

SIMETRÍAS EN GRANDES ESTRUCTURAS DEL UNIVERSO.

JUAN PABLO HOYOS DAZA



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SIMETRÍAS SANTIAGO DE CALI
2015

SIMETRÍAS EN GRANDES ESTRUCTURAS DEL UNIVERSO.

JUAN PABLO HOYOS DAZA

Trabajo de grado presentado al Programa Académico de Física como
requisito para optar al título de Físico

Director:

Dr. César Alonso Valenzuela Toledo

Co-director:

Dr. Juan Pablo Beltrán Almeida

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2015

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
2015

AUTOR: JUAN PABLO HOYOS

TÍTULO: SIMETRÍAS EN GRANDES ESTRUCTURAS DEL UNIVERSO.

Palabras clave: Formación de estructuras a gran escala, cosmología, transformación de coordenadas, inflación, relatividad general, simetrías.



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS
ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA.

JURADO CONFORMADO POR:

1. DR. CESAR ALONSO VALENZUELA
2. DR. JUAN PABLO BELTRÁN
3. DR. JESÚS MARÍA CALERO

El día 21 de Octubre de 2015 a las 9:30 A.M se llevó a cabo la ENTREGA DE LA EVALUACIÓN () SUSTENTACIÓN (X) del INFORME FINAL DEL TRABAJO DE GRADO titulado: **"SIMETRÍAS EN GRANDES ESTRUCTURAS DEL UNIVERSO"**. Presentado por el estudiante JUAN PABLO HOYOS DAZA código 1045001 bajo la dirección del Dr. CESAR ALONSO VALENZUELA.

Candidato a Grado para la ceremonia de:

RESULTADO DE LA EVALUACIÓN:

- ☒ APROBADO.
☐ RECOMENDACIÓN DE DISTINCIÓN DE MERITORIO.
☐ RECOMENDACIÓN DE DISTINCIÓN DE LAUREADO.
☐ REPROBADO.

Se recomienda modificaciones: SI () NO (X).

OBSERVACIONES

*Realizar correcciones ortográficas
y gramaticales sugeridas*

CESAR ALONSO VALENZUELA
DIRECTOR

JUAN PABLO BELTRÁN
CODIRECTOR

JESÚS MARÍA CALERO
JURADO

ESPERANZA TORIJANO
DIRECTORA PROGRAMA ACADÉMICO

*Este trabajo está dedicado a mi madre,
Blanca N. Daza,
quien ha sacrificado parte de su vida y felicidad por mí.*

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi madre, por apoyarme en lograr la profesión de la historia de mi vida, gracias totales.

A los profesores y directores César A. Valenzuela y Juan P. Beltrán, por permitirme desarrollar este trabajo bajo su dirección.

Agradezco a las personas que componen el departamento de física de la Universidad del Valle, por la formación, colaboración y atención brindada durante el transcurso de mi pregrado.

Resumen

En este trabajo se realiza un estudio sobre las simetrías subyacentes en las ecuaciones que describen el fenómeno físico de inestabilidad gravitacional. Mediante el cual, se explica la formación de estructuras a gran escala del universo. Para el desarrollo del trabajo, se hace necesario estudiar algunos aspectos teóricos de la cosmología, en este sentido se realiza una descripción del modelo cosmológico estándar, para después pasar a una descripción de la dinámica de fluidos, y someter las ecuaciones del movimiento a una transformación de coordenadas comóviles. Tal transformación tiene como fondo un universo en expansión, y permite escribir las ecuaciones en términos de la densidad de contraste. Después se dan nociones concernientes a variables estocásticas y probabilidad. Con las que se permite realizar el estudio de los correladores. Finalmente se mira para que transformaciones, las ecuaciones del movimiento son invariantes.

Índice general

1. Introducción	7
2. Cosmología estándar.	9
2.1. Universo en la métrica FRW.	9
2.2. Horizonte de partículas.	11
2.3. Universo espacialmente plano.	12
2.3.1. Universo sólo con materia.	14
2.3.2. Universo sólo con radiación.	14
2.3.3. Universo sólo con constante cosmología Λ	15
2.4. Problemas en cosmología estándar.	16
2.4.1. Problema de planitud	16
2.4.2. Problema de horizonte	17
2.5. Mecanismo de inflación.	17
2.5.1. Inflación en campo escalar	18
2.5.2. Inflación Slow-roll	20
3. Dinámica de fluidos en cosmología.	23
3.1. Ecuación de continuidad	23

3.2. Ecuación de Euler.	24
3.3. Ecuación de Poisson.	25
3.4. Transformación a coordenadas comoviles	26
4. Variables estocásticas y probabilidad	30
4.1. Inflación y el origen de las condiciones iniciales.	30
4.2. Momentos, cumulantes y sus funciones generadoras.	32
4.3. Homogeneidad estadística e isotropía	33
5. Simetrías de las ecuaciones Newtonianas	36
5.1. Simetrías en Λ CDM	37
5.2. Transformaciones de Galileo y de la aceleración	38
5.3. Invariancia bajo escalado de Lifshitz	39
6. Conclusiones	41
A. Ecuaciones de campo de Einstein	42
B. Inestabilidad gravitacional en un universo en expansión.	45
Bibliografía	48

Capítulo 1

Introducción

El modelo cosmológico estándar del universo, está descrito por las propiedades de la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW) [1]. En dicho escenario el universo es perfectamente homogéneo e isótropo (principio cosmológico), y se expande o se contrae a medida que pasa el tiempo [1]. Este modelo describe muy bien la homogeneidad e isotropía que se observa en el universo a muy grandes escalas ($\gg 100 Mpc$). Sin embargo, el modelo presenta algunos inconvenientes cuando se utiliza para explicar algunas propiedades del universo, los cuales se traducen en imponer unas condiciones iniciales muy precisas. Algunos de los inconvenientes mas conocidos son: el problema de horizonte, el de planitud y de los monopolos magnéticos. De otro lado, tampoco logra explicar el origen del “boost” inicial que dio inicio a la expansión así como la formación de estructuras a gran escala [1].

Aún así el modelo sigue vigente, gracias a que ha sido posible solucionar de manera practica y sencilla los diferentes problemas. Por un lado, la explicación mas natural para las grandes estructuras vistas en nuestro universo (Super cluster, muros y filamentos), es que son el resultado de la amplificación gravitacional de pequeñas fluctuaciones primordiales, debido a la interacción gravitacional sin colisiones de partículas de materia oscura, en un universo expansivo. Es así como el formalismo y aplicación de la teoría de perturbaciones (PT) es fundamental para el entendimiento de las grandes estructuras del universo [8]. De otra parte, la teoría de inflación [2, 3, 4], resuelve los demás problemas cosmológicos expuestos anteriormente (problema de planitud, de horizonte y el de los monopolos magnéticos). Esta teoría propone que el universo, paso por una época de expansión extremadamente rápida, anterior a la mas suave y gradual expansión, durante el periodo de big bang. A pesar de que el paradigma inflacionario no se ha comprobado observacionalmente, los últimos resultados del análisis de datos observacionales de las anisotropías de la radiación cósmica de fondo (RCF) hechos

por el satélite PLANCK [5], proporcionan una potente evidencia de la inflación cósmica [6, 7] como una teoría sólida.

De otro lado, es bien conocido que el estudio de las simetrías en el proceso de la formación de estructuras es muy importante porque a través de estas es posible estudiar las propiedades de las anisotropías en la temperatura de la radiación cósmica de fondo, que se cuantifican en cantidades que parametrizan los correladores de N -puntos [8]. Este mecanismo permite, por un lado confrontar directamente la teoría con la observación y por otro definir relaciones de consistencia entre cantidades observables [9] y que en ultimas permiten discriminar entre los diferentes modelos teóricos que se encuentran en la literatura.

El trabajo esta organizado de la siguiente manera: en el capitulo 2 se realiza una descripción general del modelo cosmológico estándar, así como de la propuesta inflacionaria. Después en el capitulo 3, se deducen las ecuaciones de la dinámica de fluidos, las cuales describen el fenómeno de la inestabilidad gravitacional. El capítulo 4 esta dedicado a las nociones de los descriptores estadísticos. En el capítulo 5 se buscan las trasformaciones mediante las cuales se mantienen invariantes las ecuaciones Newtonianas. Finalmente, en el capítulo 6 se concluye. A lo largo del trabajo se utilizan unidades naturales, en las cuales la velocidad de la luz, c , es igual a uno.

Capítulo 2

Cosmología estándar.

SECCIÓN 2.1

Universo en la métrica FRW.

El principio cosmológico¹, el cual se refiere a la homogeneidad e isotropía del Universo a grandes escalas (~ 100 Mpc), se describe teóricamente a través de la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW) [10], cuyo elemento de línea en coordenadas esféricas, viene dado por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right), \quad (2.1)$$

donde $a(t)$ es un factor de escala que nos dice como es la expansión (o posible contracción) con el tiempo del universo, el parámetro K determina la curvatura espacial del universo y toma un valor numérico dependiendo de la geometría de este: $K = -1$ si es espacialmente hiperbólico, $K = 0$ si es espacialmente plano, y $K = 1$ si es espacialmente esférico; $d\Omega$ es el elemento de ángulo sólido.

¹También se le conoce como principio Copernicano.

Las ecuaciones de campo de Einstein se escriben de la forma²

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

donde $R_{\mu\nu}$, R son el tensor y escalar de Ricci respectivamente, estos describen la geometría del espacio-tiempo en la cual se desarrolla la dinámica. $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento, describe el flujo de energía y el momento lineal de una distribución continua de materia [10] y $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico.

Modelando el universo como un fluido perfecto, es decir un fluido sin vorticidad, sin cizalladura, ni tampoco transferencia de calor, el tensor de energía-momento de dicho fluido es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde ρ es la densidad de energía del fluido, p es la presión isotrópica, y u_μ es la 4-velocidad del fluido. Se toma un marco de referencia el cual es comóvil con el fluido, en particular se puede elegir uno donde $u_\mu = (1, 0, 0, 0)$.

Con la métrica FRW y el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, las ecuaciones de campo de Einstein se reducen a las siguientes dos ecuaciones [10, 13, 14]

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4}{3}\pi G(3p + \rho). \quad (2.5)$$

Las ecuaciones (2.4) y (2.5) se las conoce como ecuación de Friedman y ecuación de la aceleración respectivamente. En ellas H es el parámetro de Hubble, el cual caracteriza la razón de expansión del universo

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.6)$$

Utilizando la ley de conservación del tensor Energía-momento, esto es $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$, se obtiene la ecuación de continuidad para la densidad de energía ρ

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (2.7)$$

La ecuación (2.4) se puede expresar como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (2.8)$$

siendo Ω un parámetro de densidad adimensional, el cual se define como:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}},$$

²En el apéndice A, se realiza una deducción de la ecuación de campo.

donde $\rho_{crit} = 3H^2/8\pi G$, de esta manera, se tiene que:

$$\begin{aligned}\rho > \rho_{crit} &\implies \Omega > 1 \longrightarrow k > 0, \text{ se tiene un universo cerrado esférico} \\ \rho < \rho_{crit} &\implies \Omega < 1 \longrightarrow k < 0, \text{ se tiene un universo abierto hiperbólico.} \\ \rho = \rho_{crit} &\implies \Omega = 1 \longrightarrow k = 0, \text{ se tiene un universo plano.}\end{aligned}$$

Observaciones realizadas actualmente indican un valor para el parámetro de Hubble de³, $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, h es un parámetro con un valor de, $h = 0,704 \pm 0,014$ [7].

Con los valores anteriormente dados, se obtiene un valor de densidad crítica de

$$\rho = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} \implies \Omega_0 = 1,00245 \pm 0,00543,$$

es decir el universo es prácticamente espacialmente plano.

Retomando la ecuación (2.5), esta se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}-a \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} &= \frac{4\pi G}{3} \frac{a^2}{\dot{a}^2} (3p + \rho), \\ &= \frac{4\pi G}{3H^2} (3p + \rho),\end{aligned}$$

definiendo el parámetro de la desaceleración $q = -a\ddot{a}/\dot{a}^2$, el cual da información acerca del estado de la desaceleración del universo. Se tiene

$$q = \frac{3p + \rho}{2\rho_{crit}}. \quad (2.9)$$

En cosmología los parámetros observacionales generalmente son: la razón de expansión actual del universo H_0 , el parámetro de densidad Ω_0 y el parámetro de desaceleración q . En particular se observa que $3p + \rho < 0$, el parámetro de desaceleración es negativo y en consecuencia se tiene un universo que se expande de forma acelerada, tal como ocurre hoy en día [15, 16].

SECCIÓN 2.2

Horizonte de partículas.

La estructura causal del universo es determinada por la propagación de la luz en el espacio-tiempo FRW (2.1). Los fotones viajan sobre geodésicas nulas, $ds^2 = 0$, en un universo isótropo y plano la propagación de la luz es radial, entonces las trayectorias se caracterizan por

³El subíndice 0 indica el valor de los parámetros en la época actual.

$dr = dt/a(t)$. La máxima distancia que la luz puede propagarse entre un tiempo inicial y algún tiempo después es

$$\chi = \int_0^t \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.10)$$

la cantidad χ se llama horizonte de partículas. La distancia física que un fotón podría haber viajado desde el Big-bang hasta un tiempo t es

$$R_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \chi. \quad (2.11)$$

Si por ejemplo el factor de escala es de la forma $a(t) \propto t^n$ con $n < 1$, se puede obtener

$$R_H(t) = \frac{t^n}{(t^{n-1})} \frac{1}{(1-n)} = \frac{a(t)}{\dot{a}(t)} \frac{n}{(1-n)} \sim H^{-1}. \quad (2.12)$$

Lo anterior hace notar que en la cosmología estándar el horizonte de partícula es finito, multiplicado por factores numéricos y aproximadamente igual a la edad del universo o al radio de Hubble, H^{-1} . Por esta razón el horizonte y el radio de Hubble se usan para denotar lo mismo.

Una escala de longitud física λ está dentro del horizonte si $\lambda < R_H \sim H^{-1}$, dado a que se puede identificar la longitud de escala λ con su numero de onda k , $\lambda = 2\pi a/k$, se tienen las siguientes reglas:

$$\begin{aligned} \frac{k}{aH} << 1 &\implies \text{La escala } \lambda \text{ esta fuera del horizonte (superhorizonte)} \\ \frac{k}{aH} >> 1 &\implies \text{La escala } \lambda \text{ esta dentro del horizonte (subhorizonte)}. \end{aligned}$$

En el universo, el horizonte es una superficie esférica centrada en nosotros más allá de la cual no podemos mirar debido a que la luz de los objetos más distantes no ha tenido tiempo de llegarnos.

SECCIÓN 2.3

Universe espacialmente plano.

Al determinar la evolución de la densidad de energía $\rho(t)$, en un universo espacialmente plano, $k = 0$, se necesita una ecuación de estado, la cual relacione la presión y la densidad de energía, dicha ecuación en general es muy complicada, pero la cosmología usualmente se ocupa con gases diluidos, para los cuales la ecuación de estado es muy simple. Para sustancias de importancia cosmológica, la ecuación de estado puede ser escrita en una forma lineal como

$$p = w\rho, \quad (2.13)$$

donde w es una constante independiente del tiempo. La evolución del universo es bastante complicada por el hecho que este contiene diferentes componentes con diferentes ecuaciones de estado. Sin embargo se sabe que el universo contiene materia no relativista ($w = 0$), radiación ($w = 1/3$), y también puede contener una constante cosmológica Λ ($w = -1$), así que la ecuación de continuidad (2.7) se puede escribir como

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho(1+w),$$

dado que w es constante, entonces

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w)\frac{da}{a} \implies \rho(t) = \rho_0 a^{-3(1+w)},$$

por lo que la ecuación (2.4) toma la forma

$$\dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 a^{(1+3w)} \implies a^{\frac{1}{2}(1+3w)} da = \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3}\right)^{1/2} dt,$$

solucionando la expresión anterior se obtiene un factor de escala para un universo espacialmente plano de

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3(1+w)}, \quad (2.14)$$

con la restricción $w \neq -1$ y donde t_0 es la edad del universo, la cual está relacionada con la densidad de energía actual a través de la relación

$$t_0 = \frac{1}{1+w} \left(\frac{1}{6\pi G\rho_0}\right)^{1/2}. \quad (2.15)$$

La constante de Hubble en tal universo es

$$H_0 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)_{t=t_0} = \frac{2}{3(1+w)t_0}, \quad (2.16)$$

y así la edad del universo se puede escribir en términos del tiempo de Hubble,

$$t_0 = \frac{2}{3(1+w)H_0}. \quad (2.17)$$

Si miramos una galaxia, u otra fuente de luz distante, con un corrimiento al rojo z , se puede utilizar la relación

$$1+z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{2/3(1+w)},$$

y calcular el tiempo de emisión, t_e , al cual la luz de una fuente fue emitida

$$t_e = \frac{t_0}{(1+z)^{3(1+w)/2}} = \frac{2}{3(1+w)H_0(1+z)^{3(1+w)/2}},$$

así el horizonte de partícula actual a la fuente es

$$\chi(t_0) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = t_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{(1+3w)/3(1+w)} \right],$$

con $w \neq -1/3$. En términos de H_0 y z , se tiene

$$\chi(t_0) = \frac{2}{H_0(1+3w)} \left[1 - (1+z)^{-(1+3w)/2} \right]. \quad (2.18)$$

En dicho universo el horizonte de distancia actual es

$$d_{hor}(t_0) = \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = t_0 \frac{3(1+w)}{1+3w} = \frac{2}{H_0(1+3w)} \quad (2.19)$$

En un universo plano dominado por materia o por radiación, un observador sólo puede mirar una porción finita del volumen infinito del universo, esta porción de universo que yace dentro del horizonte es referido como el universo visible.

2.3.1 Universo sólo con materia.

Es un universo que contiene sólo materia no relativista $w = 0$, algunas veces llamado universo de Einstein-Sitter, se tienen estos resultados

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (2.20)$$

una edad del universo de

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}, \quad (2.21)$$

y el horizonte de distancia

$$d_{hor}(t_0) = 3t_0 = \frac{2}{H_0}. \quad (2.22)$$

El horizonte de partícula, para el tiempo de observación es

$$\chi(t_0) = 3t_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/3} \right] = \frac{2}{H_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]. \quad (2.23)$$

2.3.2 Universo sólo con radiación.

Este caso es de un interés particular, dado que para tempranas edades, mucho antes de la igualación radiación-materia, el universo es bien descrito por un modelo que solamente contenga radiación. El factor de escala es

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}, \quad (2.24)$$

dicho universo tiene una edad de

$$t_0 = \frac{1}{2}H_0^{-1}, \quad (2.25)$$

el horizonte de distancia

$$d_{hor}(t_0) = 2t_0 = H_0^{-1}. \quad (2.26)$$

Y el horizonte de partícula a la fuente de luz será

$$\chi(t_0) = 2t_0 \left[1 - \left(\frac{t_e}{t_0} \right)^{1/2} \right] = \frac{1}{H_0} \frac{z}{(1+z)} \quad (2.27)$$

2.3.3 Universo sólo con constante cosmológica Λ .

Cuando se considera un universo espacialmente plano y con $w \neq -1$, el factor de escala tiene una dependencia dada por la expresión (2.14). Al considerar el caso $w = -1$ se tiene un universo en el cual la densidad de energía es una contribución de la constante cosmológica, tal universo es llamado universo de Sitter. La ecuación (2.4) toma la forma

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3}a^2,$$

donde ρ_Λ es una constante en el tiempo, la expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera

$$\dot{a} = H_0 a, \quad (2.28)$$

con

$$H_0 = \left(\frac{8\pi G\rho_\Lambda}{3} \right)^{1/2}. \quad (2.29)$$

La solución a la ecuación (2.28) es:

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (2.30)$$

Un universo sólo con constante cosmológica se expande de forma exponencial. Este tipo de universo es infinitamente antiguo, y su horizonte de distancia también es infinita.

Si la constante cosmológica Λ es proporcionada por la energía de vacío, entonces la densidad de un universo, dominado por la constante cosmológica, permanece constante debido a la continua creación y aniquilación de pares virtuales partícula-antipartícula.

Si miramos una fuente de luz con un corrimiento al rojo z , el horizonte de partícula a la fuente de luz, para el tiempo de observación da

$$\chi(t_0) = \int_{t_e}^{t_0} e^{H_0(t_0-t)} dt = \frac{1}{H_0} [e^{H_0(t_0-t_e)} - 1] = zH_0^{-1}. \quad (2.31)$$

Así que en un universo que crece de manera exponencial, es el único para el cual $\chi(t_0)$ es linealmente proporcional a z . En los otros casos la relación $\chi(t_0) \propto z$ se da en el límite $z \ll 1$.

SECCIÓN 2.4**Problemas en cosmología estándar.**

El modelo cosmológico estándar no explica la homogeneidad e isotropía a grandes escalas, la expansión de Hubble, la abundancia de elementos ligeros. Estos problemas no indican inconsistencias lógicas de la cosmología estándar; en vez de eso, pareciera que se requiere cierto comportamiento inicial, para que la evolución del universo lo lleve a ser como actualmente se observa. A continuación se explican el problema de planitud y el problema de horizonte.

2.4.1 Problema de planitud

La curvatura espacial del universo se relaciona con el parámetro de densidad Ω a través de la ecuación (2.8), si el universo, es perfectamente plano, entonces $\Omega = 1$ para todo t . Por otro lado si hay un pequeño término de curvatura, la dependencia temporal de $(\Omega - 1)$ es completamente diferente.

Durante un periodo dominado por radiación, se tiene que $H^2 \propto \rho \propto a^{-4}$ y

$$\Omega - 1 \propto a^2 \propto t. \quad (2.32)$$

Durante un periodo dominado por materia, $\rho \propto a^{-3}$ y

$$\Omega - 1 \propto a \propto t^{2/3}. \quad (2.33)$$

En ambos casos, el factor $(\Omega - 1)$ aumenta con el tiempo, lo cual significa que la solución $\Omega - 1 \approx 0$ es inestable. Se sabe que hoy día el término $(\Omega_0 - 1)$ es cero con una incertidumbre de dos cifras significativas, y se ha encontrado que las desviaciones de la planitud, en épocas de la nucleosíntesis del big bang (BBN), durante la era de teorías de gran unificación (GUT) y en la escala de Planck, satisfacen las siguientes condiciones [14]

$$\begin{aligned} |\Omega(a_{BBN}) - 1| &\leq \mathcal{O}(10^{-16}), \\ |\Omega(a_{GUT}) - 1| &\leq \mathcal{O}(10^{-55}), \\ |\Omega(a_{Pl}) - 1| &\leq \mathcal{O}(10^{-61}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por tanto, en la cosmología estándar la casi planitud observada actualmente, $\Omega(a_0) \sim 1$, requiere un extremo ajuste de Ω cercano a 1, pero sin llegar a serlo en el universo temprano. Es por eso que este problema también es llamado problema de ajuste fino.

2.4.2 Problema de horizonte

Se ha definido el horizonte de partícula, como la máxima distancia que un rayo de luz puede viajar entre un tiempo 0 y un tiempo t

$$\chi = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da}{Ha^2} \propto \int_0^a \frac{da}{a^2 \rho^{1/2}}. \quad (2.35)$$

Si la presión es positiva, la ecuación (2.7) muestra que cuando el parámetro de expansión $a(t)$ tiende a cero, la densidad de energía ρ aumenta tan rápidamente como $a(t)^{-3}$, entonces la integral en la ecuación (2.35) por lo tanto converge para $a \rightarrow 0$. Entonces las galaxias que se encuentren separadas por una distancia mayor que este valor limite de χ no se han podido comunicar entre si antes de la época actual.

Con lo expresado anteriormente, el problema de horizonte consiste en que al medir la temperatura de la radiación cósmica de fondo proveniente de dos lugares opuestos del Universo, se encontró que es prácticamente igual, con diferencias de temperatura del orden de 10^{-5} , de una región del cielo a otra. Es decir, no importa que parte del cielo se observe la temperatura de la radiación cósmica es prácticamente la misma, aún cuando en etapas tempranas estas regiones estaban causalmente desconectadas. Lo más lógico sería que regiones no conexas del cielo tuvieran temperaturas diferentes, ya que estas nunca estuvieron en contacto térmico [10].

SECCIÓN 2.5

Mecanismo de inflación.

En cosmología la inflación se define como: la hipótesis que durante un periodo de tiempo, durante el principio de la historia del universo, este se expandió aceleradamente de una manera exponencial, o que durante este periodo de tiempo el factor de escala crece de forma acelerada, es decir:

$$\text{INFLACIÓN} \iff \ddot{a} > 0, \quad (2.36)$$

de la ecuación (2.5) implica que $\rho + 3p < 0$. Ahora, como la densidad es positiva, esta desigualdad requiere una fuente de presión negativa o equivalentemente una densidad de energía casi constante

$$p < -\frac{\rho}{3}, \quad (2.37)$$

así la inflación habría tenido lugar si el universo fue temporalmente dominado por una componente con ecuación de estado $w < -\frac{1}{3}$.

A través de esta hipótesis se resuelve el problema de planitud, dado que durante la inflación el horizonte permanece constante mientras el universo crece rápidamente, así un incremento exponencial del factor de escala implica que el término $\frac{k}{a^2 H^2}$ en la ecuación (2.8) tienda a cero sin importar el valor de k . El problema del horizonte se resuelve debido a que la inflación separa rápidamente las regiones causalmente conectadas, implicando la alta homogeneidad de la temperatura de la RCF.

2.5.1 Inflación en campo escalar

El modelo más simple de inflación involucra un solo campo escalar ϕ , llamado el inflatón. La razón de escoger los campos escalares para generar la inflación, es debido a que ellos generan la homogeneidad e isotropía vista en el universo y pueden fácilmente explicar la presión negativa necesaria para la existencia de un periodo inflacionario.

La dinámica de un campo escalar acoplado minimamente a la gravedad se obtiene de la siguiente acción,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right] = S_{EH} + S_\phi. \quad (2.38)$$

La acción (2.38) es la suma de la acción gravitacional Einstein-Hilbert, S_{EH} , y la acción de un campo escalar con término cinético canónico, S_ϕ . El potencial $V(\phi)$ describe las auto-interacciones del campo escalar. Se debe tener en cuenta que se está tratando el caso de un espacio-tiempo curvo así que las ∂_σ representan derivadas covariantes. Realizando una variación a la métrica en la acción S_ϕ se tiene

$$\delta S_\phi = \int d^4x \left[\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} (\delta g^{\mu\nu}) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) + (\delta \sqrt{-g}) \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \right].$$

Utilizando la relación $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ [12, 17], entonces

$$\delta S_\phi = \int d^4x \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) \right] \frac{1}{2} \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.39)$$

Por lo cual el tensor de energía-momento del campo escalar es

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\beta \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right). \quad (2.40)$$

Las componentes del tensor de energía-momento (2.3) con la métrica FRW son

$$T^{00} = \rho. \quad (2.41)$$

$$T^{ij} = \frac{1}{a^2} p \delta^{ij}. \quad (2.42)$$

Igualando componentes entre las ecuaciones (2.3) y (2.40), se obtiene

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi), \quad (2.43)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{6a^2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi). \quad (2.44)$$

La ecuación de movimiento para ϕ se obtiene variando la acción con respecto al campo escalar, dando como resultado

$$\square\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.45)$$

donde $\square \equiv \partial^\mu\partial_\mu = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ es el operador de d'Alambert, el cual después de alguna manipulación puede ser escrito en la forma mas conveniente

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu). \quad (2.46)$$

Asumiendo la métrica FRW para $g_{\mu\nu}$, se tiene entonces

$$\square\phi = \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi, \quad (2.47)$$

con lo cual la ecuación para el campo escalar del inflatón es

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.48)$$

Asumiendo el caso de un campo homogéneo $\phi(t, \mathbf{x}) \equiv \phi(t)$ las ecuaciones (2.43), (2.44) y (2.48) finalmente quedan

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.49)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2.50)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (2.51)$$

El término $3H\dot{\phi}$ en la ecuación del movimiento del inflatón, corresponde al análogo mecánico de la fricción, se le llama arrastre o amortiguamiento de Hubble, el cual retrasa la transición del campo de inflatón a un valor que minimiza el potencial V .

La ecuación de estado resultante es:

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}, \quad (2.52)$$

y muestra que un campo escalar puede producir una presión negativa ($w_\phi < 0$) y una expansión acelerada ($w_\phi < -1/3$), si la energía potencial V domina sobre la energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$.

Utilizando la ecuación (2.49) y la ecuación de Friedman (2.4) para un universo espacialmente plano, se obtiene la relación entre el factor de escala y el campo escalar del inflatón

$$H^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (2.53)$$

Esta ecuación junto con (2.51) brindan un conjunto de ecuaciones diferenciales en ϕ y H , que determinan completamente la evolución del campo escalar y el factor de escala del universo, durante la época de dominio del campo escalar.

2.5.2 Inflación Slow-roll

Las ecuaciones (2.51) y (2.53) pueden solucionarse numéricamente, incluso de forma analítica para algunas elecciones especiales de $V(\phi)$, sin embargo, una solución analítica solamente es posible en la aproximación evolución lenta, donde se supone que el campo escalar desciende rodando lentamente por su potencial hasta alcanzar el vacío que marca el final de inflación, como se puede ver en la Figura 2.1.

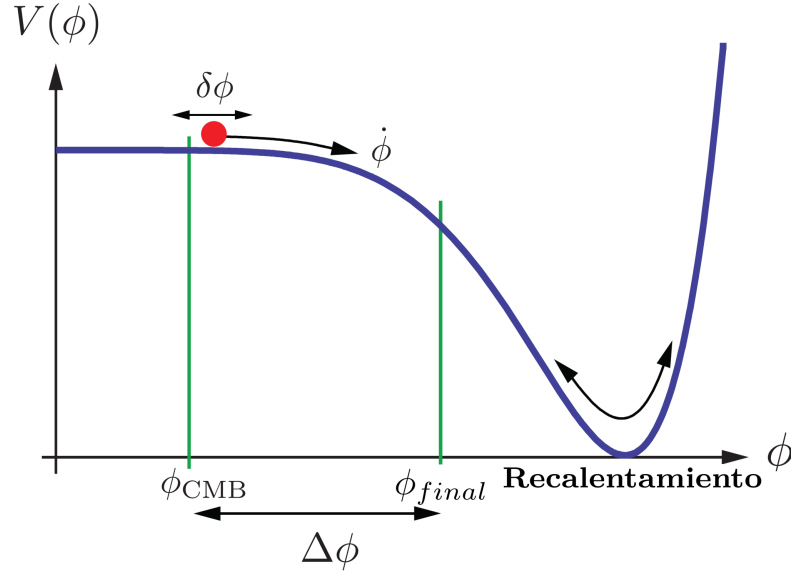


Figura 2.1: Potencial inflatón. La aceleración ocurre cuando la energía del campo, $V(\phi)$, domina sobre la energía cinética, $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. La inflación termina en ϕ_{final} cuando la energía cinética ha crecido y es comparable a la energía potencial, $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx V$. En la región entre los puntos ϕ_{CMB} y ϕ_{final} , es decir durante el periodo inflacionario, el campo rueda lentamente por el potencial. En el recalentamiento la densidad de energía de la inflación es convertida en radiación.

Tomando la derivada temporal de la ecuación (2.53) y usando la ecuación (2.51), se tiene

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3m_p^2} \left[\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} \right] = -\frac{H}{m_p^2}\dot{\phi}^2,$$

por lo tanto

$$\dot{H} = -\frac{1}{2m_p^2}\dot{\phi}^2. \quad (2.54)$$

Ahora, si se desea una expansión casi exponencial, el cambio fraccional $\left| \frac{\Delta H}{H} \right|$ durante un tiempo de expansión $\Delta t = \frac{1}{H}$ debe ser mucho menor que 1, $\left| \frac{\Delta H}{H} \right| = \left| \frac{\dot{H}\Delta t}{H} \right| = \left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| \ll 1$, es decir

$$\left| \dot{H} \right| \ll H^2. \quad (2.55)$$

Con las ecuaciones (2.53) y (2.54) se obtiene la primera condición de evolución lenta

$$\dot{\phi}^2 \ll |V(\phi)|. \quad (2.56)$$

Lo anterior tiene como consecuencia que $p \simeq -\rho$, y también

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3m_p^2}. \quad (2.57)$$

Usualmente también se asume que el cambio fraccional $\left| \frac{\Delta \phi}{\phi} \right|$ durante un tiempo de expansión $\Delta t = \frac{1}{H}$ sea mucho menor que 1, $\left| \frac{\Delta \phi}{\phi} \right| = \left| \frac{\dot{\phi}\Delta t}{\phi} \right| = \left| \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \right| \ll 1$, es decir

$$\left| \ddot{\phi} \right| \ll H \left| \dot{\phi} \right|. \quad (2.58)$$

Por lo cual la ecuación (2.51) toma la forma:

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'(\phi)}{3H} = -\frac{V'(\phi)}{\sqrt{3V(\phi)}}m_p. \quad (2.59)$$

Ahora, utilizando la ecuación (2.54), entonces

$$\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| = \left| \frac{\dot{\phi}}{2m_p^2 H^2} \right| \simeq \frac{m_p^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \ll 1, \quad (2.60)$$

y sea

$$\epsilon = \frac{m_p^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad (2.61)$$

el primer parámetro de evolución lenta, el cual garantiza la inflación casi exponencial. Derivando temporalmente la ecuación (2.59) se obtiene:

$$\ddot{\phi} = \frac{V'(\phi)\dot{H}}{3H^2} - \frac{V''(\phi)\dot{\phi}}{3H}$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{V'(\phi)\dot{H}}{3H^3\dot{\phi}} - \frac{V''(\phi)}{3H^2} = \frac{V'(\phi)^2}{18m_p^2H^4} - \frac{V''(\phi)}{3H^2} \simeq \frac{m_p^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 - m_p^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}.$$

Así, esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \epsilon - \eta, \quad (2.62)$$

donde

$$\eta = m_p^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}, \quad (2.63)$$

es el segundo parámetro de evolución lenta. Los parámetros definidos en las ecuaciones (2.61) y (2.63) son muy útiles para cuantificar las predicciones de la inflación, en particular permiten controlar la duración del periodo inflacionario y por lo tanto garantizar que el mecanismo pueda resolver completamente los problemas cosmológicos.

Capítulo 3

Dinámica de fluidos en cosmología.

Se supone que el universo está lleno de un fluido ideal no relativista, con densidad de materia $\rho(\mathbf{r}, t)$, campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, presión $p(\mathbf{r}, t)$ y potencial gravitacional $\Phi(\mathbf{r}, t)$. La dinámica del fluido, está gobernada por las ecuaciones de la hidrodinámica de la física clásica, las cuales son : ecuación de continuidad, ecuación de Euler y ecuación de Poisson. Dichas expresiones describen el fenómeno de la inestabilidad gravitacional dentro del régimen lineal, se transforman a un sistema de coordenadas comoviles, las cuales tienen como fondo un universo en expansión.

SECCIÓN 3.1

Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la materia. En su deducción se considera algún volumen Ω del espacio, así la masa del fluido en este espacio seria

$$m = \int_{\Omega} \rho d\Omega. \quad (3.1)$$

La masa de fluido que fluye en unidad de tiempo, a través de un elemento $d\mathbf{s}$ de la superficie, que encierra el volumen Ω es $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$; la cual es positiva si el fluido está saliendo del volumen y negativa si el flujo esta entrando en el volumen. La masa total del flujo que sale del volumen

Ω en unidad de tiempo es

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds}. \quad (3.2)$$

De otro lado, la disminución por unidad de tiempo en la masa del fluido en el volumen Ω puede escribirse como

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega. \quad (3.3)$$

Igualando las expresiones (3.2) y (3.3), se tiene

$$\oint \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho d\Omega,$$

utilizando el teorema de la divergencia en el término de la izquierda y agrupando términos se obtiene

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] d\Omega = 0,$$

la integración se realiza para un volumen arbitrario, así que se obtiene la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.4)$$

SECCIÓN 3.2

Ecuación de Euler.

Considerando algún volumen en el fluido, la fuerza total que actúa sobre este volumen es igual a la integral de la presión tomada sobre la superficie que encierra el volumen

$$-\oint p \mathbf{ds} = -\int_{\Omega} \nabla p d\Omega. \quad (3.5)$$

El fluido que rodea cualquier elemento de volumen $d\Omega$, ejerce sobre dicho elemento una fuerza $-\nabla p d\Omega$. Una fuerza $-\nabla p$ actúa sobre una unidad de volumen del fluido. La ecuación de movimiento de dicho elemento de volumen en el fluido es:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega &= -\nabla p d\Omega, \\ \Rightarrow \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla p. \end{aligned}$$

Dado que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, entonces,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v},$$

por lo que se obtiene la ecuación de Euler en ausencia de campos

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (3.6)$$

Ahora, si el fluido está en el interior de un campo gravitatorio, sobre cualquier volumen unidad actúa una fuerza adicional $\rho \mathbf{g}$, siendo $\mathbf{g}$ la aceleración debida a la gravedad. Por lo tanto la ecuación de Euler toma la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi \quad ; \quad \mathbf{g} = -\nabla \Phi, \quad (3.7)$$

donde el Φ es el potencial Newtoniano inducido por la densidad de masa $\rho(\mathbf{r})$ y se define como

$$\Phi = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\Omega'. \quad (3.8)$$

El radio vector $\mathbf{r}'$ localiza un elemento de masa, dm , en el elemento de volumen $d\Omega'$ y $\mathbf{r}$ es el radio vector que localiza un punto donde se ejerce el campo.

SECCIÓN 3.3

Ecuación de Poisson.

Al considerar que todo el espacio está lleno de un fluido ideal no relativista, dicho fluido induce un potencial gravitacional de acuerdo a la ley de Newton del movimiento, para determinar tal expresión se toma el Laplaciano a la ecuación (3.8)

$$\nabla^2 \Phi = -G \nabla^2 \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d\Omega' = -G \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) d\Omega' \quad (3.9)$$

pero se sabe que

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} \right) = -4\pi \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.10)$$

entonces

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \nabla^2 \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}') \delta_D(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\Omega' = 4\pi G \rho(\mathbf{r}), \quad (3.11)$$

de donde se sigue que en el interior de las masas, el potencial gravitacional satisface lo que se conoce como ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (3.12)$$

en el exterior Φ satisface la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \Phi = 0$.

SECCIÓN 3.4

Trasformación a coordenadas comoviles

En el modelo cosmológico estándar, las variables de posición convenientes son las coordenadas comoviles, las cuales se pueden pensar como una red que se expande uniformemente a medida que avanza el tiempo. Así la distancia comóvil entre dos puntos, la cual sólo mide la diferencia entre dos coordenadas, se mantiene constante. Sin embargo la distancia propia, o física es proporcional al factor de escala. Dicha relación entre la distancia real $\mathbf{r}$ y la distancia comóvil, la cual se denotará con $\mathbf{x}$, se puede escribir como

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x}, \quad (3.13)$$

ahora diferenciando respecto al tiempo esta expresión, se obtiene,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{x} + a\frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

es decir,

$$\mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u}. \quad (3.14)$$

Donde $\mathbf{u} = a\dot{\mathbf{x}}$ es la velocidad peculiar. Así el Lagrangiano para el movimiento es

$$L = \frac{m}{2}(\dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{u})^2 - m\Phi. \quad (3.15)$$

Realizando la siguiente transformación canónica:

$$L \rightarrow L - \frac{d\psi}{dt}, \quad \psi = \frac{m}{2}a\dot{a}x^2,$$

el Lagrangiano se reduce a

$$L = \frac{m}{2}a^2\dot{x}^2 - m\phi, \quad (3.16)$$

con

$$\phi = \Phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2. \quad (3.17)$$

Se puede mostrar la siguiente relación en el limite Newtoniano [11]

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}(t)a, \quad (3.18)$$

siendo $\bar{\rho}(t)$ el promedio espacial de la densidad.

Los operadores gradiente y Laplaciano transforman a coordenadas comoviles de la siguiente forma

$$\nabla_{\mathbf{r}} = \frac{1}{a}\nabla_{\mathbf{x}}, \quad (3.19)$$

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{a^2} \nabla_{\mathbf{x}}^2, \quad (3.20)$$

y la derivada parcial del tiempo transforma como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - \frac{\dot{a}}{a} (\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

A continuación se realiza una transformación de las ecuaciones (3.4), (3.7) y (3.12) a coordenadas comoviles. El primer término de (3.4) transforma así

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} - \frac{\dot{a}}{a} (\mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho), \quad (3.22)$$

con el segundo término de (3.4), se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \dot{a} \mathbf{x} + \rho \mathbf{u}) \\ &= \dot{a} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{x}) + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{u}), \end{aligned}$$

nótese que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{x}) &= \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \rho + \rho \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{x} \\ &= \frac{\mathbf{x}}{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho + \frac{\rho}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x} \\ &= \frac{\mathbf{x}}{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho + \frac{3}{a} \rho, \end{aligned}$$

así que

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{x} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \rho + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (3.23)$$

Sumando (3.22) y (3.23), se obtiene

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho + \frac{1}{a} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.24)$$

Ahora se define la densidad de contraste, la cual es una fluctuación de la densidad y es una cantidad adimensional, de la siguiente manera

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}. \quad (3.25)$$

La densidad de contraste es negativa en regiones de baja densidad y positiva en regiones de alta densidad. El mínimo valor que tiene es $\delta = -1$, correspondiente a $\rho(\mathbf{x}, t) = 0$, y en

principio no hay cota superior en δ .

Con lo anterior (3.24) se escribe en términos de la densidad de contraste, como sigue a continuación

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right)_x + (\delta + 1) \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right)_x + 3 \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho} (\delta + 1) + \frac{\bar{\rho}}{a} \nabla_x \cdot [(\delta + 1) \mathbf{u}] = 0, \quad (3.26)$$

dado que $\bar{\rho} \propto \frac{1}{a^3} \Rightarrow \left(\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right)_x = -3 \frac{\dot{a}}{a} \bar{\rho}$, entonces la ecuación (3.26) será

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right)_x + \frac{1}{a} \nabla_x \cdot [(\delta + 1) \mathbf{u}] = 0, \quad (3.27)$$

utilizando la relación del tiempo conforme y el factor de escala, la cual esta dada por

$$dt = a d\tau, \quad (3.28)$$

finalmente se obtiene para la ecuación (3.4)

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial \tau} \right)_x + \nabla_x \cdot [(\delta + 1) \mathbf{u}] = 0. \quad (3.29)$$

Continuando con la ecuación (3.7), veamos como transforma su primer término

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} (\mathbf{x} \cdot \nabla_x) \mathbf{v},$$

haciendo uso de la ecuación (3.14)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_r &= \left[\frac{\partial}{\partial t} (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) \right]_x - \frac{\dot{a}}{a} (\mathbf{x} \cdot \nabla_x) (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{x} \ddot{\mathbf{a}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} (\mathbf{x} \cdot \nabla_x) (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}), \end{aligned}$$

Con lo anterior se tiene para la ecuación de Euler:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \ddot{\mathbf{a}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_x - \frac{\dot{a}}{a} (\mathbf{x} \cdot \nabla_x) (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) + \frac{1}{a} [(\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) \cdot \nabla_x] (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) &= -\frac{1}{a\rho} \nabla_x p - \frac{1}{a} \nabla_x \Phi \\ \Rightarrow \mathbf{x} \ddot{\mathbf{a}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_x + \frac{1}{a} (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) (\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{u}) &= -\frac{1}{a\rho} \nabla_x p - \frac{1}{a} \nabla_x \Phi. \end{aligned}$$

Como $(\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{x} = \mathbf{u}$ y utilizando la relación (3.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \ddot{\mathbf{a}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u} + \frac{1}{a} (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{u} &= -\frac{1}{a\rho} \nabla_x p - \frac{1}{a} \nabla_x \left(\phi - \frac{1}{2} a \ddot{a} x^2 \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_x + \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{u} + \frac{1}{a} (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{u} &= -\frac{1}{a\rho} \nabla_x p - \frac{1}{a} \nabla_x \phi. \end{aligned}$$

En términos del tiempo conforme y definiendo la razón de expansión conforme de la siguiente manera $\mathcal{H} = d \ln(a) / d\tau = \dot{a}$, se obtiene la ecuación de Euler en las coordenadas del sistema de referencia comóvil

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \right)_x + \mathcal{H} \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla_x) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla_x p - \nabla_x \phi. \quad (3.30)$$

Finalmente para la ecuación de Poisson (3.12) se hace uso de la relación (3.17), así que

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \nabla_x^2 \left(\phi - \frac{1}{2} a \ddot{a} x^2 \right) &= 4\pi G \rho \\ \Rightarrow \nabla_x^2 \phi &= 4\pi G \rho a^2 + 3a \ddot{a}, \end{aligned}$$

usando la relación dada por (3.18) y de la definición de la densidad de contraste (3.25)

$$\begin{aligned} \nabla_x^2 \phi &= 4\pi G a^2 (\rho - \bar{\rho}) \\ &= 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{8\pi G \bar{\rho}}{3\dot{a}^2} a^2 \right) \dot{a}^2 \delta \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{8\pi G \bar{\rho}}{3H^2} \right) \dot{a}^2 \delta. \end{aligned}$$

La expresión anterior en términos del parámetro de densidad y la razón de expansión conforme finalmente queda

$$\nabla_x^2 \phi = \frac{3}{2} \Omega \mathcal{H}^2 \delta(\mathbf{x}, \tau). \quad (3.31)$$

Así se han deducido las expresiones, que dan cuenta del fenómeno de inestabilidad gravitacional, dentro del régimen Newtoniano.

Capítulo 4

Variables estocásticas y probabilidad

El proceso de formación de estructuras debido a inestabilidad gravitacional es un fenómeno de naturaleza estadística. En este capítulo se discuten brevemente los motivos por los cuales es necesario abordar el estudio de este fenómeno desde un enfoque estadístico y también se presentan las herramientas matemáticas básicas para fundamentar la descripción estadística del mismo.

SECCIÓN 4.1

Inflación y el origen de las condiciones iniciales.

Si bien la inflación cosmológica se presentó en su momento como una solución a los problemas del modelo cosmológico estándar mencionados en el capítulo 2, su principal valor y utilidad es que ofrece una explicación para el origen de las fluctuaciones iniciales las cuales sirven como condiciones iniciales en el proceso de formación de estructuras y con ello, del origen de todas las estructuras que observamos actualmente en el Universo. En el modelo cosmológico estándar las condiciones iniciales para iniciar el proceso de agrupamiento (clustering) de materia deben ser impuestas a mano, mientras que con el mecanismo de inflación, las condiciones iniciales aparecen naturalmente como consecuencia de las fluctuaciones cuánticas del campo escalar inflatón. Estas fluctuaciones del inflatón generan las semillas iniciales que serán posteriormente agrupadas y amplificadas mediante el mecanismo de inestabilidad gravitacional dando origen a estructuras macroscópicas. Dado que no es posible tener acceso

observacional directo a las perturbaciones inflacionarias, no es posible tener control de las condiciones iniciales de las ecuaciones de movimiento del proceso de formación de estructuras por medio de inestabilidad gravitacional, este hecho entraña el carácter intrínsecamente no determinista de este fenómeno y es por eso que es necesario abordar su estudio con un enfoque probabilístico, pese a que las ecuaciones de movimiento sean de naturaleza clásica. Para entender a grandes rasgos la naturaleza estocástica de este fenómeno es importante recordar la ecuación que describe las perturbaciones cuánticas del inflatón. Para las condiciones de slow roll vistas en el capítulo 2, las fluctuaciones del campo ϕ para una determinada escala k se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\delta\varphi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} (a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_k(t) + a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi_k^*(t)), \quad (4.1)$$

donde los operadores $a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^\dagger$ obedecen las reglas de conmutación $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_D(\mathbf{k} + \mathbf{k}')$, y la expresión para ϕ_k en un espacio de de Sitter (durante el periodo inflacionario) es:

$$\phi_k(t) = \frac{H}{\sqrt{2}k^{3/2}} \left(i + \frac{k}{aH} \right) e^{i(k/aH)}. \quad (4.2)$$

De esta expresión, es posible deducir que para escalas fuera del horizonte, $k/aH \ll 1$, se tiene que las perturbaciones se pueden escribir como combinación de los modos

$$\varphi_{\mathbf{k}} \approx \frac{iH}{\sqrt{2}k^{3/2}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^\dagger), \quad (4.3)$$

es decir:

$$\delta\varphi = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (4.4)$$

Una consecuencia notable de este resultado es que las variables canónicamente conjugadas $\varphi_{\mathbf{k}}$ y $\varphi_{\mathbf{k}}^\dagger$ conmutan para todos los modos $\mathbf{k}$ cuando las escalas se encuentran muy fuera del horizonte, es decir: $[\varphi_{\mathbf{k}}, \varphi_{\mathbf{k}'}^\dagger] \approx 0$. Al ocurrir esto, el carácter cuántico de las perturbaciones desaparece, las escalas fuera del horizonte se “congelan” al salir del horizonte y se tornan clásicas¹. De esta forma los valores esperados vacío-vacío, los cuales son el elemento fundamental para construir funciones de correlación de las variables físicas del sistema se puede calcular como el promedio estadístico de estas variables clásicas, es decir: $\langle \mathcal{P}x \rangle \equiv \langle 0|x|0 \rangle$ donde $\mathcal{P}$ es la función de densidad de probabilidad clásica y x es una variable arbitraria.

Una vez terminada la inflación, los modos entran nuevamente en el horizonte y contribuyen por medio de su densidad de energía al potencial gravitacional y así a la densidad de materia por medio de la ecuación de Poisson (3.12) discutida en la sección 3.3. Las características estadísticas de estas perturbaciones primordiales son así transmitidas a la variable fundamental para la descripción del fenómeno de formación de estructuras.

¹Este proceso pasa rápidamente una vez las escalas se encuentran fuera del horizonte dado que el factor de escala crece de forma exponencial.

SECCIÓN 4.2**Momentos, cumulantes y sus funciones generadoras.**

Sea t una variable estocástica, la cual puede tomar un valor en un conjunto continuo de valores, tal como un intervalo sobre el eje real, dicho intervalo que corresponde a un evento es $\{a \leq \rho \leq b\}$. Asumiendo que existe una función continua, $P_t(\rho)$ tal que la probabilidad de que t tome un valor en el intervalo $\{a \leq \rho \leq b\}$ es dada por el área bajo la curva, $P_t(\rho)$ versus ρ , entre $\rho = a$ y $\rho = b$,

$$Prob(a \leq \rho \leq b) = \int_a^b d\rho P_t(\rho). \quad (4.5)$$

Entonces $P_t(\rho)$ es la densidad de probabilidad para la variable estocástica, t , y $d\rho P_t(\rho)$ es la probabilidad para encontrar la variable estocástica, t , en el intervalo $\rho \rightarrow \rho + d\rho$. La densidad de probabilidad debe satisfacer las condiciones $P_t(\rho) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} d\rho P_t(\rho) = 1$ (Asumiendo que el rango de t es $-\infty \leq \rho \leq \infty$).

Determinada la densidad de probabilidad $P_t(\rho)$, para la variable aleatoria ρ , se tiene toda la información sobre ella, lo cual en la práctica es usualmente difícil, sin embargo si no se puede determinar $P_t(\rho)$, a menudo se puede obtener información acerca de los momentos de t . El n -ésimo momento de t se define como

$$\langle \rho^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \rho^n P_t(\rho). \quad (4.6)$$

Los momentos nos dan información sobre la propagación y la forma de la densidad de probabilidad.

- El primer momento, $\langle \rho \rangle$, da la posición del “centro de masa” de la densidad de probabilidad.
- El segundo momento, $\langle \rho^2 \rangle$ da el “momento de inercia” de la probabilidad sobre el origen.
- El tercer momento $\langle \rho^3 \rangle$ recoge cualquier asimetría en la distribución de probabilidad sobre $\rho = 0$.

La combinación del primer momento y del segundo momento, $\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2$, es llamada la varianza de t , y la desviación estándar de t , se define de la siguiente manera

$$\sigma_t = \sqrt{\langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2}, \quad (4.7)$$

esta da una medida de que tan lejos se propaga la probabilidad de la media.

A través de la función generadora de momentos se pueden generar todos los momentos. Esta puede ser definida para cualquier numero de variables aleatorias. Se define por

$$\mathcal{M}(t) \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\langle \rho^p \rangle}{p!} t^p = \langle \exp(t\rho) \rangle. \quad (4.8)$$

Los momentos se pueden obtener por derivadas consecutivas de la función $\mathcal{M}(t)$ para $t = 0$. De manera similar se define una función generadora de cumulantes por

$$\mathcal{C}(t) \equiv \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\langle \rho^p \rangle_c}{p!} t^p. \quad (4.9)$$

Un resultado fundamental es que la función generadora de cumulantes es dada por el logaritmo de la función generadora de momentos (véase apéndice D en [20])

$$\mathcal{M}(t) = \exp[\mathcal{C}(t)]. \quad (4.10)$$

En el caso de una función de distribución de probabilidad Gaussiana es fácil probarlo de $\langle \exp(t\rho) \rangle = \exp(\sigma^2 t^2/2)$.

Los primeros cuatro cumulantes se conocen como la media, la varianza, la oblicuidad y curtosis, de la distribución respectivamente, son obtenidas de los momentos como

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1(t) &= \langle \rho \rangle \\ \mathcal{C}_2(t) &= \langle \rho^2 \rangle - \langle \rho \rangle^2 \\ \mathcal{C}_3(t) &= \langle \rho^3 \rangle - 3 \langle \rho^2 \rangle \langle \rho \rangle + 2 \langle \rho \rangle^3 \\ \mathcal{C}_4(t) &= \langle \rho^4 \rangle - 4 \langle \rho^3 \rangle \langle \rho \rangle - 3 \langle \rho^2 \rangle^2 + 12 \langle \rho^2 \rangle \langle \rho \rangle^2 - 6 \langle \rho \rangle^4. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Los cumulantes brindan una forma útil y compacta de describir una función de distribución de probabilidad.

SECCIÓN 4.3

Homogeneidad estadística e isotropía

Recurriendo al concepto de campo aleatorio, el cual se puede pensar como un conjunto de funciones $g_n(\mathbf{x})$ cada uno con una probabilidad asociada P_n . A cada función $g_n(\mathbf{x})$ se le llama una realización, mientras que el conjunto de todas ellas será conocido como ensamble.

Un campo aleatorio se llama estadísticamente homogéneo si todos los puntos del conjunto de las funciones de distribución de probabilidad o sus momentos, se mantienen igual bajo

traslación de coordenadas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ en el espacio. Por lo tanto las probabilidades dependen solo de las posiciones relativas.

Un campo aleatorio se llama estadísticamente isotrópico si las funciones de distribución de probabilidad son invariantes bajo rotaciones. Se asume que los campos cósmicos son estadísticamente homogéneos e isotrópicos, según lo predicen la mayoría de teorías en cosmología.

Para dar cuenta de los campos aleatorios se utilizan los correladores, los cuales son cantidades esperadas de alguna función con propiedad estocástica [18], la función de correlación de dos puntos se define como

$$\xi(r) = \langle g(\mathbf{x}) g(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \sum_n P_n g_n(\mathbf{x}) g_n(\mathbf{x} + \mathbf{r}), \quad (4.12)$$

la cual sólo depende de la norma de $\mathbf{r}$ debido a la homogeneidad e isotropía estadística, además se puede extender a N puntos. Un campo aleatorio puede ser descompuesto en componentes de Fourier como

$$g(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.13)$$

O equivalentemente

$$g(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.14)$$

La cantidad $g(\mathbf{k})$ es una variable aleatoria compleja. Como $g(\mathbf{x})$ es real, se sigue que

$$g(\mathbf{k}) = g^*(-\mathbf{k}). \quad (4.15)$$

El campo $g(\mathbf{x})$ es por lo tanto determinado completamente por las propiedades estadísticas de la variable aleatoria $g(\mathbf{k})$.

Los diferentes modos de Fourier en la descomposición están relacionados con las realizaciones descritas arriba. Así como en un ensamble, los correladores también pueden ser descompuestos en modos de Fourier según

$$\langle g(\mathbf{x}_1) \dots g(\mathbf{x}_n) \rangle \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3\mathbf{k}_n}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{k}_n \cdot \mathbf{x}_n)} \times \langle g(\mathbf{k}_1) \dots g(\mathbf{k}_n) \rangle, \quad (4.16)$$

por lo que se puede escoger el marco de trabajo ya sea en el espacio real o en el espacio de Fourier.

El cálculo del correlador de dos puntos en el espacio de Fourier toma la forma,

$$\begin{aligned} \langle g(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}') \rangle &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{r}}{(2\pi)^3} \xi(r) \exp[-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}] \\ &= \delta_{Dirac}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \int d^3\mathbf{r} \xi(r) \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}) \\ &= \delta_{Dirac}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Donde $P(k)$ es el espectro de potencia del campo estocástico y está asociado con las probabilidades de las realizaciones. La relación inversa entre la función de correlación de dos puntos y el espectro de potencia entonces indica

$$\xi(r) = \int d^3\mathbf{k} P(k) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (4.18)$$

Ahora, si no existe ningún grado de correlación entre los diferentes componentes de Fourier se dirá que son de tipo Gaussiano, dado, que las probabilidades asociadas a cada realización son independientes y por tanto presentarán una distribución Gaussiana. Para un campo aleatorio Gaussiano sólo los correladores de $2n$ puntos serán diferentes de cero y los correladores de alto grado quedan determinados como productos del correlador de dos puntos. las siguientes ecuaciones muestran los tres primeros correladores

$$\langle g(\mathbf{k}) \rangle = 0, \quad (4.19)$$

$$\langle g(\mathbf{k}_1) g(\mathbf{k}_2) \rangle = \delta_{Dirac}(\mathbf{k} + \mathbf{k}') P(k), \quad (4.20)$$

$$\langle g(\mathbf{k}_1) g(\mathbf{k}_2) g(\mathbf{k}_3) \rangle = 0. \quad (4.21)$$

En caso tal que exista algún grado de correlación entre los distintos modos de Fourier se llamara perturbación no-Gaussiana y en este caso los correladores de $2n + 1$ puntos tomaran valores diferentes de cero. Es así como el correlador de tres puntos que en el caso Gaussiano era cero ahora toma la forma

$$\langle g(\mathbf{k}_1) g(\mathbf{k}_2) g(\mathbf{k}_3) \rangle = \delta_{Dirac}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_g(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3). \quad (4.22)$$

Donde B_g se conoce como el trispectrum. Según los modelos inflacionarios el espectro de las perturbaciones primordiales es en gran medida de tipo Gaussiano, prediciendo un grado de no Gaussianidad pequeño.

Capítulo 5

Simetrías de las ecuaciones Newtonianas

El estudio de las simetrías de las ecuaciones que describen el fenómeno de la inestabilidad gravitatoria¹, se realiza dentro de la aproximación límite de la relatividad general, la mecánica Newtoniana, en la cual el estudio del comportamiento de la materia del universo en expansión se simplifica. El régimen Newtoniano se aplica en una región pequeña comparada a la longitud de Hubble y grande comparada con el radio de Schwarzschild. Se investiga las simetrías subyacentes en dichas ecuaciones para un fluido perfecto sin presión, en un universo homogéneo e isótropo, en el cual además de la componente de materia hay presencia de una constante cosmológica no nula (Λ CDM). Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de inestabilidad gravitacional fueron derivadas en el capítulo 3, estas corresponden a las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31) y aquí se retoman nuevamente a fin de estudiar su comportamiento frente a un grupo particular de transformaciones, por comodidad se suprimirá el subíndice $\mathbf{x}$, pero se entiende que están escritas para un sistema de referencia conforme,

$$\frac{\partial \delta(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} + \nabla \cdot \{[1 + \delta(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)\} = 0, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\tau) \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) + [\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) \cdot \nabla] \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = -\nabla \phi(\mathbf{x}, \tau), \quad (5.2)$$

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \tau) = \frac{3}{2} \Omega(\tau) \mathcal{H}^2 \delta(\mathbf{x}, \tau). \quad (5.3)$$

Recordando que una transformación de Galileo es de la forma

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t = t', \quad (5.4)$$

¹En el apéndice B, se hace una presentación de dicho fenómeno físico.

en la cual $\mathbf{v}$ es una velocidad uniforme. En términos del sistema de referencia comóvil se tiene,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}T, \quad (5.5)$$

donde,

$$T(\tau) = \frac{t}{a} = \frac{1}{a} \int_0^\tau a(\eta) d\eta. \quad (5.6)$$

SECCIÓN 5.1

Simetrías en Λ CDM

Se investigan las simetrías si el universo, además de una componente material, esta caracterizado por la presencia de una constante cosmológica no nula, para esto se observa, que de acuerdo con (5.5), se puede considerar el siguiente conjunto más general de transformaciones [9, 19],

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{n}(T), \quad \tau = \tau'. \quad (5.7)$$

Teniendo en cuenta que la velocidad peculiar es $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}$, y denotando la diferenciación con respecto al tiempo conforme, τ , a través de un punto, la velocidad peculiar transforma de la siguiente manera

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \dot{\mathbf{n}}(T). \quad (5.8)$$

La derivada parcial del tiempo conforme transforma como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau'} + \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} \\ &= \frac{\partial \tau'}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau'} + \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \tau} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{n}} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}, \end{aligned}$$

usando la transformación (5.7) se tienen las relaciones: $\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{1}$, $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \nabla'$ y $\frac{\partial \tau'}{\partial \tau} = 1$, por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau'} - \dot{\mathbf{n}} \cdot \nabla'. \quad (5.9)$$

Con lo anterior, determinemos bajo que condiciones es invariante la ecuación (5.2), así que

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial}{\partial \tau'} - \dot{\mathbf{n}}(T) \cdot \nabla' \right] [\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] + \mathcal{H}[\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] \\ &\quad + \{[\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] \cdot \nabla'\} [\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] + \nabla' \phi(\mathbf{x}, \tau) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \tau'} + \frac{\partial \dot{\mathbf{n}}(T)}{\partial \tau'} - [\dot{\mathbf{n}}(T) \cdot \nabla'] [\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] + \mathcal{H}[\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] \\ &\quad + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \dot{\mathbf{n}}(T) + [\dot{\mathbf{n}}(T) \cdot \nabla'] [\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] + \nabla' \phi(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

cancelando términos y notando que $(\mathbf{u}' \cdot \nabla') \dot{\mathbf{n}}(T) = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \tau'} + \mathcal{H} \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' + \mathcal{H} \dot{\mathbf{n}}(T) + \frac{\partial \dot{\mathbf{n}}(T)}{\partial \tau'} + \nabla' \phi(\mathbf{x}, \tau) \\ &= -\nabla \phi'(\mathbf{x}', \tau) + \mathcal{H} \dot{\mathbf{n}}(T) + \frac{\partial \dot{\mathbf{n}}(T)}{\partial \tau'} + \nabla' \phi(\mathbf{x}, \tau). \end{aligned}$$

Por lo tanto (5.2) sera invariante si:

$$\nabla \phi'(\mathbf{x}', \tau) = \mathcal{H} \dot{\mathbf{n}}(T) + \frac{\partial \dot{\mathbf{n}}(T)}{\partial \tau'} + \nabla' \phi(\mathbf{x}, \tau), \quad (5.10)$$

es decir

$$\phi'(\mathbf{x}', \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau) + (\mathcal{H} \dot{\mathbf{n}}(T) + \ddot{\mathbf{n}}(T)) \cdot \mathbf{x}. \quad (5.11)$$

En la determinación de la invarianza de la ecuación (5.3) se utiliza la transformación (5.11), y se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla'^2 \phi'(\mathbf{x}', \tau) - \frac{3}{2} \Omega \mathcal{H}^2 \delta(\mathbf{x}, \tau) \\ &= \frac{3}{2} \Omega \mathcal{H}^2 \delta'(\mathbf{x}', \tau) - \frac{3}{2} \Omega \mathcal{H}^2 \delta(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned}$$

de la cual se sigue

$$\delta(\mathbf{x}, \tau) = \delta'(\mathbf{x}', \tau). \quad (5.12)$$

Finalmente se inspecciona la invariancia de la ecuación (5.1) utilizando las transformaciones encontradas anteriormente, (5.11) y (5.12), lo cual produce

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial \tau'} - \dot{\mathbf{n}}(T) \cdot \nabla' \right) \delta'(\mathbf{x}', \tau) + \nabla' \cdot \{ [1 + \delta'(\mathbf{x}', \tau)] [\mathbf{u}' + \dot{\mathbf{n}}(T)] \} \\ &= \frac{\partial \delta'(\mathbf{x}', \tau)}{\partial \tau'} - (\dot{\mathbf{n}}(T) \cdot \nabla') \delta'(\mathbf{x}', \tau) + \nabla' \cdot \{ [1 + \delta'(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{u}' \} + (\dot{\mathbf{n}}(T) \cdot \nabla') \delta'(\mathbf{x}', \tau), \end{aligned}$$

con lo cual es muy fácil ver que,

$$\frac{\partial \delta'(\mathbf{x}', \tau)}{\partial \tau'} + \nabla' \cdot \{ [1 + \delta'(\mathbf{x}', \tau)] \mathbf{u}' \} = 0. \quad (5.13)$$

Con lo cual tenemos la invariancia de las ecuaciones de los fluidos bajo una transformación dada por (5.7).

SECCIÓN 5.2

Transformaciones de Galileo y de la aceleración

El conjunto de transformaciones (5.7) contiene como caso especial el boost Galileano, así como las transformaciones de la aceleración.

El caso del boost Galileano se tiene si

$$\mathbf{n}(T) = T\mathbf{v}, \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 1 - \mathcal{H}T, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \tau^2} = -\mathcal{H}T - \mathcal{H}(1 - \mathcal{H}T). \quad (5.14)$$

Y así Las ecuaciones (5.8), (5.11) y (5.12) se vuelven

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}', \tau) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{v}(1 - \mathcal{H}T), \quad (5.15)$$

$$\phi'(\mathbf{x}', \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau) - T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}. \quad (5.16)$$

$$\delta(\mathbf{x}, \tau) = \delta'(\mathbf{x}', \tau). \quad (5.17)$$

Las trasformaciones bajo una aceleración constante, $\mathbf{a}$, se incluyen si se se toma lo siguiente

$$\mathbf{n}(T) = \frac{1}{2}T^2\mathbf{v}^2, \quad (5.18)$$

y las ecuaciones (5.8), (5.11) y (5.12) se vuelven

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}', \tau) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) - \frac{1}{2}\mathbf{v}T(1 - \mathcal{H}), \quad (5.19)$$

$$\phi'(\mathbf{x}', \tau) = \phi(\mathbf{x}, \tau) + \left[(1 - \mathcal{H}T)^2 - T^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tau} \right] \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}. \quad (5.20)$$

$$\delta(\mathbf{x}, \tau) = \delta'(\mathbf{x}', \tau). \quad (5.21)$$

SECCIÓN 5.3

Invariancia bajo escalado de Lifshitz

Veamos la invariancia de las ecuaciones de los fluidos bajo un escalado de Lifshitz de la forma

$$\tau' = \lambda^z \tau, \quad \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}, \quad (5.22)$$

para un z genérico. La derivada temporal y el operador gradiente transforman de la siguiente manera

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \lambda^z \frac{\partial}{\partial \tau'}, \quad \nabla = \lambda \nabla', \quad (5.23)$$

la velocidad peculiar transforma como

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}', \lambda^z \tau) = \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \tau'} = \lambda^{1-z} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau), \quad (5.24)$$

por lo cual se tiene para la ecuación (5.2)

$$0 = \lambda^{2z-1} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \tau'} + \lambda^{z-1} \mathcal{H} \mathbf{u}' + \lambda^{2z-1} [\mathbf{u}' \cdot \nabla'] \mathbf{u}' + \nabla \phi(\mathbf{x}, \tau). \quad (5.25)$$

Se observa inmediatamente que solamente cuando $\mathcal{H}$ se escala proporcional a $1/\tau$, la anterior ecuación es covariante, es decir las ecuaciones de los fluidos son invariantes bajo un escalado de Lifshitz sólo durante el periodo dominado por materia ($\mathcal{H} = 2/\tau$). En este caso se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^{2z-1} \left[\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \tau'} + \frac{2}{\tau'} \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla') \mathbf{u}' \right] + \nabla \phi(\mathbf{x}, \tau) \\ &= -\lambda^{2z-1} \nabla' \phi'(\mathbf{x}', \tau') + \nabla \phi(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (5.26)$$

es decir

$$\nabla' \phi'(\mathbf{x}', \tau') = \lambda^{1-2z} \nabla \phi(\mathbf{x}, \tau), \quad (5.27)$$

o

$$\phi'(\mathbf{x}', \tau') = \lambda^{2-2z} \phi(\mathbf{x}, \tau). \quad (5.28)$$

Usando estas trasformaciones en la ecuación (5.3) se encuentra

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, \tau) - \frac{6}{\tau^2} \Omega \delta(\mathbf{x}, \tau) \\ &= \lambda^{2z} \nabla'^2 \phi'(\mathbf{x}', \tau') - \frac{6}{\tau'^2} \lambda^{2z} \Omega \delta(\mathbf{x}, \tau) \\ &= -6 \frac{\lambda^{2z}}{\tau'^2} \Omega \delta'(\mathbf{x}', \tau') - \frac{6}{\tau'^2} \lambda^{2z} \Omega \delta(\mathbf{x}, \tau), \end{aligned} \quad (5.29)$$

es decir

$$\delta'(\mathbf{x}', \tau') = \delta(\mathbf{x}, \tau). \quad (5.30)$$

Es sencillo comprobar la invariancia de la ecuación (5.1) bajo las transformaciones encontradas.

Capítulo 6

Conclusiones

1. Se han establecido bajo que transformaciones, las ecuaciones Newtonianas del movimiento que describen la inestabilidad gravitacional, teniendo como fondo un universo en expansión son invariantes.
2. Se obtiene que las simetrías de las ecuaciones, dependen de la forma explícita de la razón de expansión conforme $\mathcal{H}$.
3. Se ha mostrado que las transformaciones de galileo, son sólo un caso especial de un conjunto de transformaciones, aplicadas a las ecuaciones no relativistas de los fluidos acopladas a la gravedad. Este conjunto también contiene las transformaciones de la aceleración en el sistema de coordenadas comóviles donde, el observador esta uniformemente acelerado.
4. El escalado de Lifshitz con un exponente genérico z , no es una simetría de las ecuaciones que describen la inestabilidad gravitacional cuando el universo es del tipo Λ CDM, sólo lo es en la época del dominio de la materia dado que $\mathcal{H} \propto 1/\tau$.
5. Las simetrías que poseen las ecuaciones de la inestabilidad gravitacional, deben ser destinadas a desempeñar un papel sólo a nivel estadístico, en el sentido que los correladores de un observable dado, tal como la densidad de contraste, debe tener las mismas propiedades estadísticas de su transformación bajo una simetría dada.
6. Como perspectiva de este trabajo se propone estudiar las consecuencias de las simetrías encontradas, con el fin de establecer relaciones de consistencia, las cuales sean útiles en la discriminación entre los diversos mecanismos que generan las perturbaciones cosmológicas.

Apéndice **A**

Ecuaciones de campo de Einstein

En el marco de la relatividad general se sabe que las componentes del tensor métrico correspondientes a un espacio-tiempo determinado son los potenciales del campo de la gravedad, y los efectos gravitacionales son descritos por la métrica. La acción total para un sistema que consiste de una distribución continua de materia como la fuente del campo gravitacional y el propio campo gravitacional es dado por

$$S = S_G + S_M, \quad (\text{A.1})$$

donde S_G es la acción del campo gravitacional en el vacío, y S_M es la acción que describe la interacción de la distribución de materia con el campo gravitacional, dichas acciones son

$$S_G = \int_{\Omega} \mathcal{L}_G (g_{\mu\nu}, \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (\text{A.2})$$

$$S_M = \int_{\Omega} \mathcal{L}_M (g_{\mu\nu}, \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (\text{A.3})$$

en las cuales $\mathcal{L}$ es la densidad Lagrangiana invariante la cual es es una función del tensor métrico y sus primeras derivadas, y se integra sobre un dominio Ω invariante de 4-dimensiones. Dado que el escalar de curvatura, R , se obtiene de la contracción del tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, y este a su vez se obtiene de la contracción del tensor de curvatura, $R^{\beta}_{\mu\nu\alpha}$, el cual es el único tensor no trivial que puede crearse del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y los simbolismos de Christoffel $\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}$. Por lo anteriormente dicho un candidato adecuado para la densidad Lagrangiana $\mathcal{L}_G$, es el escalar de Ricci. Entonces se escoge

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{16\pi G} R. \quad (\text{A.4})$$

La integral de acción S_G puede escribirse de la forma

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d\Omega, \quad (\text{A.5})$$

utilizando la contracción de índices el integrando se puede escribir de la siguiente manera, $\sqrt{-g}R = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, por lo cual

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}d\Omega. \quad (\text{A.6})$$

Una variación del integrando produce

$$\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) = \delta(\sqrt{-g})g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}\delta(g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta(R_{\mu\nu}). \quad (\text{A.7})$$

La variación del primer término es

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g,$$

utilizando la relación¹

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

se tienen para dicho término

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}(-gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = -\frac{\sqrt{-g}}{2}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Con el resultado anterior la ecuación (A.7) queda de la siguiente forma

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

¹La cual se comprueba de la siguiente manera, sea $g = g_{\mu\nu}G^{\mu\nu}$, donde $G^{\mu\nu}$ son los cofactores de los elementos de $g_{\mu\nu}$. El diferencial del determinante, g , es

$$dg = \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}dg_{\mu\nu} = G^{\mu\nu}dg_{\mu\nu},$$

ahora se determinan los cofactores en términos de g y $g^{\mu\nu}$ para ello se parte de

$$g^{\mu\nu}g = g^{\mu\nu}g_{\mu\alpha}G^{\mu\alpha} = \delta_{\alpha\nu}G^{\mu\alpha} \Rightarrow G^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu},$$

así que

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}.$$

Tomando el hecho que la derivada covariante del tensor métrico es igual a cero, se tiene la siguiente identidad

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} + g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta} = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} = -g_{\mu\nu}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\beta}$$

Por lo cual el diferencial de g en términos variacionales es

$$\delta g = gg^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -gg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Se puede mostrar que el término $\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}$ no contribuye a la variación total [17, 12], por lo cual la variación de la acción del campo gravitacional es

$$\delta S_G = \frac{1}{16\pi G} \int_{\Omega} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \right) \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \quad (\text{A.10})$$

La variación en la acción del campo de materia es

$$\delta S_M = \int_{\Omega} \delta \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M \right) d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial (\partial_{\beta} g^{\mu\nu})} \delta (\partial_{\beta} g^{\mu\nu}) \right] d\Omega.$$

Integrando por partes el segundo término en la expresión anterior

$$\int_{\Omega} \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial (\partial_{\beta} g^{\mu\nu})} \delta (\partial_{\beta} g^{\mu\nu}) d\Omega = \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial (\partial_{\beta} g^{\mu\nu})} \delta g^{\mu\nu} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} \partial_{\beta} \left[\frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial (\partial_{\beta} g^{\mu\nu})} \right] \delta g^{\mu\nu} d\Omega,$$

El primer término de esta integración se anula dado que se evalúa sobre el contorno de la hipersuperficie del dominio de integración Ω , por lo cual la variación de la acción del campo resulta ser

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_{\beta} \left[\frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial (\partial_{\beta} g^{\mu\nu})} \right] \right\} \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \quad (\text{A.11})$$

Definiendo el tensor de energía momento, $T_{\mu\nu}$ de los campos de materia como

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} = \partial_{\beta} \left[\frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial (\partial_{\beta} g^{\mu\nu})} \right] - \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathcal{L}_M)}{\partial g^{\mu\nu}}. \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo (A.12) en (A.11), se obtiene

$$\delta S_M = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d\Omega. \quad (\text{A.13})$$

Dado que $\delta S = \delta S_G + \delta S_M = 0$, además de las ecuaciones (A.10) y (A.13) se tiene

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d\Omega = 0, \quad (\text{A.14})$$

como las variaciones del tensor métrico son arbitrarias finalmente se obtiene la ecuación de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.15})$$

Apéndice B

Inestabilidad gravitacional en un universo en expansión.

En el estudio de como las grandes estructuras evolucionan con el tiempo se requiere conocer como una pequeña fluctuación en la densidad, con $|\delta| \ll 1$, crece en amplitud bajo la influencia de la gravedad. Se realiza un análisis del problema dentro del esquema Newtoniano, para ello se supone un universo lleno de materia sin presión con densidad de masa $\bar{\rho}(t)$, a medida que el universo se expande la densidad decrece a la razón $\bar{\rho}(t) \propto a(t)^{-3}$. Dentro de una región esférica de radio R , una pequeña cantidad de materia se agrega o elimina, así que la densidad dentro de la esfera es

$$\rho(t) = \bar{\rho}(t) [1 + \delta(t)]. \quad (\text{B.1})$$

Al realizar el análisis Newtoniano de este problema, se está asumiendo que el radio R es pequeño comparado con la distancia de Hubble. La aceleración gravitacional total para la superficie de la esfera será

$$\begin{aligned} \ddot{R} &= -\frac{GM}{R^2} \\ &= -\frac{G}{R^2} \left(\frac{4\pi}{3} \rho R^3 \right) \\ &= -\frac{4\pi}{3} GR [1 + \delta(t)] \bar{\rho}(t), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

esta ecuación del movimiento para un punto de la superficie de la esfera se puede escribir en la forma

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3} GR [1 + \delta(t)] \bar{\rho}(t). \quad (\text{B.3})$$

La masa dentro de la esfera ,

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho}(t) [1 + \delta(t)] R(t)^3$$

se mantiene constante, de acuerdo a la conservación de la masa, a medida que la esfera se expande, por lo cual

$$R(t) \propto \bar{\rho}(t)^{-1/3} [1 + \delta(t)]^{-1/3}, \quad (\text{B.4})$$

o dado que $\bar{\rho} \propto a^{-3}$

$$R(t) \propto a(t) [1 + \delta(t)]^{-1/3}. \quad (\text{B.5})$$

Por lo cual si la esfera es ligeramente super densa, su radio crecerá ligeramente menos rápido que el factor de escala $a(t)$. si la esfera es un poco menos densa, el radio crecerá ligeramente más rápido que el factor de escala.

Tomado dos veces la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (B.5) y dividiendo entre (B.4), se tiene

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3} [1 + \delta]^{-1} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} [1 + \delta]^{-1} \dot{\delta} + \frac{4}{9} [1 + \delta]^{-2} (\dot{\delta})^2,$$

cuando $|\delta| \ll 1$, entonces

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta}. \quad (\text{B.6})$$

Combinando las ecuaciones (B.3) y (B.6) se encuentra

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{3} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = \frac{4\pi}{3} GR [1 + \delta(t)] \bar{\rho}(t). \quad (\text{B.7})$$

Cuando $\delta = 0$, la ecuación B.7 se reduce a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} GR \bar{\rho}(t), \quad (\text{B.8})$$

la cual es la ecuación de la aceleración correcta para un universo homogéneo e isótropo que solo contiene materia sin presión. Restando la ecuación (B.8) de (B.7) para dejar solamente los términos lineales en la perturbación δ , se encuentra la ecuación que gobierna el crecimiento de las pequeñas perturbaciones,

$$-\frac{1}{3} \ddot{\delta} - \frac{2}{3} \frac{\dot{a}}{a} \dot{\delta} = \frac{-4\pi}{3} G \bar{\rho} \delta,$$

o recordando que $H = \dot{a}/a$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho} \delta. \quad (\text{B.9})$$

El término $H\dot{\delta}$ es llamado “fricción de Hubble” el cual retrasa el crecimiento de las perturbaciones en la densidad en un universo en expansión.

Un cálculo completamente relativista para el crecimiento de las perturbaciones de la densidad produce el resultado más general

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} \Omega H^2 \delta = 0. \quad (\text{B.10})$$

Sólo cuando la materia domina la densidad de energía pueden las fluctuaciones en la densidad de materia crecer a una razón significativa [13, 21]. En un universo plano, dominado por materia, $\Omega = 1$, $H = 2/(3t)$, la ecuación (B.10) toma la forma

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3}t^{-1}\dot{\delta} - \frac{2}{3}t^{-2}\delta = 0. \quad (\text{B.11})$$

Sugiriendo una solución para la ecuación de arriba en forma de ley de potencias como, Dt^n , se obtiene

$$\left[n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} \right] Dt^{n-2} = 0 \quad (\text{B.12})$$

o

$$n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Las dos posibles soluciones para esta ecuación cuadrática son $n = 1$ y $n = 2/3$. Entonces la solución general para la evolución temporal de las perturbaciones en la densidad en un universo sólo de materia y espacialmente plano es

$$\delta(t) \approx D_1 t^{2/3} + D_2 t^{-1} \quad (\text{B.14})$$

Los valores de D_1 y D_2 se determinan a través de las condiciones iniciales de $\delta(t)$. El modo que decae proporcional a t^{-1} , se vuelve despreciablemente pequeño comparado al modo de crecimiento proporcional a $t^{2/3}$. Cuando el modo de crecimiento es el único sobreviviente, las perturbaciones en la densidad en un universo solamente dominado por materia y plano crecen como

$$\delta \propto t^{2/3} \propto a(t), \quad (\text{B.15})$$

mientras $|\delta| \ll 1$. Cuando una región super densa alcanza un valor de $\delta \sim 1$ su evolución ya no puede ser tratada dentro del enfoque de la perturbación lineal. El estudio de la evolución no lineal de las estructuras se realiza utilizando simulaciones numéricas por computadora, en las cuales la materia que llena el universo es modelada como una distribución de masas puntuales interactuando a través de la gravedad Newtoniana.

Bibliografía

- [1] D.H. Lyth A.R. Liddle. The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure. Cambridge University Press (2009).
- [2] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23** (1981) 347.
- [3] A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B **108** (1982) 389.
- [4] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1220.
- [5] J. Tauber *et al.* [Planck Collaboration], *The Scientific programme of Planck*, astro-ph/0604069.
- [6] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], *Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation*, arXiv:1502.02114 [astro-ph.CO].
- [7] P. A. R. Ade *et al.* [Planck Collaboration], *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].
- [8] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga and R. Scoccimarro, Phys. Rept. **367** (2002) 1 [astro-ph/0112551].
- [9] A. Kehagias and A. Riotto, Nucl. Phys. B **873** (2013) 514 [arXiv:1302.0130 [astro-ph.CO]].
- [10] S. Weinberg, Cosmology, Oxford University Press, (2008).
- [11] P.J.E. Peebles, The Large-Scale Structure of the Universe, Princeton University Press (1980).
- [12] S. Carroll, Spacetime and Geometry an Introduction to General Relativity, Addison Wesley (2004).
- [13] V. Mukhanov, Physical foundations of cosmology, Cambridge University Press (2005).

-
- [14] D. Baumann, TASI Lectures on Inflation, arXiv:0907.5424 [hep-th].
 - [15] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, Astron. J. **116** (1998) 1009 [astro-ph/9805201].
 - [16] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae*, Astrophys. J. **517** (1999) 565 [astro-ph/9812133].
 - [17] M. Dalarsson, N. Dalarsson, Tensor Calculus, Relativity, and Cosmology, Elsevier Academic Press (2005).
 - [18] J. M. Maldacena, JHEP **0305** (2003) 013 [astro-ph/0210603].
 - [19] M. Peloso and M. Pietroni, JCAP **1305** (2013) 031 [arXiv:1302.0223 [astro-ph.CO]].
 - [20] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher, M.E.J. Newman, The Theory of Critical Phenomena, Oxford University Press, Oxford, (1992).
 - [21] B. Ryden, Introduction to Cosmology, Addison Wesley, (2003).