\infty \overline{F}(u-t)\,du} = \frac{1}{\mu},$$

que es la tasa de riesgo de las v.a. Z_k.

En consecuencia $X_k \leq_{hr} Z_k$, lo que implica que $X_k \leq_{st} Z_k$, y como el orden estocástico usual es cerrado bajo sumas aleatorias ([5]), entonces $\sum_{k=1}^{H} X_k \leq_{st} \sum_{k=1}^{H} Z_k$, con lo cual

$$p(x) = \Pr\left(\sum_{k=1}^{H} X_k > x\right) \leq \Pr\left(\sum_{k=1}^{H} Z_k > x\right) = \rho e^{-x(1-\rho)/\mu}.$$

□

Esta cota superior es igual a la obtenida por H. Gerber en [3] bajo el supuesto más fuerte que $F \in IFR$. Es evidente que en esta cota la desigualdad se convierte en igualdad cuando F es exponencial.

3.3 Cota inferior para $p(x)$ cuando $Y \in$ NBUE

La desigualdad de Jensen indica que para toda función convexa h y para toda v.a. Z con $E(Z) < \infty$ y $E[h(Z)] < \infty$, se verifica $E[h(Z)] \geq h[E(Z)]$. Por tanto, para la función convexa $h(x) = \rho^{x+1}$ con $0 < \rho < 1$ tenemos que

$$p(x) = E\left[\rho^{N(x)+1}\right] \geq \rho^{E[N(x)]+1}. \tag{18}$$

Proposición 6 (Cota inferior 1)**.**

$$F \in \text{NBUE} \Rightarrow p(x) \geq \rho^{2\mu(\mu+x)/E\left(Y^2\right)}. \tag{19}$$

Demostración. $F \in$NBUE implica que $E[R(x)] \leq E(Y) = \mu$; por tanto,

$$E[N(x)] = \frac{E[R(x)] + x}{E(X)} - 1 \leq \frac{\mu + x}{E(Y^2)/(2\mu)} - 1.$$

Así, por (18), $p(x) \geq \rho^{E[N(x)]+1} \geq \rho^{2\mu(\mu+x)/E\left(Y^2\right)}$. □

3.4 Cota inferior para $p(x)$ cuando $Y \in$DMRL

Proposición 7 (Cota inferior 2)**.**

$$F \in \text{DMRL} \Rightarrow p(x) \geq \rho^{1+2\mu x/E\left(Y^2\right)}. \tag{20}$$

Demostración.

$$F \in \text{DMRL} \Leftrightarrow E(Y_t) \downarrow t \Leftrightarrow \lambda_e(t) \uparrow t, \text{ por (13)} \Leftrightarrow F_e \in \text{IHR}.$$

Por tanto, $F \in \text{DMRL} \Leftrightarrow F_e \in \text{IHR} \Rightarrow F_e \in \text{NBU} \Rightarrow R(x) \leq_{st} X$; la última implicación está en [1]. En consecuencia, $F \in \text{DMRL} \Rightarrow R(x) \leq_{st} X \Rightarrow E[R(x)] \leq E(X)$, con lo cual, por (7)

$$E[N(x)] = \frac{E[R(x)] + x}{E(X)} - 1 \leq \frac{E(X) + x}{E(X)} - 1 = \frac{2\mu x}{E(Y^2)}$$

Así, por (18), $p(x) \geq \rho^{E[N(x)]+1} \geq \rho^{1+2\mu x/E\left(Y^2\right)}$. □

Esta segunda cota inferior es mejor que la primera. En efecto, si $F \in$ DMRL, entonces $F \in$ HNBUE, que por definición significa que $Y_e = X \leq_{st} Z$ con distribución exponencial con media μ. Por tanto, $E(X) \leq \mu$, que es equivalente a que $E\left(Y^2\right) \leq 2\mu^2$. Así,

$$\rho^{2\mu(\mu+x)/E\left(Y^2\right)} = \rho^{2\mu^2/E\left(Y^2\right)}\rho^{2\mu x/E\left(Y^2\right)} \leq \rho\, \rho^{2\mu x/E\left(Y^2\right)} = \rho^{1+2\mu x/E\left(Y^2\right)}.$$

Agradecimientos. Los autores agradecen el apoyo de la Universidad EAFIT y las importantes observaciones y sugerencias hechas por los árbitros del artículo. Trabajo escrito en el marco del proyecto 45-000031 de 2008 de la Universidad EAFIT.

Referencias

[1] Barlow, R. E. and Proshan, F.: Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. To Begin With, Silver Spring, MD, (1981)

[2] Feller, W.: Introducción a la Teoría de Probabilidades y sus Aplicaciones. Volumen II. Segunda Edición. Limus, (1978)

[3] Gerber, H. U.: An Introduction to Mathematical Risk Theory. S.S. Huebner Foundation monograph series, (1979)

[4] Klugman, S. A. and Panjer, H. H. and Willmot, G. E.: Loss Models: From Data to Decisions. Second Edition. Wiley, (2004)

[5] Müller, A. and Stoyan, D.: Comparison Methods for Stochastic Models and Risks. Wiley, (2002)

[6] Ross, S. M.: A note on the insurance risk problem. Probability Engineering and Informational Sciences. 17, (2003) 199-203

[7] Tijms, H. C.: A First Course in Stochastic Models. Wiley, (2003)

[8] Willmot, G. E. and Lin, X. S.: Lundberg Aproximations for Compound Distributions with Insurance Applications. Lectures Notes in Statistics 156. Springer, (2001)

Dirección de los autores
Gerardo Arango O. — Escuela de Ciencias y Humanidades, Universidad EAFIT
e-mail: `garango@eafit.edu.co`
César E. Escalante C. — Consultoría de Riesgos, Delima Marsh S.A.
e-mail: `Cesar.E.Escalante@Marsh.com`