



LA FUNCIÓN EXPLICATIVA DE LA DEMOSTRACIÓN: UN ANÁLISIS
CONTEXTUAL EN EL MARCO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Isabella Arce Becerra

Universidad del Valle
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Matemáticas

Junio 2024



Trabajo de Grado

LA FUNCIÓN EXPLICATIVA DE LA DEMOSTRACIÓN: UN ANÁLISIS
CONTEXTUAL EN EL MARCO DE LA PRÁCTICA MATEMÁTICA

Isabella Arce Becerra

Documento presentado al programa de
Licenciatura en Matemáticas
como requisito para optar por el título de
Licenciada en Matemáticas

Directora: Maribel Patricia Anacona

Universidad del Valle
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Facultad de Educación y Pedagogía

Junio 2024

Agradecimientos

Este documento no podría empezar de otra manera que extendiendo mis más sinceros agradecimientos a todas y todos los que hicieron posible este trabajo.

Primero que todo a la universidad pública, la gloriosa Universidad del Valle, por permitirme formarme académica, profesional y personalmente.

A la profesora Maribel Anacona, por su invaluable apoyo y dirección durante la realización de este trabajo, y durante toda mi formación académica.

A mis compañeras y amigas, Lizeth Grisales y María del Mar Hernández, por las discusiones llenas de aprendizajes y las reflexiones, casi siempre académicas.

A mi familia grande por el apoyo incondicional. A mi mamá Mirian Becerra, por ser mi fan número uno, a mis hermanas Clari y Karina Arce, por ser mi lugar seguro, y a mi hermano Abel Herrera, por creer en mí desde el momento uno.

Por último, a mi familia pequeña: Alí. Gracias por la infinita bondad, el amor y los cuidados.

Este proyecto no hubiera resultado posible sin la participación de cada uno de ustedes.



FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Vicedecanatura Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

Programa Académico Licenciatura en Matemáticas

Fecha

Código del programa: 34 92

Resolución del programa: 11 1

Día	Mes	Año
12	7	24

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
La función explicativa de la demostración: un análisis contextual en el marco de la práctica matemática				
Se trata de:				
Proyecto		Informe Final X		
Director				
Maribel Patricia Anacona				
Nombre del Primer Evaluador				
Guillermo Ortiz Rico				
Nombre del Segundo Evaluador				
Edgar Fernando Gálvez Peña				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Télefonos de contacto
Isabella Arce Becerra	1922794	3492	isabella.arce@correounivalle.edu.co	3197012545
Evaluación				
Aprobado		Meritorio		Laureado X
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) **ante:**

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Primer Evaluador

Segundo Evaluador

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Recomendaciones	Observaciones	Razón de desacuerdo - Alternativas
El jurado considera, de manera unánime, que el trabajo de grado cumple ampliamente con todos los requisitos para ser calificado como LAUREADO. Este trabajo de grado explora el potencial de la demostración matemática como herramienta didáctica, enfocándose en su función explicativa. Se analizan los elementos característicos de diversas demostraciones matemáticas, evaluando su capacidad explicativa en términos de las habilidades, conocimientos e intereses que deben tener los sujetos para su comprensión. Se trata de un estudio amplio, riguroso y original acerca de un tema de mucha vigencia y relevancia en el campo de la Educación Matemática que concluye con una propuesta didáctica innovadora en la que se contrastan los resultados del análisis teórico con una aplicación práctica. La sustentación detallada de esta calificación se anexa en archivo adjunto.		
Firmas		
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador

Resumen

Este trabajo de investigación explora el potencial de la demostración matemática como herramienta didáctica, enfocándose en su función explicativa. Se analizan los elementos característicos de diversas demostraciones matemáticas, evaluando su capacidad explicativa en términos de las habilidades, conocimientos e intereses que deben tener los sujetos para su comprensión. Este análisis se enmarca en el Enfoque Contextual de la Filosofía de la Práctica Matemática. La metodología incluye un recorrido histórico sobre la evolución del concepto y caracterización de la Práctica Matemática, seguido del análisis de cuatro demostraciones distintas del Teorema de la Infinitud de los Números Primos: la demostración de Euclides por construcción, la demostración de Goldbach por sucesiones, la demostración de Euler por series infinitas y la demostración de Fürstenberg por argumentos topológicos. La investigación concluye con una propuesta didáctica para contrastar los resultados expuestos con una aplicación práctica.

Palabras clave— Práctica Matemática; Demostración; Explicación Matemática; Enfoque Contextual; Números Primos.

Abstract

This research work explores the potential of mathematical proof as a didactic tool, focusing on its explanatory function. It analyzes the characteristic elements of different mathematical proofs that are analyzed, and evaluates their explanatory power in terms of the skills, knowledge and interests that the subjects need to have in order to understand them. This analysis is framed within the Contextual Approach of the Philosophy of Mathematical Practice. The methodology includes a historical overview of the development of the concept and characterization of Mathematical Practice, followed by an analysis of four different proofs of the Infinity of Prime Numbers theorem: Euclid's proof by construction, Goldbach's proof by sequences, Euler's proof by infinite series, and Fürstenberg's proof by topological arguments. The research concludes with a didactic proposal to contrast the results presented with a practical application.

Keywords— Mathematical Practice; Proof; Mathematical Explanation; Contextual Approach; Prime Numbers.

TABLA DE CONTENIDO

	Pag.
Resumen	5
Introducción	9
1. Perspectiva teórica de la función explicativa de la demostración	15
1.1 Visiones de la filosofía de la matemática: los fundacionalistas vs los inconformistas vs ¿los otros?	15
1.2 El desarrollo histórico de la noción de práctica matemática	18
1.3 Funciones de la demostración: las pruebas explicativas y no explicativas..	20
1.4 El enfoque contextual: un análisis centrado en y para los agentes	22
2. Una proposición, cuatro pruebas, infinitos números primos	27
2.1 El Teorema de Euclides para los números primos: una milenaria e ingeniosa prueba por construcción	29
2.2 Goldbach y los números de Fermat: una prueba por sucesiones que se aleja categóricamente de Euclides	36
2.3 La prueba de Euler usando series: más allá del teorema de la infinitud de los primos	44
2.4 Un salto al siglo XX: Fürstenberg propone una prueba topológica	50
3. Elementos de la práctica matemática de profesores en formación para las pruebas explicativas	57
3.1 Matemáticas de los agentes (ideales o reales)	59
4. Propuesta de una actividad didáctica para conocer los intereses epistémicos de los agentes	66
4.1 Descripción de una posible actividad didáctica	70
5. Conclusiones	71
A. Anexo: Posibles grafos proposicionales	74
Referencias	78

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA	Pag.
1. Conocimientos previos para la demostración de Euclides	31
2. Conocimientos previos para la demostración de Golbach	38
3. Conocimientos previos para la demostración de Euler	46
4. Conocimientos previos para la demostración de Fürstenberg	52
5. Matemáticas de los agentes relacionadas a la primera habilidad	60
6. Matemáticas de los agentes relacionadas a la segunda habilidad	62
7. Matemáticas de los agentes relacionadas a la tercera y cuarta habilidad	64

Introducción

El lugar que tiene la demostración matemática en el aula está dado en gran parte por las concepciones y creencias que tienen los docentes acerca de, no solo la naturaleza de los teoremas sino también de la función que cumple su demostración. Como lo reporta Hanna (2000), los docentes tienden a preferir procesos heurísticos o exploratorios frente a procesos de prueba, pues mientras los primeros les suponen un camino evidente de aportaciones didácticas para la comprensión matemática de los estudiantes, se cree que los procesos de prueba requieren un nivel de abstracción y rigurosidad asociados al papel puramente científico de la demostración, y por lo tanto, no es competencia del aula.

Desde esta postura, funciones como la de explicación, comunicación, o sistematización de la prueba se ven relegadas frente a la función de verificación, lo que puede traducirse en un desaprovechamiento del papel didáctico de la demostración en el aula. Dentro de dichas funciones, la explicativa destaca, pues además de convencer apela a las razones de por qué algo es cierto (Hanna, 2000). Poder dar razones del *porqué* en matemáticas, constituye un camino para la comprensión de los estudiantes, lo que puede legitimar el uso de la demostración en el aula con fines didácticos.

Ahora, si bien es menester que los docentes puedan reconocer funciones de la demostración más allá de la verificación, la problemática no terminaría allí, pues en el caso de la función explicativa, se abre la puerta a nuevos interrogantes que, no solo abarca lo relacionado con la demostración matemática sino que afecta a cualquier

proceso educativo en general y es: *¿Qué se entiende por explicar?* La reflexión sobre este interrogante comprende cuestiones tanto ontológicas como epistemológicas, así, si se quisiera dar una respuesta se debería soportar la reflexión sobre un marco teórico que sea propio de la filosofía, en este caso, de la Filosofía de las Matemáticas.

En este sentido, Mancosu (2016) en su estudio sobre la Filosofía de la Práctica Matemática, aporta que:

Yo, conjuntamente con los contribuyentes a Mancosu (2008a), considero que la teoría del conocimiento matemático necesita ser extendida más allá de sus confines actuales para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación, y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales respecto del problema del acceso a «objetos abstractos» (p. 131- 132)

Reconociendo que la explicación es un tema de interés para la Filosofía de la Práctica Matemáticas (en adelante PMP por su abreviación en inglés), e incentivando a que se amplíe el campo de investigación más allá de cuestiones ontológicas, sin que esto implique desconocerlas. Además, aunque la noción de práctica pueda ser concebida de diferentes maneras, las más aceptadas tienen en cuenta los agentes, es decir, la comunidad de práctica, y las relaciones de estos con los elementos de su práctica.

Así, parece que la PMP puede brindar un foco desde el cual analizar la función explicativa de la demostración, en términos de las ventajas que esta supone para el

desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes. Se introduce entonces la idea de demostraciones explicativas y no explicativas, y se genera la necesidad de distinguir unas de otras.

Teniendo en cuenta la preocupación expuesta, en este trabajo se intenta responder a la pregunta *¿Cuáles son las características que ayudan a identificar una demostración matemática como explicativa para ser aprovechada por los docentes en el aula?*

Para responder esta pregunta, este trabajo se propone *establecer una caracterización de las pruebas explicativas que puedan ser usadas en el aula de matemáticas por docentes y docentes en formación en el marco de una práctica matemática*. A través de una serie de objetivos específicos dados por: primero, establecer los elementos relevantes para el análisis de las demostraciones desde la perspectiva de la Práctica Matemática; segundo, identificar los elementos de práctica característicos en las diferentes pruebas de la Infinitud de los Números Primos en el marco de la Filosofía de la Práctica Matemática; tercero, analizar en términos de su explicatividad los elementos característicos de las pruebas de la Infinitud de los Números Primos; y por último, proponer un instrumento didáctico que permita identificar los conocimientos, habilidades e intereses epistémicos que deben tener unos agentes para que la prueba de la Infinitud de los Números Primos sea explicativa.

El trabajo que se pretende llevar a cabo en este documento puede ser justificado desde distintas perspectivas. Desde la perspectiva curricular, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y los Lineamientos

Curriculares en Matemática (MEN, 1998), sugieren que las matemáticas escolares deben estar en función del desarrollo de ciudadanías críticas y reflexivas; para ello se proponen distintos procesos de la actividad matemática, siendo el razonamiento la principal forma de justificar matemáticamente, dar explicaciones y proponer, verificar o rechazar conjeturas a través de argumentaciones y razones válidas. De esta manera, si se quiere avanzar en el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes, es preciso reflexionar sobre los procesos deductivos propios de la demostración matemática.

Desde la perspectiva de la investigación en Educación Matemática, referentes clásicos como Hanna (2000), Balacheff (2000), o Duval (2017), destacan la importancia del estudio de los procesos de prueba como medio para progresar en el conocimiento matemático, lo que se traduce en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes. Referentes como Crespo et al. (2004), destacan la importancia de reconocer y reflexionar acerca de las concepciones, creencias y conocimientos de los docentes en torno a la demostración y el papel que estas puedan tener o no en el aula; en sus trabajos se enfatiza la importancia de lograr una distinción entre el papel didáctico y el papel científico que puede tener una demostración.

Ahora bien, si se mira el papel de la demostración desde una perspectiva amplia, la historia ha mostrado que, por lo menos para el caso de la ciencia matemática, establecer la verdad de un teorema no parece ser suficiente para los matemáticos, de ahí que surjan discusiones alrededor de si ciertas pruebas son o no consideradas demostraciones matemáticas. Por ejemplo, la famosa prueba del teorema

de los cuatro colores realizada por Kenneth Appel y Wolfgang Haken en 1976 con ayuda de un ordenador, la cual sigue causando controversia al día de hoy. Esto muestra que existe una necesidad, por lo menos en la comunidad de matemáticos, de explicar el porqué un teorema se cumple, y dar razones que realmente lo expliquen, más allá de tratar de convencer que algo es cierto. Dicha necesidad también debería ser asumida por la Educación Matemática si se quiere avanzar en el desarrollo de las habilidades de razonamiento antes mencionadas.

En ese sentido, el hecho de que existan varias pruebas de un mismo teorema puede indicar que existe una necesidad de presentar un nuevo tipo de prueba que amplíe, aporte o muestre otra perspectiva los resultados ya establecidos. Un ejemplo de multiplicidad de pruebas es el Teorema de Pitágoras, pues con más de 300 pruebas, las cuales han sido recopiladas por E.S. Loomis en su libro *The Pythagorean proposition* de 1922, parece ser el teorema por excelencia de los matemáticos. Otro ejemplo es la demostración de la Infinitud de los Números Primos, IPN por sus siglas en inglés, no ya por la cantidad de pruebas sino por la diversidad de métodos y conceptos usados, lo cual abarca construcciones, procesos aritméticos, sucesiones, series infinitas e incluso argumentos topológicos. Esta riqueza y variedad hacen de este teorema un buen candidato para el análisis de sus demostraciones, en términos de reconocer y caracterizar qué tan explicativas pueden llegar a ser en un contexto determinado.

Finalmente, se escoge la PMP como marco de análisis, pues esta además de centrar su interés en la explicación matemática, puede ser usada como herramienta de

análisis, bien sea fijando un elemento de la práctica y trazando su recorrido histórico, o tomando todos los elementos de la práctica y estudiando cómo se desarrollan en conjunto en un momento histórico específico (Van Bendegem y Van Kerkhove , 2004, p. 536 - 538). Así, el análisis que se pretende realizar más que ser histórico es contextual, pues autoras como Carter (2019) reconocen la importancia de centrarse en agentes particulares y las matemáticas propias de su práctica, lo que debe ser analizado, necesariamente, bajo la luz de un contexto definido.

Este trabajo parte de la propuesta de Carter (2019) y se centra en los agentes (A) y los contenidos matemáticos (M). Estos dos elementos se conjugan en un estudio de caso donde se analizan las demostraciones del Teorema de la Infinitud de los Primos, siguiendo 4 momentos: Primero, se realiza un estudio desde la PMP centrado en el reconocimiento de explicación matemática y las demostraciones explicativas, y se selecciona una propuesta de caracterización de Práctica Matemática que tenga foco en los agentes. Segundo, se investiga las diversas demostraciones de la Infinitud de los Números Primos, y se seleccionan cuatro de ellas pertenecientes a distintas ramas de las matemáticas. Después se analizan dichas demostraciones a la luz del enfoque contextual. Tercero, se presentan los análisis de las pruebas de IPN para establecer una caracterización de los elementos de práctica en términos de la explicatividad de las mismas. Finalmente se presenta una propuesta de actividad didáctica como insumo para extender la investigación al campo de la Educación Matemática que contraste los resultados de la teoría con la práctica en un contexto real.

1. Perspectiva teórica de la función explicativa de la demostración

El desarrollo del presente trabajo se sustenta desde dos grandes teorías. La primera desde la Filosofía de las Matemáticas, especialmente lo relacionado con la PMP y su interés por la explicación matemática. Dentro de este campo surgen diferentes enfoques, cada uno de ellos resaltando distintas características de la práctica, y en muchos casos reconociendo las características en comunes. Este trabajo opta por el enfoque contextual pues pone en el centro de la discusión a los agentes.

La segunda teoría está relacionada con las funciones de la demostración desde un lugar puramente educativo, aunque sin desconocer la importancia de las nociones científicas del concepto; además esta segunda parte contempla factores cognitivos del aprendizaje de las demostraciones que pueden resultar útiles para profundizar en la comprensión matemática de los sujetos.

1.1 Visiones de la filosofía de la matemática: los fundacionalistas vs los inconformistas vs ¿los otros?

La Filosofía de las Matemáticas se ha encargado de resolver el problema de los fundamentos. El logicismo, el intuicionismo y el formalismo hacia los años 20's, pero también la Teoría de Categorías en los 70's o los Fundamentos Univalentes más recientemente, son algunos de los enfoques que surgen como respuesta a este problema, acaparando la investigación y la literatura a fin de postularse como la mejor opción para la filosofía mientras dan descrédito a sus contrarios. Así, surgen *los*

inconformistas, como una alternativa para cambiar el rumbo de la investigación en Filosofía de las Matemáticas, proponiendo nuevas preguntas que comprendan más allá de lo ontológico, y cuya tradición sea caracterizada a través de tres elementos clave: Un profundo antifundacionalismo, es decir las matemáticas no se cimientan sobre verdades infalibles; un marcado antilogicismo, pues con las herramientas de la lógica no se logra un análisis completo de las matemáticas; y la atención centrada en la práctica, pues si hay un análisis significativo que haga a la filosofía merecedor de su estatus, ese es el análisis de la práctica matemática. (Mancosu, 2016, p. 136)

Si los fundacionalistas tienen grandes referentes como Gottlob Frege en el logicismo, L.E Brouwer en el intuicionismo y David Hilbert en el formalismo, uno de los precursores de los inconformistas es sin duda Imre Lakatos con su texto *Proofs and Refutations* de 1976.

No puede discutirse que ya en la década de 1960, primero con Lakatos y después a través de un grupo de filósofos inconformistas de la matemática, se estableció una fuerte reacción contra la filosofía de la matemática concebida como un fundamento de la matemática.

(Mancosu, 2016, p. 133)

Además, este intento por redireccionar los intereses de la filosofía, trae consigo el planteamiento de nuevas preguntas que escapan de los aspectos ontológicos, tales como *¿qué es el progreso matemático?, ¿cómo crece el conocimiento matemático?, ¿qué hace que algunas ideas (o teorías) matemáticas sean mejores que otras?, ¿Qué es una explicación matemática?* (Mancosu, 2016, p. 138, citando a Aspray y Kitcher,

1988). Pese al intento de proponer un nuevo enfoque, la tradición inconformista no logra redirigir el curso de la filosofía de la matemática, pues sus investigaciones se centraron en el descrédito y el rechazo hacia los aportes de sus contrarios, los fundacionalistas. (p. 136).

Frente a esta situación, autores como Mancosu (2016) y Van Bendegem y Van Kerkhove (2004), reconocen tanto los aportes como las problemáticas de cada uno de los enfoques y, contrario a adoptar un punto de vista totalmente fundacionalista o inconformistas, se proponen rescatar el interés por la práctica matemática, pues dichos autores junto con sus colaboradores, creen que la atención a este tema es una condición necesaria para que finalmente se pueda dar una renovación de la Filosofía de la Matemáticas. (Mancosu, 2016, p. 132). Para este propósito surgen nuevas preguntas que sirven de guía para el crecimiento y progreso de, no solo la filosofía sino también de la matemática como ciencia:

Considero que la teoría del conocimiento matemático necesita ser extendida más allá de sus confines actuales para abordar temas gnoseológicos que tienen que ver con fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación, y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales respecto del problema del acceso a «objetos abstractos».

(p.132)

1.2 El desarrollo histórico de la noción de práctica matemática

Gracias a la novedad del concepto y la complejidad de sus elementos, existen diversos aportes en la literatura respecto a qué se entiende por práctica matemática y qué elementos la componen. Kitcher (1984) propone una explicación para el progreso del conocimiento matemático, a través de lo que él llama “la práctica”, caracterizando el desarrollo matemático mediante transiciones o cambios entre “prácticas matemáticas”. Aspectos como la generalización, la rigorización y la sistematización, son elementos claves para el desarrollo de su teoría. Además, propone por primera vez un modelo de cinco componentes para describir una práctica: “un lenguaje, un conjunto de afirmaciones aceptadas, un conjunto de razonamientos aceptados, un conjunto de preguntas seleccionadas como importantes, y un conjunto de opiniones metamatemáticas” (Kitcher, 1984, p. 163). Esto es, la quintupla $\langle L, S, R, Q, M \rangle$.

También merece la pena destacar el aporte de Van Bendegem y Van Kerkhove (2004) en la caracterización de la práctica, llamada MathPract. Esta, parte de la propuesta de la quintupla de Kitcher y es pensada como un instrumento de análisis, además de puesta en acción por los autores, para el análisis de la práctica de la demostración de teoremas. La MathPract consta al menos de siete componentes: comunidad de matemáticos, programa de investigación, lenguaje formal, métodos de demostración, conjunto de conceptos, métodos argumentativos, estrategias de prueba; que se traduce en $\langle M, P, F, PM, C, AM, PS, \dots \rangle$.

Aunque los autores reconocen que la definición de práctica queda implícita,

pues usan la noción de práctica o MathPract como instrumento para brindar una caracterización de la práctica que capture la riqueza aparente de las matemáticas, resaltan la posibilidad de realizar un análisis históricos tomando como referencia el instrumento, y dinamizando sus elementos, sin que por ello se afecte la investigación. Adicionalmente, relacionan la práctica con la educación, pues es en el salón de clase donde interactúan realmente las matemáticas con la sociedad.

Ferreirós (2016) amplía la caracterización de Kitcher e incluye la importancia de los agentes humanos, como fundamental para el progreso del conocimiento.

Ferreirós, discussing various views on ‘practice’, stresses, in opposition to Kitcher, that practice should be taken in the sense of ‘the activities of human agents’ and that knowledge does not make sense without the knowers, i.e., the human agents (p. 21). In order to analyze knowledge he thus considers the pair, framework-agent, where a framework is taken to include something like Kitcher’s four-tuple, $\langle L, S, Q, R \rangle$.

(Carter, 2019, p. 24)

Por su parte, Carter (2019) recoge estas ideas en su propia propuesta para caracterizar la práctica basada en agentes, reduciendo la quintupla de Kitcher a la dupla: $\langle A, M \rangle$

The component ‘agents’ consists of agents, real or idealized, and their activities and beliefs. ‘Mathematics’ refers to the content of mathematics- theories, theorems, proofs, mathematical models, etc. In general ‘a practice’ consists of relations between agents and what constitutes mathematics. (p. 24 - 25)

Esta nueva caracterización abre la posibilidad de tomar los elementos de la práctica tan amplios como se quiera siempre que se respete la dupla *agents - mathematics*. Por todo esto, se considera propicio tomar dicha caracterización como instrumento para el análisis contextual de la práctica en este trabajo.

1.3 Funciones de la demostración: las pruebas explicativas y no explicativas

A propósito de la demostración matemática, Hanna (2000) propone nueve funciones que pueden cumplir un papel más o menos didáctico según su uso en el aula. Se tiene la función de verificación, referida a la veracidad de una afirmación; de explicación, el *porqué* algo es cierto; de sistematización, sobre la organización de resultados en un sistema deductivo de axiomas y teoremas; de descubrimiento, o de invención de nuevos resultados; de comunicación, para compartir el conocimiento matemático; de construcción de una teoría empírica; y de incorporación de un hecho conocido a uno nuevo. (p. 8)

Respecto a la importancia de la función explicativa de la prueba, Mancosu (2016) en sus observaciones sobre PMP comenta que,

Si a los matemáticos les importara solamente la verdad de ciertos resultados, sería difícil de entender por qué después de descubrir una cierta verdad matemática, continúan probando el resultado de varios modos diferentes.

Esto sucede porque diferentes pruebas o diferentes presentaciones de áreas enteras de la matemática (análisis complejo, etc.) tienen diferentes virtudes epistémicas. La *explicación* está entre las más importantes virtudes que buscan los matemáticos. Muy a menudo la prueba de un resultado matemático nos convence *de que* el resultado es verdadero pero no nos dice *por qué* es verdadero. (p. 147)

Ahora bien, aunque Mancosu (2001) reconoce la ambigüedad alrededor de la palabra explicación y la necesidad de caracterizar la explicación matemática usando como ejemplo las demostraciones explicativas, también advierte que su investigación versa sobre las matemáticas puras, y a la par, invita a explorar el concepto de explicación en contextos educativos o de las ciencias físicas (p. 100-101). Otras fuentes de información como la Stanford Encyclopedia of Philosophy, ofrecen una síntesis rigurosa sobre qué se entiende por explicar y en qué contexto surge la distinción explicativo - no explicativo.

De acuerdo con la enciclopedia, la demostración explicativa tiene su origen en Aristóteles con su demostración “del hecho” y demostración “del hecho razonado”, ambas lógicamente rigurosas pero solo la segunda explicativa. Desde aquí, la explicatividad de la prueba es asociada a la causalidad, es decir, a dar razones del *porqué*.

El enfoque mayormente usado en las investigaciones sobre la explicación matemática es llamado bottom-up (ascendente), en el cual se evita establecer un marco teórico en particular para caracterizar la explicación y solo cuando se tiene un

número de datos considerables, se procede a categorizar y clasificar los tipos de demostraciones, para finalmente, brindar una noción de explicación desde las características compartidas. Un autor destacado en el uso de este enfoque es Marc Lange, quien, si bien reconoce la imposibilidad de brindar un patrón general que caracterice la demostración explicativa, gracias a los distintos y variados ejemplos considerados en su investigación, puede afirmar que: primero, existen varias clases de demostraciones explicativas; segundo, es posible destacar dos características en los teoremas que, según el contexto, pueden marcar una diferenciación entre pruebas explicativas y no explicativas, a saber, la simetría y la simplicidad.

As for simplicity, it amounts to the requirement for a proof of a simple result “exploits some similar, simple feature of the setup” (see Lange 2017, 257). As for symmetry, it is a property that arises when dealing with mathematical results that display some striking symmetry: for the proof to count as explanatory, it needs to show how such symmetry follows from a similar symmetry in the set-up of the problem. (The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Fall 2023 Edition)

1.4 El enfoque contextual: un análisis centrado en y para los agentes

Delarivière, Frans, y Van Kerkhove (2017) siguiendo la propuesta de Mancosu (2008), defienden el enfoque contextual para el análisis de la Práctica Matemática, pues dicho enfoque centra su atención en las actividades y creencias de los agentes que realizan la práctica, lo que permite adoptar una lectura epistémica de la explicación matemática. De acuerdo con los autores:

The epistemic reading not only clarifies the link between mathematical explanation and mathematical understanding, but also allows us to explicate some contextual factors governing explanation. (2017, p.1)

De manera general, esta mirada reconoce el contextualismo como un elemento natural de la práctica, pues por ejemplo, desde este enfoque, una demostración deberá ser explicativa sólo en el sentido de la comprensión que tiene de ella el destinatario, es decir un agente en un contexto determinado con unas condiciones particulares a él. Así, los autores exponen dos factores contextuales K e I ¹ a considerar en relación con dichos sujetos:

Factor contextual K : El corpus o conocimiento previo del agente. Es claro que para comprender una prueba el sujeto destinatario debe gozar de una serie de habilidades y conocimientos previos. Esto determina el valor explicativo de una demostración de acuerdo con las coincidencias entre: el bagaje y/o habilidades del sujeto y, las características específicas de la prueba, haciendo posible la comprensión de por qué un teorema es cierto.

Factor contextual I : Los intereses epistémicos particulares del agente. Además de las habilidades y conocimientos, se espera que el agente tenga interés genuino dentro de un dominio concreto, para el caso de la demostración explicativa este dominio hace referencia al campo donde se ubica la prueba.

Así, una prueba explica un teorema de manera satisfactoria siempre que el agente cuente con los conocimientos para comprenderla y además, sus intereses

¹Traducción e interpretación propia

epistémicos le permitan embarcarse en la búsqueda del *porqué*.

De acuerdo con lo anterior, Delarivière, et al. (2017) sostienen que desde el enfoque contextual y epistémico, la búsqueda de caracterizar la explicación recae en las siguientes dos afirmaciones ²:

Afirmación 1: La prueba P del teorema T tiene valor explicativo si y solo si el explanans ³ está formado por argumentos (en un sentido amplio) que incluyen a P y que otorgan comprensión de T para un agente específico S.

Afirmación 2: La prueba P explica que el teorema T' es verdadero en relación a la persona S y no es verdadero en relación a la persona S'. (p.5)

También desde el enfoque contextual, y en reconocimiento del arduo trabajo de pensadores y filósofos de la PMP, los autores se proponen interpretar las teorías de Steiner (1978), Cellucci (2008) y Lange (2014) en relación con la explicación matemática. El caso de Steiner ha sido ampliamente discutido en cualquiera de las obras que tengan como foco el análisis de las explicaciones en matemáticas y sobre todo de las demostraciones explicativas (ver Mancosu 2001, 2008). Por ello en este trabajo se destacan las ideas de los otros dos autores que, teniendo en cuenta los aportes de Steiner proponen una nueva mirada de la *explicación* en PMP.

En cuanto a Cellucci (2008), Delarivière, et al. (2017) destacan la relevancia que éste le da a las hipótesis como elementos que proporcionan explicación, en la medida que estas desempeñen un papel esencial en la resolución de un problema.

²Traducción e interpretación propia

³Explanans: Premisas o conjunto de afirmaciones que sirven como base para explicar algo.

Sobre la lectura epistémica, Delarivière et al. (2017) interpretan la postura de Cellucci acerca de la explicación, como algo que sobrepasa la propia prueba y que puede ser entendida por medio de dos argumentos:

Argumento 1⁴: Identificar el papel exacto de las premisas y/o suposiciones auxiliares (en lugar de tratarlas como algo dado).

Argumento 2: Identificar cómo una premisa o un supuesto revelan un aspecto que es esencial para el teorema. (p. 14)⁵

Estos argumentos son transformados en el sentido de habilidades que deben reflejarse en un sujeto para comprender el *porqué* del teorema.

Habilidad 1: La habilidad de fundamentar qué premisa o suposición auxiliar está esencialmente conectada con el teorema.

Habilidad 2: La habilidad de resaltar un aspecto esencial que revela esta premisa o suposición y que conduce al teorema. (p.14)

En cuanto a la propuesta de Lange, Delarivière et al. (2017) resaltan que:

Lange (2014) sostiene que la distinción entre pruebas explicativas y no

explicativas radica en la forma en que la prueba extrae un teorema de

sus premisas. El teorema debe considerarse, por un lado, como un

planteamiento o un problema y, por otro, como un resultado...

⁴Esta enumeración solo se presenta con el fin de identificar las cuatro habilidades asociadas a los cuatro argumentos para la demostración explicativa.

⁵Los argumentos llamados 1, 2, 3 y 4 y sus respectivas habilidades asociadas son una traducción e interpretación propia de lo expuesto por Delarivière et al. (2017)

Los resultados tienen una característica que, una vez destacada, da lugar a una explicación. Las demostraciones que explotan esta característica en el planteamiento se reconocen como explicaciones de por qué el teorema es válido. (p.16) ^a

^aTraducción e interpretación propia de las ideas de Delarivière et al. (2017)

Referente a la lectura epistémica de los aportes de Lange (2014), los autores resaltan dos argumentos que sustentan la explicatividad de una demostración en términos de una característica común tanto en el planteamiento como en el resultado.

Argumento 3: Reconocer una característica destacada tanto en el resultado como en el planteamiento.

Argumento 4: Demostrar cómo esta característica es invariable a las transformaciones de la prueba.

Si se traducen estos factores en términos de las habilidades que deben tener los agentes para comprender por qué el teorema es cierto, se tiene:

Habilidad 3: La habilidad de reconocer una característica destacada tanto en el resultado como en el planteamiento.

Habilidad 4: La habilidad de demostrar cómo una característica destacada en el teorema está relacionada con una característica similar en las premisas.

Estas cuatro características nombradas sirven como una guía para indagar por los conocimientos, habilidades e intereses de los agentes frente a distintas pruebas del teorema de la Infinitud de los Números Primos.

Con el objetivo de evaluar la comprensión de los estudiantes, el análisis de las

demostraciones se enfocará en las habilidades de los sujetos de prueba. Pues a la luz de la teoría estas habilidades no son más que las interpretaciones de los factores contextuales que hace Delarivière et al. (2017) de los aportes de Lange (2014) y Cellucci (2008).

2. Una proposición, cuatro pruebas, infinitos números primos

Existen teoremas de los que se tienen muchas pruebas, el más famoso es quizá el Teorema de Pitágoras, con más de trescientas pruebas, la mayoría de ellas de tipo geométrico. Otro caso, igualmente popular no ya por la cantidad (aunque son considerables) sino por la diferencia en los métodos y los conceptos usados para resolverlos, es la demostración de la Infinitud de los Números Primos. Las cuales no se centran solo en las construcciones euclidianas sino que se exploran desde la aritmética, el cálculo o incluso la topología. Además de los distintos métodos de prueba, el teorema antes mencionado tiene una particularidad que lo hace muy atractivo para su análisis: su resultado es crucial en el estudio de los números primos, una de las principales joyas de las matemáticas.

Los números primos son un caso muy especial dentro del enigmático universo matemático, tanto así, que han sido objeto de estudio desde tiempos lejanos. Su naturaleza singular, marcada por propiedades que los distingue del resto de números naturales, los hace fascinantes tanto para estudiosos matemáticos, como para aficionados a las curiosidades numéricas. Pero su importancia no se limita a la matemática pura ni a un especial pasatiempo. Los números primos están en la base de

la criptografía, y por tanto en el seno de la seguridad del mundo digital actual. Los algoritmos de cifrado dependen en gran medida de la dificultad de encontrar y factorizar números primos grandes, una tarea que se vuelve cada vez más compleja a medida que estos números crecen en tamaño.

Si se quisiera arriesgar una definición escolar, un número primo, es un número natural mayor que 1 que solo posee dos divisores: 1 y sí mismo. En otras palabras, solo se deja dividir por estos dos números sin dejar ningún resto. Pero incluso esta mera definición acarrea una extensa discusión sobre si se considera el 1 primo o no, o cómo se extiende la definición a los enteros. Dicha discusión, aunque importante, se escapa del sentido del análisis que este trabajo pretende realizar, por lo que es importante hacer dos claridades: primero, se excluye el número 1 de la lista de números primos; segundo, aunque se reconoce la extensión de la definición de primos para los enteros negativos, el trabajo se centra en los llamados primos “clásicos”, es decir los enteros positivos.

Con esto en mente, se procede entonces a enunciar unos de los resultados más cautivantes de la historia de las matemáticas, tanto por la aparente simplicidad de la proposición como por la riqueza y elegancia de muchas de sus pruebas. A saber:

Existen infinitos números primos.

Veamos ahora cuatro demostraciones esencialmente distintas de dicha proposición. Recordando que, desde el marco contextual adoptado, para que una demostración pueda llegar a ser explicativa, se requiere que, primero, los agentes

tengan el bagaje de conocimientos y habilidades necesarios para entender la demostración, esto implica tanto los conceptos usadas en la misma, como el método por el cual se demuestra; segundo, la demostración debe enmarcarse dentro de los intereses epistémicos de dichos agentes, esto incluye el programa de investigación, la comunidad y el campo dentro del cual se desarrolla la prueba, esto último puede estar relacionado al contexto histórico de la demostración.

2.1 El Teorema de Euclides para los números primos: una milenaria e ingeniosa prueba por construcción

Contexto general de la demostración. Una de las primeras pruebas de la infinitud de los números primos, sino la primera de la que se tiene registro, no podría ser otra que la atribuida al griego Euclides de Alejandría (circa 325 a.C - 265 a.C). Siendo la proposición número 20 del libro IX de los *Elementos*, es decir que tiene una antigüedad de más de dos mil años, esta demostración se ha ganado el lugar de ser una de las más bellas e ingeniosas de las matemáticas. De manera natural, la proposición aparece con unas pequeñas modificaciones, pues en los *Elementos*, el concepto de “Infinito” no está explícito como sí en el teorema enunciado anteriormente, en su lugar, se tiene la proposición: *Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.*

Los *Elementos* como lo menciona Cárlos Álvarez Jimenez (2021), son la obra de un autor (Euclides de Alejandría) pero la intervención de muchos comentadores. Aunque su producción posiblemente se gesta en la Academia de Platón, se puede apreciar la cercanía de Euclides con Aristóteles, en cuanto a la importancia del

tratamiento de las entidades geométricas que objetivan las magnitudes, más que al tratamiento de las magnitudes mismas. Euclides parece dejar de lado, posiblemente por obsoletos, los textos previos escritos bajo el nombre de *tratados*, y con su obra, logra realmente proponer un texto con esa magnitud.

Una de las características más marcadas de su tratado, es el papel lógico deductivo de las proposiciones. Pues contrario a otras obras, en Euclides prima el orden lógico deductivo de las proposiciones más que la aparición histórica de las mismas. Lo que implica un desprendimiento de los intereses históricos de los objetos, para destacar el carácter deductivo y orgánicamente unificado de ellos dentro de los *Elementos*.

La obra de Euclides además, se divide en 13 libros de los cuales los seis primeros hacen referencia a la geometría plana; los libros del séptimo al décimo trata los temas numéricos, como los números primos, radicales y divisibilidad, y los tres últimos comprenden temas sobre geometría de sólidos, poliedros y esferas circunstanciales. Por esta diversidad es de esperarse que los métodos de demostración, aunque sigan un carácter deductivo, presenten divergencia en su presentación; por ejemplo los primeros seis libros se basan en pruebas por construcción geométricas, haciendo uso de líneas y círculos como elementos principales para su desarrollo.

Aunque en el libro IX, que es de especial interés en este trabajo, no se hace uso de las construcciones geométricas, se tiene que: al igual que los demás tomos, Euclides hace uso de registros diagramáticos para representar las situaciones que expone en sus proposiciones (ver *Elementos* de Editorial Gredos 1994), esto se evidencia en el uso de

segmentos de recta para establecer una relación entre el número que es el elemento central de libro IX y la magnitud, que es un elemento central en toda la obra Euclidianana.

Proposición 20 (Libro IX). Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos.

Factor contextual K: Corpus de conocimiento. Para que la demostración por construcción de Euclides llegue a ser explicativa para un sujeto, éste mínimamente debe poder comprenderla. Por el carácter deductivo de los *Elementos*, la proposición demostrada es sostenida por un corpus teórico previamente establecido por Euclides. Así, es necesario que el sujeto conozca y comprenda las siguientes definiciones y proposiciones con el fin de lograr la comprensión de la prueba.

Tabla 1

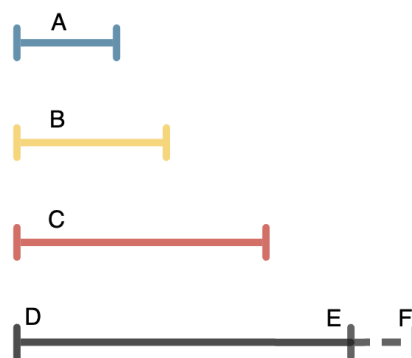
Conocimientos previos necesarios para la demostración de Euclides

Proposición	Enunciado (Libro VII)
Def.1	Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay es llamada una.
Def. 2	Un número es una pluralidad compuesta de unidades.
Def. 12	Un número primo es aquél que sólo es medido por la unidad.
Def. 14	Un número compuesto es aquél que es medido por algún número.
Prop. 31	Cualquier número compuesto es medido por algún número primo.
Prop. 36	Dados tres números, hallar el número menor al que miden.
Prop. 39	Hallar un número que sea el menor que tenga unas partes dadas.

Demostración de Euclides. Esta demostración originalmente aparece en *Elementos* de Euclides. Se toma como referencia la presentación de Sadornil y Varona (2021) y la traducción de la Editorial Gredos de 1994.

Sean A, B y C los números primos propuestos. Digo que hay más números primos que A, B, C .

Pues tómese DE el número menor medido³ por A, B, C , y añádase a DE la unidad EF . Entonces DF es primo o no. Sea primo en primer lugar; entonces han sido hallados los números primos A, B, C , y DF , que son más que A, B, C .



Consideremos ahora que DF no sea primo; entonces es medido por algún número primo: sea medido por el número primo H . Digo que H no es el mismo que ninguno de los números A, B, C . Pues si fuera posible, séalo. Pero A, B, C , miden a DE , entonces H medirá también a DE . Pero mide asimismo a DF ; y H , siendo un número, medirá también a la unidad restante EF ; lo cual es absurdo. Luego H no es el mismo que ninguno de los números anteriores A, B, C . Y se ha supuesto que es primo. Por consiguiente, han sido hallados más números primos que la cantidad propuesta de los números A, B, C .

³Que A «mida» a B , quiere decir que A es factor de B , o bien que A divide a B en partes iguales. Por ejemplo, 2 mide al 4, pero también al 6. Así, la expresión «Tómese DE el número menor medido por A, B, C » es equivalente a decir que DF es el mínimo común múltiplo de A, B, C . Además, como en este caso A, B, C son primos, entonces DF es simplemente el producto de ellos.

Esta demostración puede ser interpretada y escrita en lenguaje aritmético usando la notación convencional o moderna, pues el libro IX es en realidad un compilado de propiedades aritméticas.

Demostración de Euclides (interpretación aritmética). Suponga que existe una cantidad finita de números primos (distintos) $p_1, p_2, \dots, p_r$. Sea $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1$. Si N es primo, N es un primo que no está en nuestra lista, ya que es mayor que todos los demás. Si N no es primo, existirá un primo p que lo divide, pero N tiene resto 1 al dividirlo por p_i para cada $1 \leq i \leq r$, por tanto p no puede ser ninguno de los primos p_i . En ambos casos, la lista inicial está incompleta.

Factor contextual K: Habilidades necesarias para la comprensión de la prueba. Además del corpus de conocimientos previos, es decir las definiciones y las proposiciones usadas, para que esta demostración llegue a ser explicativa para un sujeto, este debe tener intereses concretos y dominio de la obra Euclidiana. Por la naturaleza de los *Elementos*, el sujeto debe contar con habilidades en el manejo de construcciones y la relación entre las magnitudes y los números, así como el uso de segmentos de recta como un registro de apoyo intermedio entre la proposición y la demostración. El manejo del razonamiento deductivo también es necesario para entender a Euclides. Estas habilidades se pueden traducir en términos de intereses epistémicos, pero al ser propios de cada agente, se deben evaluar a la luz de sujetos reales, por ello en el último capítulo se proponen algunas ideas para llevar a cabo una actividad didáctica que pueda ayudar al docente a avanzar en el entendimiento de las demostraciones explicativas.

Basados en los factores contextuales mencionados, los sujetos deben contar con unas habilidades para comprender el *porqué* el teorema se cumple. Para esta prueba, e interpretando a Lange (2014) y Cellucci (2008) desde Delarivière et al. (2017), dichas habilidades se traducen como:

Habilidad 1: El sujeto debe identificar cuales son las hipótesis usadas para la demostración, en esta prueba son de dos tipos: las dadas y las construidas. Del primer tipo sería: A, B y C son números primos. Del segundo tipo: EF (el segmento añadido al menor medido por A, B, C) es la unidad, y la existencia de un H que es primo.

Habilidad 2: El sujeto debe identificar que, primero, si existen tres números primos que son dados, entonces cada uno de ellos es medido por la unidad, y además, con estos tres números es posible hallar un número DE que es el menor medido por ellos (Def. 11 y Prop. 36 y 39 del Libro VII).

Segundo, el sujeto debe identificar que si se construye un nuevo número DF que es la suma de DE con una unidad EF , entonces este nuevo número tiene dos opciones, o bien es primo (Def. 12) o bien es compuesto (Def.14). Por lo tanto se deben analizar dos casos, si es el primer caso, la demostración está resuelta. Si es el segundo caso entonces el número DF por ser compuesto, es medido por algún primo (Prop. 31).

Tercero, el sujeto debe poder proponer un primo H y debe anticipar que ese número es distinto a los primos dados A, B y C . Pues si esto sucede, la demostración finaliza. En este punto es importante reconocer la importancia de proceder por contradicción, para descartar por qué H no puede ser ni A ni B ni C .

Habilidad 3: El sujeto debe reconocer que hay una proposición fundamental que destaca tanto en el resultado como en el planteamiento, a saber la proposición 31: *Cualquier número compuesto es medido por algún número primo*, que en términos modernos hace referencia al Teorema Fundamental de la Aritmética: *todo entero positivo mayor que 1 es un número primo o bien un único producto de números primos*. Esta propiedad conecta el hecho de que, los números que se proponen en la hipótesis inicial tienen una característica única que define otro número (el menor que es medido por ellos) también de manera única, y que esto está conectado con la propuesta de un nuevo número primo H . Es decir, la propiedad principal de *ser un número primo* debe necesariamente atravesar toda la demostración.

Habilidad 4: Los sujetos deben poder discernir que el teorema en profundidad propone la existencia de otro número distinto a los primos ya dados, que o bien puede ser DF por construcción, o bien puede ser H , que es el caso de mayor atención en la demostración, por ser el número primo que mide a DF en el caso compuesto. Esta decisión lleva a un momento cumbre de la demostración donde el sujeto debe proceder por contradicción sin descuidar las hipótesis que ya ha propuesto para usarlas en este momento. Se debe resaltar entonces la importancia de la relación y la diferente entre los números primos y los números compuestos, lo que lleva de nuevo y en el fondo, a recurrir al Teorema Fundamental de la Aritmética.

Son muchas las pruebas que surgieron a partir de la demostración Euclides, y que en el fondo tienen la misma intención: proponer una cantidad finita de números primos y luego, a través de construcciones deductivas, encontrar otro número que

tengan las características de los números primos y que no esté en la lista. Ejemplo de esto, la prueba de Hermite, la de Kummer y la Stieltjes, como lo muestran Rojo (2013) y Rodríguez (2017). Por estas similitudes en la estrategia de demostración, la prueba que se presenta a continuación se destaca como la primera esencialmente distinta a la prueba de Euclides, pues pone el foco en la construcción de una sucesión infinita de naturales, cada uno divisible por un número primo distinto.

2.2 Goldbach y los números de Fermat: una prueba por sucesiones que se aleja categóricamente de Euclides

Contexto general de la demostración. A la par de teoremas tan famosos como el Teorema de Pitágoras, el Teorema Fundamental del Álgebra o la Incompletitud de Gödel, se encuentran las conjeturas, es decir, verdades supuestas o si se quiere, teoremas en potencia. Dentro de las más famosas se encuentra la conjetura de Goldbach, la cual debe su nombre al gran matemático prusiano Christian Goldbach (1690-1764), esta enuncia que: *Todo número par mayor que 2 puede expresarse como la suma de dos números primos.* Esta conjetura, como casi todos los problemas en matemáticas, han llevado a que grandes pensadores del campo se embarquen en la empresa de conseguir una demostración, y en muchos casos, aunque no se logre este cometido, las investigaciones arrojan resultado tan inesperado como sorprendentes que llegan a convertirse en grandes aportes a las matemáticas, aunque en un principio no fuera este el objetivo principal.

Ejemplo por excelencia: la tarea de demostrar el quinto postulado de Euclides como un teorema y el surgimiento de las geometrías no-euclidianas como resultado.

En el caso de los intentos por demostrar la Conjetura de Goldbach, también se han quedado en medio innumerables aportes a la teoría de números.

Aunque esta conjetura sea lo primero en que se pueda pensar cuando se escucha una referencia al matemático prusiano, no pasan desapercibidas además de sus notables obras, las relaciones que este tenía con otros grandes matemáticos. Por ejemplo, el curioso caso de sus correspondencias por correo con el matemático suizo Leonhard Euler. En estas, además de diversos aportes a la teoría de números, el análisis matemático, la filosofía e incluso la astronomía, se encuentra otra interesante demostración del Teorema de la Infinitud de los Números Primos, que destaca entre otras cosas, por ser la primera demostración esencialmente diferente a la de Euclides, pues se aleja de la construcción euclidiana, para brindar una bella prueba basada en sucesiones infinitas y en los particulares números de Fermat. (Sadornil y Varona, 2021, p. 307)

Para llegar a la demostración propuesta por Goldbach, es preciso revisar los lemas y teoremas que la sostienen. Además, como el sentido del análisis de este trabajo es brindar una caracterización de la demostración y su función explicativa en términos de los factores contextuales K e I, es prudente no sólo enunciar dichos lemas y teoremas como propiedades sino demostrarlos.

<i>Teorema:</i> Existen infinitos números primos.

Factor contextual K: Corpus de conocimiento. La demostración se sostiene en la definición de los números de Fermat, a saber, números de la forma:

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Estos números además, cumplen las siguientes propiedades:

Tabla 2

Conocimientos previos necesarios para la demostración de Golbach

Propiedad	Enunciado
Propiedad 1	Todos los números de Fermat son impares.
Propiedad 2	Un número de Fermat F_n es igual al producto de sus anteriores más 2. $F_n = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} + 2$
Propiedad 3	Para $n \neq m$, los números de Fermat F_n y F_m son coprimos. Es decir, su único factor común es 1.

Demostración de las tres propiedades:

Propiedad 1: *Todos los números de Fermat son impares.* Esta propiedad se sostiene por cómo se definen los números de Fermat, pues estos al ser potencias de dos más uno, siempre tendrán la forma de un número impar.

Propiedad 2: *Un número de Fermat F_n es igual al producto de sus anteriores más 2.* Es decir,

$$F_n = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} + 2 \quad (2)$$

reescribiendo (2) se tiene

$$F_n - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} \quad (3)$$

Esta propiedad, que en realidad es un lema, se demuestra usando el método de inducción. Primero, se prueba que la propiedad (2) se cumple para $n = 1$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 4 + 1 = 5 = 3 + 2 = (2^{2^0} + 1) + 2 = F_0 + 2 \quad (4)$$

Segundo, se supone que la propiedad es válida para $n = k$ (Hipótesis de Inducción) y se establece la validez de la propiedad para $n = k + 1$

Se tiene que:

$$F_k - 2 = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{k-1} \quad (\text{H.I.})$$

Ahora bien,

$$F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{k-1} \cdot F_k = (F_k - 2) \cdot F_k \quad (5)$$

Usando la hipótesis de inducción (H.I.) Usando la definición de número de Fermat (1), y reemplazando en (5), se tiene que:

$$\begin{aligned} F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{k-1} \cdot F_k &= (2^{2^k} + 1 - 2) \cdot (2^{2^k} + 1) \\ &= (2^{2^k} - 1) \cdot (2^{2^k} + 1) \\ &= 2^{2^{k+1}} - 1 \\ &= 2^{2^{k+1}} - 1 + (1 - 1) \\ &= (2^{2^{k+1}} + 1) - 2 \\ &= F_{k+1} - 2 \end{aligned} \quad (6)$$

Así, se ha mostrado que:

$$F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{k-1} \cdot F_k = F_{k+1} - 2 \quad (7)$$

Como se cumple para $n = 1$ (como se mostró en (4)) y para $n = k + 1$ (como se mostró en (7)), entonces se cumple para todo n . Finalizando así la prueba por inducción.

Propiedad 3: Para $n \neq m$, los números de Fermat F_n y F_m son coprimos.

Este lema se demuestra por contradicción. Primero se supone que F_n y F_m tienen un divisor en común t , esto es $t|F_n$ y $t|F_m$, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $m < n$. Por el lema anterior (2) se tiene que

$$F_n = F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} + 2$$

Despejando queda

$$F_n - F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} = 2$$

Como F_n es divisible por t por hipótesis; y además $F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1}$ también es divisible por t , pues contiene a F_m . Entonces $F_n - F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1}$ también es divisible por t . Por tanto, $t|2$

Así o bien $t = 2$ o bien $t = 1$. Es claro que t no puede ser 2, pues $t|F_m$ y $t|F_n$. Pero por la propiedad 1 de los números de Fermat, F_m y F_n son números impares, y por definición un número impar no puede ser dividido por 2. Así, la única posibilidad es que $t = 1$. Como F_m y F_n son cualquiera, entonces cualquiera dos números de Fermat son coprimos.

Demostración de Goldbach. Esta demostración originalmente aparece en una carta enviada por Goldbach a Euler el 20 de julio de 1730, recopilada por Fuss (1843). Se toma como referencia la presentación de Rodriguez (2017) y Rojo (2013).

La idea de Goldbach consiste en que cualquier sucesión infinita de enteros positivos $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ tal que $(F_i, F_j) = 1$, con $i \neq j$, conduce a una prueba del teorema. Pues cada elemento de la sucesión será divisible por un primo distinto y como la sucesión es infinita entonces habrá infinitos primos.

Sea F_n y F_m con $n \neq m$, elementos de la sucesión, cada elemento de la sucesión será divisible por un número primo, esto, en virtud de la Proposición 31 de Euclides también conocido como Teorema Fundamental de la Aritmética. O sea que, existen dos números primos P_1 y P_2 , tal que, $P_1|F_n$ y $P_2|F_m$.

Pero por propiedad 3, F_n y F_m son coprimos, es decir que no tienen divisores en común. Así, cualquier P_n que divida a F_n no dividirá a F_m , por lo tanto P_1 es distinto a P_2 . Así, cada número de Fermat es divisible por, al menos un primo distinto, y como existen tantos números de Fermat como naturales (o sea infinitos), existen también infinitos primos.

Factor contextual K: Habilidades necesarias para la comprensión de la prueba.

Habilidad 1: El sujeto debe reconocer las hipótesis usadas para la demostración. En este caso todas las hipótesis consideradas están fuera del enunciado del teorema *Existen infinitos números primos*, pues la demostración se centra en la infinitud de los primos heredada de la infinitud de la succión conformada por los números de Fermat. Así, para plantear las hipótesis de la demostración se deben conocer las propiedades de los números de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Esto implica la necesidad de saber cómo están definidos los números de Fermat, de ahí la propiedad

de que sean impares y también que por cada número natural exista un número de Fermat asociado; también, que cada número de Fermat, o bien es primo o bien es producto único de números primos (Teorema Fundamental de la Aritmética) de ahí la posibilidad de que exista un primo que lo divida; y además, que los números de Fermat son coprimos dos a dos.

Habilidad 2: El sujeto debe ser capaz de reconocer, primero, que existen infinitos números de Fermat, y que para el caso de esta demostración es suficiente tomar dos números cualquier F_n y F_m con $n \neq m$, sin pérdida de generalidad. También es importante que pueda concluir que, al hacer uso del Teorema Fundamental de la Aritmética, cada número de Fermat F_n tendrá al menos un divisor primo P_n asociado. Con esta información, el sujeto puede aplicar la propiedad 3 que implica que los números de Fermat son coprimos o primos relativos dos a dos, para concluir la existencia de dos números primos distintos, que se pueden generalizar a infinitos.

Habilidad 3: Es igualmente importante que los sujetos puedan proponer una sucesión infinita que, aunque no es una sucesión de números primos, es una sucesión que tiene dos características especiales: primero, que en esta sucesión hay tantos elementos como números naturales; segundo, que para cada par de elementos de la sucesión existen dos números primos distintos. Estas dos características deben estar presentes a lo largo de la demostración pues, finalmente, lo que se pretende probar es que hay tantos primos como números de Fermat, pero como hay tantos números de Fermat como números naturales, entonces la implicación de que los números de Fermat son infinitos sostiene que los números primos también deben ser infinitos.

Habilidad 4: Los sujetos deben reconocer la existencia de al menos un primo para cada número de Fermat, luego al poder asociar ese número primo a cada número de Fermat de manera única por medio de la propiedad 3, entonces se asegura de que existirán tanto primos como número de Fermat. Por ello es que los sujetos previo a enfrentarse a la demostración, puedan asegurarse de que para cualesquiera dos números de Fermat, estos no tienen factores primos en común, es decir que puedan probar, convencerse y poder dar razones de por qué se cumple la propiedad 3 y bajo qué circunstancias. Es por medio de la demostración de la propiedad 3, que los sujetos pueden relacionar otras propiedades de los números de Fermat, que son igualmente fundamentales para su comprensión y uso posterior. Una vez que el sujeto reconozca las propiedades, características y resultados de los números de Fermat, podrá entrar a comprender la demostración de Goldbach de la infinitud de los números primos.

Al igual que la demostración de Euclides para la infinitud de los números primos, la conjetura de Goldbach ha servido como base para diversas pruebas que buscan demostrar este mismo principio. Un ejemplo es la prueba de Wunderlich, la cual sigue la lógica de Goldbach y utiliza una sucesión conocida, como la de Fibonacci, para extender sus propiedades en la demostración. Otros autores como Schorn, Harris y Srinivasan han empleado un enfoque un tanto distinto, pues en lugar de utilizar sucesiones conocidas, como la formada por los números de Fermat o la sucesión de Fibonacci, emplean sucesiones que se van construyendo con el propósito de encontrar el máximo común divisor entre sus elementos, y en algunos casos como el de Schorn, suponer además un conjunto finito de números primos, para luego

encontrar otro número primo que no pertenezca al conjunto ya establecido, lo que genera una contradicción. (Para ver más información de estas y otras pruebas dirigirse a Rodríguez (2017), capítulo 3)

2.3 La prueba de Euler usando series: más allá del teorema de la infinitud de los primos

Contexto general de la demostración. Si bien su correspondencia con Goldbach es notable, la fama del matemático Leonhard Euler (1707-1783) reside en eventos que van más allá de estas cartas. Considerado uno de los matemáticos más prolíficos de la historia, sus contribuciones abarcan un sinnúmero de campos, dejando una huella imborrable en el desarrollo del conocimiento humano.

Uno de los campos donde más se destacó es sin duda en el campo de las matemáticas, pues por ejemplo, gracias a sus aportes al cálculo infinitesimal nace la base para el análisis moderno; otro gran aporte está en la teoría de números, gracias a la conexión que logra establecer entre los números primos y la función zeta de Riemann; por su parte en geometría, logra hallar una relación de colinealidad fundamental entre el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo; y así se podría continuar.

Además de ser recordado por sus grandes contribuciones en diversas áreas de las matemáticas, Euler también dejó sembrado su legado en otras ciencias, por ejemplo, su estudio sobre ecuaciones para describir el movimiento de un cuerpo rígido o sus contribuciones en óptica, le valieron distintos reconocimientos en el campo de la Física; también es destacable su proyecto astronómico desde cual ayudó a determinar

con exactitud la órbita de algunos planetas, entre otros. Por todo esto se puede afirmar que Euler es uno de los grandes pensadores del siglo XVIII, o incluso uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos.

Ahora bien, la demostración de Euler para la infinitud de los números primos es, al igual que toda su obra, fascinante. Pues en realidad, consiste en calcular la serie de los inversos de los números primos. Como muestra Sadornil y Varona (2021), en 1737 Euler prueba que:

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \infty \quad (8)$$

La prueba recae en el hecho de que, si los primos fueran finitos, la serie sería convergente. Es importante aclarar, como lo hacen Sadornil y Varona (2021), que la demostración a continuación es una interpretación bastante libre de la idea original de Euler, pues para el tiempo en que el matemático suizo propuso esta prueba (siglo XVII), el rigor matemático no estaba instaurado en el seno de las demostraciones, por tanto, Euler como tantos otros matemáticos, se tomaban la libertad creativa de incluir el ingenio y la intuición en muchas de sus pruebas. (p.310)

Teorema de Euler: La serie de los inversos de los números primos es divergente.

Factor contextual K: Corpus de conocimiento. La demostración se base en conceptos claves de series como el Productor de Euler, pero también otras propiedades y resultados del análisis matemático como sigue:

Tabla 3

Conocimientos previos necesarios para la demostración de Euler

Propiedad	Enunciado
Función zeta de Riemann	$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1 \quad (9)$
Producto de Euler	Sea f una función multiplicativa tal que la serie $\sum_n f(n)$ es absolutamente convergente y completamente multiplicativa, entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)} \quad (10)$
Serie armónica	La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (11)$ Es divergente.

Demostración de Euler. Para esta prueba se toma la interpretación moderna de la propuesta por Euler en su *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748, presentada en Sadornil y Varona (2021) y Rojo (2013).

La idea central de la demostración de Euler, es partir de una función conocida, la función Zeta de Riemann, y aplicando la fórmula del Producto de Euler, proponer una igualdad de términos de series y ver si estas convergen o divergen. Dentro de estos términos aparecerá la serie de los inversos de los números primos.

Como en la función zeta de Riemann (9) se tiene que $s > 1$, entonces la serie es convergente, además (9) es complementamente multiplicativa, es decir que no es la

función nula y cumple que: $f(n \cdot m) = f(n) \cdot f(m)$. Por lo anterior, a (9) se le puede aplicar la formula Producto de Euler (10). Y se tiene que:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad s > 1 \quad (12)$$

Tomando logaritmo a ambos lados de la igualdad, queda:

$$\log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}, \quad s > 1 \quad (13)$$

Por otro lado, nótese que $0 \leq -\log(1-x) \leq x + x^2$ cuando $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Así se puede decir que $-\log(1-x) = x + R(x)$ para alguna función $R(x)$ talque $|R(x)| \leq x^2$ cuando $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Por lo que (13) queda como sigue:

$$\log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = - \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p R \left(\frac{1}{p^s} \right), \quad (14)$$

Ahora, si se hace que $s \rightarrow 1$ en (14) (pues lo que interesa es p y no p^s), la suma $\sum_p R \left(\frac{1}{p^s} \right)$ converge pues, $|R(x)| \leq x^2$. Por su parte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ tiende a ∞ cuando $s \rightarrow 1$, pues esta es la serie armónica (11) que es divergente.

Luego, para que la igualdad se conserve debe pasar que $\sum_p \frac{1}{p^s}$ sea convergente cuando $s \rightarrow 1$, esto es $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \infty$. Tal como se quería demostrar.

Factor contextual K: Habilidades necesarias para la comprensión de la prueba.

Habilidad 1: Teniendo en cuenta que el teorema que se quiere demostrar va más allá de la infinitud de los números primos, pues se trata de la divergencia de la serie de los inversos de los números primos, las hipótesis a considerarse deben ser parte del corpus teórico del análisis, específicamente las propiedades de las series infinitas y su convergencia.

Inicialmente, el sujeto debe reconocer la necesidad de partir de una serie ya conocida y estudiada, como la función zeta de Riemann, la cual tiene la propiedad de ser una serie infinita que converge. Después en algún punto de la demostración debe hacer algunas concesiones que parecieran escapar de todo argumento explicativo, como suponer la existencia de una función que, si bien no define quién es, cumple una propiedad muy específica: ser acotada por el cuadrado de una función llamada x . Es decir, el sujeto debe hacer un proceso de abstracción de una función en la cual lo importante no es la función en sí misma, sino las propiedades que cumple.

Habilidad 2: El sujeto debe poder identificar las condiciones para que se cumpla la fórmula Producto de Euler, dada la función zeta de Riemann, esto es, que sea completamente multiplicativa y absolutamente divergente. Además el sujeto debe poder aplicar las definiciones y propiedades para la expansión por series de potencia de la función logaritmo natural, y el comportamiento de estas funciones en relación con las series infinitas.

Habilidad 3: El punto principal en las premisas es el reconocimiento de la

función zeta de Riemann y su convergencia. De esta se desprende toda la estructura de la demostración y las aplicaciones, verificaciones o sustituciones que la función permite directamente o con supuestos que son considerados ciertos a medida de que avanza la prueba. Otra característica que, aunque no se estipule desde el inicio como hipótesis principal, es importante para la demostración, es la condición de que si s tiende a 1 en la función zeta de Riemann, lo que en realidad se produce es la ya conocida serie armónica, la cuál se destaca por ser una serie divergente.

Habilidad 4: Los pasos claves para comprender esta demostración se dan en tres momentos. Primero cuando se comprueban las hipótesis para que, dada la función zeta de Riemann, se pueda concluir la fórmula Producto de Euler. Esto requiere el manejo del corpus teórico relativo al análisis, pues es necesario el reconocimiento de todas las propiedades y condiciones que pueden ser aplicables tanto a la Función zeta (9) como la fórmula Producto de Euler (10).

Segundo, cuando se supone la serie armónica a partir de la función zeta de Riemann. Este momento es crucial pues aquí se particulariza la suma original para el caso cuando s tiende a 1, así se pasa de tener una serie infinita convergente a una serie igualmente infinita pero divergente.

Tercero, la conclusión a la que se llega en el punto anterior debe de usarse con mucho cuidado al momento de comparar las “cosas” a ambos lados de la igualdad (14) en términos de su convergencia o divergencia, pues cuando se tiene una serie divergente igualada a una serie o composición de series convergentes más otra un “algo” desconocido, se concluye que ese “algo” necesariamente es divergente para que

la igualdad tenga sentido.

Por último y un momento posterior a la demostración de Euler, es poder ver que, aunque se está demostrando la divergencia de los inversos de los primos, este resultado está ligado a la infinitud de los primos, pues si estos fueran finitos la serie de los inversos tendría que converger.

Al igual que las demostraciones anteriores para la infinitud de los números primos, la demostración de Euler ha servido como base para diversas pruebas que buscan demostrar este mismo principio. Un ejemplo de esto son las pruebas de Chebysheff, Braun y Perott. A grandes rasgos estas pruebas consisten en suponer una cantidad finita de números primos y operando en una serie finita llegar a una contradicción, que implica que por un lado de la igualdad una serie es convergente y por otro una serie es divergente, así, para que la igualdad se conserve tienen que existir infinitos números primos. (Para ver más información de estas y otras pruebas dirigirse a Rodríguez (2017), capítulo 4)

2.4 Un salto al siglo XX: Fürstenberg propone una prueba topológica

Contexto general de la demostración. Aunque en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler irrumpió con un ingenioso argumento basado en la convergencia de las series infinitas para demostrar la infinitud de los primos, esta prueba se sigue enmarcando en las técnicas matemáticas ya conocidas de la época. Así, un salto significativo se presenta en el siglo XX con la aparición de la prueba topológica de Fürstenberg. Esta propuesta, desarrollada por el matemático Hillel (Harry) Fürstenberg a mediados del siglo pasado, representa un cambio de paradigma

en la demostración de la infinitud de los primos.

Nacido en 1935, Fürstenberg destacó desde temprana edad por sus contribuciones a la ciencia matemática. Su trabajo se caracterizó por la aplicación innovadora de la teoría de la probabilidad y los métodos de la teoría ergódica a campos como la teoría de números y los grupos de Lie. Esta visión interdisciplinaria le valió numerosos reconocimientos, entre ellos el prestigioso premio Abel conocido como el “nobel de matemática” en el año 2020. Acorde con la Academia de Ciencias y Letras de Noruega, entidad que otorga el reconocimiento, Hillel Fürstenberg y Gregory Margulis (Moscú, 1946) reciben este premio «por haber sido pioneros en el uso de métodos de probabilidad y de dinámica en la teoría de grupos, la teoría de números y la combinatoria».

Además de este hito, la prueba topológica de Fürstenberg sobre la infinitud de los primos, desarrollada cuando el matemático tenía apenas veinte años, generó gran impacto en la comunidad académica por su originalidad y belleza. Esta demostración que se basa en la definición de una topología particular sobre el conjunto de los números enteros, ha permitido abordar el problema desde una perspectiva novedosa.

<i>Teorema:</i> Existen infinitos números primos.

Factor contextual K: Corpus de conocimiento. Para llegar a la demostración es preciso el conocimiento de algunos saberes relacionados con conceptos topológicos.

Tabla 4

Conocimientos previos necesarios para la demostración de Fürstenberg

Propiedad	Enunciado
Estructura topológica	Sea X un conjunto no vacío. Una topología sobre X es una familia τ de subconjuntos de X que satisface: 1. $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$ 2. La unión arbitraria de elementos de τ está en τ. 3. La intersección finita de elementos de τ está en τ. Los elementos de τ se llaman <i>abiertos</i> de la topología. Se llama <i>espacio topológico</i> al conjunto dotado de una topología y se denota por (X, τ)
Subconjunto cerrado	Sea (X, τ) un espacio topológico. Se dice que $F \subseteq X$ es <i>cerrado</i> si su complemento es abierto, esto es $(X - F \in \tau)$
Base para la topología	Sea el espacio topológico (X, τ) y β una colección de subconjuntos de X. Diremos que β es una base de abiertos si verifica que todo abierto de la topología τ puede expresarse como una unión de elementos de β.
Definición alternativa para base	Decimos que β es una base para la topología τ si, dado un abierto U y un punto $x \in U$, existe un $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq U$

Demostración de Fürstenberg. Esta demostración aparece en *On the infinitude of primes* de Fürstenberg, 1955. Se toma como referencia la presentación de Rocha (2007) y Rojo (2013).

La demostración consta de tres momentos: Primero se propone una topología

para los enteros $\mathbb{Z}$ y se comprueba que τ así definida efectivamente cumple los tres axiomas para ser una topología. Segundo, se presentan dos propiedades fundamentales para esta topología y se demuestran. Tercero, se realiza la demostración de la infinitud de los primos apoyándose en las propiedades anteriormente demostradas.

1. Se define una topología en el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ (espacio topológico entero), a partir de una base de abiertos. Los elementos de la base son las sucesiones aritméticas $S(a, b)$ dadas por:

$$S(a, b) = \{an + b | n \in \mathbb{Z}\} = a\mathbb{Z} + b \quad (15)$$

De la definición alternativa de base de abiertos se tiene que: U es un abierto sii cada $x \in U$ admite algún entero a distinto de cero tal que $S(a, x) \subseteq U$. Se comprueba que (15) define una topología sobre $\mathbb{Z}$:

1. $\emptyset$ es abierto y $\mathbb{Z}$ es igual a $S(1, 0)$, entonces también es abierto.
2. Dado x para cada abierto U_i , existirá a_i tal que $S(a_i, x) \subseteq U_i$, por tanto,
$$\bigcup_{i \in I} S(a_i, x) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$
3. Sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos. Sea $x \in U_1 \cap U_2$ con los respectivos a_1 y a_2 . Se toma a como el mínimo común múltiplo de a_1 y a_2 , entonces se tiene que $S(a, x) \subseteq S(a_i, x) \subseteq U_i$, por lo tanto $S(a, x) \subseteq U_1 \cap U_2$. Es decir que la intersección de abiertos, es un abierto.

Como se verifican los tres axiomas, entonces (15) define una topología sobre $\mathbb{Z}$.

2. Para avanzar en la demostración, es necesario destacar tres propiedades de esta topología:

- Para cualquier $a > 0$, se tiene que $S(a, b)$ es abierto y cerrado.

Por definición de la sucesión aritmética como base para la topología, se tiene que $S(a, b)$ es abierto. Ahora, se comprueba que $S(a, b)$ es cerrado como sigue:

De la definición de cerrado se tiene que:

$$S(a, b) \text{ es cerrado ssi } S(a, b)^c \text{ es abierto}$$

Además, $S(a, b)$ puede escribirse como: $S(a, b) = \mathbb{Z} - \bigcup_{j=1}^{a-1} S(a, b+j)$ Pero se sabe que en τ la unión arbitraria de abiertos es abierto. Así, Unión $\bigcup_{j=1}^{a-1} S(a, b+j)$ es abierto. Usando la definición de complemento, lo anterior implica que $S(a, b)$ es cerrado. Por tanto, $S(a, b)$ es ambos: abierto y cerrado.

- Ningún subconjunto de $\mathbb{Z}$ finito puede ser abierto.

La propiedad es una consecuencia directa de la definición de un conjunto abierto

U ya que $S(a, b)$ es infinito y $S(a, b) \subseteq U$ Sea $U \subseteq \mathbb{Z}$ finito. Esto es

$U = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ Suponer que U es abierto. Como $S(a, b)$ es infinito por

definición y $U \subseteq \mathbb{Z}$ es abierto, entonces por definición de base, $S(a, b) \subseteq U$. Pero

esto es absurdo, pues algo infinito no puede estar contenido en algo finito. Por

tanto, se niega la suposición y se concluye que si U es finito entonces no puede

ser abierto.

$$\blacksquare \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ primo}} S(p, 0)$$

Para cada $k \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ se puede encontrar un primo p tal que $k = m \cdot p$, con m entero. Esto implica que $k \in S(p, 0)$, es decir que k pertenece a $\bigcup_{p \text{ primo}} S(p, 0)$.

$$\text{Así, } \mathbb{Z} - \{-1, 1\} \subseteq \bigcup_{p \text{ primo}} S(p, 0).$$

De manera análoga se prueba que $\bigcup_{p \text{ primo}} S(p, 0) \subseteq \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$.

Así

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \text{ primo}} S(p, 0) \quad (16)$$

3. Para demostrar la infinitud de los números primos, de se supone que P es finito, esto es $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. Entonces de (16) se tendría que:

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = S(p_1, 0) \cup S(p_2, 0) \cup \dots \cup S(p_n, 0) \quad (17)$$

Por la primera propiedad del punto 2, se tiene que $S(p_i, 0)$ son cerrados. Pero la unión finita de conjuntos cerrados es cerrado. Así, $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ es cerrado. Ahora bien, si se toma el complemento se tiene que:

$$(\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\})^c = \{-1, 1\} \quad (18)$$

De (18) se puede concluir dos cosas: primero, $\{-1, 1\}$ es finito pues solo tiene dos elementos, el 1 y el -1; segundo, $\{-1, 1\}$ es abierto, pues su complemento es cerrado. Pero esto es absurdo, ya que la propiedad 3 mostró que ningún conjunto finito puede ser abierto, lo que es equivalente a decir que todo conjunto abierto no

vacío tiene que ser infinito. Por lo tanto P es infinito, es decir que existen infinitos números primos.

Factor contextual K: Habilidades necesarias para la comprensión de la prueba.

Habilidad 1: Por la naturaleza de la prueba es importante que el sujeto tenga conocimiento de los conceptos básicos de topología como: espacio topológico, topología, base para una topología (con su definición primera y alternativa), la definición de abierto y la definición de cerrado en términos del complemento. Además, es importante el manejo y reconocimiento de toda la simbología propia de esta rama. Sumado a estos conceptos y definiciones, es importante que el sujeto pueda proponer o aceptar la topología definida sobre $\mathbb{Z}$ a través de las sucesiones aritméticas $S(a, b)$. Siendo esta última la base para la topología y comprobando todas las propiedades de base que se puedan tener. Aunque la demostración propiamente dicha se pueda realizar en unas líneas más bien cortas, tanto el sustento teórico como la fuerza explicativa de la prueba recae en la aceptación, ojalá convertida en justificación, de tres importantes propiedades de la topología así definida, relacionadas con los abiertos de τ .

Habilidad 2: El sujeto debe reconocer las conclusiones a las que puede llegar en cada paso de la demostración dependiendo de los axiomas o propiedades que se puedan comprobar. En este punto es importante, sobre todo, las definiciones y propiedades que pueden ser usadas a partir de la idea general de base para una topología, pero aplicadas particularmente a las progresiones aritméticas $S(a, b)$ y su

definición. Por ejemplo, por cómo están definidas las progresiones, en términos de a y b , y además por la propiedad de ser abiertos, se permite la extracción de diferentes conclusiones bien sea en términos de uniones o complementos de las mismas.

Habilidad 3: El sujeto debe reconocer y aplicar de manera reiterativa la definición de abiertos y su contraparte la definición de cerrado usando el complemento. Esta definición que es fundamental para el estudio de los espacios topológicos, es igualmente imprescindible desde la definición de la topología sobre $\mathbb{Z}$, la comprobación de los tres axiomas de espacio topológico, las tres propiedades destacables de la topología sobre $\mathbb{Z}$ y su demostración, y la demostración de la infinitud de los números primos propiamente dicha. Todo esto hace de la noción de abierto la característica más destacable de la prueba.

Habilidad 4: Aunque la definición de la base para la topología es un momento crucial para el desarrollo de la prueba, el momento cumbre se da cuando se propone el supuesto de que P es finito, para después, a través del tratamiento y la reescritura de los abiertos en términos de $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ acompañado de la definición de complemento, se llega a una contradicción que implica que lo supuesto no puede pasar, y por lo tanto, P es infinito. Se evidencia como, una vez más, la característica destacada en la habilidad 3 ser un abierto es fundamental para la conclusión de la prueba.

Otras demostraciones que usan argumentos topológicos y siguen la igualdad (16) propuesta por Fürstenberg son la Cass y Wildenberg, Mercer y Carlson. (Para ver más información de estas y otras pruebas dirigirse a Rodríguez (2017), capítulo 6)

3. Elementos de la práctica matemática de profesores en formación para las pruebas explicativas

Como se mostró anteriormente hay dos factores contextuales que deben ser tenidos en cuenta para determinar si una prueba es explicativa o no en términos de las matemáticas que posee un cierto agente, a saber, los conocimientos y los interés epistémicos.

El factor contextual K, de las habilidades y conocimientos, se presentó de manera ampliada e individual para cada una de las cuatro pruebas de la Infinitud de los Números Primos. En términos de cuáles son los saberes previos necesarios para la prueba y cuáles son las habilidades que un sujeto debe tener para comprender la misma, es decir todo lo relacionado a cuáles son las matemáticas del sujeto o agente.

En este capítulo y persiguiendo el objetivo de esbozar una caracterización que de cuenta de los elementos necesarios para catalogar una prueba como explicativa, y que además puedan ser usados por los docentes en sus clases, se propone un análisis de manera comparativa entre las necesidades requeridas en cada una de las cuatro pruebas expuestas.

Por otro lado, el factor contextual I, de los intereses epistémicos se explora, aunque de manera ideal, en el siguiente y último capítulo.

Es importante destacar que desde este enfoque una prueba es explicativa sólo en función del auditorio o el agente al que se presente. Pues desde el marco concetual este trabajo se adhiere a dos afirmaciones:

Afirmación 1: La prueba P del teorema T tiene valor explicativo si y solo si el explanans ¹ entendimiento del teorema. está formado por argumentos (en un sentido amplio) que incluyen a P y que otorgan comprensión de T para un agente específico S.

Afirmación 2: La prueba P explica que el teorema T' es verdadero en relación a la persona S y no es verdadero en relación a la persona S'. (Delarivière et al, 2017, p. 5)

3.1 Matemáticas de los agentes (ideales o reales)

Como los saberes previos necesarios para la prueba están expuestos en tablas anteriores que facilitan su exposición (Ver tabla 1, 2, 3, 4), se proponen las siguientes tablas como instrumento de recolección de datos para el análisis de las distintas pruebas en términos de las habilidades necesarias para su comprensión.

Habilidad 1: La habilidad de fundamentar qué premisa o suposición auxiliar está esencialmente conectada con el teorema.

En la tabla 5 se muestran las premisas o suposiciones que el sujeto debe realizar en cada una de las pruebas del teorema de la Infinitud de los Números Primos.

Para esta primera habilidad se observa que las cuatro pruebas tienen casi la misma cantidad de hipótesis que deben ser aceptadas o supuestas, lo que difiere es la naturaleza de estas. La prueba de Euclides recae en el supuesto de la existencia de algunos números primos finitos para demostrar su infinitud; la prueba se construye a partir de estas hipótesis por lo tanto, se puede establecer una conexión directa entre las premisas y lo que se quiere demostrar.

¹Explanans: Premisas o conjunto de afirmaciones que sirven como base para explicar algo.

Tabla 5

Matemáticas de los agentes relacionadas a la primera habilidad

	Euclides	Goldbach	Euler	Fürstenberg
H1	■ A, B y C son números primos ■ EF es la unidad ■ H es un número primo	■ Todos los números de Fermat son impares. ■ Un número de Fermat F_n es igual al producto de sus anteriores más 2 ■ Para $n \neq m$, los números de Fermat F_n y F_m son coprimos.	■ Función zeta de Riemann ■ Serie armónica ■ Producto de Euler	■ Base para el espacio topológico entero (Progresiones aritméticas)

Esto puede resultar explicativo para los estudiantes pues tanto el teorema como las hipótesis viven de manera orgánica en un mismo universo, el de los números primos.

Por su parte, las pruebas de Goldbach y Euler hacen uso de elementos ya definidos dentro de las matemáticas y sus respectivas propiedades. Se requiere así aceptar todo el grueso teórico de los números de Fermat o las Series Infinitas, respectivamente, para poder desarrollar la prueba. Esto puede suponer un estancamiento en términos de avanzar hacia la explicatividad de la prueba pues se deben hacer supuestos que habitan en teorías matemáticas, que si bien son lo suficientemente robustas para sostenerse por sí mismas, requieren de demostraciones que, naturalmente, también deberían ser explicativas para satisfacer al sujeto que prueba.

La prueba de Fürstenberg se centra en propiedades tanto topológicas como numéricas, en este caso, el espacio topológico entero y las propiedades de las progresiones aritméticas. Esta prueba, además de necesitar la aceptabilidad de unas hipótesis enmarcadas en una teoría suficientemente robusta, requiere de una aprehensión conceptual lo bastante desarrollada para comprender los objetos abstractos de la topología.

Habilidad 2: La habilidad de resaltar un aspecto esencial que revela esta premisa o suposición y que conduce al teorema.

En la tabla 6 se muestran las propiedades que se deben comprobar, dadas las premisas o suposiciones anteriores según cada una de las pruebas.

Para el caso de Euclides, esta segunda habilidad señala la necesidad de verificar dos definiciones y dos proposiciones, todas sobre propiedades de los números. Se necesita así por la naturaleza de la obra euclidiana, reconocer el corpus teórico de los *Elementos*. Esta prueba puede resultar más explicativa pues hace uso de propiedades del objeto que se teoriza, es decir los números primos. Esto brinda una conexión directa entre el teorema y los terceros enunciados que se verifican.

En Goldbach las propiedades que los sujetos deben verificar versan sobre los números de Fermat y el Teorema Fundamental de la Aritmética. Esta prueba puede alcanzar un nivel aceptable de explicativa pues las propiedades que se están comprobando hacen uso de conjuntos igualmente infinitos, como el conjunto de los naturales y el de sucesiones compuestas por números de Fermat. La conexión radica en la infinitud de estos últimos.

Tabla 6

Matemáticas de los agentes relacionadas a la segunda habilidad

	Euclides	Goldbach	Euler	Fürstenberg
H2	▪ Def 12. ▪ Def. 14. ▪ Prop. 31. ▪ Prop. 36.	▪ Teorema Fundamental de la aritmética	▪ Comprobar la formula Producto de Euler ▪ Comprobrar igualdad de series convergentes y divergentes	▪ Comprobar propiedades sobre espacios topológicos

En la prueba de Euler se deben verificar las propiedades que cumple la función zeta de Riemann para un caso muy particular y el contraste con la fórmula del Producto de Euler, esto puede resultar contraproducente para la explicatividad de la prueba pues lo que se quiere revisar es algo más general que la infinitud de los primos, recurriendo a un caso particular que va más allá de todo proceso intuitivo. Por supuesto, lo intuitivo no es condición ni necesaria ni suficiente para las pruebas explicativas, pero en el caso de la prueba de Euler las condiciones a las que se recurre parecen por demás forzadas a funcionar.

En la prueba de Fürstenberg es necesario verificar tres propiedades del espacio topológico entero. Esta prueba se desarrolla en una narrativa propia de los espacios topológicos que podría resultar explicativa en la medida de que el universo topológico sea el interés principal de los sujetos que se enfrentan a la prueba. De hecho, esta

prueba puede resultar de gran interés para desglosar y poner en manifiesto los conceptos más relevantes de la Topología mediante un ejemplo conocido como podría ser la infinitud de los números primos, posterior a su aceptación por otros medios.

Habilidad 3: La habilidad de reconocer una característica destacada tanto en el resultado como en el planteamiento.

Habilidad 4: La habilidad de demostrar cómo una característica destacada en el teorema está relacionada con una característica similar en las premisas.

En la tabla 7 se presentan los elementos destacados que se deben suponer en las premisas y que es fundamental en el desarrollo de la prueba de la Infinitud de los Números Primos. Estas dos habilidades se presentan en una misma tabla, pues están ligadas mediante el reconocimiento de una característica o invariante en el teorema y en el desarrollo de su prueba.

Euclides supone un elemento principal que tiene la misma naturaleza de los primos A , B , C que se postulan al iniciar la construcción de la prueba. Aunque se mostró la ventaja de construir la prueba con elementos que comparten las características numéricas de ser primos, esto puede resultar contraproducente pues, cuando se concluye que H en efecto es un primo distinto a A , B , C podría dejar la sensación de que se está usando justo lo que se quiere probar. Por otro lado, cuando se supone que H es igual a los primos ya propuestos, se debe recurrir al método de reducción al absurdo para llegar a una contradicción.

El uso de este método en medio de la demostración abre una discusión que se escapa a estos resultados pero que es importante de tener en cuenta en términos de

qué métodos demostrativos pueden resultar exitosos para las pruebas explicativas frente a otros que no, amarrado de nuevo a las habilidades y los intereses de los sujetos y sus matemáticas.

Tabla 7

Matemáticas de los agentes relacionadas a la tercera y cuarta habilidad

	Euclides	Goldbach	Euler	Fürstenberg
H3	■ Suposición de H (otro número primo)	■ Proponer sucesión de números de Fermat infinitos.	■ Hacer tender la función zeta de Riemann a un valor específico para obtener la serie armónica.	■ Proponer un conjunto que pueda ser visto como la unión de números primos
H4	■ Suponer que H es A, B o C y llegar a una contradicción.	■ Hacer una extensión de la infinitud de los naturales a los números de Fermat y luego a los primos.	■ Comparar ambos lados de la igualdad entre series que divergen y convergen	■ Suponer el conjunto de los números primos finitos y probar por contradicción.

Por su parte, la prueba de Goldbach precisa aceptar la infinitud de los números de Fermat, y por tanto la infinitud de los números naturales. Esta prueba puede resultar explicativa pues si se cuentan con unas bases significativas de teorías de conjuntos es fácil aceptar la infinitud de los números naturales, y de ahí, por la manera en cómo se construye es igualmente natural aceptar la infinitud de los números de Fermat, así la infinitud de los números primos pareciera ser simplemente

una extensión de la infinitud de conjuntos ya establecidos.

En la prueba de Euler, se trabaja con un caso particular para la función zeta de Riemann convertida por tratamiento en la serie armónica. De la complejidad de esta prueba no es necesario decir más que, puede ser explicativa en el contexto específico en que los agentes hayan aceptado las propiedades de las series infinitas y su convergencia.

En Fürstenberg además de la complejidad propia que pueden tener los espacios topológicos frente a construcciones como la de Euclides o las sucesiones de Goldbach, destaca su poder explicativo en el uso de un conjunto ampliamente estudiado como los enteros que, si bien no tiene la familiaridad de los naturales estudiados ampliamente desde teoría de conjuntos, tampoco tienen la complejidad de la construcción y compleja aceptación de los reales.

Se puede decir que es un conjunto que permite trabajar bajo la extensión de algunas propiedades de los naturales sin mayores inconvenientes. Esta prueba también hace uso de la reducción al absurdo en un momento clave, por lo que merece la pena ser estudiada bajo el estatus de métodos de demostración y su explicatividad, que se sale de este trabajo.

Finalmente y después de recopilar y analizar los diferentes elementos que se deben tener en cuenta para que las pruebas logren su explicatividad, se pueden resumir las cuatro habilidades usadas como:

- H1: Reconocer las hipótesis

- H2: Verificar los terceros enunciados (definiciones o axiomas)
- H3: Proponer una hipótesis que se relacione con el enunciado del teorema
- H4: Utilizar la nueva hipótesis en el momento clave de la demostración

4. Propuesta de una actividad didáctica para conocer los intereses epistémicos de los agentes

Una de las principales motivaciones para la creación de este trabajo es el análisis del desarrollo del razonamiento matemático en los estudiantes, ligado a los procesos de la actividad demostrativa en el aula. Dentro de la PMP se ha adoptado el enfoque contextual pues privilegia al sujeto de la práctica en, precisamente, su entorno de práctica. Por ejemplo, a partir del análisis se podría indagar sobre cómo están entendiendo la demostración los estudiantes para profesor de la Licenciatura en Matemática de la Universidad del Valle. Con esta idea en mente, se propone el diseño de una actividad didáctica que centre la atención en la comprensión de las demostraciones matemáticas de los estudiantes, con el fin de recopilar información real que pueda ser contrastada con la información teórica recopilada en los capítulos anteriores, sobre todo en relación con el Factor Contextual I: *los intereses epistémicos de los agentes*, los cuales se pueden conocer en la medida que se trabaje con sujetos reales. (Delarivière et. al, 2017)

Cabe aclarar que las actividades aquí propuestas no son una camisa de fuerza, si no que se presentan como una recopilación de algunas ideas que podrían funcionar

para los objetivos propuestos, pero que es tarea del didácta contrastar, evaluar, rediseñar y llevarlas a cabo si se considera propicio.

Sobre el diseño y el tipo de la actividad, Pochulu et al. (2013) empieza advirtiéndole sobre la importancia del diseño de actividades didácticas, no solo en relación al análisis del pensamiento del estudiante sino también, en el desarrollo de competencias y herramientas de análisis para el docente, así la experiencia de diseño se supone significativa y enriquecedora en términos académicos y profesionales para quien diseña.

Una de las configuraciones didácticas más usadas en Educación Matemática es el diseño de tareas, pues gracias a su libertad de acción permite indagar sobre diversos temas sin perder la profundidad conceptual que la sistematización de experiencias requiere. Aunque dicha libertad consiste en no restringir el diseño al desarrollo conceptual por niveles o competencias jerarquizadas, Pochulu et al. (2013) resaltan algunos criterios que se deben considerar para que las tareas no carezcan de sentido:

- La tarea no debe ser cerrada, es decir que se admiten varios tipos de solución.

Con esto se puede dar cuenta de la diversidad en la comprensión y la actividad matemática de los estudiantes, y así mismo conocer las estrategias de solución y establecer conexiones entre ellas.

- La tarea no puede estar al máximo pautada, pues esto acortaría el camino de solución y no daría paso a procesos de razonamiento de los estudiantes. Se recomienda proponer pocas preguntas que, desde la generalidad ayuden a dar

cuenta de procesos intermedios entre los procesos generales y particulares de resolución.

- Las tareas deben llevar a los alumnos a justificar sus elecciones, esto ayudará a que los estudiantes desarrollen procesos de argumentación y que fortalezcan su pensamiento crítico. (p. 5-7)

Siguiendo el camino de favorecer el desarrollo del razonamiento en los estudiantes, Lourido y Melán (2012) siguiendo la propuesta didáctica de Duval y Egret (1993), destacan la construcción de **grafos proposicionales** como uno de los momentos claves para la comprensión y promoción del razonamiento deductivo, acompañado de la posterior redacción de la demostración en un lenguaje natural. (p. 27).

Sobre los grafos proposicionales Lourido y Melán (2012) señalan que:

Un grafo podría definirse como un registro no discursivo que privilegia la aprehensión sinóptica o vista global de las proposiciones que intervienen en la demostración, al organizarlas de acuerdo a su estatus operatorio. Es así como, los grafos proposicionales aparecen en esta perspectiva de trabajo en la enseñanza de la demostración como un registro de representación que apoya la comprensión de aquello que es objeto de análisis en un razonamiento. (p. 39)

Así, vemos entonces que los grafos proposicionales funcionan como una herramienta de análisis que permite extraer información sobre los razonamientos de

los estudiantes, de acuerdo con la estructura que estos puedan darle a una demostración haciendo evidente el uso de las premisas, los terceros-enunciados (teoremas o axiomas) y la conclusión. Estos grafos constituyen una tipo de registro intermedio, que para fines de este trabajo, ayuda a pasar de un lenguaje matemático (las demostraciones formales) a un lenguaje natural (la interpretación que hacen los estudiantes de esa demostración), para ahondar en la comprensión de los estudiantes y por tanto en sus intereses sobre un tópico particular. Respecto a la redacción de la prueba en lenguaje natural a partir de un grafo, Lourido y Melán (2012) resaltan:

La redacción en lengua natural de la demostración se presenta como una traducción del grafo, privilegiando actitudes proposicionales (frases cortas provistas de un verbo, como: puedo concluir, ya demostré que, tengo que...) que marcan el estatus operatorio de las proposiciones. Lo anterior implica, comprender cómo se puede marcar lingüísticamente la organización de un paso de razonamiento y el encadenamiento de pasos de razonamiento. (p.42)

Para la construcción de grafos proposicionales se debe seguir unas reglas básicas:

- De las hipótesis deben partir líneas que conectar con terceros enunciados
- Del tercer enunciado salen flechas que indican el desprendimiento de una consecuencia
- A la conclusión final llega una flecha

- Las hipótesis, pasos de razonamiento y conclusiones deben estar encerradas en recuerdos, mientras los terceros enunciados no.

4.1 Descripción de una posible actividad didáctica

Se propone una actividad que consta de 4 partes, cada una de ellas relacionada a una de las 4 demostraciones del teorema de la Infinitud de los Números Primos expuestas anteriormente. A saber, la de Euclides, Goldbach, Euler y Fürstenberg. Cada una de las partes consta de 3 tareas.

Tarea 1: Teorema y posible demostración

Se le presenta a los estudiantes el teorema y una posible demostración formal del mismo, la idea de este punto es que los estudiantes tengan una idea general de la demostración sin destacar las particularidades de los supuestos que se deben asumir y los terceros enunciados que deben comprobar (los teoremas y los axiomas usados) para el desprendimiento de las conclusiones (intermedias y finales). Esto constituye todo el bagaje de los conocimientos previos necesarios para afrontar la demostración.

Tarea 2: Construcción del grafo proposicional

Los estudiantes deben construir un grafo proposicional que represente la demostración del punto anterior y que incluya todas las hipótesis, los terceros enunciados y las respectivas conclusiones. Se les brinda una pauta general a los estudiantes para la construcción de grafos proposicionales, pero se espera que los participantes de la actividad tengan algún conocimiento sobre estos, pues este tema se aborda en *Semiosis y Pensamiento Humano* de Raymond Duval (2017), libro que es

ampliamente discutido en los cursos de Discurso Matemático en el Aula y Razonamiento Matemático, cursos obligatorios de la estructura curricular del programa Licenciatura en Matemáticas (Resolución 239 del 2020 y Resolución 111 de 2017) de la Universidad del Valle. En el Anexo A. se muestran las posibles producciones de los grafos proposicionales para cada una de las demostraciones.

Tarea 3: Redacción de la demostración en lenguaje natural Los estudiantes deben reescribir la demostración partiendo de la estructura del grafo proposicional, esta producción dará cuenta de los elementos considerados relevantes para los estudiantes y si en realidad cuentan con las algunas, ninguna o todas las habilidades propuestas para comprender el *porqué* ese teorema es cierto.

5. Conclusiones

Las reflexiones en torno a la Filosofía de la Práctica Matemática (PMP) han tenido un claro avance al correr de las investigaciones, esto se refleja en la diversa y variada literatura presente en las más reconocidas y actualizadas revistas tanto de educación como de filosofía de las matemáticas. El programa de investigación de la PMP contempla problemas y preguntas que están lejos de llegar a una común acuerdo por la complejidad propia de sus preguntas, por ejemplo, el problema de *qué se entiende por explicación en matemáticas*, es una de las preguntas que por más que haya investigación sobre esta, parece que sigue quedando abierta y sigue estando vigente sobre todo, si se mira desde diferentes ópticas. Así, aunque desde la filosofía se aborde el tema de *explicar* y se presenten diversas posturas más o menos aceptadas

por la comunidad, si se trasladan los cuestionamientos a otro campo como la Educación Matemática, surgen más preguntas aún sin respuestas por lo que se necesita tomar en consideración elementos propios del campo, tan complejos como los sujetos de práctica mismos, abriendo de nuevo preguntas que ya se daban por concluidas.

Si se quisiera abordar el tema de la explicación matemática puntualmente la función explicativa de la demostración desde una mirada filosófica pero también educativa, sin duda el enfoque contextual centrado en los agentes y sus matemáticas es una de las mejores opciones para, desde la generalidad que se pueda encontrar en la literatura, analizar las condiciones particulares de los sujetos en un estudio de caso, que según muestran las investigaciones es uno de los mejores métodos para hacerlo, pues parece que el grueso de la teoría se va construye con cada uno de los pequeños pero no aislados aportes que se presenten.

Pasando ahora a los elementos de práctica particulares para las pruebas de la Infinitud de los Números Primos analizadas, se pudo observar que el estudio en términos de las cuatro habilidades que deben tener los sujetos para la comprensión de la prueba en términos de su explicativa, permiten evidenciar de manera clara y precisa las componentes y los los elementos que convergen dentro de cada una de las pruebas. Esa forma de exponer los detalles de las pruebas permite poner en manifiesto todas las propiedades que intervienen en ellas, sus métodos usados, así como su estructura interna general.

Una vez puestos en manifiesto los elementos de práctica de las distintas pruebas, el docente puede aprovechar este conocimiento y usarlo como una

herramienta de decisión para optar por pruebas que puedan ser más o menos explicativas en función de cuál es su auditorio, cuáles son los agentes de práctica a los que se dirige y cuáles son sus matemáticas, esto con el fin de que la prueba presentada sea exitosamente explicativa dentro de su contexto. Así, en el caso de que los sujetos no cuenten con algunos de los conocimientos y habilidades necesarios, el docente debería tomar decisiones en pro de fortalecer esos saberes previos siempre que los intereses epistémicos de los sujetos estén en armonía con las necesidades de la prueba, pues este es otro elemento clave que está dado por el contexto de práctica.

Finalmente proponer una actividad didáctica que trate de recoger y exponer los interés epistémicos de los sujetos es un reto por la complejidad del enfoque mismo, pues al tratarse de sujetos idealizados no se puede establecer con exactitud cuáles son sus necesidades, de hecho, esto sería contraproducente. En este caso lo ideal sería entonces poner a prueba la actividad con la conciencia de que las actividades didácticas siempre están amarradas a cambios y mejoras y que la propuesta es solo un bosquejo de algunos elementos que se podrían tomar en consideración por el didacta o el docente que quisiera ahondar en este tema y ponerlo en práctica. De todos los elementos propuestos, se destacan los grafos proposicionales como una herramienta potente para exponer la comprensión de los estudiantes como un registro diferente pero complementario al del lenguaje simbólico y el lenguaje hablado. Pero además, se debe tener en cuenta la posibilidad de que las producciones por medio de este registro no es único ni homogéneo y depende enteramente de los sujetos que lo proponen y de nuevo, de sus matemáticas. De allí la aparente riqueza de esta herramienta.

A. Anexo: Posibles grafos proposicionales

Siguiendo lo propuesto en el capítulo 4, se presentan algunas ideas de grafos proposicionales para cada una de las demostraciones presentadas en el capítulo 2 y analizadas en el capítulo 3.

Figura A.1: Ejemplo de grafo proposicional para la prueba de Euclides

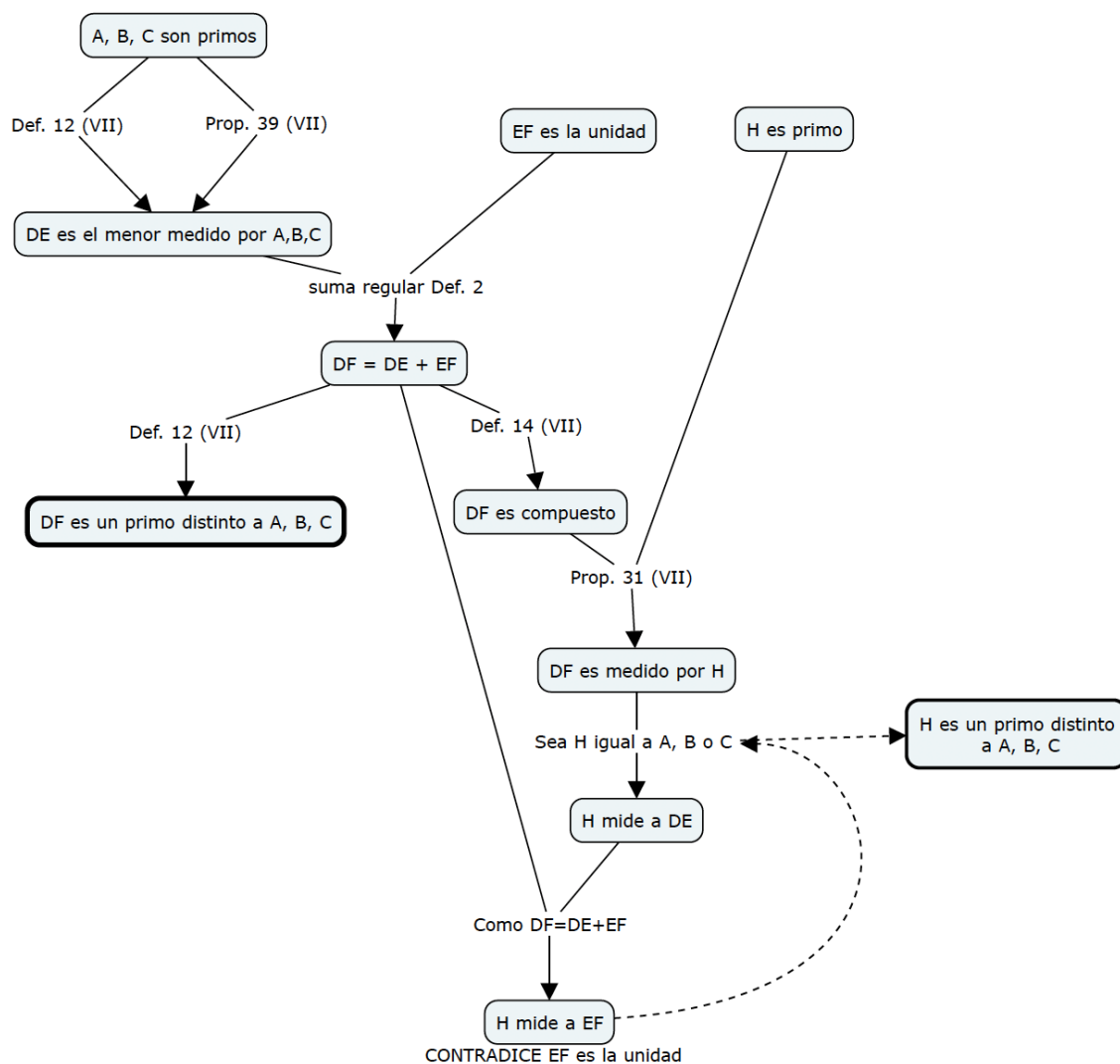


Figura A.2: Ejemplo de grafo proposicional para la prueba de Goldbach

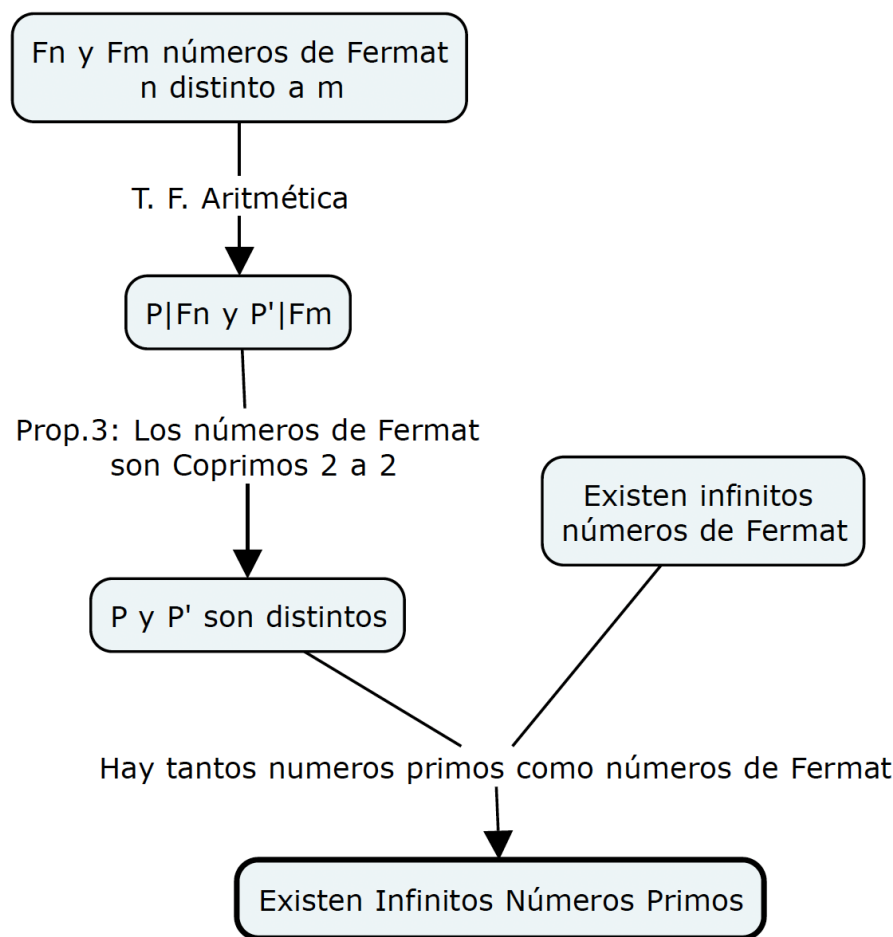


Figura A.3: Ejemplo de grafo proposicional para la prueba de Euler

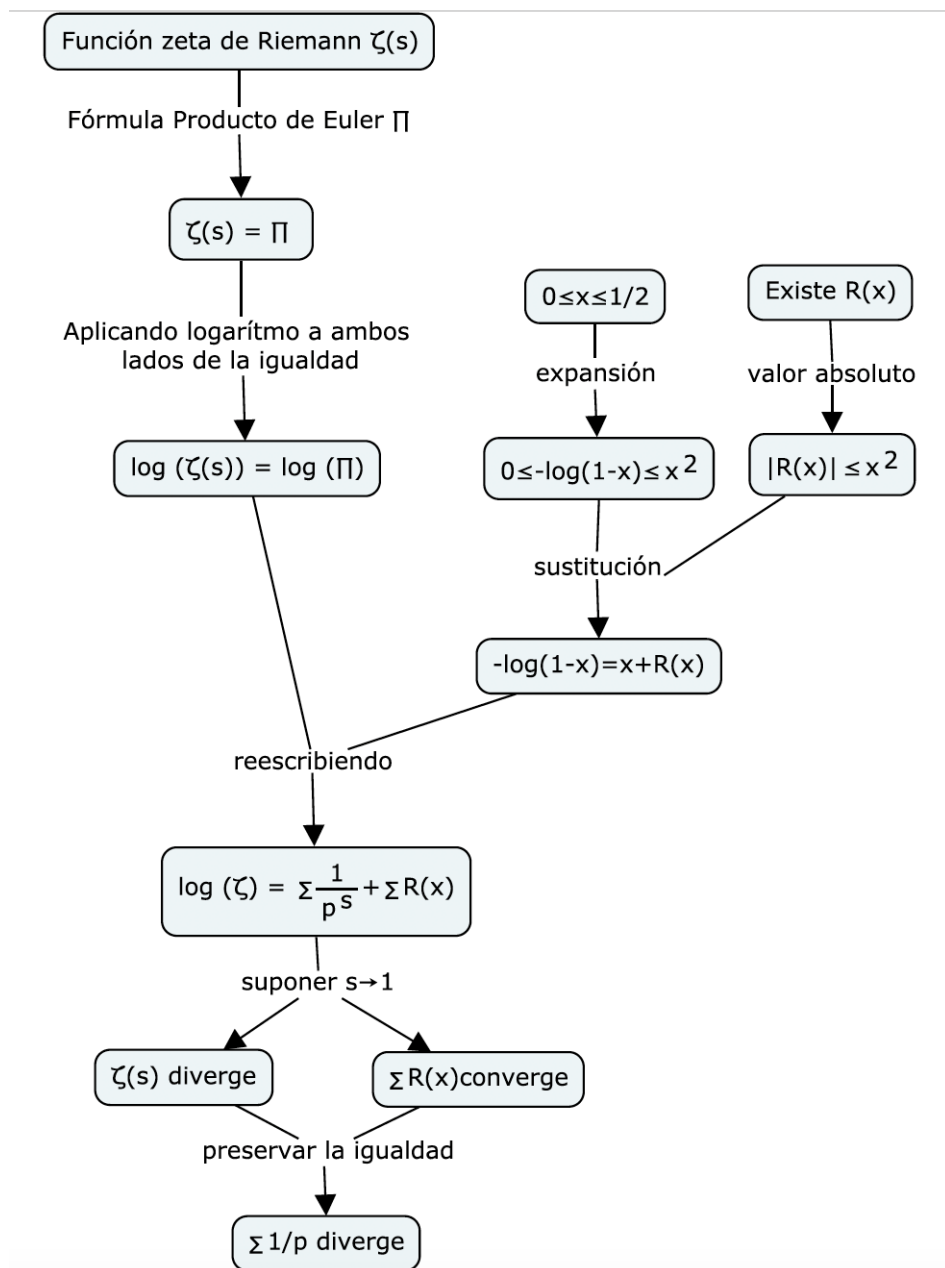
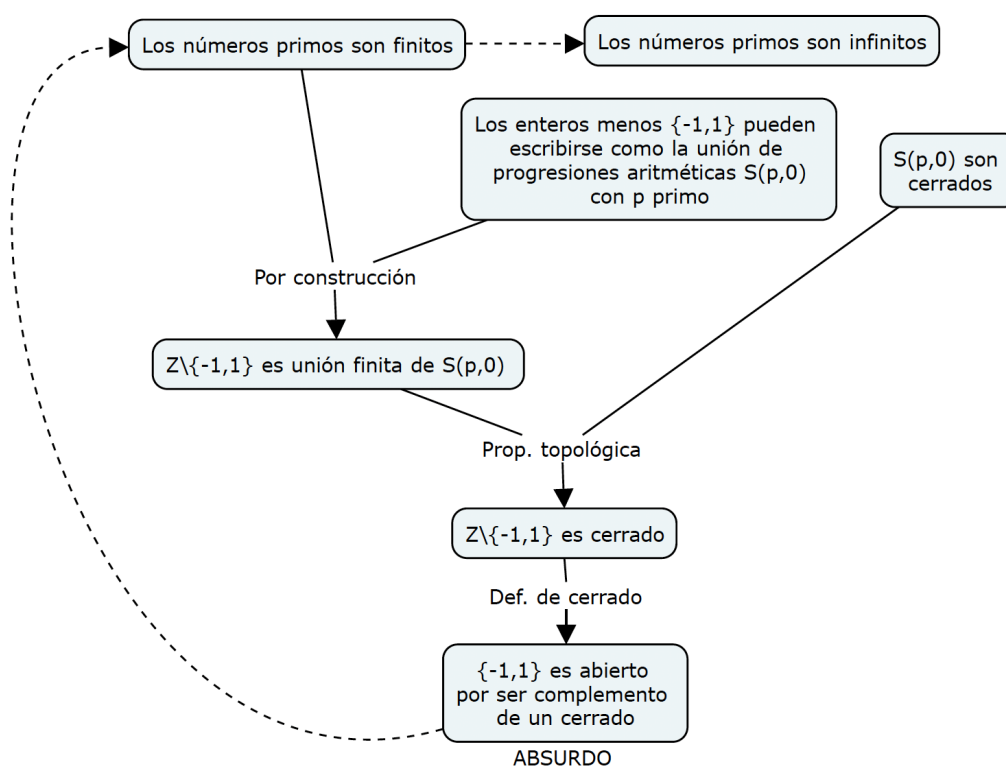


Figura A.4: Ejemplo de grafo proposicional para la prueba de Fürstenberg



Referencias

- Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá: una empresa docente.
- Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice—motivations, themes and prospects. *Philosophia Mathematica*, 27(1), 1-32.
- Carter, J. (2019). Philosophy of mathematical practice—motivations, themes and prospects. *Philosophia Mathematica*, 27(1), 1-32
- Cellucci, C. (2008). The nature of mathematical explanation. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 39(2), 202–210.
- Crespo, C. et al. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En Díaz, Leonora (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 560-564). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.
- D'Alessandro, W. (2019). Explanation in mathematics: Proofs and practice. *Philosophy Compass*, 14(11), e12629.
- Delarivière, S., Frans, J., y Van Kerkhove, B. (2017). Mathematical explanation: A contextual approach. *Journal of Indian Council of Philosophical Research*, 34, 309-329.
- De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of

proof. *Pythagoras*, 33(3), Art.193, 8 pages.

<http://dx.doi.org/10.4102/pythagoras.v33i3.193>

Duval, R. y (2017). *Semiosis y pensamiento humano* (2.^a ed.). Programa Editorial Universidad del Valle.

D'Alessandro, W. (2020). Mathematical explanation beyond explanatory proof. *The British Journal for the Philosophy of Science*.

Euclides (1994) *Los Elementos*. Traducción y anotaciones de M. L. Puertas, Madrid, Editorial Gredos.

Euler, L. (1748). *Introductio in Analysin Infinitorum*, Tomo Primus, Lausanne, Opera Omnia, Ser. 1, Vol. 8.

Ferreirós, J. (2016). *Mathematical knowledge and the interplay of practices*. Princeton University Press.

Fuss, P. H. (Ed.). (1843). *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géometres du XVIIIeme siecle* (Vol. 2). Imprimerie de l'Académie impériale des sciences. Euclides, *Los Elementos*. Traducción y anotaciones de M. L. Puertas, Editorial Gredos, Madrid, 1994.

Fürstenberg, H. (1955) On the infinitude of primes, *American Mathematical Monthly* 62, página 353.

Hafner, J., y Mancosu, P. (2005). The varieties of mathematical explanation. In P.

- Mancosu, K. F. Jørgensen, y S. A. Pedersen (Eds.), Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics (pp. 215–250). Dordrecht: Springer.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational studies in mathematics*, V 44, (p. 5-23)
- Jiménez, C. Á. (2021). Ensayos sobre Euclides. Vol 1: La geometría de la congruencia. UNAM, Secretaría de Desarrollo Institucional.
- Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford: Oxford University Press.
- Lakatos, I (ed.) (1976). *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery*. New York: Cambridge University Press.
- Lange, M. (2014). Aspects of mathematical explanation: Symmetry, unity, and salience. *Philosophical Review*, 123(4), 485–531.
- Lange, M. (2016). Explanatory proofs and beautiful proofs. *Journal of Humanistic Mathematics*, 6(1), 8-51.
- Lourido, D. M., y Melán, C. A. (2012). La enseñanza inicial de la demostración en geometría desde una perspectiva cognitiva: un manual para docentes en ejercicio.
- Mancosu, P. (2001) *Mathematical Explanation: Problems and Prospects*. *Topoi* 20, 97–117.
- Mancosu, P. (2005). Visualization in logic and mathematics. In P.

Mancosu, K. F. Jørgensen, y S. A. Pedersen (Eds.), Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics (pp. 13–30). Dordrecht: Springer.

Mancosu, P. (2008). Mathematical explanation: Why it matters. In P.

Mancosu (Ed.), The philosophy of mathematical practice (pp. 134–149). Oxford: University Press.

Mancosu, P. (2016). Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática.

Mancosu, P. (ed.) (2008). The Philosophy of Mathematical Practice. Oxford, England: Oxford University Press.

Mancosu, P. et al. (Fall 2023 Edition), "Mathematical Explanation", The

Stanford Encyclopedia of Philosophy, Edward N. Zalta y Uri Nodelman (eds.)

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Molinini, D. (2012). Learning from Euler. From mathematical practice to mathematical explanation. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, (16-1), 105-127.

- Pochulu, M., Font, V., y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 19(1), 71-98.
- Rocha, M. (2007). Sobre la infinitud de los números primos: un enfoque topológico. *Miscelánea Matemática*, 44 79-82.
- Rodríguez, C. (2017). Demostrando la infinitud de los números primos. [Tesis para optar por el grado de Matemáticas, Universidad de Cantabria]. Repositorio abierto de la Universidad de Cantabria.
<https://repositorio.unican.es/xmlui/handle/10902/12330>
- Rojo, J. R. (2013). Recopilación de diversas demostraciones de la infinitud de los números primos (Doctoral dissertation, Master's thesis, Universidad de la Rioja).
- Sadornil, D., y Varona, J. L. (2021). Existen infinitos primos (desde Euclides hasta el siglo XXI). *Gac. R. Soc. Mat. Esp*, 24(2), 301-324.
- Steiner, M. (1978). Mathematical explanation. *Philosophical Studies*, 34(2), 135–151.
- Van Bendegem, J. P., y Van Kerkhove, B. (2004). The Unreasonable Richness of Mathematics. *Journal of Cognition and Culture*, 4(3-4), 525-549.