



**NIVELES DE COMPRENSIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN
DESDE LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA. UN
ESTUDIO DE CASOS CON ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO**

LUIS ALBERTO LEMOS MADRID

201352977

LESLY SIDNEY CAICEDO MARTÍNEZ

201353012

**UNIVERSIDAD DEL VALLE- SEDE PACÍFICO
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA ÉNFASIS EN MATEMÁTICA**

**BUENAVENTURA
2018**

**NIVELES DE COMPRENSIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN
DESDE LA PERSPECTIVA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA. UN
ESTUDIO DE CASOS CON ESTUDIANTES DE GRADO TERCERO**

**LUIS ALBERTO LEMOS MADRID
LESLY SIDNEY CAICEDO MARTÍNEZ**

JOHNNY VANEGAS DÍAZ
Asesor

**UNIVERSIDAD DEL VALLE- SEDE PACÍFICO
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN EDUCACIÓN
MATEMÁTICA**

**BUENAVENTURA
2018**

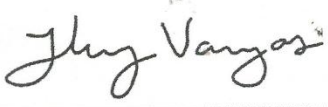
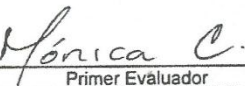
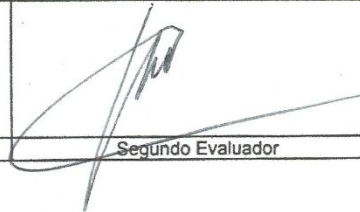
	INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA Subdirección Académica	ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO						
Programa Académico <u>Lic. Educación Básica Enf. Matemáticas</u>		Fecha						
Código del programa: <u>3 4 6 9</u>	Resolución del programa: _____	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <th style="width: 33%;">Día</th> <th style="width: 33%;">Mes</th> <th style="width: 33%;">Año</th> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">10</td> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">2018</td> </tr> </table>	Día	Mes	Año	10	4	2018
Día	Mes	Año						
10	4	2018						
Título del Trabajo o Proyecto de Grado								
Niveles de comprensión en el aprendizaje de la multiplicación desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista. Un estudio de casos con estudiantes de grado tercero								
Se trata de:								
Proyecto ☐ Informe Final ☒								
Director								
Johnny Alfredo Vanegas Díaz								
Nombre del Primer Evaluador								
Mónica Correa Ángel								
Nombre del Segundo Evaluador								
Freyder Paredes Cáceres								
Estudiantes								
Nombres y Apellidos	Código	Plan						
Luis Alberto Lemos Madrid	1352977	3469						
Lesly Sidney Caicedo Martínez	1353012	3469						
Evaluación								
Aprobado ☒	Meritorio ☐	Laureado ☐						
Aprobado con recomendaciones ☐	No Aprobado ☐	Incompleto ☐						
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:								
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐	Primer Evaluador ☐	Segundo Evaluador ☐						
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____ dd _____ mm _____ aa								
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).								
Firmas								
								
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador						

Tabla de contenido

Resumen	9
Introducción	10
CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO	14
1.1 Contextualización del problema	15
1.2 Formulación del problema	19
1.3 Objetivos	20
1.4 Justificación	21
1.5 Antecedentes	23
CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL	33
2.1 Surgimiento de la Educación Matemática Realista	34
2.2 Concepciones sobre el aprendizaje en la Educación Matemática Realista	36
2.3 Principios de la Educación Matemática Realista	37
2.3.1 Principio de actividad	37
2.3.2 Principio de realidad	38
2.3.3 Principio de reinención	39
2.3.4 Principios de niveles	40
2.3.5 Principio de interacción	44
2.3.6 Principio de interconexión	45

2.4 Referente didáctico	45
2.5 Referente matemático	46
2.6 Referente Curricular	54
CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA	58
3.1 Elementos metodológicos	59
3.2 Diseño del estudio de casos	60
3.3 Contexto de estudio	60
3.4 Sujetos participantes del estudio	61
3.5 Instrumentos utilizados	61
3.5.1 Cuestionario	62
3.5.2 Observación participativa	62
3.5.3 Producciones escritas de los estudiantes	63
3.5.4 Conversaciones de los estudiantes	63
3.5.5 Recursos tecnológicos	63
3.6 Interacción con los estudiantes	65
3.7 Categorías de análisis	66
3.8 Diseño de las tareas	68
3.9 Análisis a priori	79
CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES DEL PROYECTO	92

4.1 Introducción	93
4.2 Análisis del cuestionario	94
4.3 Análisis prospectivo de las tareas	95
4.4 Consideraciones finales del análisis prospectivo	113
4.5 Conclusiones	116
4.6 Reflexiones finales	120
Referencias bibliográficas	122
Anexos	128

Listado de ilustraciones

Ilustración 1. Ejemplo de multiplicación con el método Maya.	28
Ilustración 2. Tabla construida para realizar multiplicaciones mayores de 9.	29
Ilustración 3. Ejemplo de multiplicación por el método Árabe.	30
Ilustración 4. Ejemplo de multiplicación realizada con el método Ruso.	30
Ilustración 5. Matematización progresiva.	42
Ilustración 6. Modelo de los distintos niveles de comprensión.	44
Ilustración 7. Modelo cuaternario.	48
Ilustración 8. Ejemplo de producto de medidas.	50
Ilustración 9. Ejemplos del modelo lineal.	52
Ilustración 10. Esquema del modelo cardinal.	52
Ilustración 11. Ejemplo del modelo de media.	53
Ilustración 12. Recursos tecnológicos.	64
Ilustración 13. Tarea 1 los juguetes de Camilo.	72

Ilustración 14. Esquema para el concepto de suma. _____	81
Ilustración 15. Esquema del valor posicional. _____	81
Ilustración 16. Esquema concepto de repetición. _____	82
Ilustración 17. Esquema de agrupación. _____	83
Ilustración 18. Suma iterada. _____	84
Ilustración 19. Tabular y algorítmico. _____	85
Ilustración 20. Esquema de conteo iterado por agrupación. _____	87
Ilustración 21. Equivalencia _____	88
Ilustración 22. Relación entre valores constantes y el algoritmo de la multiplicación. _____	89
Ilustración 23. Desarrollo de la tarea 2 del grupo 2 (nivel situacional). _____	99
Ilustración 24. Desarrollo de la Tarea 2 del grupo 4 (nivel situacional). _____	100
Ilustración 25. Desarrollo de la Tarea 2 de los grupos 2 y 4 (nivel referencial). _____	101
Ilustración 26. Agrupación. _____	104
Ilustración 27. Secuencia de números. _____	106
Ilustración 28. Modelo tabular. _____	107
Ilustración 29. Transformación de la suma a la multiplicación. _____	108
Ilustración 30. Representación pictórica. _____	110

Listado de tablas

Tabla 1. Algunos modelos de suma para la comprensión de la multiplicación. _____	25
Tabla 2. Ejemplo del modelo asociativo. _____	25
Tabla 3. Ejemplo de descomposición previa. _____	26
Tabla 4. Ejemplo del modelo extendido. _____	26
Tabla 5. Ejemplo de isomorfismo de medidas. _____	49

Tabla 6. Modelo cuaternario en el producto de medida.	51
Tabla 7. Ejemplo del modelo numérico.	53
Tabla 8. Ejemplo del modelo razón aritmética.	54
Tabla 9. Estándares básicos de competencias asociados a la multiplicación.	56
Tabla 10. Currículo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros con respecto a la multiplicación.	57
Tabla 11. Intervenciones en el aula de clase.	65
Tabla 12. Categorías de análisis.	67
Tabla 13. Conocimientos previos para el aprendizaje de la multiplicación.	70
Tabla 14. Nivel referencial tarea salida a cine.	90
Tabla 15. Conversaciones de los estudiantes.	97
Tabla 16. Conversaciones de los estudiantes.	103
Tabla 17. Conversaciones de los estudiantes.	106
Tabla 18. Identificación de relaciones entre las combinaciones que tienen cada camisa y cada pantalón.	111
Tabla 19. Conteo iterado y valores constantes.	111
Tabla 20. Representación algorítmica de la multiplicación.	112

Resumen

La presente indagación se sustenta en la *Educación Matemática Realista* (EMR) como un enfoque teórico que permite estudiar la actividad matemática desplegada por los estudiantes. En particular, en este trabajo la EMR se emplea como una posibilidad para estudiar el avance en los diferentes niveles de comprensión matemática configurados en un grupo de tercer grado Educación Básica Primaria, de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros, al trabajar en la solución de tareas relativas a problemas multiplicativos (*isomorfismo de medidas y producto de medidas*).

Los referentes teóricos y metodológicos proporcionados por la EMR posibilitaron el diseño e implementación de tareas enmarcadas en *contextos realistas*, los cuales ayudaron, en cierta medida, a mejorar el interés de los estudiantes y permitieron que ellos pusieran en juego sus *conocimientos informales* acerca de cómo funcionan las cosas en matemáticas y los conectaran con los *conocimientos formales* en el marco de la multiplicación.

Las categorías de análisis construidas permitieron a) identificar los niveles de comprensión matemática en los que se movilizan los estudiantes y b) reflexionar en la consolidación del proceso de aprendizaje de la multiplicación, al direccionar el trabajo de los estudiantes hacia la búsqueda de nuevas estrategias, *modelos* y procedimientos de solución a las tareas. En consecuencia, los estudiantes construyeron diferentes *modelos* matemáticos con diversos niveles de complejidad a partir de la *matematización progresiva*.

Introducción

Esta indagación se inscribe en la *Línea de formación Didáctica de las Matemáticas* del Programa de Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. En términos generales, se discuten los resultados de un estudio que exploró el proceso de *matematización* desplegado por un grupo de estudiantes de tercer grado de Educación Básica Primaria al modelar situaciones con *contextos realistas* en el marco de problemas multiplicativos.

Uno de los intereses de este trabajo fue aportar evidencia acerca de cómo los procesos de *modelación matemática* favorecen la comprensión matemática de algunos significados asociados a la multiplicación. En coherencia con lo anterior, el estudio se llevó a cabo en el marco de la *Educación Matemática Realista* (EMR), como perspectiva teórica de base que sugiere la introducción de conceptos matemáticos escolares, a través de *contextos realistas* que sean imaginables o razonables para los estudiantes, quienes transitan por diferentes *niveles de comprensión*, partiendo de una matemática *informal* relacionada con el contexto hasta una matemática *formal*.

La visión adoptada en esta indagación va en contra de una concepción del aprendizaje memorístico y mecánico, en el que la enseñanza de los conceptos matemáticos se imparte sin ningún fundamento didáctico, lo cual conlleva únicamente al aprendizaje memorístico por medio de la mecanización de algoritmos, marginando la importancia de la comprensión de los conceptos, el razonamiento, el aprendizaje significativo y la resolución de problemas (Kaplan, Yamamoto y Ginsburg, 1989).

En el marco de las consideraciones anteriores, este proyecto pone especial interés en el diseño, implementación y análisis de un conjunto de tareas inscritas en *contextos realistas* que

incorporan problemas multiplicativos. Para ello, se consideraron dentro de los referentes matemáticos, los *modelos para la multiplicación* (Rico, Castro y Castro, 1995) y los aportes de Vergnaud (1997) en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, reconocidas en dos categorías: *isomorfismo de medidas y producto de medidas*.

En lo relacionado con los aspectos metodológicos, fue fundamental, previo a la implementación de las tareas, la anticipación (*análisis a priori*) de los modelos matemáticos, así como los procesos de *matematización progresiva* que se llevarían a cabo en torno a la solución de las mismas por parte de los estudiantes. Dentro de los resultados derivados del análisis de las producciones de los estudiantes (*análisis prospectivo*) se pudo mostrar la construcción y uso de diferentes modelos matemáticos en la resolución de los problemas multiplicativos. Además, se puso de manifiesto la *matematización progresiva* como un proceso gradual que parte de *modelos situacionales* hasta el reconocimiento de la matemática implicada en la estructura multiplicativa (*matematización vertical*).

Para efectos de organización, este proyecto se ha estructurado en cuatro capítulos:

En el primer capítulo, se presentan los aspectos generales del proyecto, los cuales documentan, fundamentalmente, la descripción y la formulación del problema. En este sentido, la descripción del problema subraya que en el proceso de aprendizaje de la multiplicación, los estudiantes suelen sentirse desmotivados al no sentirse atraídos con las estrategias de enseñanza que utilizan los profesores para ayudarles a comprender este concepto. Adicionalmente, este capítulo incluye el planteamiento de los objetivos en relación con la formulación del problema, así como algunos antecedentes del proyecto que destacan las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la multiplicación en situaciones contextualizadas, formas de introducir la

multiplicación y algunos modelos que favorecen el aprendizaje del concepto a partir de lo concreto, lo *pictórico* y lo *abstracto*.

En el segundo capítulo, se expone el marco de referencia conceptual, el cual incluye a) la discusión de algunos elementos teóricos del enfoque de la Educación Matemática Realista y b) la reflexión en torno a tres referentes: *didáctico*, *matemático* y *curricular* que son fundamentales en la articulación del diseño de cada una de las tareas. En lo que respecta al enfoque teórico, se examinan sus principios fundamentales: *de actividad*, *de realidad*, *de reinversión guiada*, *de interacción*, *de interconexión* y *de niveles de comprensión*.

En cuanto al referente didáctico se exponen algunas consideraciones relativas al aprendizaje de la multiplicación (Bezerra, 2015; Ortiz, 2010; Usuga, 2014; Puig y Cerdán, 1998) las cuales, indican la necesidad de emplear estrategias metodológicas que sean significativas para los estudiantes, tales como: el uso de material concreto y situaciones problemáticas enmarcadas en contextos familiares.

El referente matemático ilustra la multiplicación desde la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1997) en lo concerniente al *isomorfismo de medida* y *producto de medida*, y los *modelos para la suma* propuestos por Rico, Castro y Castro (1995). Por último el referente curricular, revela los planteamientos de los Lineamientos Curriculares (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) relacionados con la enseñanza de la multiplicación en el tercer grado de Educación Básica Primaria. Además, se discute un pequeño contraste entre lo que plantea el currículo escolar de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros y lo que señalan las directrices del Ministerio de Educación Nacional.

En el tercer capítulo se describen los elementos que conforman la metodología, tales como: el método y los instrumentos para la recolección de los datos, la población de estudio, el diseño de las tareas y la propuesta de intervención en el aula. En cuanto a los instrumentos de recolección de datos, se destaca un *cuestionario* que permitió reconocer los gustos e interés de los estudiantes para su posterior consideración en el diseño de las tareas. Dentro de los elementos metodológicos fue fundamental la construcción de unas categorías de análisis las cuales permitieron anticipar las distintas formas de actividad matemática desplegada por los estudiantes.

Finalmente, en el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos, en términos de la identificación de los niveles de comprensión y de los modelos construidos y usados por los estudiantes, los cuales permitieron evidenciar el proceso de *matematización progresiva*. Adicionalmente se exponen las conclusiones y reflexiones finales en relación con los objetivos específicos y el *análisis posteriori*.

CAPÍTULO 1. ASPECTOS GENERALES DEL PROYECTO

1.1 Contextualización del problema

El movimiento de reforma de los años 60's y el tradicional enfoque mecanicista de la enseñanza de las matemáticas, caracterizado por una excesiva prioridad en el manejo riguroso de las notaciones formales (simbólicas) y una presentación abstracta de los conceptos matemáticos, trajo consigo elevados porcentajes de fracaso escolar y una pérdida enorme del sentido y significado de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes (García, 1996).

En la actualidad, son mínimos los rastros de aquel movimiento, conocido en la historia de la Educación Matemática como la *reforma de la matemática moderna* (Ruiz, 2011). De hecho, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) tanto en Colombia como en el extranjero, vienen reconociendo el papel de *la modelación matemática y la resolución de problemas*, con el fin de mejorar el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes.

La modelación matemática es un proceso que favorece en los estudiantes el aprendizaje activo y la creatividad para enfrentarse a nuevos problemas. Además, logra prepararlos para problemas relacionados con las ciencias matemáticas y su diario vivir (Ozámiz, 1993). Desde esta visión se insiste en que los procesos de pensamiento matemático se articulen con los procesos de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

La resolución de problemas sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando únicamente las construcciones matemáticas, sino que está en continuo contacto con las situaciones del mundo real, dado que las matemáticas deben ser vistas y empleadas para matematizar aspectos de la realidad (Ozámiz, 1993). Así, tanto la resolución de problemas, como la modelación matemática se posicionan en el corazón de las

matemáticas, favoreciendo la recuperación de la intuición, la imaginación y el sentido del trabajo matemático de los estudiantes.

No obstante, es necesario difundir, aún más, la visión de una matemática más humana, que se crea y se desarrolla como respuesta a problemáticas sociales y culturales, posibilitando así elementos que ayuden a los estudiantes a establecer un vínculo más natural entre lo que ellos aprenden en la escuela y sus conocimientos extra-escolares provenientes de una realidad muy particular.

En este sentido, la investigación en Educación Matemática reconoce la importancia de desarrollar y emplear teorías, al interior de las prácticas de enseñanza, que permitan relacionar lo que los estudiantes saben acerca de cómo funciona el mundo y los conocimientos matemáticos que la escuela les está impartiendo (Muñoz, 2010). En esta misma dirección (Marín, 2011) indica que las matemáticas integran cualquier tipo de actividad humana, ya sea cultural, social, económica, o tecnológica, y por lo tanto, tiene más sentido si la escuela enseña, además de los simples algoritmos, a poner este conocimiento en uso para solucionar problemas inmediatos del entorno de los estudiantes.

En el marco de las reflexiones anteriores, es destacable el lugar de la matemática como una actividad humana y la necesaria incorporación de un *enfoque realista* para trabajar en las aulas de clase, que les permita a los estudiantes poder asociar los conceptos, procedimientos y relaciones matemáticas con aspectos representativos de su cotidianidad, es decir, que experimenten las matemáticas como aquello con lo que ellos conviven, desarrollando capacidades y actitudes para resolver problemas de su sociedad.

Además, la incorporación de un *enfoque realista* despierta el interés de la clase, promueve el trabajo colaborativo y el intercambio de ideas basadas en diferentes experiencias, sin perder el propósito de los contenidos matemáticos que se enseñan en el aula.

En general, el proceso de aprendizaje de las matemáticas, suele ser difícil para los estudiantes, en la mayoría de los casos porque no se sienten atraídos con las estrategias de enseñanza que utilizan los profesores para ayudarles a comprender los conceptos matemáticos (Bressan, 2016). Eso, sin considerar que muchos profesores no cuentan con la formación suficiente para desenvolverse efectivamente en clases de matemáticas, como es el caso de algunos profesores de primaria en Colombia, quienes enseñan simultáneamente diferentes asignaturas (Isoda y Olfos, 2009).

Las dificultades que plantean para los estudiantes, entre 8 y 9 años, el trabajo con la multiplicación y su operatividad en la solución de problemas, han sido ampliamente documentadas por investigadores del aprendizaje infantil de las matemáticas (Lampert, 1986; Teerizinha, Nunes Bryant, 2005; Wood, 2000).

Si bien, en el mejor de los casos, un alto porcentaje de los estudiantes aprenden en un tiempo curricular muy corto las tablas de multiplicar (Muñoz, 2010); son pocos los estudiantes que logran una comprensión amplia de la multiplicación caracterizada no sólo por la ejecución de cálculos simbólicos, sino además por la habilidad para enfrentarse a una variedad de situaciones en contexto, en el que no son visibles las cantidades a operar y la manera en que estas deben operarse para dar respuesta al problema.

La realidad escolar parece mostrar que la enseñanza de la multiplicación se está planteando desde su operatividad. El énfasis está puesto sobre la memorización de las tablas de

multiplicar y estrategias para aprenderlas, pero es claro que se requiere de una visión del aprendizaje que posibilite que los estudiantes doten de sentido y significado las estructuras multiplicativas a partir de experiencias de primera mano, que estimulen la búsqueda personal y la creación de procedimientos propios en un proceso de *matematización progresiva*.

La tendencia de enseñanza tradicional, centrada en ilustrar la multiplicación como una suma de sumandos iguales no ayuda a fomentar una visión significativa de la multiplicación, porque la limita a un único escenario y deja por fuera la relación estrecha que esta guarda con conceptos, como: la razón y la proporción (Muñoz, 2010). Sin embargo, la aproximación tradicional puede representar un primer momento en la enseñanza, puesto que representa un conocimiento escolar previo, que hace parte de las competencias que los estudiantes requieren para responder a múltiples problemas matemáticos y necesidades que se encuentran en el contexto que los rodea (Isoda y Olfos, 2009).

En efecto, una metodología de enseñanza de la multiplicación centrada en las tablas de multiplicar es insuficiente, porque este tipo de aproximación únicamente promueve formas algorítmicas de trabajar, ya que lo aprendido se reduce al uso exclusivo de la memoria por repetición; en su lugar, es válido introducir un trabajo con contextos cercanos a la cotidianidad de los estudiantes y con *situaciones reales*.

Se trata entonces de darle sentido a la matemática que están aprendiendo los estudiantes y esto puede hacerse a través de situaciones contextualizadas relacionadas con su diario vivir (Gravemeijer & Teruel, 2000; Freudenthal, 1991; y Puig, 2006).

De esta manera, los estudiantes conceptualizan las matemáticas como una herramienta para organizar, comprender y transformar el mundo que los rodea en el ejercicio de las prácticas

sociales, para poder generar un espacio de aprendizaje significativo en ellos, que conlleven a razonamientos mediados por argumentos plausibles, acompañados de consignas y preguntas que realmente los acerquen a los conceptos y procedimientos matemáticos de la multiplicación (Lorenzo y Vera, 1993).

1.2 Formulación del problema

Con lo escrito anteriormente, este proyecto se centra en responder la siguiente pregunta:

¿Cómo posibilitar el avance en los estudiantes de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros de grado tercero de Educación Básica Primaria de los distintos niveles de comprensión, cuando resuelven problemas de multiplicación a partir de tareas enmarcadas en la Educación Matemática Realista?

1.3 Objetivos

Objetivo General

- Posibilitar procesos de matematización progresiva en los estudiantes de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros de grado tercero de Educación Básica Primaria, cuando resuelven problemas de multiplicación a partir de tareas enmarcadas en la Educación Matemática Realista.

Objetivos Específicos

- ✓ Identificar algunas situaciones y contextos realistas cercanos a la cotidianidad de los estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros, referentes a la multiplicación con números naturales, para su articulación en un diseño de tareas sustentado en la Educación Matemática Realista.
- ✓ Diseñar e implementar unas tareas relativas a la multiplicación de números naturales que posibilite la identificación de los niveles de comprensión y procesos de matematización progresiva.
- ✓ Caracterizar los niveles de comprensión matemática que inicialmente revelan las producciones de los estudiantes y poner en evidencia procesos de matematización progresiva en la resolución de algunas tareas propuestas.

1.4 Justificación

Se hace necesario este proyecto, porque los estudiantes de la Institución Educativa Normal Superior Juan Ladrilleros del grado tercero de Educación Básica Primaria, tienen muchas dificultades con la resolución de problemas multiplicativos.

En dicha Institución, la enseñanza propuesta se inscribe en una postura tradicionalista, caracterizada por impartir conceptos sin ningún fundamento didáctico, pues sólo se estimula el aprendizaje memorístico por medio de la mecanización de algoritmos, sin tener en cuenta la importancia de la comprensión de los conceptos, el razonamiento, el aprendizaje significativo y la resolución de problemas aplicados a la vida cotidiana. Tal inferencia es producto de algunas apreciaciones de los autores de este proyecto al reconocer el carácter de la enseñanza en las aulas de clase de grado tercero en la Institución anteriormente mencionada.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tomó como una problemática para este proyecto porque los estándares nacionales (MEN, 1998) mencionan que hoy en día se pretende que el aprendizaje de la multiplicación esté relacionado con los intereses y las capacidades de los estudiantes, permitiéndoles así buscar y definir interpretaciones, identificar problemas, formular soluciones y usar adecuadamente materiales representativos que sean significativos para ellos.

También los autores, Kaplan, Yamamoto, & Ginsburg (1989) plantean que “los niños suspenden el pensamiento matemático razonable para memorizar un conjunto de algoritmos aparentemente absurdos y arbitrarios y esto lleva a que la mayoría de los estudiantes no comprendan lo que están haciendo” (p.110).

Para darle solución a la problemática expuesta anteriormente, este proyecto está encaminado a diseñar unas tareas que pongan de manifiesto estrategias didácticas, para que los

estudiantes de grado tercero aprendan a resolver problemas multiplicativos relacionados con su contexto, sin necesidad de memorizar las tablas de la multiplicación.

Las estrategias didácticas convierten el objetivo del aprendizaje en acciones concretas, esto ayuda a que los estudiantes reconozcan sus conocimientos previos, los profundicen, creen nuevos conocimientos, lo apliquen y trasmitan a los demás para enriquecer la conciencia colectiva, además las estrategias didácticas estimulan en los estudiantes la observación, el análisis, el fomentar la opinión, y sobre todo la búsqueda de soluciones (Piedad, 2012).

Por lo tanto, se hace apropiado adoptar una visión teórica como la expuesta por la EMR, porque se articula la matemática en la vida cotidiana de los estudiantes, favoreciendo un aprendizaje significativo al relacionar sus experiencias escolares y extra-escolares con las actividades matemáticas propuestas en clase. Además, desde este enfoque se busca estimular al estudiante a que indague, reinvente por sí mismo la matemática, y sea participe de su propio conocimiento (Freudenthal, 1991).

La Educación Matemática Realista propone unos niveles de comprensión que ponen de manifiesto estrategias para mejorar los procesos de aprendizajes de la multiplicación en los estudiantes. Inicialmente, estos niveles están ligados al contexto pero progresivamente estos se van desprendiendo del mismo y van dando lugar a procesos más sofisticados en los que el estudiante esquematiza, abstrae, generaliza y formaliza los conceptos y procedimientos matemáticos.

Los resultados de este proyecto pueden resultar muy útiles para la Institución Educativa, puesto que, eventualmente, pueden convertirse en herramientas que sirvan para comprender y

solucionar algunas de las dificultades evidenciadas en el trabajo de los estudiantes con problemas de estructura multiplicativa.

Además, la reflexión propuesta en torno a la multiplicación también es pertinente dado que múltiples investigaciones han revelado que en la Educación Primaria es reiterada la concepción limitada de la multiplicación, como una suma de sumando iguales, y poca importancia se ha dado a una visión más amplia que considere, por ejemplo, la multiplicación como una relación cuaternaria (Bezerra, 2015).

1.5 Antecedentes

En este apartado se mencionan algunas razones por las cuales, los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de la multiplicación y a su vez, se expone una propuesta para abordarlas. Luego, se hace una indagación relativa a distintos métodos de enseñanza de la multiplicación, los cuales tienen su origen en la historia y progreso de diferentes culturas. Finalmente, se discuten algunos aspectos de la enseñanza de la multiplicación en Colombia.

Dificultades en el aprendizaje de la multiplicación

Según Godino y Batanero (2002) las principales dificultades del aprendizaje de la multiplicación en los estudiantes de básica primaria surgen por cuatro aspectos: 1) vocabulario y concepto, 2) nivel de abstracción, 3) dificultades en operaciones y 4) solución de problemas.

Vocabulario: Se deben utilizar palabras conocidas para los estudiantes, porque la palabra producto en situaciones de multiplicación no tiene sentido para ellos, ya que no la han trabajado antes.

Nivel de abstracción: Cuando los estudiantes se enfrentan con situaciones multiplicativas, es porque ya han adquirido el conocimiento de suma y resta. Pero sumar y restar supone que los números que entran en esas operaciones funcionan todos dentro del mismo contexto, es decir, que son cantidades que tienen el mismo significado en los dos sumandos y en el resultado.

Dificultades en operaciones: La primera dificultad que suele pasar desapercibida es que una simple multiplicación como 123×12 es, en realidad, un conjunto variado de multiplicaciones que se escalonan y se combinan de acuerdo con unas reglas específicas. Este proceso queda notablemente oscurecido en el algoritmo habitual al suprimir pasos intermedios, lo que sin duda es una fuente de dificultades y errores.

Solución de problemas: A los estudiantes de primaria se les facilita resolver una situación multiplicativa cuando está relacionada con el contexto, resuelven mejor las situaciones multiplicativas de razón que de comparación. Dentro de las situaciones de razón, los problemas de reparto parecen ser más fáciles que los de agrupamiento (Puig, 2006).

Villanueva (2006) plantea unos modelos de aprendizaje que ayudan a superar las dificultades que tienen los estudiantes al enfrentarse al algoritmo de la multiplicación.

Modelo de sumas: La multiplicación como una suma iterada se puede utilizar para resolver una multiplicación ya sea de una, dos o más cifras. En la tabla 1 se evidencian tres formas en que se concreta este modelo, destacando en otras palabras la multiplicación como una suma repetitiva de un valor constante.

Tabla 1. Algunos modelos de suma para la comprensión de la multiplicación.

1) 35×9	2) 35×9	3) 36×48
$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ 35 \\ 35 \\ + 35 \\ 35 \\ 35 \\ 35 \\ 35 \\ \hline 315 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ + 35 \\ \hline 70 \rightarrow 2 \text{ veces } 35 \\ 70 \rightarrow 2 \text{ veces } 35 \\ 70 \rightarrow 2 \text{ veces } 35 \\ 70 \rightarrow 2 \text{ veces } 35 \\ 35 \rightarrow \text{una vez } 35 \\ \hline 315 \quad 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \\ + 36 \\ \hline 72 \rightarrow 2 \text{ veces} \\ + 72 \\ \hline 144 \rightarrow 4 \text{ veces} \\ + 144 \\ \hline 288 \rightarrow 8 \text{ veces} \\ + 288 \\ \hline 576 \rightarrow 16 \text{ veces} \\ + 576 \\ \hline 1152 \rightarrow 32 \text{ veces} \\ 576 \rightarrow 16 \text{ veces} \\ \hline 1728 \quad 48 \text{ veces } 36 \end{array}$

Modelo asociativo: Este modelo se relaciona con el uso de técnicas de cálculo mental, estimación y descomposición en factores. La tabla 2 ilustra este modelo al poner en juego la propiedad asociativa de forma favorable para hacer los cálculos mentalmente, como en el caso de 15 por 2 y su producto por 3, en lugar de la directa y compleja 15 por 6.

Tabla 2. Ejemplo del modelo asociativo.

$15 \times 6 = 15 \times (2 \times 3) = (15 \times 2) \times 3 = 30 \times 3 = 90$ $35 \times 18 = 35 \times (2 \times 9) = (35 \times 2) \times 9 = 70 \times 9 = 630$

Descomposición previa (propiedad distributiva): Este modelo es muy importante si se desea que los estudiantes comprendan todo el proceso de multiplicación, ya que aquí se da a conocer el valor posicional de cada número dentro del producto. La tabla 3 ilustra este proceso para un caso particular.

Tabla 3. Ejemplo de descomposición previa.

434×6 $(400 + 30 + 4) \times 6$ $2400 + 180 + 24 = 2604$

Modelo extendido: Aquí los estudiantes relacionan lo aprendido con el modelo distributivo, su ventaja se basa en que cada dígito se le asigna su verdadero valor posicional (unidad, decena, centena, etc.)

Tabla 4. Ejemplo del modelo extendido.

$ \begin{array}{r} 434 \times 6 \\ \hline 24 \rightarrow 6 \times 4 \\ 180 \rightarrow 6 \times 30 \\ 2400 \rightarrow 6 \times 400 \\ \hline 2604 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 345 \times 36 \\ \hline 30 \rightarrow 6 \times 5 \\ 240 \rightarrow 6 \times 40 \\ 1800 \rightarrow 6 \times 300 \\ 150 \rightarrow 30 \times 5 \\ 1200 \rightarrow 30 \times 40 \\ 9000 \rightarrow 30 \times 300 \\ \hline 12420 \end{array} $
--	---

Según Villanueva (2006) para comprender la importancia de estos modelos alternativos se utilizó la historia de las matemáticas, ya que trae cambios de pensamiento matemático, estos modelos obligan a los profesores a llevar distintos ejercicios en un orden apropiado, identificando los vínculos, ordenándolos de tal manera que los más sencillos sirvieran para facilitar el aprendizaje de los más difíciles.

Para plantear cada una de las preguntas del diseño de las tareas, se utilizaron tres aspectos planteados por Godino y Batanero (vocabulario, nivel de abstracción y solución de problemas)

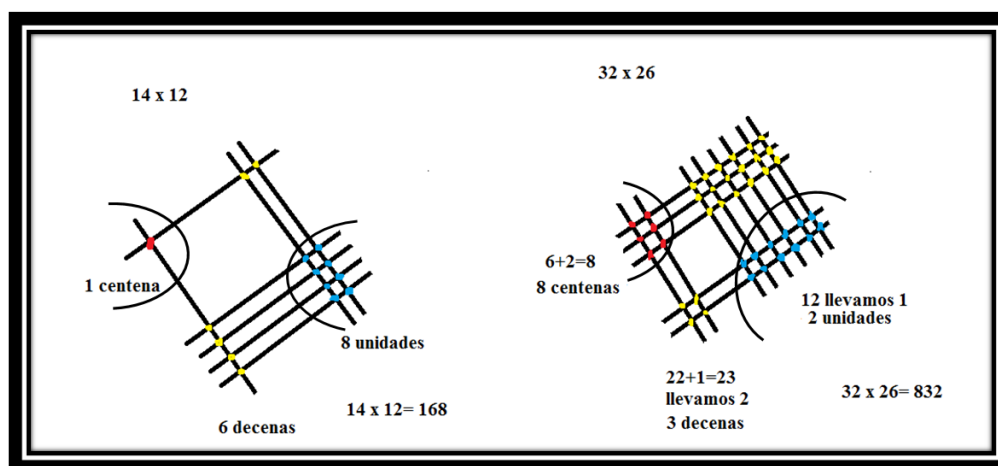
porque permiten tener un acercamiento en el momento que los estudiantes resuelven cada una de ellas, al estar relacionadas con sus experiencias. Si bien, los modelos planteados por Villanueva (2006) podrían ser útiles en el diseño de tareas, los mismos no son considerados, dado que ponen énfasis en el algoritmo de la multiplicación y no es el objeto de este proyecto, aunque se rescata para los intereses de este trabajo la notación de la multiplicación y sus propiedades.

Internacional

Aguilar y Madriz (2012) ofrecen a los profesores diferentes métodos de enseñanza para abordar la multiplicación en la escuela. Estos autores señalan que el reconocimiento de tales métodos permite impregnarle interés a la multiplicación y permite alejarla de la tradicional forma de aprendizaje relacionada con tareas de memorización de las tablas de multiplicar. Entre los métodos propuestos por los autores se destacan: a) Maya, b) Árabe y c) Ruso.

El método maya pone en práctica el análisis visual, ya que se debe observar los puntos de intercepción entre las rectas, también la separación de los sectores para identificar la unidad, decena, centena etc., además se fomenta la suma al momento de contar las intercepciones (Aguilar & Madriz, 2012). Ejemplo: Se desea multiplicar 14×12 y 32×26 . (Ver ilustración 1).

Ilustración 1. Ejemplo de multiplicación con el método Maya.



La ilustración muestra la multiplicación por el método Maya en la cual se observa el proceso que se realiza para obtener el resultado.

Por otro lado, el método árabe, también conocido con el nombre “cuadrícula árabe”, consiste en perfeccionar los algoritmos egipcios para que los estudiantes aprendan a multiplicar, posteriormente es un arreglo rectangular organizado por los factores de manera horizontal y vertical, este método parte de una tabla que es construida a través de la suma iterada, en la que se encuentra la multiplicación de los números naturales del 1 al 9 como lo muestra la ilustración 2. Se proponen ejercicios realizados por Cortiñas, (2013) en el que se muestra la multiplicación por este método.

La ilustración 2 muestra la tabla construida por los árabes a través de la suma repetitiva, que la utilizan como una herramienta para realizar multiplicaciones menores al número 9.

Ilustración 2. Tabla construida para realizar multiplicaciones mayores de 9.

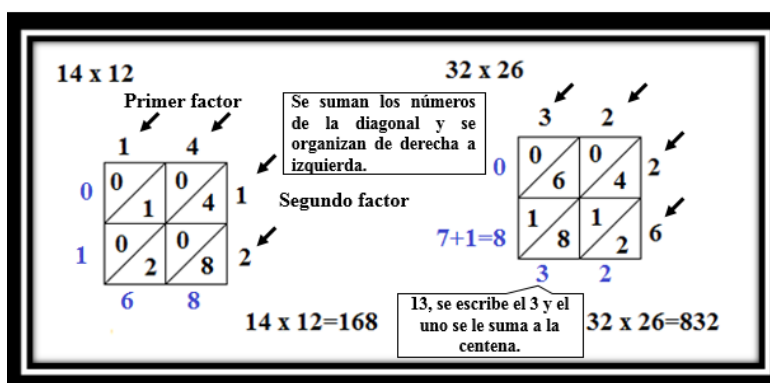
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	1	2	5	1	4	7
4	0	4	8	1	2	6	2	4	3	6
5	0	5	0	1	5	2	3	5	4	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	2	2	3	4	4	5	6
8	0	8	6	4	3	4	8	5	6	7
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Para realizar una multiplicación de números mayores a 9, se organizan los números de la siguiente manera:

El primer factor de forma horizontal y el segundo factor de manera vertical, luego se usa la tabla presentada en la ilustración 2 para escribir los números que van en la diagonal, a continuación se suman los números de las diagonales, en caso tal que al sumar los números el resultado sea mayor o igual a 10 se escribe el número de las unidades y el otro número se le suma a la unida siguiente (decena, centena, etc.).

Ejemplo: Se desea multiplicar los números 14×12 y 32×26 . En la ilustración 3 se observa la forma de cómo se resuelve la multiplicación por este método. (Ver ilustración 3).

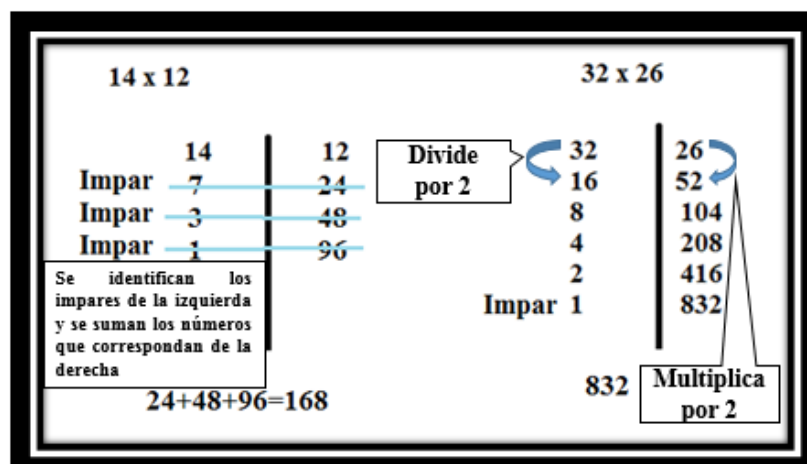
Ilustración 3. Ejemplo de multiplicación por el método Árabe.



La ilustración muestra la multiplicación realizada con el método Árabe en la que se muestra los gráficos que se realizan para calcular los resultados de la multiplicación.

Por último, el método ruso, se estructura bajo la multiplicación por “2” y la división por “2”, que en resumen es duplicar un número y sacar la mitad, el método consiste en escoger los dos números para multiplicar, el número del lado izquierdo se le sacará siempre la mitad hasta llegar al número 1, si el número es impar la mitad sería la parte entera, el segundo número se duplicará según el número de veces que se le sacó la mitad al primero, finalmente se suman todos los números que correspondan a números impares. (Ver ilustración 4).

Ilustración 4. Ejemplo de multiplicación realizada con el método Ruso.



La ilustración 4 ejemplifica la multiplicación por el método Ruso llevando a cabo desde la duplicación y la división por 2.

Estos métodos se fundamentan como una herramienta de motivación en las clases de matemáticas porque dejan de lado el aprendizaje memorístico y así logra despertar la curiosidad en los estudiantes. Estos métodos no garantizan que la multiplicación sea rápida y fácil de calcular; sin embargo ponen en práctica otras habilidades y operaciones aritméticas (Aguila y Madriz, 2012).

Este proyecto es importante para reconocer que los estudiantes requieren aprender otros métodos para multiplicar, que sean distintos a la típica intervención con tareas de memorización.

Nacional

La multiplicación en Colombia se trabaja con el fin de lograr nuevos conocimientos, habilidades, destrezas y actitudes requeridas que deben tener los estudiantes, para poder lograr un aprendizaje significativos es ellos (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

En efecto, para que los estudiantes aprendan a multiplicar en primaria se debe partir de secuencias didácticas, actividades didácticas y tareas didácticas que ayuden a buscar diferentes métodos de enseñar la multiplicación, ya que el aprendizaje tiene sentido y es significativo en los estudiantes, es decir, que puedan preguntar, predecir, observar, interpretar, comunicar y reflexionar en cualquier actividad matemática.

Colombia adapta el modelo de Singapur para mejorar el aprendizaje de las matemáticas (Giraldo, 2016). El modelo consiste en problemas matemáticos que pasan por tres etapas: concreto, pictórico y abstracto.

En la etapa concreta los estudiantes mediante el material manipulativo o ilustrativo, comienzan a indagar y comprender un nuevo concepto matemático. En la etapa pictórica los estudiantes debe representar los datos de un problema mediante dibujos, así recibirán la ayuda suficiente para comprender el problema matemático y obtener la solución adecuada. Por último, se encuentra la etapa abstracta que hace referencia a signos y símbolos para la resolución de problemas sin usar material manipulativo o pictórico.

Estas etapas pueden lograr que los estudiantes establezcan unas bases sólidas para comprender la multiplicación, ya que el primer acercamiento a este, se basa en un conjunto de actividades que favorecen el aprendizaje cognitivo de los estudiantes mediante la manipulación de objetos y la práctica de problemas sencillos que introducen el concepto en la vida cotidiana.

Este proyecto considera pertinente está indagación nacional en el diseño de las tareas, pero solo se trabajó con las etapas pictóricas y abstractas porque son fundamentales para fortalecer la comprensión de la multiplicación en los estudiantes, además estas etapas corresponden ampliamente con la directriz de la EMR porque los estudiantes llevan a cabo un aprendizaje que comienza por los conocimientos previos y la curiosidad, en lo cual empiezan a investigar y experimentar las estrategias y procedimientos matemáticos.

CAPÍTULO 2. MARCO DE REFERENCIA CONCEPTUAL

La presente indagación hace referencia a los niveles de comprensión en el aprendizaje de la multiplicación desde el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista (EMR). Por tanto, en este apartado se abarcan algunos referentes teóricos que fueron esenciales para realizar el diseño de las tareas de este proyecto.

Primeramente, se menciona el surgimiento de la EMR, sus concepciones teóricas y sus principios, tomando como referencia a Hans Freudenthal, (1993); Heuvel Panhuizen, (2014); Ángel Alsina, (1993); Ana Bressan, (2011); Gravemeijer y Treffers (1993). También se mencionan los referentes conceptuales: referente didáctico, referente matemático y referente curricular.

En el referente didáctico se menciona que el aprendizaje de la multiplicación debe buscar estrategias metodológicas con ayuda de la didáctica que posibiliten un aprendizaje significativo del concepto de la multiplicación en los estudiantes y promover el desarrollo de habilidades para la resolución de conflictos de su cotidianidad relacionados con las matemáticas.

En el referente matemático se trabaja la multiplicación en torno a dos miradas matemáticas, que son las dos grandes categorías de Vergnaud (1997) y los modelos para la suma de Rico, Castro y Castro (1995). El referente curricular menciona las exigencias del Ministerio de Educación Nacional establecidas en los Estándares Básicos de Competencia con respeto al currículo escolar de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros.

2.1 Surgimiento de la Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista surgió en los años 70's en Holanda como reacción al enfoque mecanicista de la enseñanza de la matemática que se sustentó en los Países Bajos y a la aplicación en las aulas escolares en todo el mundo de la “matemática moderna” o “conjuntista, es

una corriente didáctica de las matemáticas apoyada de la filosofía, como fundador se conoce a Hans Freudenthal (1905-1990) matemático y educador alemán.

Este fundador, fue un incansable propulsor de un cambio en la enseñanza tradicional de la matemática y mucha de su popularidad proviene de su amplia actuación como fundador y participante activo en grupos tales como el Grupo Internacional de Psicología y Educación Matemática (PME) y la Comisión International para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM) en cuyas reuniones manifestaba su oposición a las corrientes pedagógico-didácticas y a las "innovaciones" en la enseñanza vinculadas a la matemática (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

Las ideas centrales de esta teoría según Heuvel (2003) se dividen en tres partes:

- **La matematización:** La matemática es una actividad humana, así, debe existir una matemática para todos, y debe ser aprendida en grupo. La matemática debe ser enseñada como una matematización, para Freudenthal las matemáticas son en primer lugar y principalmente una actividad, una actividad humana, es decir, una actividad de resolución de problemas, de ver los problemas, pero es también una actividad de organización de una disciplina. Esta matematización puede ser un tema de la realidad que tiene que ser organizado de acuerdo con los patrones matemáticos si se tienen que resolver problemas de la realidad.
- **Reinvención matemática:** La comprensión matemática pasa por unos niveles que son muy importantes para los contextos y modelos. La idea es hacer que los estudiantes lleguen a ver al conocimiento que adquieren como suyo, conocimiento personal, conocimiento del cual ellos son responsables. En cuanto a la enseñanza, se debe dar a los estudiantes la oportunidad de construir su propio bagaje de conocimiento matemático.

- **Fenomenología didáctica:** Se buscan contextos o situaciones que generen la necesidad de ser organizados matemáticamente, ya sea en historias o experiencias espontáneas de los estudiantes. Las situaciones deben ser seleccionadas de tal modo que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que se supone que los estudiantes deben construir.

2.2 Concepciones sobre el aprendizaje en la Educación Matemática Realista

Las ideas de Freudenthal sobre el aprendizaje de las matemáticas trascendieron en la construcción teórica de la EMR, con la finalidad de reformar la enseñanza matemática en todo el mundo. Por ello, el aprendizaje de las matemáticas es considerado como una actividad social, para que la reflexión colectiva conlleve a niveles de comprensión más altos permitiendo la relación entre la *matemática formal* y la *matemática informal* de los estudiantes (Bressan, Zolkower, & Gallego, 2004).

Este aprendizaje realista tiene características determinantes de la educación matemática en la EMR, los estudiantes deben utilizar sus historias y experiencias para aprender matemáticas (Gravemeijer & Teruel, 2000). También permite a los estudiantes comprender, participar y criticar cualquier concepto, ejercicio o estrategia matemática, teniendo como guía el proceso de *matematización progresiva*, en el que las estrategias informales de los estudiantes se interpretan como una anticipación de procedimientos más formales.

Las consideraciones principales de la EMR, son el establecimiento de sus seis principios fundamentales: *de actividad, de realidad, de reinención, de niveles, de interconexión y de interacción* (Freudenthal, 1991; Gravemeijer y Teruel, 2000).

Esta corriente didáctica plantea que el objetivo no es formar futuros matemáticos sino enseñar a todos los estudiantes a abordar matemática y críticamente problemas que se presentan en situaciones cotidianas (Treffers, 1993). De modo que los estudiantes son el centro de atención, se convierten en los responsables de la acción formativa, y son ellos quienes construyen activamente su conocimiento relacionando nuevos significados con otros ya interiorizados, mientras que el profesor es una ayuda, un facilitador del aprendizaje, en general un mediador (Alsina, 2009).

2.3 Principios de la Educación Matemática Realista

A continuación se desarrolla cada uno de los seis principios fundamentales de la Educación Matemática Realista. Heuvel y Drijvers, (2014) menciona que tres de los principios **(de realidad, de interconexión y de reinención)** están asociados a la *enseñanza* y los otros tres principios **(de actividad, de niveles y de interacción)** están conectados al *aprendizaje* de las matemáticas.

Los principios de la EMR resaltan la matemática curricular, la actividad humana y el aprendizaje de las matemáticas, que sirven para que los estudiantes se motiven a reinventar conceptos y estrategias matemáticas.

2.3.1 Principio de actividad

La idea fundamental de Freudenthal es que la matemática debe ser pensada como una actividad humana¹ a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. La matemática es educativa, no solo instructiva, permite comprender y participar en la forma en que se organiza nuestro entorno social y natural (Bressan, 2011).

¹ Matematizar involucra principalmente generalizar y formalizar. Formalizar implica modelizar, simbolizar, esquematizar, en el que definen, y generalizan conllevando a una reflexión.

“El quehacer matemático es una actividad estructurante de matematización que está al alcance de todos los seres humanos, es por ello que nace el concepto una matemática para todos” (Freudenthal, 1973, p.63). Bajo esta perspectiva se deriva la *matematización*, en el que los estudiantes no aprenden solo conceptos matemáticos, algoritmos y abstracciones, sino que aprenden a resolver problemas matemáticos relacionados con su contexto. Esencialmente son los contextos y las situaciones que generan la actividad de matematización de los estudiantes y en este proceso de matematización lo importante es como ayuda a los estudiantes a estructurar la matemática misma (Freudenthal, 1973, p.44).

2.3.2 Principio de realidad

La matemática surge como una organización de la realidad y luego el aprendizaje matemático debe organizarse en la realidad de los estudiantes.

El adjetivo realista dentro de la EMR hace referencia a situaciones problemáticas que los estudiantes puedan imaginar o realizar, esto no significa mantener a esta disciplina solo conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los estudiantes; generalmente, se trata de presentar los problemas en los contextos de la vida diaria, de manera que los estudiantes puedan imaginar las situaciones en cuestión y, a partir de ahí, utilizar su sentido común y poner en juego los procedimientos de cálculo, las estrategias de resolución y los modelos matemáticos que mejor sirvan para organizarlas (Bressan, 2011).

Así mismo, la noción del contexto realista depende de las experiencias de los estudiantes y su capacidad para imaginarlos. Los contextos y situaciones pueden decirse realistas sólo en la medida en que logran explicar a los estudiantes que aprenden (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

2.3.3 Principio de reinención

Este principio logra la motivación en los estudiantes a que reinventen la matemática bajo la guía de un docente, la reinención guiada es el equilibrio entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar, los estudiantes no crean ni descubren la matemática, simplemente reinventan modelos y estrategias que sirven para fortalecer su conocimiento matemático (Bressan, 2016).

Por tanto, todas las Instituciones Educativas y los profesores deben tener como misión, incorporar la reinención en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, en el que construyan sus procedimientos matemáticos con base en los conocimientos que han adquirido.

Según Alsina (2009) los profesores deben tener la capacidad de anticipación, observación y reflexión para comprender las habilidades que tienen cada uno sus estudiantes, ya que deben mediar en:

- Estudiantes y situación
- Estudiante y estudiante
- Producciones informales de los estudiantes y herramientas formales ya establecidas.

Para que este proceso sea orientado adecuadamente, es de relevancia que el profesor conozca acerca de los conocimientos a corto y largo plazo de sus estudiantes, así las actividades matemáticas plasmadas en el aula de clases tendrán sentido común y se puede lograr establecer una buena interacción entre estudiantes y profesor.

En general, deben seleccionarse problemas contextuales que permitan una amplia variedad de procedimientos de solución, preferentemente procesos de solución que en sí mismos reflejen una posible ruta de aprendizaje, en consecuencia, deja claro que el principio de

reinención puede también inspirarse en un procedimiento de solución informal (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004)

2.3.4 Principios de niveles

El principio de niveles se enmarca en el aprendizaje de la matematización progresiva, para que los estudiantes deban iniciar por matematizar un contenido o tema de la realidad para luego analizar su propia actividad humana, este proceso de matematización, fue profundizado por Treffers (1978, 1987) y retomado por Freudenthal (1991) bajo dos formas²: matematización horizontal y matematización vertical, que consisten en:

- **Matematización horizontal:** se basa en convertir un problema contextual en un problema matemático, apoyándose en la intuición, sentido común, observación, aproximación empírica y la experiencia inductiva.
- **Matematización vertical:** ya dentro de la matemática misma, que conlleva estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objeto de lograr mayores niveles de formalización matemática.

En la EMR se menciona, que los estudiantes pasan por cuatro niveles de comprensión: *situacional, referencial, general y formal*, estos niveles están relacionados al uso de estrategias y categorías cognitivas con distintos modelos y lenguajes, según Bressan (2011) los niveles de comprensión consisten en:

² Treffers colocó las dos formas de matematización bajo una nueva perspectiva, que conllevo a formular la idea de dos formas de matematización en un contexto educacional. Distinguió entre la matematización *horizontal* y la *vertical*, así: matematizar horizontalmente significa ir del mundo de la vida al mundo de los símbolos; y matematizar verticalmente significa moverse dentro del mundo de los símbolos.

- **Nivel situacional:** se tiene conocimiento de alguna situación problema y se utilizan estrategias informales ligadas al contexto³ de la situación planteada. Se pretende que los estudiantes utilicen el sentido común y la experiencia para poder identificar y describir la matemática que yace en el contexto (Cetina, 2015).

- **Nivel referencial:** aparecen los modelos, descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema concreto, pero siempre refiriéndose a la situación en particular.

- **Nivel general:** se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre las estrategias que supera la referencia al contexto. Este nivel requiere que los estudiantes generalicen los modelos encontrados en el nivel anterior, y así lleguen a concluir qué estrategias pueden utilizar en situaciones de problemas matemáticos.

- **Nivel formal:** se trabaja con los procedimientos y notaciones convencionales. En este último nivel se espera que los estudiantes analicen, comprendan y resuelvan problemas con el uso de la matemática formal.

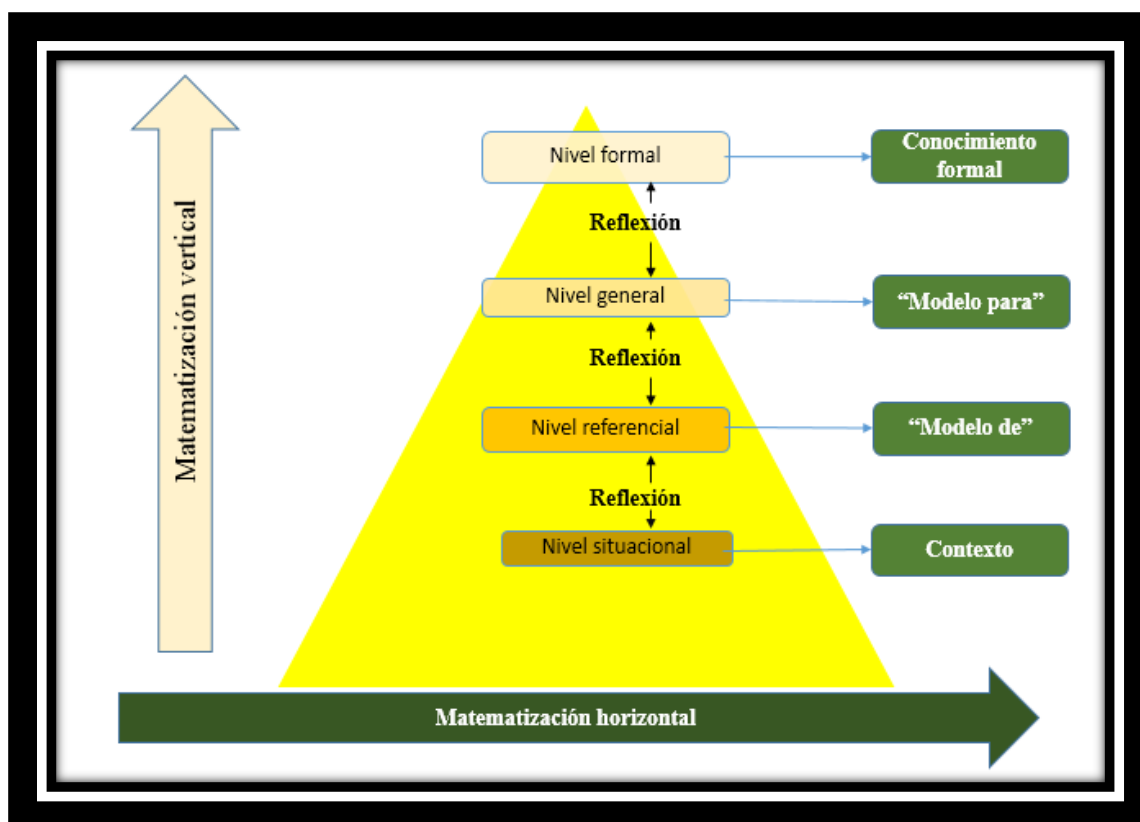
Estos niveles de comprensión son dinámicos y serán utilizados en el desarrollo de las tareas diseñadas cuando los estudiantes pasen de un nivel de comprensión a otro, estos niveles son representaciones de situaciones en el que se evidencia aspectos matemáticos, en los tres primeros niveles mencionados se les acepta a los estudiantes modelos o estrategias informales para dar solución a los problemas planteados, ya que sirve como puente en la matemática formal

³ Otra característica de la EMR, estrechamente relacionada con la matematización, es lo que se podría llamar el *principio de niveles* de la EMR. Los estudiantes pasan por diferentes niveles de comprensión en los que puede tener lugar la matematización: desde idear soluciones informales conectadas con el contexto, hasta alcanzar cierto nivel de esquematización, y finalmente discernir los principios generales que están atrás de un problema y ser capaz de ver todo el panorama.

e informal y favorece la matematización vertical, y en el último nivel se espera que los estudiantes utilice la matemática formal para resolver situaciones problemas.

A continuación se presenta un esquema general realizado por Bressan, Zolkower y Gallego (2004) en el que muestran que la matematización horizontal lo constituye el nivel de comprensión situacional; y los niveles restantes corresponden a la matematización vertical.

Ilustración 5. Matematización progresiva.



La matematización progresiva (Bressan, 2011).

Cabe mencionar, que la matematización horizontal solo toma al nivel situacional porque en este nivel se usan procedimientos relacionados a la experiencia de los estudiantes, en el que pueden solucionar de forma empírica problemas matemáticos mediante dibujos, esquemas, entre

otros. Mientras la matematización vertical se encarga de observar las relaciones constantes y generalizar los procesos que fueron utilizados en el nivel situacional.

A continuación, se explica e ilustra un ejemplo en el que se explicitan en los niveles de comprensión establecidos por (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004; Bressan, 2011). Se trata del recorrido de un colectivo en el que suben y bajan pasajeros, haciendo uso de la suma y la resta. Cuando describen diferentes trayectos de colectivos, los estudiantes reconocen fácilmente los cambios en el número de pasajeros en cada parada y dan naturalmente sentido a los signos de más (+) y de menos (-).

Con preguntas del profesor se van desprendiendo de los detalles irrelevantes desde el punto de vista matemático, se centran en los cambios de pasajeros que vienen, que suben o bajan y que siguen en el viaje y crean formas de representación con mayor nivel de esquematización (Bressan, 2011).

Los estudiantes pasan de un nivel a otro cuando resuelven esta actividad de la siguiente manera. (Ver ilustración 6).

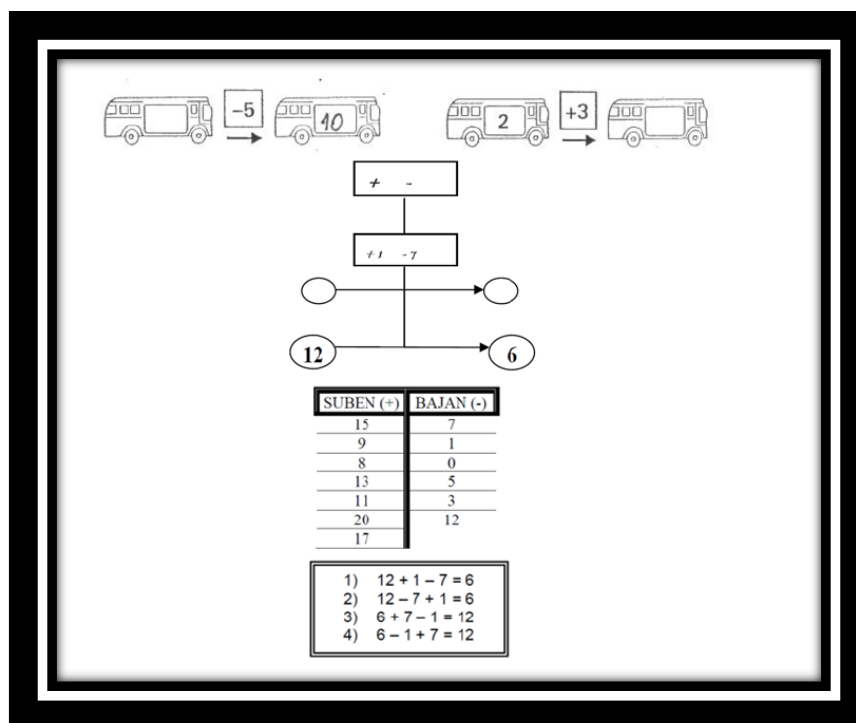
Nivel situacional: los estudiantes reconstruyen trayectos en los que suben y bajan pasajeros.

Nivel referencial: los estudiantes escriben de manera numérica los trayectos de las cantidad de personas que suben al colectivo (+) y los que bajan del colectivo (-).

Nivel general: los estudiantes relacionan la situación con otras similares, por ejemplo: la entrada y salida de los estudiantes en un colegio, en un supermercado a la hora de pesar un producto, entre otras.

Nivel formal: los estudiantes no necesitan de representaciones simbólicas de la situación, sino que ya identifican que operación debe hacer y lo realizan aritméticamente.

Ilustración 6. Modelo de los distintos niveles de comprensión.



Modelo de los distintos niveles de comprensión (Bressan y Gallego 2004) citado por (Cetina, 2015).

2.3.5 Principio de interacción

Este principio considera el aprendizaje de la matemática como una actividad social, se discute sobre las interpretaciones, de las situaciones problemas, de cada uno de los estudiantes, para fortalecer el trabajo en grupo, y buscar estrategias para mejorar los procesos de matematización en el aula, esto quiere decir que debe haber una interacción entre estudiante-estudiante y estudiante-profesor, sin embargo en la interacción entre estudiante- estudiante no siempre se logran altos niveles de comprensión y es ahí en el que el profesor debe participar de

manera oportuna y así llegar a una reflexión que conlleve a los estudiantes a niveles superiores de comprensión (Goffree, 2000).

2.3.6 Principio de interconexión

La resolución de problemas relacionados con situaciones según el contexto de los estudiantes, requieren establecer un vínculo entre un amplio rango de comprensiones y herramientas matemáticas. La EMR no hace profundas distinciones entre los ejes curriculares, lo cual da una mayor coherencia a la enseñanza y hace posibles distintos modos de matematizar las situaciones, bajo distintos modelos y lenguajes, logrando alta coherencia a través del currículo (Bressan, Zolkower y Gallego, 2004).

2.4 Referente didáctico

Para que los estudiantes de grado tercero de básica primaria aprendan a multiplicar, es necesario buscar estrategias metodológicas con ayuda de la didáctica que posibiliten la intención de que los estudiantes adquieran un aprendizaje significativo del concepto de la multiplicación, y favorezca el desarrollo de habilidades para la resolución de conflictos de su cotidianidad relacionados con las matemáticas (Usuga, 2014).

El talón de Aquiles en el aprendizaje de la matemática, se encuentra en las situaciones que el profesor lleva al aula, ya sea en textos escolares, revistas, entre otras, porque ayudan a comprender de qué manera las transacciones didácticas se sustentan en las expectativas recíprocas que existen entre la interacción profesor y estudiante; así aumentando su interés y motivación por las clases de matemáticas en los estudiantes y logrando un aprendizaje significativos entre sus conocimientos antiguos y los conocimientos nuevos (Muñoz, 2010).

Según Obando y Córdoba (2011) las situaciones se pueden interpretar como un contexto de participación colectiva, esto implica que se deben estructurar bajo el contexto en que se encuentren los estudiantes, de esta manera podrán reconstruir el objeto matemático a través de la interacción con el mismo.

Es importante que la multiplicación sea aprendida de forma significativa, para que perdure a través de los años en la vida de los estudiantes, y esto se llega a lograr cuando el contexto y los aprendizajes previos son usados en experiencias reales e interesantes en el aula de clase (Muñoz, 2010). Además, como dice Pozo (1998) “el aprendizaje significativo requiere tener en cuenta la interacción simultánea de tres elementos básicos: la persona que aprende, los contenidos que construyen el objeto de aprendizaje y el profesor que es el guía del proceso de aprendizaje” (p 220-221).

Por ello, hay que tener en cuenta que lo que se enseña dentro de las aulas de clases debe estar relacionadas con conocimientos fuera del ámbito escolar, en el que los estudiantes puedan tomar decisiones, enfrentarse exponer sus opiniones y adaptarse a nuevas situaciones.

Algunos textos escolares proponen estrategias didácticas, que dejan de lado algunos factores que influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, factores como lo cognitivo, el contexto socio-cultural que están inmerso los estudiantes, sus intereses, sus necesidades y sus estilos de aprendizaje (Usuga, 2014).

2.5 Referente matemático

En este proyecto se trabaja con la operación de la multiplicación, para ello se tuvo en cuenta: las dos grandes categorías de Vergnaud (1997); los modelos para la suma de Rico, Castro

y Castro (1995); las etapas pictóricas y abstractas de Giraldo (2016) y las dificultades en el aprendizaje de la multiplicación de (Godino y Batanero, 2002).

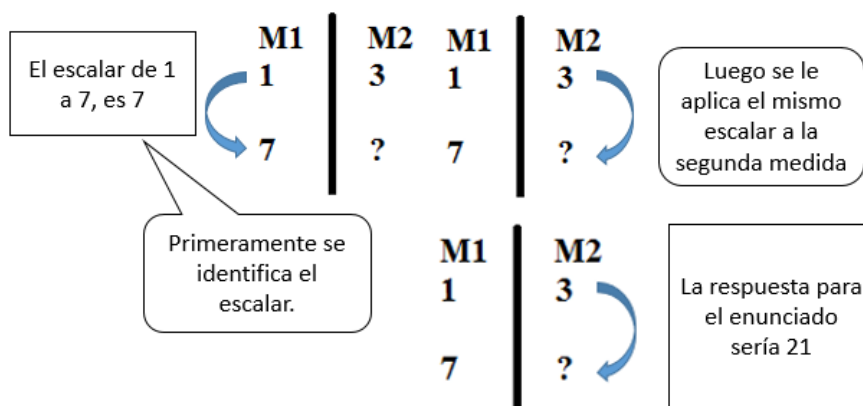
Los aportes de Vergnaud (1997)

Para el aprendizaje de la multiplicación desde la resolución de problemas, según Vergnaud es sumamente necesario elegir el camino de la conceptualización, lo cual quiere decir que se requiere de un conjunto de problemas y situaciones que permitan ser comprendidos por procedimientos y representaciones diferentes. Por tanto para la comprensión de las estructuras multiplicativas debe estar conformado por una serie de procedimientos como lo son la multiplicación, la división o una combinación de tales operaciones, por ello Vergnaud dice “un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos procedimientos y representaciones de diferente tipo estrechamente interconectados.” (Vergnaud, 1995. p.127).

Regularmente en las escuelas se presenta la multiplicación como una relación ternaria es decir, que solo se observa de la siguiente manera: $a \times b = c$, pero según Vergnaud existe una relación cuaternaria en la resolución de problemas multiplicativos, en el que se tienen inicialmente dos primeras medidas, y una tercera medida que es el resultado de las dos primeras, pero es importante observar la tercera medida ya que en ella se encuentra el escalar para observar la relación en el siguiente número y esto conlleva a encontrar la cuarta medida.

A continuación se muestra cómo se puede encontrar la cuarta medida.

Ilustración 7. Modelo cuaternario.



Por este modelo cuaternario Vergnaud (1995) propone que es necesario comprender las cantidades, porque para la identificación de la cuarta medida se necesita observar las relaciones horizontal y vertical. La relación horizontal consiste en ver la relación biyectiva entre las medidas 1 y 2, y la relación vertical observa el factor escalar que permite comprender la cuarta medida.

Vergnaud (1997) también considera la multiplicación como un campo conceptual⁴ de las estructuras multiplicativas, en la que son conocidas como dos grandes categorías *isomorfismo de medidas* y *producto de medidas*.

“El término “isomorfismo” significa etimológicamente “igual forma”, y con ello se quiere destacar la idea según la cual existen semejanzas y correspondencias formales entre diversos tipos de sistemas. Esto significa inicialmente, que estudiar una medida permite comprender una siguiente medida en la que tienen igual forma.

⁴ La teoría de los campos conceptuales proporciona un marco coherente para comprender el proceso de conceptualización, porque sienta las bases para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y las técnicas (Vergnaud, 1997).

- **Isomorfismo de medidas:** Tareas cuya organización promuevan la proporción entre dos espacio de medidas. Ejemplo:

En una fiesta hay 11 invitados, si a cada uno se le entrega 2 bombones ¿Cuántos bombones se deben entregar en total?

En la tabla 5 se muestra el isomorfismo de medidas, que se encuentra el primer espacio de medida que son los invitados y el segundo espacio de medidas que son los bombones por cantidad de invitados, el tercer espacio es la cantidad de bombones y la cuarta medida es el escalar de 1 invitado a 11 invitados.

Tabla 5. Ejemplo de isomorfismo de medidas.

<i>N° de invitados</i>	Bombones
<i>1</i>	<i>2</i>
<i>11</i>	<i>?</i>

En el ejemplo, se muestran dos aspectos importantes que son los siguientes: A cada invitado se le entregan dos bombones y la segunda de ¿cuántos bombones se les deberán entregar a 11 invitados? entre estos aspectos se observa una proporcionalidad directa simple. Pero para ello es importante observar las relaciones entre las medidas que dependen de correspondencias uno a uno es decir, de que no es posible encontrar el mismo resultado para otras medidas.

La última categoría, denominada producto de medidas por Vergnaud o producto cartesiano por (Nesher, 1988) y (Greer, 1992) está formada por la relación multiplicativa entre dos medidas elementales (M1 y M2), que da como resultado la creación de una nueva medida

producto (M3). De esta manera y en función de la medida incógnita que se deba encontrar, surgen dos tipos de problemas; los problemas de multiplicación, en los que se conocen las dos medidas iniciales (a, b) y se busca la medida producto X.

- **Producto de medidas:** Tareas que se estructuran bajo una composición cartesiana de dos espacios de medidas. Ejemplo

José tiene 3 camisas diferentes y dos pantalones diferentes ¿de cuántas formas se puede vestir José?

A continuación se muestra el producto de medidas desde una composición cartesiana. (Ver ilustración 8).

Ilustración 8. Ejemplo de producto de medidas.

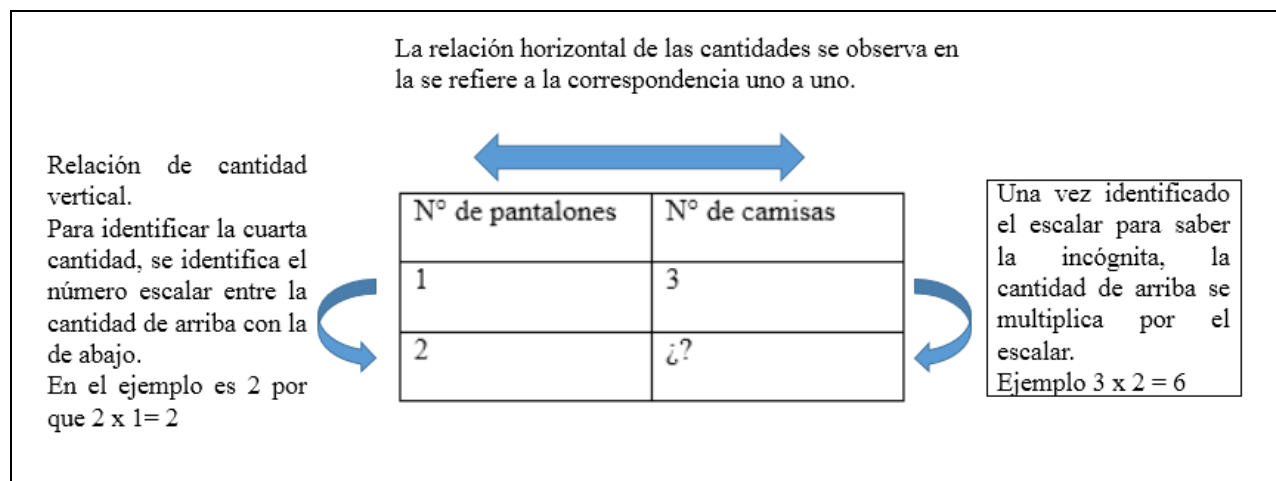


La ilustración 8 muestra el producto de medidas llevado a cabo según como lo plantea Vergnaud (1997) en la que se observa la serie de combinaciones entre dos pantalones y tres camisas.

Se puede identificar como producto de medidas tres magnitudes M1, M2 y M3, en el ejemplo M1 es (camisas) M2 es (pantalones) y M3 (el valor de la igualdad) es decir,

matemáticamente: $M1 \times M2 = M3$ según esta relación no se puede apreciar la cuarta medida sin embargo, es necesario mostrar cómo se puede identificar la cuarta medida.

Tabla 6. Modelo cuaternario en el producto de medida.



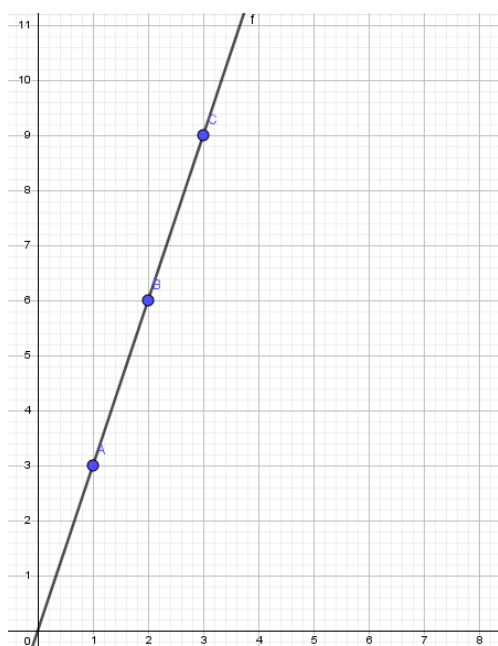
La tabla muestra cómo se identifica la cuarta medida en este problema multiplicativo, que se encuentra en el escalar 2, ya que de 1 a 2 el escalar es 2. Por tanto 3 debe multiplicarse por 2.

Los modelos para la suma propuestos por Rico, Castro y Castro (1995)

Dichos autores plantean que la multiplicación se considera como una suma iterada o como el cardinal de un producto cartesiano entre dos conjuntos, los modelos son:

Modelo lineal: Este modelo puede considerarse como el de suma iterada pero necesita de una representación lineal que permita comprender la secuencia por ejemplo $n \times a$ que indica “sumar n veces el valor de a ”. Por ejemplo 3×3 .

Ilustración 9. Ejemplos del modelo lineal.



En la lustración 9 se muestran dos posibles representaciones en las que se puede observar el modelo lineal, porque se observa inicialmente las distancias constantes entre un punto y el siguiente punto.

Modelo cardinal: se refiere a un modelo que necesita una representación rectangular, para poder decir su cardinal. Ejemplo n sería las filas y a las columnas, luego se realiza el conteo. Ejemplo: 9×4 .

Ilustración 10. Esquema del modelo cardinal.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31	32	33	34	35	36
	9								

Luego se procede a contar la cantidad de unidades cuadradas.

Modelo de medida: se refiere a un término que necesita de nociones de equivalencia para saber el producto, ejemplo: una persona tiene por cada pantalón 2 camisas. ¿Cuántas camisas tiene si posee 4 pantalones?

En la ilustración 11, se muestra el valor de la equivalencia en el modelo de medida.

Ilustración 11. Ejemplo del modelo de media.

En la ilustración 11 se observa la correspondencia uno a uno entre las camisas y los pantalones, que puede ser interpretada incluso desde un subtema de la multiplicación llamado la proporcionalidad.

Modelo numérico: este modelo se estructura directamente en el algoritmo de la multiplicación vista como una suma iterada, en su representación.

Tabla 7. Ejemplo del modelo numérico.

$5 \times 4 = 5 + 5 + 5 + 5 \quad o \quad + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$
--

Razón aritmética: como su nombre lo dice se refiere a un modelo de razón, es de gran importancia este modelo porque se puede establecer una forma de correspondencia, y así hacer la comparación entre dos conjuntos. Ejemplo: Roberto compra 2 pasteles en \$900 pesos, si Valeria quiere comprar 5 pasteles ¿Cuánto debe pagar?

Tabla 8. Ejemplo del modelo razón aritmética.

<i>Número de pasteles</i>	<i>Valor a pagar</i>
1	\$450
2	\$900
3	\$1350
4	\$1800
5	\$2250

Como podemos observar en la tabla 8 se muestra una correspondencia entre los dos aspectos el número de pasteles y valor a pagar.

2.6 Referente Curricular

Este apartado se encuentra dividido en dos momentos, el primer momento hace referencia a las exigencias del Ministerio de Educación Nacional establecida en los Estándares Básicos de Competencia con respeto al currículo escolar. El segundo momento muestra el contraste del currículo escolar de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros en relación con lo que demanda el Ministerio de Educación Nacional.

Según el MEN (1998) la formación en matemática debe responder a las nuevas demandas del siglo XXI, que sea interdisciplinar, es decir, que se forme para responder a las necesidades del contexto, para que el aprendizaje sea significativo.

Considerando las estructuras de los problemas multiplicativos, este proyecto se centra en desarrollar dos tipos de pensamiento *numérico* y *variacional*. El primer pensamiento describe, compara y cuantifica las situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.

El segundo pensamiento busca generalizar los procesos llevados a cabo en el pensamiento numérico, esto quiere decir que se encarga de analizar el conjunto de estrategias usadas para dar solución a una situación planteada y generalizar estos procedimientos de manera formal (MEN, 1998).

Los Estándares Básicos de Competencia constituyen uno de los parámetros los estudiantes deben saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado, es importante resaltar que se pretende que los estudiantes alcancen un nivel significativo de competencia, la cual es definida según el MEN (2006) como “el conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores” (p.41).

Según lo establecido por el MEN (2006) las competencias asociadas con la multiplicación son: (ver tabla 9).

Tabla 9. Estándares básicos de competencias asociados a la multiplicación.

<i>Pensamiento numérico y sistemas numéricos</i>	<i>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos</i>
• Interpreta, formula y resuelve problemas aditivos de composición, transformación y comparación en diferentes contextos; y multiplicativos, directos e inversos, en diferentes contextos. • Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. • Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.	• Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación. • Reconozco y genero equivalencias entre expresiones numéricas y describo cómo cambian los símbolos aunque el valor siga igual.

Cabe mencionar que “Las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problemas significativos y comprensivos, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.” (MEN, 1998, p.49).

Currículo escolar

La Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros cuenta con una serie de principios que orientan los procesos de formación, estos son: la pedagogía Amigoniana, formación integral, formación en valores, formación espiritual, etnoeducación, democracia y participación. La estructura curricular de la Institución se organiza bajo el decreto 4790 del 2008, que rige a todas las Instituciones Normales en el que se establece las condiciones básicas

de calidad para la organización. Además en relación con el MEN (2006), la institución desarrolla su plan de área que lo denomina como malla curricular del grado tercero de primaria.

Tabla 10. Currículo de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros con respecto a la multiplicación.

<i>Pensamiento numérico y sistemas numéricos</i>	<i>Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos</i>
- Uso diversas estrategias de cálculo (específicamente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. - Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional. - Uso representaciones- principalmente concretas y pictóricas- para explicar el valor de posición en el sistema de numeración decimal.	- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.

En general, existe un contraste mínimo con lo que exige el MEN (2006) se puede observar de manera explícita que la institución en el currículo escolar con relación a la multiplicación deja de lado el concepto de equivalencia que es necesario en las tareas multiplicativas, según lo anterior, se estaría fallando en el currículo de esta institución en el desarrollo del pensamiento variacional.

En consecuencia, en el diseño de tareas se tuvo en cuenta los Estándares Básicos de Competencia con el fin de alcanzar los altos niveles de comprensión de la EMR, porque el Ministerio de Educación Nacional (2006) propone que una competencia es el conjunto de habilidades y destrezas que permite que los estudiantes reinventen las matemáticas a través de su contexto. (p.50).

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

3.1 Elementos metodológicos

El enfoque metodológico a implementar en esta indagación es cualitativo, puesto que, permite estudiar la naturaleza profunda de los fenómenos, la estructura dinámica de estos, y posibilita la explicación detallada de los comportamientos y manifestaciones que ocurren dentro de dichos fenómenos (Martínez, 2006).

El interés del presente proyecto es posibilitar el avance en los estudiantes de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrillero de grado tercero de básica primaria de los niveles de comprensión, por ello, este trabajo se realizó bajo el método *estudio de casos*, con el propósito de comprender los fenómenos que se articulan en el aprendizaje de la multiplicación.

Así mismo Pérez (1994) define como estudio de casos: “una metodología de análisis grupal, cuyo aspecto cualitativo nos permite extraer conclusiones de fenómenos reales o simulados en una línea formativa experimental, de investigación y/o desarrollo de la personalidad humana o de cualquier otra realidad individualizada y única” (p. 83).

Cabe mencionar que el estudio de casos puede ser de tipo: “descriptivo si se pretende identificar los elementos clave o variables que inciden en un fenómeno; explicativo si se busca descubrir los vínculos entre las variables y el fenómeno a la vez que dotar a las relaciones observadas de suficiente racionalidad teórica; y predictivo, si se examinan las condiciones límites de una teoría” (Martínez, 2006. p.178).

Con lo dicho anteriormente, y teniendo en cuenta el objetivo de este proyecto se ha optado por los estudios de carácter descriptivo, porque según, Díaz, Martínez y Morales (2011), los mismos permiten dar cuenta de la situación problemática en el objeto de estudio sobre algunas dificultades que se presentan en el proceso de aprendizaje de las matemáticas a partir de

situaciones de la vida real, con ello se pueden identificar y describir cómo los estudiantes logran pasar de un nivel de comprensión a otro desde el enfoque teórico EMR.

3.2 Diseño del estudio de casos

Según Martínez (2006) es esencial precisar en todo trabajo de investigación cómo se recolectará la información relacionada con los constructos; es decir, explicitar tanto las diversas fuentes, como los instrumentos que han de utilizarse para la recolección de la misma, y posteriormente derivar la vinculación lógica de los datos obtenidos a dichas proposiciones.

Finalmente, presentar los resultados del proyecto a través de una serie de conclusiones que conduzcan al fortalecimiento de las teorías o de los enfoques introducidos en el marco referencial. Así, se describirá de forma detallada, la población o lugar en el que se desarrolló el proyecto, los instrumentos de recolección de la información, las categorías de análisis y las tareas que se desarrollaron.

3.3 Contexto de estudio

La Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros se encuentra ubicada en el departamento del Valle del Cauca, en el Distrito especial de Buenaventura. Es una Institución pública, en el que la gran mayoría de sus estudiantes viven en sus alrededores, tales como: barrio Cristal, Bellavista, Transformación, Juan XXIII, Eucarístico, existe una parte de ellos que viven en los barrios que se encuentran en la zona isla de Buenaventura.

La Institución comprende tres niveles que están distribuidos de la siguiente manera: primaria que empieza de kínder y termina en 5° grado, secundaria que empieza en 6° grado y termina en 11° grado y una educación superior que se le denomina ciclo complementario.

En los últimos 5 años la Institución en las pruebas icfes ha tenido unos buenos resultados, se ha mantenido en nivel alto o superior y siempre se trabaja el mejoramiento de la calidad, analizando sus múltiples problemas para poder superarlos (Malla curricular, 2014).

3.4 Sujetos participantes del estudio

Los sujetos participantes en esta indagación lo conforman un grupo de 38 estudiantes de grado tercero de básica primaria de la Institución de los cuales se escogieron 12 estudiantes para construir el caso, porque sus producciones permiten reconocer el avance en los distintos niveles de comprensión en matemáticas.

Cabe mencionar que los estudiantes trabajaron en el diseño de las tareas de manera grupal, en el que se establecieron cuatro grupos de tres estudiantes, estos grupos son llamados *heterogéneos*⁵ en la EMR, porque permiten que los estudiantes utilicen distintos procedimientos para dar respuesta a las preguntas establecidas en el diseño de las tareas, así los estudiantes siguen sus propias trayectorias de aprendizaje como lo demanda el enfoque de la EMR, esto implica establecer un vínculo entre profesor-estudiante y estudiante-estudiante que permita la interacción entre ellos y alcancen diferentes niveles de formalización.

3.5 Instrumentos utilizados

Los recursos que se utilizaron en este proyecto fueron: cuestionario, observaciones participativas, las producciones escritas de los estudiantes, las conversaciones de los estudiantes, una cámara de vídeo y una grabadora de voz.

A continuación se describe cada uno de los instrumentos utilizados en el proyecto.

⁵ Estudiantes caracterizados con diferentes habilidades matemáticas (Freudenthal, 1991).

3.5.1 Cuestionario

Para plantear este cuestionario, se tuvo en cuenta el cuestionario planteado por García, Fina, y Moreno (2008) que hace referencia a los gustos e intereses de los estudiantes de básica primaria; en el cuestionario se realizaron preguntas según el quehacer diario de los estudiantes y se vinculó el modo de pregunta abierta, para que ellos se expresarán de manera libre. Con ello se logró identificar algunos gustos de los estudiantes para luego articularlos al diseño de las tareas.

3.5.2 Observación participativa

Esta *observación*⁶ juega un papel primordial en este proyecto, esencialmente en la organización y caracterización de los niveles de comprensión presentes en los estudiantes de grado tercero de básica primaria, con ello permite dar respuesta a interrogantes como: quién, qué, dónde, cuándo, cómo y por qué emergieron determinados modelos (Henao y Vanegas, 2012).

Así mismo, permite realizar una descripción detallada de cada uno de los procesos (conjeturas, discusiones, intentos) que desarrollaron los estudiantes para dar respuestas a las tareas planteadas.

El rol como observadores participantes fue realizado durante la puesta en escena de las tareas, lo que también ayudó a construir *el caso* que compete a esta investigación. Además, la observación participativa se enriqueció el principio de interacción de la EMR, lo que llevó la práctica a generar oportunidades de interacción y reflexión continua, para que los estudiantes reinventaran por ellos mismos las herramientas y modelos matemáticos de las tareas propuestas.

⁶ La observación participativa es utilizada por muchos investigadores en educación, en el que el investigador comparte con los investigados su contexto, experiencia y vida cotidiana, para conocer diariamente toda la información que poseen los sujetos de estudios sobre su propia realidad (Henao y Vanegas, 2012).

3.5.3 Producciones escritas de los estudiantes

Las producciones de los estudiantes son fundamentales en este proyecto, contribuyen a la construcción del análisis teniendo en cuenta cada una de las categorías de análisis descritas (matematización vertical y matematización horizontal) de tal forma, que den cuenta a partir de los resultados y conclusiones de la teoría desarrollada en el trabajo.

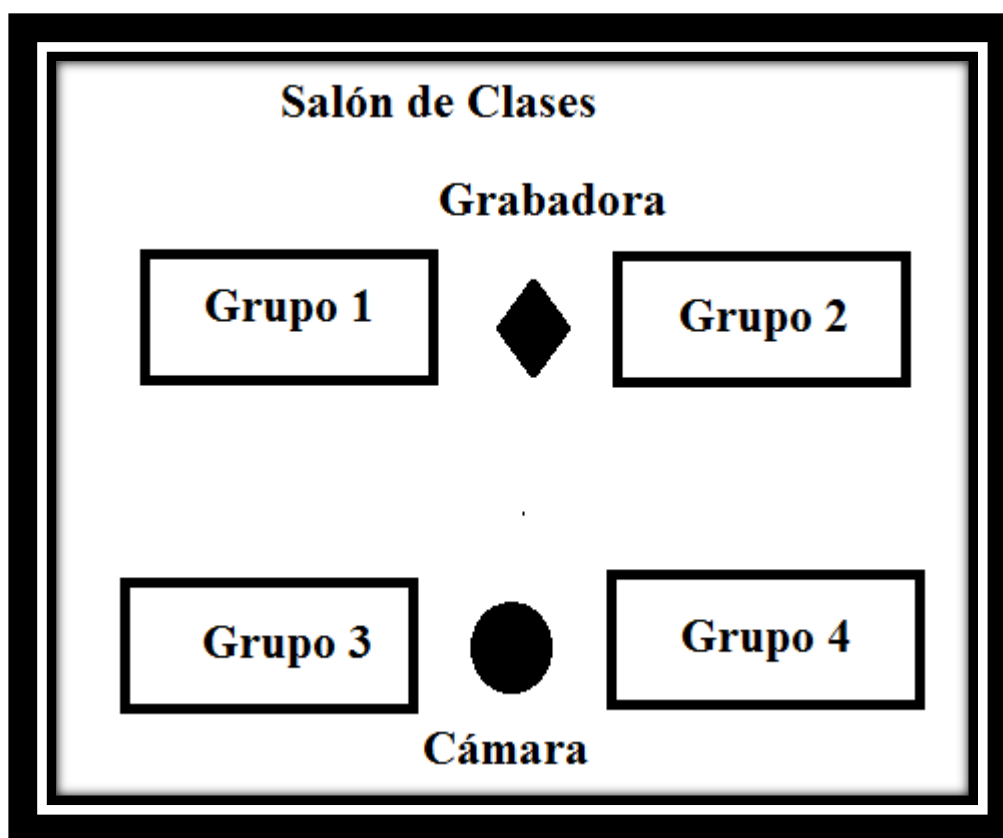
3.5.4 Conversaciones de los estudiantes

Las conversaciones de los estudiantes fueron de gran importancia en este proyecto, porque permitieron analizar los momentos en que los estudiantes proponían las diversas estrategias para dar solución a las preguntas planteadas; además permitió identificar cómo los estudiantes construían conjeturas que se lograron evidenciar en el desarrollo de cada una de las tareas para alcanzar un nivel de comprensión más alto.

3.5.5 Recursos tecnológicos

Los instrumentos tecnológicos que se utilizaron en este proyecto para recoger la información fue una cámara de vídeo y una grabadora de voz, para poder mostrar las conversaciones y acciones que ayudaron a observar y analizar con mayor profundidad las producciones escritas de los estudiantes y con la cual se tomaron cada una de las producciones del trabajo que realizaron las estudiantes. (Ver ilustración 12).

Ilustración 12. Recursos tecnológicos.



Aquí se muestra la disposición espacial de los recursos tecnológicos utilizados durante la puesta en escena de las tareas.

Las convenciones utilizadas en la ilustración 12, hace referencia a los recursos tecnológicos que tenían los investigadores en el momento que los estudiantes resolvían las tareas expuestas en el diseño, es decir:

- El investigador 1, estaba parado en la mitad del grupo 1 y 2 con una grabadora.
- El investigador 2, estaba parado en la mitad del grupo 3 y 4 con una cámara.

Esto con el fin de poder grabar las conversaciones que tuvieron los estudiantes en el momento de responder cada una de las preguntas del diseño de tarea.

3.6 Interacción con los estudiantes

Las interacciones entre los investigadores y los estudiantes se basaron en la reinvención matemática de los estudiantes, creando de esta manera un espacio dinámico en el que los estudiantes se pudieran sentir a gusto realizando cada una de las tareas.

A continuación se hace una descripción de los aspectos más relevantes de la ejecución de las tareas diseñadas, así como los diferentes momentos de intervención con los estudiantes. La práctica de las tareas se realizó en cuatro sesiones en la jornada vespertina, con duración de 2 a 3 horas dependiendo de la intensidad de las tareas diseñadas. Estas se desarrollaron en el aula de clase.

Tabla 11. Intervenciones en el aula de clase.

<i>Sesiones</i>	<i>Tarea</i>	<i>Duración</i>	<i>Fecha</i>
<i>Primera</i>	<i>Cuestionario y observación de la clase</i>	<i>45 min</i>	<i>20/10/17</i>
<i>Segunda</i>	<i>Los juguetes de Camilo</i>	<i>60 min</i>	<i>10/11/17</i>
<i>Tercera</i>	<i>La tienda de doña Nelly</i>	<i>60 min</i>	<i>01/12/17</i>
<i>Cuarta</i>	<i>Las escondidas</i>	<i>90 min</i>	<i>22/12/17</i>
<i>Quinta</i>	<i>Salida a cine</i>	<i>90 min</i>	<i>05/01/18</i>

Para la ejecución de las tareas se manejaron cuatro momentos, el primer momento se denominó como organización de los grupos, que se refiere a la organización del espacio por parte de los investigadores y la conformación de los grupos de trabajo.

El segundo momento se llamó entrega de las tareas, aquí los investigadores realizaron la entrega de las tareas y explicaron las situaciones planteada en ellas, en este momento los estudiantes pudieron participar y decir sus experiencias con referente a la tarea, esto con el fin de generar la motivación en ellos.

El tercer momento se nombró interacción estudiante- estudiante, aquí se estableció que todos los grupos debían escuchar las opiniones de todos los compañeros y escoger la que ellos consideraron mejor, esto con el fin de relacionarlos al nivel situacional, ya que se observan los diferentes procedimientos que utilizaron los integrantes del mismo grupo para dar solución a las preguntas planteadas en cada una de las tareas.

El cuarto momento se denominó interacción entre profesor y estudiantes, aquí los investigadores debían estar pendiente de las nuevas preguntas que surgieron en las tareas, en la comprensión de las preguntas y en ser un mediador para lograr alcanzar altos niveles de comprensión.

3.7 Categorías de análisis

El análisis de este proyecto se logra entender como un proceso en el cual las producciones e interacciones de los estudiantes participantes pueden ser interpretadas a través de los elementos teóricos y metodológicos de la EMR (Henao & Vanegas, 2012).

Partiendo de estas categorías de análisis se dará cuenta a los objetivos planteados del proyecto. Cabe mencionar que este análisis no se basa simplemente en observar sino en darle sentido y significado a lo que hacen y dicen cada uno de los estudiantes según lo que observan los investigadores y lo que queda registrado en la cámara y grabadora (Córdoba, 2011).

El análisis de este proyecto hace referencia a los niveles de comprensión, en el que se pretende identificar cuándo los estudiantes pasan de un nivel de comprensión a otro, puesto que estos niveles ayudan a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, ya que se enmarca en la matematización progresiva, el cual los ayuda a buscar distintas estrategias y categorías cognitivas con distintos procedimientos, que fortalezcan su conocimiento matemático, es decir que a través de las experiencias informales se interpretan los procedimientos más formales. Por ello se hace necesario construir una categoría de análisis estructurada desde los niveles de comprensión de la EMR, esto con el fin de hacer una aproximación a los distintos niveles de comprensión en que se encuentran los estudiantes.

Por tanto, el orden metodológico para el análisis de los resultados de las tareas realizadas por los estudiantes, una vez recogida la información, es realizar un *análisis a priori* que consiste en conocer los contenidos matemáticos que se espera que los estudiantes tengan al resolver cada una de las preguntas del diseño de las tareas. Finalmente, un *análisis de los resultados* para contrastar lo que se dice en el análisis a priori con lo que realmente hicieron y construyeron de manera grupal los estudiantes.

Tabla 12. Categorías de análisis.

Matematización vertical.	<i>Nivel formal. (Conocimiento formal)</i>	• Resuelve problemas multiplicativos haciendo uso de las propiedades.
	<i>Nivel General. (Modelo para)</i>	• Reconoce valores constantes en situaciones reales. • Identifica el número escalar para la comprensión del modelo cuaternario. • Resuelve problemas multiplicativos de manera abstracta, es decir que lo representa en el algoritmo de la multiplicación.

(Abstracto)	<i>Nivel Referencial. (Modelo de)</i>	• Identifica regularidades numéricas en el que se observen patrones constantes en tareas multiplicativas. • Usa representaciones concretas de la multiplicación como una suma iterada en situaciones reales. • Reconoce y genera equivalencias entre modelos de variación constante. • Relaciona las situaciones presentadas en el aula de clase con otras similares.
Matematización horizontal. (Concreto)	<i>Nivel Situacional. (Contexto)</i>	• Usa representaciones principalmente pictóricas para realizar conteos repetitivos. • Realiza agrupaciones para realizar conteos repetitivos.

La tabla categoriza las producciones que pueden realizar los estudiantes para estimar los distintos niveles de comprensión que se encuentren en los estudiantes.

La tabla de categoría de análisis es de gran importancia en este proyecto, porque permite ubicar las producciones de los estudiantes según el nivel de comprensión en el que se encuentren, porque puede ser posible que los estudiantes solo respondan las tareas desde el *nivel situacional* y no se logre un avance de nivel, por ello se establecen los criterios que deben cumplir los estudiantes para lograr un avance de nivel.

3.8 Diseño de las tareas

Basados en la perspectiva teórica de la EMR, se diseñaron unas tareas que parten de contexto de los estudiantes, referentes a la multiplicación, para promover los niveles de comprensión en los estudiantes de grado tercero.

En el diseño de las tareas no se trabajará con el nivel formal, porque este nivel comprende la multiplicación como un algoritmo y Alsina (1997) plantea que solo llegan al nivel formal estudiantes de Universidad, ya que este nivel contiene un alto grado de abstracción (ley

asociativa, ley modulativa, ley del elemento absorbente, ley de uniformidad y ley distributiva) y debe considerarse en otra categoría.

En términos generales, el objetivo de este proyecto es fortalecer la comprensión desde las dos grandes categorías de Vergnaud (1997) que son el isomorfismo de medidas y el producto de medidas, acompañados de los modelos para la suma de Rico, Castro y Castro (1995) y las etapas pictórica y abstracta de (Giraldo, 2016).

Cada pregunta del diseño de las tareas se realizó según algunos aspectos de Godino y Batanero (vocabulario, nivel de abstracción y solución de problemas). El vocabulario se utilizó para diseñar las preguntas con un lenguaje acorde a los estudiantes de grado tercero de primaria, el nivel de abstracción se utilizó para tener en cuenta el cómo podrían darle solución a las preguntas los estudiantes, y la solución de problemas sirvió como base en las tareas planteadas al poder vincularlas en el contexto de los estudiantes. Todas las tareas diseñadas ponen de manifiesto que los contextos posibilitan que las matemáticas cobren sentido para los estudiantes, ya que se aproximan a las experiencias cercanas de su cotidianidad.

Se diseñaron cuatro tareas que están ordenadas de la siguiente manera: descripción general, objetivos, concepto, materiales y análisis a priori. La primera tarea *los juguetes de camilo*⁷ consistió en mirar si los estudiantes tenían los conocimientos previos para poder adquirir el concepto de la multiplicación relacionada con su cotidianidad.

Los conocimientos previos que deben tener los estudiantes de tercero de primaria para resolver una multiplicación según MEN (2006) son: (ver tabla 13).

⁷ Las preguntas de esta tarea apuntan a los conocimientos previos que deben tener los estudiantes de grado tercero según el Ministerio de Educación Nacional.ro de primaria

Tabla 13. Conocimientos previos para el aprendizaje de la multiplicación.

<i>Criterios</i>	<i>Descripción</i>
<i>Concepto de cantidad</i>	Cuando el estudiante es capaz de relacionar un conjunto de objetos que poseen una característica en común, con un número representativo, equivalente a la cantidad de objetos.
<i>Valor posicional</i>	En este apartado el estudiante debe ser capaz de identificar el valor posicional de los números (unidad, decena, centena etc.)
<i>Concepto de suma</i>	El estudiante debe ser capaz de realizar adicciones, de manera simbólica y con problemas de suma, que estén relacionados con la resolución de problemas.
<i>Concepto de repetición</i>	El estudiante debe relacionar patrones de crecimiento repetitivo relacionándolo con la suma, la organización de datos y resolución de problemas cotidianos.

La prueba de conocimientos previos utilizada para el desarrollo de este proyecto fue, una tarea en la cual se buscaba mostrar los conocimientos previos que tenían los estudiantes acerca del concepto de cantidad, valor posicional, concepto de suma y concepto de repetición; los cuales son fundamentales para resolver tareas multiplicativas ya que los estudiantes en este grado ya son capaces de resolver este tipo de tarea. Dicha prueba fue diseñada para el grado tercero de básica primaria de la Institución Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros.

Las otras tres tareas estuvieron asociadas a la multiplicación, la segunda tarea *la tienda de doña Nelly*⁸ consistió en reconocer el nivel de comprensión en el que se encontraban los estudiantes de grado tercero, se consideró pertinente realizar una sola tarea para identificar en qué nivel se encuentran los estudiantes, porque las preguntas plasmadas en esta tarea pueden ser solucionadas de manera gráfica, simbólica o algorítmica.

Las tareas *las escondidas*⁹ y *la salida a cine* consistieron en analizar si los estudiantes avanzaron de un nivel de comprensión a otro, o permanecieron en el nivel que se hallaban, cabe resaltar que la tarea *las escondidas* se preocupa solamente en la comprensión de la multiplicación como un isomorfismo de medidas y la tarea *salida a cine* por la comprensión de la multiplicación como un producto de medidas, para fortalecer estas dos categorías se articularon los *modelos para la suma* y las etapas *pictóricas y abstractas*.

Todos los materiales a utilizar en las tareas son lápiz, borrador, sacapuntas y colores.

⁸ Esta tarea 2 se diseñó teniendo en cuenta los problemas aritméticos escolares de Luis Puig y Fernando Cerdán (1998).

⁹ La tarea 3 y 4 también fueron modificadas y estructuradas del libro: *Las estructuras elementales y su modelación* de Luis Rico, Encarnación Castro y Enrique Castro (1995).

Ilustración 13. Tarea 1 los juguetes de Camilo.



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 1: Los juguetes de Camilo

Camilo tiene diferentes juguetes en cada bolsa, él desea saber cuántos juguetes tiene en total. Camilo realizó el siguiente dibujo

- 1) ¿Cuántos juguetes tiene Camilo en cada una de las bolsas?

		
A=	B=	C=

- 2) ¿Cuántos juguetes tiene en total Camilo?
- 3) Mencione las bolsas de menor cantidad de juguetes hasta la que tenga mayor cantidad de juguetes
- 4) Si Camilo tiene en cada una de las tres bolsas 6 juguetes ¿Cuántos juguetes tiene en total?

Descripción

Dentro de los elementos discutidos en la metodología del proyecto se establecieron los conocimientos previos para comprender el concepto de multiplicación, por ello esta tarea se estructura con el fin de analizar los conocimientos previos que tienen los estudiantes en pro de iniciar con el diseño de tareas multiplicativas.

Conceptos

Los conceptos en los que fueron base para establecer esta tarea son: valor posicional, concepto de cantidad, concepto de suma y concepto de repetición que son los conocimientos previos para comprender el concepto de multiplicación.

La pregunta número 1 hace referencia al concepto de cantidad, la pregunta 2 al concepto de suma, la pregunta 3 al valor posicional porque hace parte de la comprensión del sistema de numeración decimal, es decir, la posición de cada número y la pregunta 4 hace referencia a concepto de repetición.

Objetivo

Analizar los conceptos previos de la multiplicación que permita la comprensión de la multiplicación como un isomorfismo de medida o como un producto de medida, que son necesarias para entender la multiplicación desde una perspectiva amplia (relación cuaternaria).

Ilustración 12. Tarea 2 La tienda de doña Nelly.



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 2: La tienda de doña Nelly

En la tienda de doña Nelly se venden unas galletas festivas de cuatro unidades y seis unidades, las que contienen cuatro unidades cuestan 400 pesos y las que contienen seis unidades cuestan 600 pesos, Camila le encanta comprar estas galletas.

- ¿Cuánto cuestan 5 paquetes de cuatro unidades?
- Si Camila compra 3 paquetes de 4 unidades y 5 de seis unidades ¿Cuánto debe pagar?

Camila compró tres festivos una de sabor a fresa, otra de sabor a chocolate y la última de sabor a vainilla, si la mamá de Camila le regala 2 jugos uno sabor a Naranja y el otro sabor a mango.

- ¿Cuántas formas puede Camila comer una galleta y un jugo?



Descripción

Esta tarea pretende identificar el nivel de comprensión en el que se encuentran los estudiantes de grado tercero, la tarea se modeló en una situación de una tienda con la galleta favorita (festival) de ellos, en la que se articularon dos momentos, el primero momento fue el de compra, en la cual se trabajó el isomorfismo de medida (porque hay una proporción simple directa entre dos espacios de medida) y el segundo momento en elegir un jugo con una galleta de un sabor, en este se hizo énfasis en el producto de medidas (porque se refiera a una composición cartesiana entre dos espacios). Se hace necesario esta tarea para poder realizar un diseño en el que se evidencie si los estudiantes lograron avanzar de un nivel a otro, o se quedaron en el nivel que se encontraban.

Conceptos

Esta tarea comprende la multiplicación según lo planteado por Vergnaud (1997) isomorfismo de medidas y producto de medidas. El isomorfismo de medidas se ve explícito en las dos primeras preguntas en la que se organizó la proporción entre dos medidas y el producto de medidas se explicitó en la última pregunta en la que se promovió las combinaciones.

Objetivo

Identificar el nivel de comprensión que se encuentra los estudiantes de grado tercero, cuando trabajan con tareas relacionadas al isomorfismo de medida y producto de medida.

Ilustración 13. Tarea 3 Las escondidas.

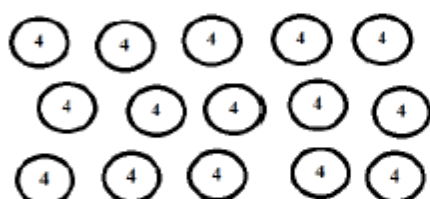


INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas


Tarea 3: Las escondidas

Los niños y niñas juegan a las escondidas en la escuela, Laura es la que busca a sus compañeros. Cada 3 minutos ella encuentran a 4 de sus compañeros.

- 1) Si Laura desea encontrar a sus 48 compañeros, rellena los círculos necesarios para saber cuántos grupos debe encontrar.



- 2) Daniel realizó el siguiente dibujo para llevar el tiempo que se está demorando Laura, pero le hicieron falta unos números ayúdale a Daniel a rellenarlos.



¿Cuántos minutos se demorará Laura en encontrarlos?

- 3) Complete la tabla que muestra el número de estudiantes encontrados por cada 3 minutos

Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados
3	4
9	
	16



- 4) ¿Es posible que Laura encuentre a 32 compañeros en 21 minutos? ¿Por qué?
 5) ¿Cuánto tiempo se demorará Laura en encontrar a 24 compañeros?

Descripción

Esta tarea se organizó desde una situación de un juego llamado las escondidas, que es uno de los juegos favoritos por los estudiantes. Dentro del análisis de la multiplicación se discutieron algunos elementos didácticos que sirven para fortalecer el razonamiento lógico de los estudiantes, en este caso el concepto de proporción, se pretende comprender este concepto inicialmente desde la suma iterada a través de la agrupación para fortalecer la categoría isomorfismos de medida ya que promueve la proporción entre dos espacios, por ello se consideró necesario movilizar inicialmente los modelos para la suma que plantean Rico, Castro, y Castro (1995) tales como: el lineal, numerico y el modelo de razón aritmética.

Los modelos para la suma sirvieron para organizar las etapas pictóricas y abstractas ya que en el modelo lineal necesita de una representación para observar factores constantes, así las etapas pictóricas y abstractas se muestran en las últimas preguntas, en el que se dejan de lado las representaciones y se articula la multiplicación como un isomorfismo de medidas, que se rigoriza con el modelo de suma llamado razón. Se busca partir desde el nivel situacional al nivel general.

Conceptos

Esta tarea parte de realizar unas sumas iteradas y agrupaciones de la primea medida que son los compañeros que encuentra Laura, luego se comprende la otra medida que es la del tiempo a través del modelo lineal de suma, y finalmente con ayuda del modelo de razón aritmética se comprende la categoría isomorfismo de medidas.

Objetivo: Identificar si los estudiantes logran comprender las categorías isomorfismo de medidas, las etapas pictóricas y abstractas y los modelos para la suma que se presentan en tareas multiplicativas.

Ilustración 14. Tarea 4 Salida a cine.



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 4: Salida a cine

Sofía quiere ir al cine y aún no ha decidido que ponerse, ella desea realizar todas las combinaciones posibles para poder elegir una.

Sofía tiene:

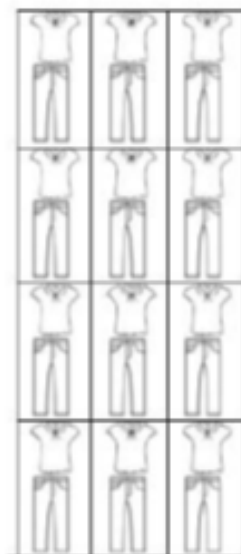
Pantalones de color: Fucsia, Azul y Amarillo

Blusas de color: Blanca, Negra y Roja

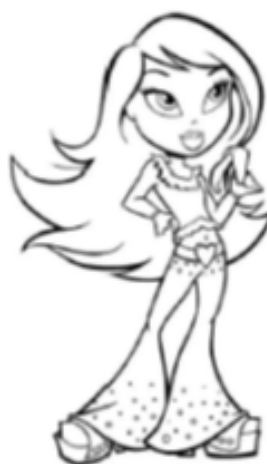
- 1) Realiza las combinaciones posibles coloreando cada uno sin repetir.
- 2) Si Sofía desea ponerse el pantalón de color negro ¿Es posible que tenga el mismo número de combinaciones que ponerse el de color amarillo?
- 3) ¿Cuántos rectángulos quedaron coloreados?



→ Rectángulo



- 4) ¿De cuántas formas se puede vestir Sofía con las tres blusas y los tres pantalones? ¿Por qué?
- 5) Si Sofía tuviera 5 pantalones y 4 blusas ¿De cuántas formas puede vestir?



Descripción

Esta tarea se diseñó desde una salida a cine, dado que es una actividad representativa para los estudiantes, según las respuestas dadas en el cuestionario. En esta tarea se promueve la multiplicación como un producto de medidas en el que la primera medida es el pantalón y la segunda medida es la blusa, se busca ver el número de combinaciones posibles que puede tener una persona si tiene tres pantalones y tres blusas. Se pretendió llegar desde representaciones pictóricas hasta las abstractas, en las que se organizó un vínculo entre estas etapas y los niveles de comprensión, tomando representaciones pictóricas como el nivel situacional y las abstractas como nivel referencial o general. También se articula en esta tarea el modelo cardinal que hace parte de los modelos para la suma propuestos por Rico, Castro y Castro (1995).

Conceptos

Dentro de los conceptos asociados a esta tarea se reconocen los siguientes: suma iterada y la combinación en la que se trabajan la comprensión de la multiplicación como un producto cartesiano.

Objetivo

Identificar si los estudiantes lograron comprender el concepto de producto de medidas a través de representaciones pictóricas y el modelo cardinal.

3.9 Análisis a priori

Dentro de este apartado se pone en discusión algunos de los posibles modelos matemáticos que pueden surgir en la ejecución de las tareas por parte de los estudiantes participantes del proyecto, asociados a los niveles de comprensión definidos en la EMR, con el propósito de identificar y definir algunas características que delimitan los niveles de

comprensión cuando se trabaja con las tareas diseñadas, de tal forma, que permita caracterizar en un análisis prospectivo cómo los estudiantes utilizan sus conocimientos informales para avanzar de un nivel de comprensión a otro dentro de la misma matemática.

Los modelos matemáticos que se consideran en este apartado son tomados de Orrantia (1990) quien dice que los modelos o procedimientos matemáticos surgen en los estudiantes según su pensamiento matemático.

El análisis a priori se organizó por las dos formas de matematización (vertical y horizontal) y por los tres niveles de comprensión (situacional, referencial y general).

Cabe mencionar que en cada nivel de comprensión esta la solución de cómo podrían los estudiantes dar respuesta a cada una de las preguntas que se encuentran en las tareas.

Tarea 1. Los juguetes de Camilo

Con esta tarea se pretende que los estudiante respondan cada una de las preguntas que apuntan hacia los conceptos previos para la comprensión de la multiplicación (concepto de cantidad, valor posicional, concepto de suma, repetición) se espera que respondan de manera abstracta, es decir, de manera algorítmica ya que son conceptos que se trabajan desde primero de primaria según el currículo escolar.

Concepto de cantidad

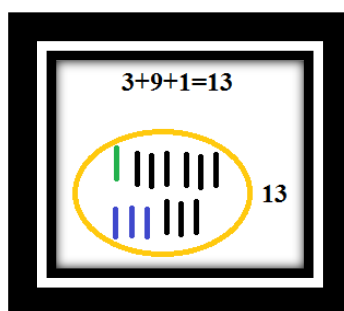
Los estudiantes pueden hacer el conteo uno a uno de cada carros que se encuentran en cada una de las bolsas, es sumamente necesario contemplar este concepto porque las categorías de Vergnaud (1997) isomorfismo de medidas y producto de medidas se estructuran en este

concepto de cantidad en el que se necesitan hacer relaciones entre todas las medidas, para poder lograr la comprensión del modelo cuaternario.

Concepto de suma

Los estudiantes pueden realizar la suma de manera abstracta o realizar esquemas que les contribuyan a dar respuesta a la pregunta planteada.

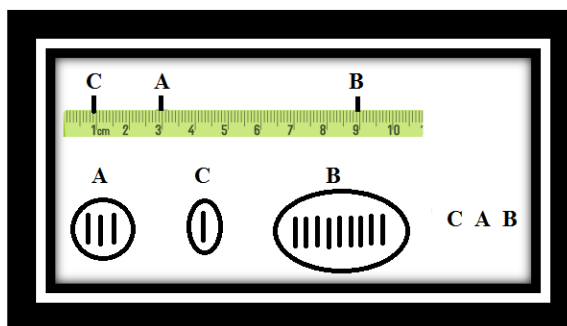
Ilustración 14. Esquema para el concepto de suma.



Valor posicional

Los estudiantes pueden organizar de menor cantidad a mayor cantidad cada una de las bolsas, teniendo en cuenta su valor posicional o también con el uso de la escritura de los números pueden identificar en qué posición va cada uno de los conjuntos.

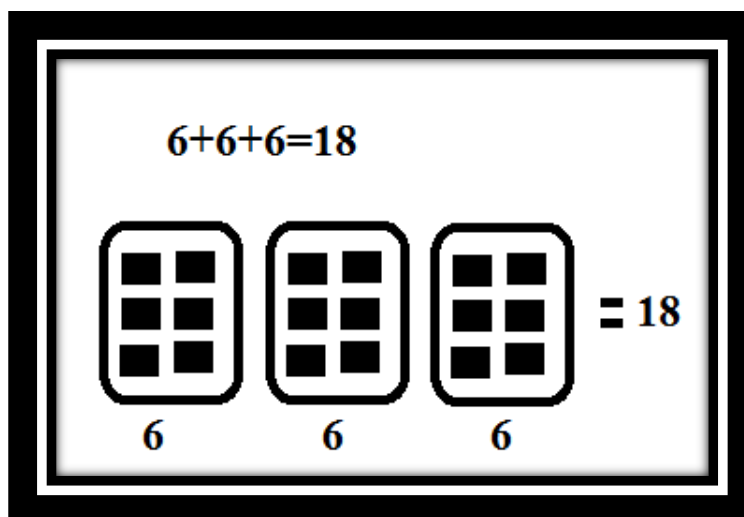
Ilustración 15. Esquema del valor posicional.



Concepto de repetición

Los estudiantes pueden plasmar el esquema de la cantidad de juguetes en cada una de las bolsas o imaginárselas para realizar el conteo repetitivo.

Ilustración 16. Esquema concepto de repetición.



Análisis a priori de las tareas con referente a los niveles de comprensión

En este apartado se presenta una aproximación de cómo pueden ser las producciones escritas por los estudiantes en el diseño de las tareas, tomando como referente central *los principios de niveles* de la Educación Matemática Realista, comprendiéndose así como la matematización progresiva (horizontal y vertical).

Es de importancia mencionar, que los siguientes *modelos* que se presentan en cada una de las tareas fueron realizados en torno a las categorías de análisis y cada una de estas tareas se encuentra enumeradas, dándole posibles soluciones a cada una de las preguntas de cada tarea.

Tarea 2. La tienda de doña Nelly

En esta tarea se espera que los estudiantes respondan las preguntas a través de estrategias ligadas a su contexto, adquiridas por medio de la experiencia, lo cual involucra fuertemente

esquematisaciones, factores constantes, suma repetitiva o cualquier modelo que les permitan comprender la tarea ya que se trata de una galleta que les gusta mucho lo cual es posible asimilen esta tarea con su propia experiencia.

Matematización horizontal

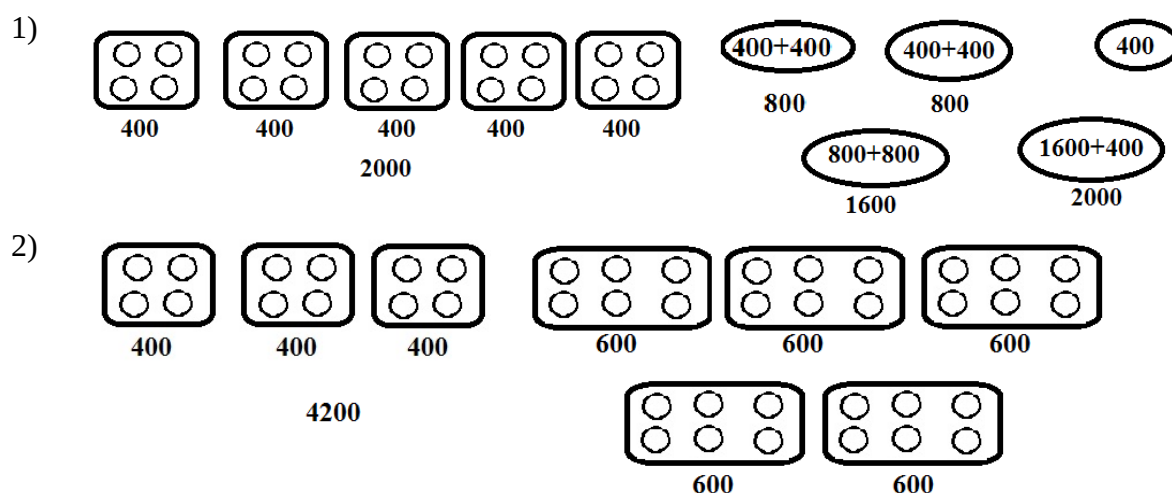
Dentro de este tipo de matematización se ubican unos modelos matemáticos. Los cuales permiten mostrar en qué nivel de comprensión se encuentran los estudiantes de grado tercero de primaria.

Modelo 1 (Esquema de agrupación)

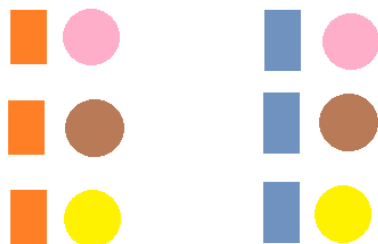
Nivel situacional

Este modelo representa de manera pictórica 2 formas de cómo los estudiantes podrían dar solución a las 3 preguntas planteadas que se realizaron en la tarea 2.

Ilustración 17. Esquema de agrupación.



3)



Matematización vertical

Los modelos que se esperan en los estudiantes y que se ubican dentro de este tipo de matematización son: tabular y algorítmico, modelo de sumas y la generalización formal.

Modelo 2 (suma iterada)

Nivel referencial

Este modelo se encarga de identificar el valor constante de la multiplicación como una suma iterada.

Ilustración 18. Suma iterada.

1)

$400+400+400+400+400=2000$
Se suma 400 las veces de festivales
que hay.

$400 \Rightarrow 800 \Rightarrow 1200 \Rightarrow 1600 \Rightarrow 2000$

2)

400, 800, 1200
600, 1200, 1800, 2400, 3000
 $1200+3000=4200$

400	600	1200
+400	+600	+3000
<u>400</u>	600	4200
1200	600	
	<u>600</u>	
	3000	

3)

$3+3=6$
 $2+2+2=6$

Modelo 3 (tabular y algorítmico)

Nivel general

Una vez identificado el valor constante de suma iterada se espera que los estudiantes replacen el uso de la suma iterada por el algoritmo de la multiplicación, también que logren interpretar datos dentro de una tabla, también en este nivel general se espera que los estudiantes identifiquen el escalar que hace parte del modelo cuaternario de los problemas multiplicativos.

Ilustración 19. Tabular y algorítmico.

1)

$400 \times 5 = 2000$	1 - 400
	2 - 800
	3 - 1200
	4 - 1600
	5 - 2000

2)

$$\begin{array}{r} 400 \times 3 = 1200 \\ 600 \times 5 = \underline{3000} \\ 4200 \end{array}$$

3)

$$3 \times 2 = 6$$

Tarea 3. Las escondidas.

Esta tarea enfatiza tres momentos para la comprensión de la multiplicación como un isomorfismo de medidas en los que se fortalece cada uno de los niveles de comprensión. Se espera que los estudiantes de grado tercero puedan pasar del nivel situacional al nivel general, realizando sumas de grupos en las que se vinculó la etapa pictórica partiendo de esquemas de representación grupal esto con el fin de tener bases del nivel situacional, haciendo uso del

modelo lineal que fortalece el nivel referencial. Los estudiantes en esta tarea deben observar factores constantes en relación con el tiempo y los compañeros encontrados.

Finalmente, cuando los estudiantes hayan comprendido cada una de las preguntas de la tarea, se vincula el nivel general, que con ayuda del modelo de razón permitirá desarrollar el modelo cuaternario de la multiplicación porque este modelo permite que los estudiantes observen las relaciones horizontales y verticales del enunciado, ya que se trata de un modelo tabular, con esto se espera que los estudiantes comprendan tarea estructurada desde el isomorfismo de medida.

Matematización horizontal

La matematización horizontal influye en los estudiantes a desarrollar la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación, la experimentación inductiva para poder dar solución a las preguntas planteadas de las tareas.

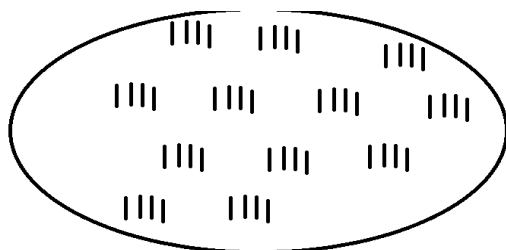
Modelo 1 (esquema de conteo repetitivo por agrupación)

Nivel situacional

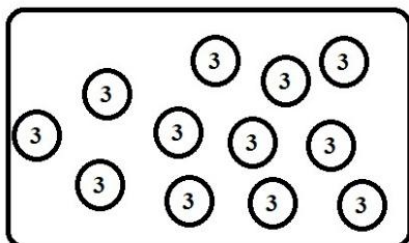
Este modelo muestra de manera gráfica los posibles procedimientos que los estudiantes pueden utilizar para darle respuestas a las preguntas de la tarea 3 a través de la agrupación de valores constantes que se presentan en ella. Cabe resaltar que cada uno de los esquemas representa una aproximación de cómo podrían los estudiantes responder las 5 preguntas de la tarea 3 pensada desde el nivel situacional.

Ilustración 20. Esquema de conteo iterado por agrupación.

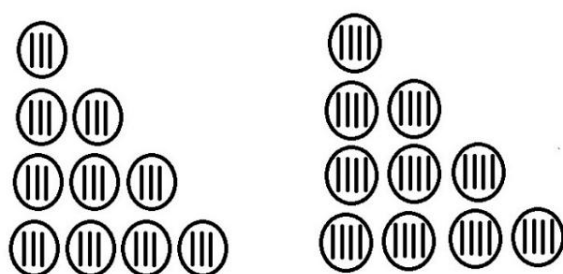
1)



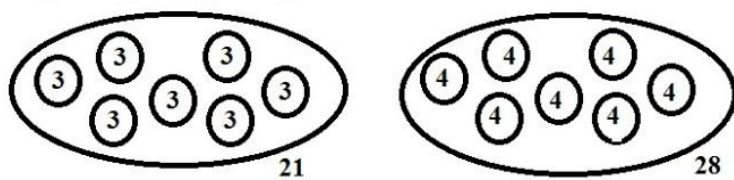
2)



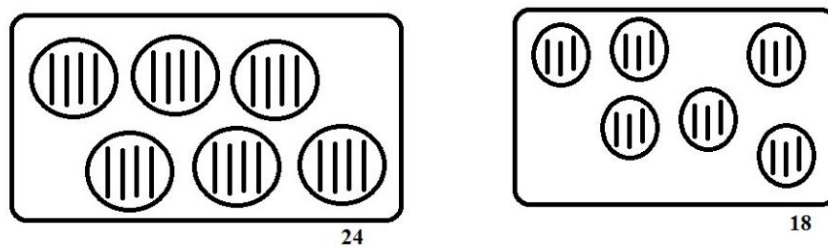
3)



4)



5)



Matematización vertical

Los estudiantes pueden utilizar los modelos que contengan esquematización, para generalizar estrategias de reflexión que los puede conlleve a la solución de cada una de las preguntas planteadas de la tarea.

Modelo 2 (equivalencia)

Nivel referencial

Los modelos presentados se encargan de reconocer y generar equivalencias entre los modelos de variación constantes que se presentan en tareas multiplicativas.

Ilustración 21. Equivalencia

4-8-12-16-20-24-28-32-36-40-44-48	1-3 2-6 3-9 4-12 5-15 6-18 7-21 8-24 9-27 10-30 11-33 12-36														
3 - 6 - 9 - 12 4 - 8 - 12 - 16	3-4 6-8 9-12 12-16 15-20 18-24 21-28														
<table border="1"> <tr><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td></tr> <tr><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>16</td><td>12</td></tr> <tr><td>24</td><td>15</td></tr> <tr><td>28</td><td>18</td></tr> <tr><td>32</td><td>21</td></tr> </table>	4	3	8	6	12	9	16	12	24	15	28	18	32	21	
4	3														
8	6														
12	9														
16	12														
24	15														
28	18														
32	21														

La ilustración 21 muestra algunas formas como se pueda trabajar con el nivel referencial la equivalencia.

Modelo 3 (relación entre valores constantes y el algoritmo de la multiplicación)

Nivel general

Reconoce cada una de las posiciones en el algoritmo de la multiplicación en tareas multiplicativas relacionadas con situaciones reales. Se espera además que los estudiantes una vez reconozcan el factor escalar hagan uso del modelo cuaternario y lo representen a través del algoritmo de la multiplicación.

Ilustración 22. Relación entre valores constantes y el algoritmo de la multiplicación.

- 1) $4 \times 12 = 48$
- 2) 3×12
- 3)

$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$
$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$
$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$
$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$
- 4)

$3 \times 7 = 21$
$4 \times 7 = 28$
- 5)

Como 6×4 es 24 entonces
se debe multiplicar 6×3
para saber la cantidad de
minutos que se demora
Laura.

La ilustración 22 muestra el uso del modelo cuaternario una vez identificado número escalar de las preguntas planteadas en la tarea 3.

Tarea 4. Salida a cine

Esta tarea promueve la multiplicación como un producto de medidas, se espera que los estudiantes realicen las combinaciones de manera experimental tal como lo indica la tarea, es decir a través de su experiencia, ya que puede generar bases sólidas para avanzar al nivel referencial (Freudenthal, 1991). También se espera que ellos describan que factores constantes se encuentran en la tarea planteada y por consiguiente que le den solución por medio de la suma iterada.

Matematización horizontal

Los modelos matemáticos este nivel, se caracterizan por dar una interpretación del proceso de la operación multiplicación mediante *estrategias y conocimientos informales* ligados al contexto.

Modelo 1 (esquema de representación pictórica)

Nivel situacional

Los estudiantes pueden realizar combinaciones con los colores tal como lo indica la tarea de manera gráfica.

Matematización vertical

Durante este proceso el estudiante debe formalizar sus construcciones y producciones hacia generalidades de contenido y método matemático relativo a la operación multiplicación.

Modelo 2 (observación de relaciones constantes)

Nivel referencial

Una vez realizada las combinaciones de manera correcta los estudiantes deben identificar qué factores se vuelven constantes.

Tabla 14. Nivel referencial tarea salida a cine.

De cada color de blusa se pintaron tres combinaciones ya que había tres pantalones.	Blanca- fucsia Blanca- azul Blanca- amarillo	$3+3+3=9$
---	--	-----------

Nivel general

Modelo 3 (relación abstracta de la multiplicación como suma repetitiva)

Los estudiantes pueden representar de manera abstracta la tarea teniendo en cuenta las relaciones constantes que vieron en la pregunta 3, esto implica que los estudiantes deben hacer la relación entre la suma iterada y el modelo algorítmico de la multiplicación.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES DEL PROYECTO

4.1 Introducción

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo de las tareas realizadas por los estudiantes que participaron en este proyecto. Para el análisis, se ha considerado la información más relevante de las categorías de análisis descritas en la metodología, las cuales se consideran necesarias para dar cuenta si los estudiantes lograron avanzar de un nivel de comprensión a otro.

El análisis se hace en relación con los supuestos iniciales discutidos en las categorías de análisis para, estimar en qué niveles de comprensión (situacional, referencial, general) se encuentran los estudiantes según sus producciones escritas en el diseño de las tareas, al tiempo que se caracteriza el proceso del paso del conocimiento informal al formal, dando especial atención a la matematización progresiva.

Este proyecto no solo aporta elementos para la enseñanza que son los principios de realidad, de interconexión y de reinención; y en el aprendizaje los principios de actividad, de niveles y de interacción; sino que también puede ayudar a que los estudiantes comprendan la importancia de las matemáticas en el contexto social, ya que relacionando las matemáticas con las experiencias de los estudiantes se puede obtener un aprendizaje significativo en cada tema de esta disciplina (Muñoz, 2010).

Cabe mencionar que para el análisis de los resultados, se ha considerado la información más relevante en la tarea “*la tienda de doña Nelly*”, la cual se considera fundamental para dar cuenta sí con el diseño planteado los estudiantes avanzaron de un nivel de comprensión a otro. También se hace una transcripción de producciones escritas de los estudiantes, puesto que muchas veces no se logra identificar en las imágenes lo que ellos escribieron, de modo que si

escriben con errores ortográficos no serán modificados sino que serán transcriptos como ellos escribieron.

4.2 Análisis del cuestionario

El cuestionario que se les presentó a los estudiantes de grado tercero de básica primaria, fue de gran utilidad para el diseño de las tareas enmarcadas en la EMR, ya que permitió, identificar los gustos de los estudiantes para articularlos en el diseño de tareas relacionadas a su contexto. Este cuestionario se les realizó a los 38 estudiantes, las preguntas y respuestas fueron las siguientes.

¿Cuáles son los juegos que más le gustan?

Con esta pregunta se observó que a la gran mayoría de los estudiantes de grado tercero les gusta jugar con muñecas, carros, en computadores, play station y juegos tradicionales como lo son: la lleva, las escondidas, arranca yuca, ponchado entre otros, pero el juego más destacado fue las escondidas. (Ver anexos del 1 -3).

¿Cuáles son sus lugares favoritos?

Con la segunda pregunta se identificó los lugares favoritos de los estudiantes, se obtuvieron las siguientes respuestas: paseo, el parque, salir a cine, e ir a comer al éxito, la respuesta más frecuente de todas fue ir al cine.

¿Cuáles son sus galletas favoritas?

Con esta tercera pregunta se identificó cuáles eran las galletas favoritas en los estudiantes, las respuestas más destacadas fueron: festival de chocolate, festival de fresa, festival de vainilla, las galletas milo, oreo y las ducales.

Estas preguntas expuestas en el cuestionario se plasmaron con la finalidad de realizar el diseño de tareas con las respuestas más frecuentes de los estudiantes, en los juegos, lugares y galletas favoritas, de tal forma que cuando trabajarán en el diseño de tareas se sintieran a gusto trabajando la multiplicación con algunos objetos relacionados de su diario vivir.

Cabe mencionar, que Buenaventura es un distrito en el que se encuentran personas de zona rural y zona urbana, la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros se encuentra en la zona urbana, es por ello que las respuestas tienden a ser para estudiantes de la ciudad. Si bien, cualquier estudiante de otra ciudad puede responderlas de manera similar, suponemos que si el cuestionario les fuera presentado a estudiantes de la zona rural, referente a los juegos sus respuestas más comunes pudieran haber sido: juego de damas con conchas de piangua, jeimy, entre otros, en los lugares favoritos: ir a la playa, ir de caza, ir al pipal, etc. Y en la pregunta relacionada a los dulces las respuestas pudieran haber sido: cabello de ángel, chancaca, cocada, camarón dulce.

4.3 Análisis prospectivo de las tareas

Los modelos utilizados por los estudiantes en cada una de las tareas, están relacionados con el análisis a priori. Esto implica el uso de estrategias informales ligadas al contexto como punto de partida para identificar en la tarea 2 en qué niveles de comprensión se encontraron los estudiantes. Por otra parte, uso de estrategias más sofisticadas que en la tarea 3 y 4 cuestionan el avance de nivel en que se encontraban.

También se muestran otros modelos utilizados por los estudiantes en las soluciones de las tareas. Si bien, no fueron considerados explícitamente en el análisis a priori, dado que en ese apartado solo se mostraba uno representativo, los aspectos considerados en las categorías de análisis daban lugar a su configuración, por parte de los estudiantes.

Para el análisis prospectivo de la tarea 2 se consideraron las producciones de los grupos 2 y 4, debido a la semejanza que estos guardan con los grupos 1 y 3. (Ver anexos 8 -11)

Además, las producciones de los grupos escogidos, permiten hacer un buen contraste con lo que se había previsto en el análisis a priori y con lo propuesto en el objetivo general del proyecto.

Tarea 2. La tienda de doña Nelly

Esta tarea se desarrolló en la segunda sesión y se modeló desde el contexto de una tienda, en el que se identificó el nivel en el cual se encontraban los estudiantes de grado tercero que cumplieron con los requisitos de la prueba de conocimientos previos, esta tarea fue de mucha importancia para este proyecto, porque no se podía tomar como referencia las pruebas externas como las ICFES, PISA, etc., debido a que las situaciones que se encuentran en esas pruebas no son fuertemente contextualizadas al ser pruebas que se les aplican a todos los estudiantes independientemente de su contexto social.

Por ello, de manera necesaria se realizó esta tarea contextualizada correspondiente a la realidad social de los estudiantes, con el fin de identificar el nivel de comprensión en el que se encontraron los estudiantes de grado tercero de primaria de la Institución Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros.

A continuación se muestra una tabla que recopila algunas conversaciones que tuvieron los estudiantes en cada uno de los grupos para el desarrollo de la primera pregunta de la tarea 2.

Tabla 15. Conversaciones de los estudiantes.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
E1: Tenemos que sumar de \$400 en \$400. Has de cuenta que compraste una festival y compras otra ¿cuánto pagas? E2: 400 más 400 son 800. E1: si pues. E3: haga los dibujos para que no te vas a equivocar.	E1: La otra vez yo compré dos festivales y me cobraron \$ 800 pesos por que yo pagué con un billete de mil y me devolvieron \$200. E2: yo me fuera comprado una sola festival y una leche de 600. E3: si hubiera quedado mejor.	E1: Si dibujamos las festivales es más fácil, cada una vale \$400 400+ 400 son 800 E2: ah sí y 800+400 son 1200.	E1: ¿Cómo vas a sumar cuanto tienes que pagar sino lo estás viendo? E2: haga los dibujos como lo están haciendo los demás grupos. E3: voy hacerlos yo que usted dibuja muy feo.

En la tabla 15 se puede apreciar que los estudiantes del grupo 1 y grupo 4 en el momento de escribir deciden dar respuesta con dibujos y esquemas que les permiten comprender las preguntas, y no utilizaron el cálculo mental y prefirieron realizarlo de manera procedimental en el que se notan rasgos del nivel referencial ya que organizaron la situación desde el algoritmo de la suma, es decir, que los estudiantes en sus producciones usaron representaciones concretas de la multiplicación como una suma iterada, también identificaron irregularidades numéricas en el que observaron los patrones constantes, en este caso el número 400.

Cabe destacar que al observar el suceso del grupo 2 queda claro que los estudiantes intentan resolver la tarea desde sus experiencias obtenidas a través de conocimientos previos y estrategias que utilizan cuando van a comprar.

Matematización horizontal

Modelo 1 (uso de modelos pictóricos)

Nivel situacional

La importancia de la etapa pictórica en el desarrollo de la tarea, jugó un papel que fortalece el nivel situacional en el que los conocimientos informales de los estudiantes se muestran a través de esquemas o agrupaciones, que les permitió reinventar procedimientos matemáticos a través de sus conocimientos escolares y extra-escolares.

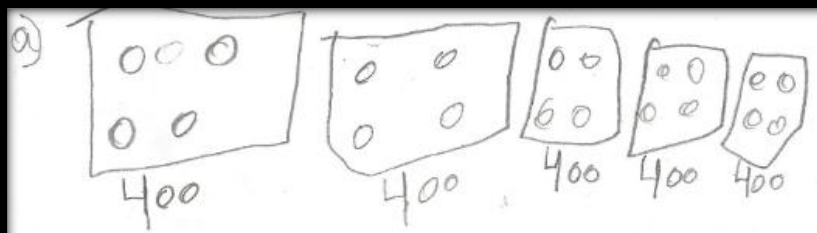
Las producciones de los grupos 1 y 3 guardan cierta similitud con las que desarrollaron los grupos 2 y 4. De manera que únicamente se consideran las producciones de estos últimos grupos (ver ilustración 23 y 24).

La producción del grupo 2 se puede corresponder con el nivel situacional, puesto que se aprecia el uso de dibujos para representar las galletas y las combinaciones entre ellas. Del mismo modo, la ilustración 23 pone de manifiesto el nivel situacional desde la agrupación, en el cual se observa que los estudiantes cuadraron los números a sumar tal que se formara un número “fácil” de sumar para ellos, en este caso el número mil para contar de mil en mil.

También se observa que usaron una representación para identificar cuáles son las combinaciones que se generan en la tarea sin perder el rastro de alguna.

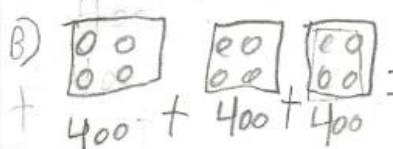
Ilustración 23. Desarrollo de la tarea 2 del grupo 2 (nivel situacional).

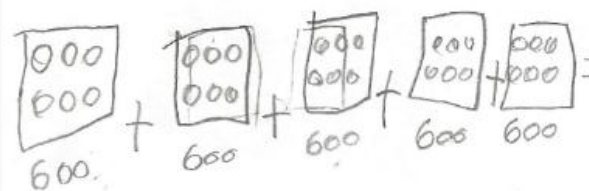
a)



$$400 + 400 + 400 + 400 + 400 = 2.000$$

b)



$$400 + 400 + 400 = 1.200$$


$$600 + 600 + 600 + 600 + 600 = 3.000$$

$$+ \begin{array}{r} 1.200 \\ 3.000 \\ \hline 4.200 \end{array}$$

c)





Galleta - Jugo

fresa - Naranja

fresa - mango

chocolate - Naranja

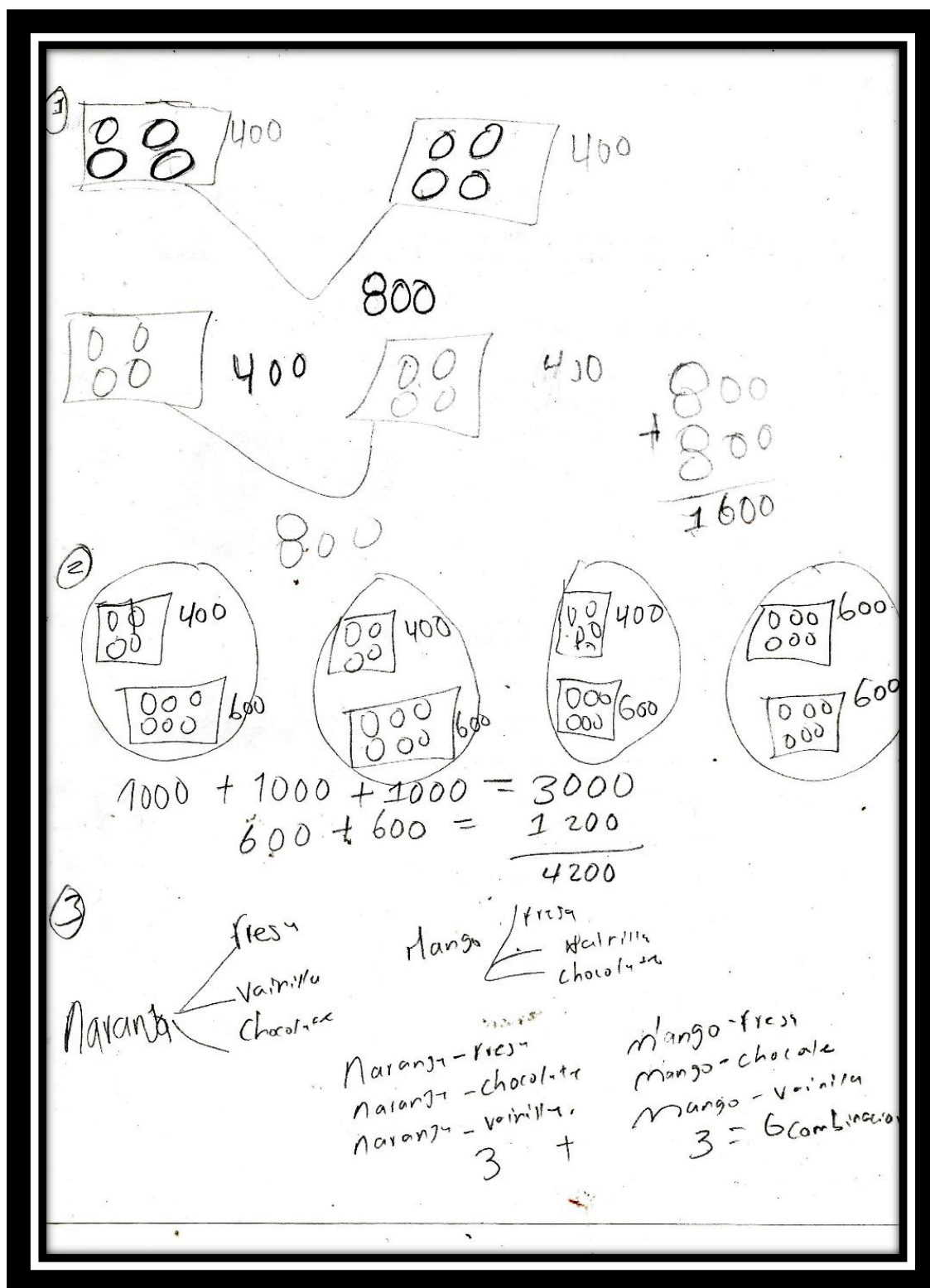
chocolate - mango

Vainilla - Naranja

Vainilla - mango

6 combinaciones

Ilustración 24. Desarrollo de la Tarea 2 del grupo 4 (nivel situacional).



Matematización vertical

Modelo 2 (suma iterada)

Nivel referencial

Este modelo logra mostrar cómo los estudiantes reescriben la tarea en el algoritmo de la suma iterada después de haber realizado los esquemas que usaron en el nivel situacional. Estas producciones muestran que los estudiantes se mueven a través de los niveles de comprensión, incluso de adelante hacia atrás, del nivel referencial al situacional, con el objetivo de comprender la situación planteada (Ver ilustración 24)

Ilustración 25. Desarrollo de la Tarea 2 de los grupos 2 y 4 (nivel referencial).

$400 + 400 + 400 + 400 + 400 = 2.000$	B)  = 1.200 + 400 + 400 + 400  +  = 3.000 600 600 600 600 600 + 1.200 <u>3.000</u> 4.200
$\begin{array}{r} 800 \\ + 800 \\ \hline 1600 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000 + 1000 + 1000 = 3000 \\ 600 + 600 = 1200 \\ \hline 4200 \end{array}$
$3 + 3 = 6 \text{ Comandos}$	

Nivel general

Según las producciones de los estudiantes en la tarea 2, con referente a las categorías de análisis en los estudiantes de grado tercero no se encontraron rasgos de este nivel, ya que no representaron las soluciones de la tarea con el algoritmo de la multiplicación, lo cual implica que no reconocieron los valores constantes en dicha tarea.

Finalmente, esta tarea deja en síntesis que las matemáticas y el contexto de los estudiantes juegan un papel importante en el aprendizaje, ya que los estudiantes imaginan y esbozan la tarea para poder dar respuesta a las preguntas planteadas. Además se estima que los estudiantes están en el “*nivel referencial*”, porque según la categoría de análisis representaron la tarea como una suma iterada y lograron identificar regularidades numéricas de la tarea planteada.

Tarea 3. Las escondidas

Con referencia a los análisis obtenidos en la tarea 2, la tarea 3 busca fortalecer la comprensión de la multiplicación poniendo especial énfasis en el isomorfismo de medidas, desde un contexto de juego escogido por los estudiantes, que en este caso fue *las escondidas*. En esta tarea se tuvo como objetivo comprender la categoría isomorfismo de medidas que según Vergnaud (1997) se trata de una relación cuaternaria entre 4 cantidades y 2 tipos de medidas, por ejemplo, los minutos que presentan 2 cantidades y compañeros que también se presentan como 2 cantidades.

Con las preguntas planteadas se logró un avance de nivel desde el situacional hasta el general, partiendo desde agrupaciones y sus conocimientos informales hasta llegar al algoritmo de la multiplicación. A continuación se presenta cómo se evidenció el avance de nivel, pero primero es importante decir que para esta tarea se tuvo en cuenta los modelos para la suma, las

etapas pictóricas y abstractas y el reconocimiento de algunas dificultades en el aprendizaje de la multiplicación, e incluso identificar el escalar de la tarea planteada para usarse en esta categoría con el fin de comprender la multiplicación no como una relación ternaria, sino como una relación cuaternaria.

En la primera pregunta se fortaleció el nivel situacional a través de una serie de agrupación para saber la cantidad de grupos de 4 compañeros que debió encontrar Laura, se mostró de manera clara la cantidad exacta de los grupos de 4 en los círculos rellenos, solamente un grupo tuvo dificultad en esta pregunta, pero uno de los integrantes del grupo le explicó a la compañera cómo se debía realizar la suma para no perder el orden, esto hace parte del principio de interacción de la EMR, ya que la estudiante comprendió el porqué de la respuesta que daban sus otros compañeros en el momento que se le explicó.

A continuación se muestra la tabla 16, en el que los estudiantes tienen unas conversaciones antes de dar solución a la tarea 3.

Tabla 16. Conversaciones de los estudiantes.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
E1: ¿Cuatro más cuatro?	E1: Hagamos unas bolitas con cuatro palitos cada una para contarlos mejor.	E1: ¿Qué tenemos que hacer aquí?	E1: ¿Hay que sumar hasta 48?
E2: ocho	E2: si porque es más fácil.	E2: Tenemos que sumar 4 hasta llegar al 48.	E2: yo no se
E1: ¿más cuatro?	E3: no sin palitos, solo sumando los números y ya.	E3: ah sí.	E1: ¿si pero que número?
E2: doce			E3: el 4.
E1: ¿más otros cuatro oye?			
E2: dieciséis pues.			

Estas conversaciones muestran las diferentes estrategias que proponen los estudiantes en cada uno de los grupos, en el que no se toman algunas en el momento de escribir en la hoja de respuesta, se logra mostrar que el grupo 2 propone reescribir la tarea que se encuentra con el número cuatro y representarla a manera de conjunto de cuatro unidades. (Ver anexo 15).

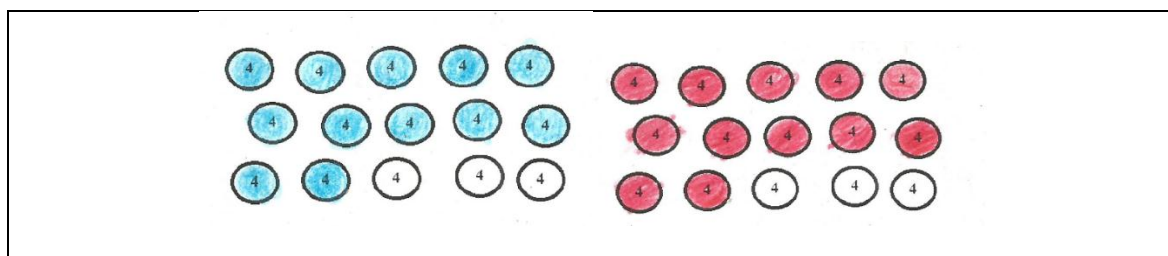
Matematización horizontal

Modelo 1 (modelo de agrupación)

Nivel situacional

Esta tarea tuvo como objetivo fortalecer el nivel situacional a través de la agrupación, en el que los estudiantes llevaron un registro de cada uno de los grupos de cuatro, relleno cada uno de estos hasta llegar al número 48. Además, llama la atención un estudiante del grupo 2 que propone reestructurar los grupos, como lo muestra la tabla 15, esta forma que propone el estudiante hace parte del nivel situacional que fue mostrado en el análisis a priori y también se encuentra dicho en las categorías de análisis.

Ilustración 26. Agrupación.



Dentro de las otras preguntas no se logró mostrar ningún otro registro por parte de los estudiantes que se pudiera observar el nivel situacional, porque no se observaron

representaciones pictóricas ni las agrupaciones para hacer conteo de las cantidades de compañeros encontrados.

Matematización Vertical

Modelo 2 (secuencia de números)

Nivel referencial

Dentro de la pregunta 1 cabe resaltar que los estudiantes no se quedaron solo en rellenar los círculos sino que mostraron la multiplicación como una suma iterada, lo cual es consistente con la forma en que se entienden los niveles de comprensión en la EMR, puesto que el hecho de estar en un nivel referencial no implica que los estudiantes no puedan reflexionar sobre aspectos de la situación concernientes al nivel situacional.

En la pregunta 2 se tuvo la intención de que los estudiantes logaran reconocer factores constantes en la tarea planteada, en este caso el valor constante del tiempo en el que Laura encuentra a cada grupo de cuatro compañeros, con ayuda del modelo para la suma *lineal* se logró que los estudiantes observaran esta relación, en el que los estudiantes debían seguir la secuencia de los números; en este sentido es importante observar las interacciones entre los integrantes de cada grupo (ver tabla 17).

Llama la atención el grupo 3 que comienza a relacionar la tarea planteada desde el algoritmo de la multiplicación, pero esta tarea observa la multiplicación como un isomorfismo de medidas, lo cual implica que no solamente se estudia una sola medida (el tiempo) sino ambas medidas (compañeros encontrados y tiempo).

Tabla 17. Conversaciones de los estudiantes.

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
E1: Un grupo tres minutos Dos grupos 6 minutos Tres grupos 9 minutos. E2: si y tres grupos 12 minutos.	E1: De tres en tres. E2: si porque se está sumando el tres siempre. E3: si es así.	E1: Es la tabla del tres porque 3 por 1 es 3 3 por 2 es 6 3 por 3 es 9. E2: 3 por 4 es 12 pero también da sumando $3 + 3$.	E1: Está sumando de tres en tres. E2: si por que $3 + 3$ es 6 y $6 + 3$ es 9.

En cambio los grupos 1 y 3 si relacionaron las dos cantidades de medidas que se encuentran en el tiempo, que hace referencia a la cantidad vertical, es decir que identifica el escalar y el grupo 1 también observo otra relación entre la cantidad de grupos encontrados, es decir, que no hizo la relación con la cantidad de personas, sino con el grupo. Se muestra que hubo una relación horizontal en la que se puede ver la correspondencia uno a uno que este grupo de estudiantes realiza de manera verbal. (Ver tabla 17).

Ilustración 27. Secuencia de números.

2) (cuando pasa de un número al otro está sumando el tres.	Transcripción Cuando pasa de un número al otro está sumando el tres.
---	--

Cabe resaltar que la interacción entre estudiante- estudiante fue de gran ayuda para dar respuesta a la pregunta planteada, se observó una motivación entre ellos cuando llevaban la

secuencia de los números para dar respuesta a la pregunta, tanto que querían competir entre ellos sumando de manera rápida.

Nivel general

Modelo 3 (transformación de la suma a la multiplicación)

Es necesario destacar que en este nivel los estudiantes reconocieron los valores constantes de la tarea plateada, también identificaron el escalar vertical que se encuentra en las medidas (tiempo y número de compañeros) en la que se logra mostrar la comprensión de la multiplicación como una relación cuaternaria y la relación de equivalencia entre las cantidades horizontales.

Ilustración 28. Modelo tabular.

Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados	Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados
3	4	3	4
6	8	6	8
9	12	9	12
12	16	12	16

Para fortalecer la comprensión de la multiplicación como un isomorfismo de medida, se logró que los estudiantes dotaran esta forma de comprender la tarea, ya que en las preguntas cuatro y cinco dejaron de lado la forma de responder a través de dibujos, esquemas y representaciones, se logra tener un nivel de comprensión más alto en los estudiantes, un grupo de estudiantes leían la tabla y comprendían la relación entre las cantidades.

Otro grupo prefirió responder las preguntas a través del modelo lineal para la suma, en el que se logra un nivel de comprensión representativo aunque ligado al nivel referencial.

Ilustración 29. Transformación de la suma a la multiplicación.

4) Si sumamos 8 veces 4 es igual a 32 entonces tenemos que multiplicar 8×3 que es igual a 24 entonces No porque Laura se demora 24 minutos en encontrarlos.

5) $6 \times 3 = 18$ minuto

4) - ③ - ⑥ - ⑨ - ⑫ - ⑮ - ⑱ - ⑳
1 2 3 4 5 6 7
4+4+4+4+4+4+4=28 No es posible que encuentren a los 32 compañeros en 21 minutos porque en 21 minutos encuentra a 28 compañeros

5) $3 \times 6 = 18$ minutos porque son seis grupos que deben encontrar tres minutos

33 36

Tiempo	Número de compañeros
3	4
6	8
9	12
12	16
15	20
18	24
21	28
24	32
27	36
30	40
33	44
36	48

Se suma de tres en tres

Se suma de cuatro en cuatro

4) La tabla dice que en 21 minutos se encuentran a 28 no a 32

5) Se demoran 18 minutos.

Transcripción

Si sumamos 8 veces 4 es igual a 32 entonces tenemos que multiplicar 8×3 que es igual a 24 entonces No porque Laura se demora 24 minutos en encontrarlos.

No es posible que encuentren a 9

$3 \times 6 = 18$ minutos, porque son seis grupos que deben encontrar

A tabla dice que en 21 minutos se encuentran a 28 no a 32

Se demoran 18 minutos.

Cabe resaltar que todos los grupos en la pregunta número 3 y 5 de esta tarea, realizaron unas producciones en las que se logra mostrar el isomorfismo de medida desde la relación cuaternaria. (Ver ilustración 28 y 29).

Salida a cine

La tarea 4 se diseñó desde una situación de una salida a cine, en la que se incorporó de manera general la multiplicación como un producto de medidas, para lograr el avance de nivel se tuvo en cuenta los modelos para la suma y las etapas pictóricas y abstractas, que en conjunto permitieron observar de manera explícita el avance de los estudiantes desde el nivel situacional al nivel general, porque las producciones que realizaron los estudiante fueron previstas en el análisis a priori de esta tarea.

Cabe señalar que esta tarea se organizó de manera secuencial, por tanto la pregunta 1 hace referencia al nivel situacional ya que colorearon las combinaciones que señala la tarea, la 2 y la 3 pregunta lograron identificar relaciones constantes entre las combinaciones que hace parte del nivel referencial, y las preguntas 4 y 5 fueron solucionadas por los estudiantes de manera algorítmica de la multiplicación.

Matematización horizontal

Modelo 1 (representación pictórica)

Nivel situacional

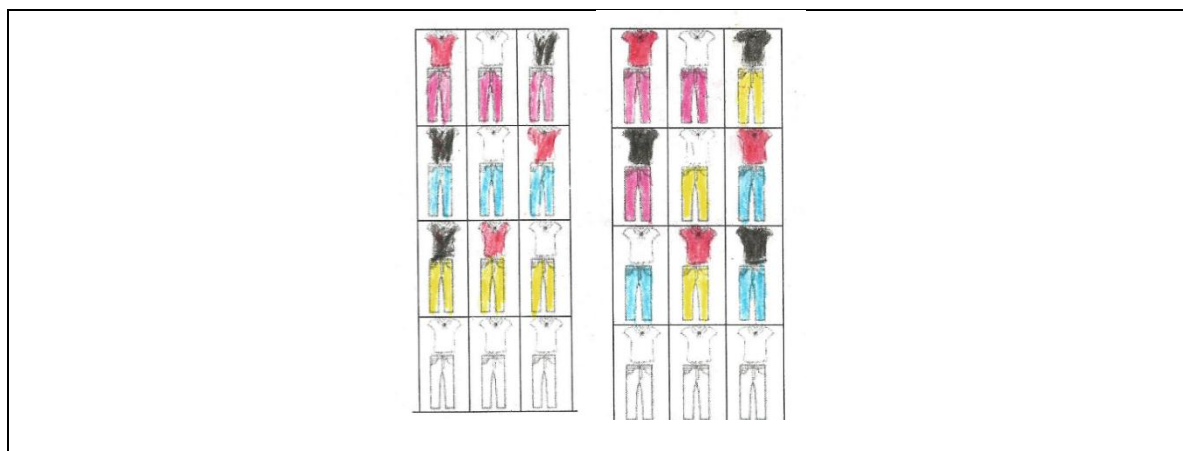
En la primera pregunta se modeló el nivel situacional en el que se les pidió a los estudiantes que realizaran las combinaciones coloreando los rectángulos que se encontraban en la tarea, aquí se relacionó el nivel situacional desde la etapa pictórica, en la cual los estudiantes no

tuvieron ningún inconveniente en realizar las combinaciones, se observó que un grupo realizó de manera ordenada las combinaciones, es decir, realizaron las combinaciones de cada color sin que faltara ninguna de manera agrupada, lo que les permitió resolver la tarea un poco más rápida. (Ver ilustración 29).

Lo anterior, da por sentado que los estudiantes hicieron una aproximación empírica de las combinaciones basados en la observación de los colores sin repetir ninguna combinación

A continuación se muestra cómo se evidenció el nivel situacional en esta pregunta.

Ilustración 30. Representación pictórica.



Matematización vertical

Modelo 2 (relación de combinación)

Nivel referencial

En la segunda y tercera pregunta los estudiantes observaron las relaciones entre cada una de las combinaciones que son los pantalones y camisas, con ello se muestra las producciones que hicieron los estudiantes para poder llegar al nivel referencial.

Tabla 18. Identificación de relaciones entre las combinaciones que tienen cada camisa y cada pantalón.

Grupo 1	Si por que tiene las misma opción	Transcripción Si por que tienen las mismas opción
Grupo 2	2) Si porque tiene las mismas formas	Si porque tiene las mismas formas
Grupo 3	2) Si por que tienez combinscnoes parecires	Si por que tienz combinscnoes parecires
Grupo 4	2) Si Por que tienen iguales blusas	Si porque tienen iguales blusas

La cuarta pregunta estuvo encaminada al modelo cardinal para la suma, que fue fundamental para que los estudiantes llegaran al nivel general, esta pregunta fue resulta por los estudiantes por medio de representaciones concretas de la multiplicación como suma iterada.

Tabla 19. Conteo iterado y valores constantes.

Grupo 1	3) 9 4) $3+3+3=9$ formas	Transcripción 3) 9 4) formas
Grupo 2	3) 9 rectangulos colorados 4) Por cada pantalón tiene tres combinaciones o sea $3+3+3$ que es lo mismo que 3×3 que es 9	3) rectangulos colorados 4) Por cada pantalón tiene tres combinaciones o sea $3+3+3$ que es lo mismo que 3×3 que es 9
Grupo 3	3) 9 4) Si se pone el pantalón fusua tiene tres combinaciones si se pone el azul también 3 y el amarillo también tres entonces $3+3+3=9$ $3 \times 3=9$	3) 9 4) si se pone el pantalón fusua tiene combinaciones si se pone el azul también 3 y el amarillo también tres entonces $3+3+3=9$ $3 \times 3=9$

Grupo 4	3) ay nueve 4) 3 rectangulos 3 rectangulos 3 rectangulos $3 \times 3 = 9$ 9 rectangulos	3) Ay nueve 4) 3 rectangulos 3 rectangulos 3 rectangulos $= 9$ rectangulos $3 \times 3 = 9$
---------	--	---

Estas formas de producción efectuadas por los estudiantes muestran que pudieron identificar los valores constantes en la tarea, los cuales fueron previstos en el análisis a priori. Además, se observan algunas aproximaciones al nivel general, porque no solo muestran la solución como una suma iterada, sino que también fue representada en el algoritmo de la multiplicación.

Modelo 3 (representación algorítmica de la multiplicación)

Nivel general

Una vez resuelto todas las preguntas anteriores, se observó que los estudiantes tuvieron las bases para poder dar respuesta a la pregunta 5 por cualquiera de los niveles de comprensión (situacional, referencia y general), puesto que los estudiantes reconocen los valores constantes de situaciones que involucran el uso de la multiplicación, en este caso la multiplicación como un producto de medidas. A continuación se presenta como se logró identificar el nivel general.

Tabla 20. Representación algorítmica de la multiplicación.

Grupo 1	5) $5+5+5+5=20$ Formas $5 \times 4 = 20$	Transcripción 20 formas
Grupo 2	5) $5 \times 4 = 20$ $5+5+5+5=20$ 20 combinaciones hay.	20 combinaciones hay

Grupo 3	$5) 5+5+5+5=20 \text{ maneras}$ $5 \times 4 = 20$	20 maneras
Grupo 4	$\begin{array}{r} 5 \\ + 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ \hline 20 \end{array}$ $5 \times 4 = 20$ 20 maneras posibles que se pueda vestir	20 maneras posibles que se pueda vestir

4.4 Consideraciones finales del análisis prospectivo

En este apartado se mencionan algunas dificultades que tuvieron los estudiantes, también se mencionan algunas reflexiones que realizaron los estudiantes una vez terminaron las tareas y los nuevos interrogantes que emergieron a lo largo del desarrollo del análisis de las producciones de los estudiantes.

Al realizar la tarea: *la tienda de doña Nelly* los estudiantes de grado tercero tuvieron una serie de dificultades para comprender la estructura de la situación planteada, en las pregunta 1 y 2 que están relacionadas al isomorfismo de medidas, puesto que tuvieron algunos problemas en la identificación del valor de las galletas.

Para ilustrar esa situación puede citarse que un estudiante decía que por la casa vendían las galletas festivas a \$500 y que si compraban tres de estas el tendero las dejaba en \$1400, este estudiante pertenecía al grupo 2 y se sintió un poco excluido por los miembros de su grupo y por los demás compañeros, ya que pensó que su participación había estado mal. De hecho, los autores de este proyecto tuvieron que hacer una intervención al respecto y señalar que su

participación no estaba mal y explicarle nuevamente el contexto matemático de la tarea planteada.

Así mismo, se presentó otra dificultad al momento en que un estudiante del grupo 4 une la cantidad de galletas de \$400 con las de \$600 suman el valor de \$1000 realizando 3 grupos con las manos, como no eran la misma cantidad le sobraron 2 y dice que el valor de esas galletas es de \$500 cada una porque es la mitad de mil, lo cual es incorrecto ya que habían 3 galletas de \$400 y 5 galletas de \$600, el valor de dichas galletas es de \$600. Esto nos conlleva a pensar que los estudiantes les cuestan sumar término a término y por eso buscan la mejor forma de como cuadrarlos para obtener números un poco más fáciles de sumar.

También se tuvo dificultad en la pregunta 3 que está relacionada al producto de medidas, pues algunos pensaron que se les había preguntado ellos que elegiría para comerse las galletas con el jugo. En el cual algunos respondieron en voz alta:

- La galleta de fresa con mango muy rico.
- La galleta de chocolate con el jugo de mango.

Se les tuvo que explicar nuevamente la intención de la pregunta, que era realizar el número de combinaciones que Camila podría realizar para comerse en un jugo de naranja y mango con las galletas festivas: chocolate, vainilla y fresa.

Dentro de la tarea surgió una afirmación por el grupo 4 en el que dicen lo siguiente: Si compramos la misma cantidad de galletas en ambas debemos pagar el número terminado en mil.

Lo cual es correcto el enunciado. Ejemplo al comprar:

2 galletas de 400 y 2 de 600= 2000 – Dos mil

6 galletas de 400 y 6 galletas de 600= 6000 – Seis mil

En las tareas *las escondidas* y *salida a cine* se tuvo en cuenta la serie de dificultades que se presentaron en la tarea *la tienda de doña Nelly* para que no se presentarán estas mismas dificultades en estas dos tareas, pero surgieron algunos interrogantes por parte de los estudiantes que fueron los siguientes:

¿Cuánto tiempo se demora Laura en encontrar a un solo compañero?

En este momento hubo una intervención, por parte de los autores del presente proyecto, para aclararle esta cuestión a los estudiantes, en la que se tuvo que explicar que un minuto tiene 60 segundos y que si Laura se demora 3 minutos, los tres minutos son equivalentes a 180 segundos, se les explicó que se demora 45 segundos ya que al sumar el número 45 cuatro veces son exactamente 180 segundos que equivalen al tiempo que tarda Laura en encontrar a 4 de sus compañeros.

- Profesor algunas veces se encuentran a compañeros en menos tiempo ¿Qué pasaría si Laura encuentra a todos en el mismo lugar? Cuando yo juego mis amigos se quieren esconder por donde yo me escondo.

Aquí se les tuvo que aclarar que todos los compañeritos se encontraban en lugares diferentes y con el objetivo de precisar e ilustrar mejor la pregunta planteada se tuvo que realizar la mímica de la tarea.

Dentro de las tareas planteadas, los estudiantes avanzaron del nivel situacional al referencial, el rol de los investigadores en el desarrollo de estas tareas fue importante en el proceso de los estudiantes al avanzar de un nivel de comprensión a otro pero hubo más interacción con los estudiantes, en el momento que iban avanzando del nivel referencial al

general, ya que en las preguntas que se diseñaron en las tareas no se preocupan por el algoritmo de la multiplicación, es por ello que cuando los estudiantes llegaban al algoritmo de la suma iterada se les realizaron preguntas con la intención de que mostraran la representación en el algoritmo de la multiplicación.

También es de gran importancia que para lograr un alto nivel de comprensión en los estudiantes, es necesario empezar desde el nivel situacional, no como en algunas instituciones que se empieza en resolver el algoritmo y luego proceder a comprender las situaciones, esto puede ser un generador del poco interés por las matemáticas, ya que los estudiantes no logran relacionar lo que ven en la vida cotidiana con lo que ven en el colegio (Usuga, 2014).

4.5 Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones y algunas reflexiones con respecto a al proceso de aprendizaje de la operación multiplicación desde el contexto de los estudiantes, que surgen después del desarrollo del diseño de tareas, que se llevó a cabo con 12 estudiantes del grado tercero de la básica primaria de la Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladrilleros. Las conclusiones y reflexiones se hacen en contraste a los objetivos, el marco teórico y el análisis realizado en cada una de las respuestas hechas por los estudiantes en el diseño de tareas.

En esta dirección, siendo consecuente con la contextualización del problema de la EMR, uno de los principales logros en este trabajo fue, posibilitar en los estudiantes el paso por los diferentes niveles de matematización horizontal y vertical de la EMR, cuando trabajan con problemas multiplicativos; con el fin de matematizar una situación en un contexto realista, desde el uso de notaciones sencillas en el que sus conocimientos previos e informales jugaron un papel

fundamental para dar respuesta a las situaciones planteadas, hasta el uso de notaciones propias del contexto de las matemáticas (símbolos, formulas, gráficos y expresiones algebraicas).

Los procedimientos utilizados por los estudiantes en relación con los modelos para la suma de Rico, Castro y Castro (1995) y las etapas pictóricas y abstractas de Giraldo (2016) fueron realizados de manera simbólica; sin embargo para dar respuesta a las preguntas relacionadas con las dos grandes categorías de Vergnaud (1997) que son isomorfismo de medidas y producto de medidas los estudiantes respondieron de manera formal. Cabe mencionar que en todas las tareas realizadas se dejó de lado las relaciones de cantidades ternarias de la multiplicación y se vinculó las relaciones de cantidades cuaternarias de Vergnaud, esto con el fin de mostrar que en la resolución de problemas multiplicativos requieren de procedimientos y representaciones totalmente interconectados.

Se encontró que los estudiantes pueden situarse dentro de los niveles de comprensión, debido a que sus modelos poco a poco van evolucionando, hasta adquirir un carácter más general, dicho posicionamiento tiene necesariamente un valor relativo. Con ello, los estudiantes a través de sus experiencias pudieron lograr comprender las estructuras multiplicativas de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, esto se logró identificar en cada una de sus producciones realizadas. Es necesario mencionar cómo se desarrolló cada uno de los objetivos específicos que logran dar respuesta a la contextualización del problema.

Por otro lado, los contextos y los modelos abordados, demostraron ocupar un lugar protagónico en la integración de la los análisis de los resultados para un trabajo matemático, esto se refleja inicialmente, en la fundamentación teórica de las tareas diseñadas.

En este sentido, se muestra cómo se cumplió con el primer objetivo específico, en el que se identificó el diario vivir de los estudiantes, realizando un cuestionario el cual permitió dar ideas para la construcción del diseño de las tareas.

El segundo objetivo específico articuló el diseño de tareas para la población, en el que se tomó como referencia el cuestionario, modelando situaciones familiares en los estudiantes que pudieran causar la motivación hacia las matemáticas desde su contexto social.

Primero se realizó la tarea 1 “*los juguetes de Camilo*” en la cual se encontraban preguntas relacionadas al concepto de cantidad, valor posicional, concepto de suma y concepto de repetición, que sirvió para estimar los estudiantes que tenían estos conocimientos previos para comprender el concepto de la multiplicación.

Luego, se realizó la segunda tarea “*La tienda de doña Nelly*” que fue planeada bajo las dos grandes categorías de Vergnaud (1997) *isomorfismo de medida* y *producto de medida* con el propósito de identificar en qué nivel de comprensión se encontraban los estudiantes de grado tercero de primaria, con ello se estimó que los estudiantes se encontraban en el nivel situacional, porque le dieron respuesta a las preguntas mediante dibujos y utilizaron estrategias ligadas a su contexto, en el que el conocimiento no matemático representa el camino para dar respuestas a las preguntas planteadas de esta tarea.

Lo anterior, permite precisar que los estudiantes se encontraban en el nivel referencial, por ende, el tercer objetivo específico cumplió la función de lograr que los estudiantes pasaran del nivel situacional al nivel referencial y finalmente al nivel general, se concluyó que lograron avanzar de nivel en la tarea 3 “*Las escondidas*” la cual se estructuró bajo *los modelos para la suma* de Rico, Castro, y Castro (1995) y el *isomorfismo de medidas*, el avance de nivel se

identifica en las producciones que fueron resueltas por representaciones avanzadas que esquematizan la multiplicación como un isomorfismo de medidas que se rigoriza con el modelo de suma llamado *razón*.

La tarea 4 parte del nivel situacional, porque es necesario que los estudiantes establezcan relaciones desde la experiencia para poder dar respuesta a las preguntas relacionadas con el producto de medida, en unión de las etapas pictóricas y abstractas. Es decir, en términos de la EMR sobre la matematización progresiva que se muestra en la medida en que se dejan de lado los esquemas o representaciones vinculadas a los conocimientos informales.

Los estudiantes partieron del nivel situacional porque realizaron combinaciones coloreando una primera medida con una segunda medida, es decir, una blusa y un pantalón, se logra mostrar que pasaron al nivel referencial en la segunda pregunta, ya que deja de lado las representaciones y comienzan a identificar las relaciones entre varias combinaciones y utilizan símbolos de la matemática, favoreciendo así el avance de nivel (del situacional al referencial).

Para que los estudiantes llegaran al nivel general, las preguntas 3 y 4 estuvieron relacionadas a los modelos para la suma, especialmente en el modelo cardinal, para dar respuesta utilizaron procedimientos abstractos porque tenían en cuenta las construcciones anteriores que realizaron en las preguntas 1 y 2 para dar respuesta a la 3 y 4, y logran abstraer los elementos relevantes de la tarea problema y trabajarlos en un contexto eminentemente matemático.

Por otro lado, esta investigación permite sentar bases para proponer situaciones relacionadas con actividades matemáticas; en el que se especifican cuáles deben ser los aspectos a tener en cuenta en el diseño y la gestión de las tareas, posibilitando de esta manera, una mejor integración entre la vida social de los estudiantes y las actividades matemáticas en las aulas de

clases y facilitando su implementación por parte de los docentes. En consecuencia, hemos identificado como podría ser el desarrollo de las actividades propuestas desde la EMR, en el aula.

En general, los estudiantes de grado tercero de la básica primaria lograron avanzar por los distintos niveles de comprensión hasta llegar al nivel general, en el que dejaron de hacer uso de gráficos y remplazarlos por un lenguaje un poco más formal de las matemáticas.

Los resultados alcanzados, se reconocen que estuvieron en función del *tipo de contextos de las tareas, los conocimientos previos de los estudiantes, la intervención de los investigadores, la organización de la clase, y las interacciones promovidas en el aula de matemáticas*. Estos aspectos deben tener implicación en el aula de clase cuando se piense en situaciones o tareas multiplicativas que promuevan el avance de niveles en los estudiantes.

4.6 Reflexiones finales

El pensamiento numérico y sistemas numéricos, y el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, no se dejaron de lado en el proyecto, siempre estuvieron inmersos en cada uno de los procesos del diseño de las tareas, ya que utilizaron estrategias de conteo, relacionaron su experiencia, y se propició la curiosidad en las matemáticas en ellos, especialmente en la multiplicación.

- El pensamiento numérico y sistemas numéricos se desarrolló en este proyecto, en el momento que los estudiantes lograron identificar el sentido y significado de las operaciones de la suma iterada en tareas multiplicativas en las que se observaron diferentes técnicas de conteo.

- El pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, se evidencio en la medida en que los estudiantes avanzaban de nivel, porque analizaron relaciones constantes entre las tareas y se logró tener una coherencia con el pensamiento número y sistemas numéricos, para estimar las situaciones de variación y poder llegar a un análisis de manera general.

La importancia de articular el enfoque teórico de la Educación Matemática Realista en este proyecto se encuentra inicialmente en sus seis principios en los que se sustenta, que si en la actualidad se articularan cada uno de estos, es posible que disminuya la cantidad de personas que desertan en el estudio, es de manera necesaria que el profesor comprenda las matemáticas como una construcción humana, es decir, que pudiera ser creada con el propósito de dar solución a los problemas de la actualidad y no verla como un enfoque mecanicista de algoritmos que no tienen ningún sentido para los estudiantes. Sin embargo no basta solamente con cumplir una cantidad de contenidos, sino pensarse si de verdad se está formando una persona que sea capaz de dar respuesta a las múltiples demandas de la sociedad.

Acorde con los planteamientos anteriores, este proyecto deja abierto unos interrogantes.

- ¿Qué papel juega la enseñanza tradicional en la comprensión de la multiplicación según las relaciones de cantidades cuaternarias de Vergnaud?
- ¿Cómo comprender las categorías de Vergnaud desde los diferentes métodos de multiplicación que ofrecen Aguilar y Madriz (2012)?

Referencias bibliográficas

- Aguilar, A., & Madriz, C. (2012). *Un viaje por los diversos métodos de multiplicar. Festival Internacional de la Matemática.*
- Alsina, A. (1993). *La Matemàtica del Consumidor Barcelona: Inst. Cat. Consum. Generalitat de Catalunya.*
- Alsina, À. (2009). El aprendizaje realista: una contribución de la investigación en Educación Matemática a la formación del profesorado. In *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 119–127).
- Bezerra, F. (2015). *La enseñanza de la multiplicación : Una propuesta a partir de tareas de proporcionalidad directa. Conferencia Internacional de Educación Matemática CIAEM.*
- Bressan, A. (2011). Los principios de la Educación Matemática Realista. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.
- Bressan, A. (2016). *Educación Matemática Realista Bases teóricas. III congreso nacional de matemática y problemáticas de la educación contemporánea. Santa María, Argentina.*
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, F. (2004). *La Educación Matemática Realista: Principios en que se sustenta. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática.*
- Cetina, M. (2015). *Proceso de matematización de situaciones de variación en el marco de la función cuadrática. Un estudio de caso en bachillerato. Tesis de Maestría en Ciencias Área Matemática Educativa.*
- Córdoba, F. (2011). La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el

trabajo de aula en ingeniería. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada.

- Cortiñas, J. (2013). La Multiplicación Árabe. II Torneo de Matemáticas. CEIP Mediterráneo.
- Díaz, S., Martínez, V., & Morales, C. (2011). *Una guía para la elaboración de estudios de casos. Primera Revista Electrónica en América Latina Especializada en Comunicación. Tomado de www.razonypalabra.org.mx.*
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task. Dordrecht. Reidel Publishing Co.*
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures Kluwer Dordrecht-Boston-London. (Vol. 25).*
- García, G. (1996). Reformas en la enseñanza de las matemáticas escolares : perspectivas para su desarrollo. *REVISTA EMA*, 195–206.
- García, Fina, & Moreno. (2008). Cuestionario para conocer los gustos e interese de los niños de primaria. Tomado de https://cvc.cervantes.es/aula/didactired/anteriores/febrero_14/10022014_02.pdf.
- Giraldo, B. (2016). Método singapur para la enseñanza de las matemáticas. Mineducación.
- Godino, J., & Batanero, C. (2002). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada.*
- Goffree, F. (2000). Principios y paradigmas de una educación matemática realista. En Gorgorió, Balachef y otros (comp.), *Matemática y Educación. Retos y cambios en una*

perspectiva internacional, ICE, Universidad de Barcelona, Ed. Graó.

- Gravemeijer, K., & Teruel, J. (2000). *Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory*. *J. Curriculum Studies*, 32(6), 777- 796. *Journal Curriculum Studies* (Vol. 32).
- Greer, B. (1992). *Multiplication and division as models of situations*. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* @p. 276-295). NY: MacMillan.
- Henao, S., & Vanegas, J. (2012). La modelación matemática en la Educación Matemática Realista: Un ejemplo a través de la producción y uso de modelos cuadráticos. Universidad del Valle.
- Heuvel-Panhuizen, & Drijvers, P. (2014). *Realistic Mathematics Education*. *Encyclopedia of Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Institución, N. (2014). Malla Curricular. Institución Educativa Escuela Normal Superior Juan Ladilleros.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *La enseñanza de la multiplicación : el estudio de clases y las demandas curriculares*. *Sociedad de Educación Matemática de Japón*.
- Kaplan, R., Yamamoto, T., & Ginsburg, H. (1989). La enseñanza de conceptos matemáticos. *Revista Latinoamericana de Educación*, Vol. 2, No. especial, 38-64 ISSN: 2215-8421.
- Lampert, M. (1986). *Knowing , Doing , and Teaching Multiplication* (Vol. 3).
- Lorenzo, J., & Vera, A. (1993). Las prácticas sociales de modelación como procesos de matematización en el aula. Tesis Doctoral.
- Marín, C. (2011). *La heterogeneidad cognitiva. un gran reto para el docente en las clases*

de matemáticas. Tesis de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia.

- Martínez, P. (2006). El método de estudio de caso: estrategia metodológica de la investigación científica. *Pensamiento Y Gestión: Revista de La División de Ciencias Administrativas de La Universidad Del Norte*, (20), 165–193. <https://doi.org/10.1055/s-0029-1217568>
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Magisterio. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.
- Muñoz, C. (2010). *Estrategias didácticas para desarrollar el aprendizaje significativo de las tablas de multiplicar en los niños del grado 3 – B de la Institución Educativa Jose Holguin Garces – Sede Ana María de Lloreda*.
- Nesher, P. (1988). Solving multiplication word problems. En G. Leinhardt, R. Putnam & R. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-219). Hillsdale, NJ: Erlbaum., 3(1953), 12–19.
- Obando, G., & Córdoba, J. (1925). *Las situaciones problemas como estrategias para la Conceptualización matemática*. *Revista Educación y Pedagogía*.
- Orrantia, J. (1990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva cognitiva. *Desarrollo Psicológico y Educación*.
- Ozámiz, M. (1993). Tendencias innovadoras en Educación Matemática. El paraíso de las Matemáticas. Tomado de <http://www.matematicas.net/>.
- Pérez, G. (1994). Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes. Métodos. Catedrática de Pedagogía Social. Universidad Nacional de Educación.

- Piedad, A. (2012). *Estrategias metodológicas en la comprensión de las tablas de multiplicar. Tesis para obtener el título de Licenciado en Ciencias de la Educación.*
- Pozo, J. (1998). *La teoría del aprendizaje significativo.* Ed. Morata. Madrid., (1989).
- Puig, L. (2006). *La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València, España.*
- Puig, L., & Cerdán, F. (1998). *Problemas aritmeticos escolares. Departamento de Didàctica de la Matemàtica de la Universitat de València.*
- Rico, L., Castro, E., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su contenido. Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. Serapio Rendón 125. Col. San Rafael, 06470 México, D.F. Apartado 5-192, C.P. 06500 Tel. 705-05-85 Reg. CNIEM 1382.*
- Ruiz, A. (2011). *Reforma de las Matemática Moderna y una Nueva Disciplina. Comité Interamericano de Educación Matemática, CIAEM.*
- Teerizinha, N., & Bryant, P. (2005). *Las matematica y su aplicación: la perspectiva del niño. Buenos Aires:XXI. Department of Educational.*
- Treffers, S. (1978). the Didactical Use of Models in Realistic. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9–35. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc>
- Treffers, S. (1987). *Realistic Mathematics Education.* Institute for Science and Mathematics Education Utrecht Universit., 1–5.
- Treffers, S. (1993). *Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education* (Vol. 25).
- Usuga, O. (2014). *Diseño de una unidad didáctica para la enseñanza- aprendizaje de la multiplicación de números naturales en el grado tercero de la Institución Educativa*

Antonio Derka Santo Domingo del municipio de Medellín.

- Vergnaud, G. (1995). El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las Matemáticas en la escuela. Trillas: México., 727–735.
- Vergnaud, G. (1997). *The nature of mathematical concepts. Investigació en Enseñanza de las Ciencias*, 7(1), 2002. <http://www.if.ufrgs.br/ienci>.
- Villanueva, M. (2006). *Estudios exploratorios sobre el uso de modelos alternativos para la enseñanza y aprendizaje de la multiplicación y división con estudiantes de primer ciclo común. Tesis para obtener el título de Master en Educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacio.*
- Wood, D. (2000). *Como piensan y aprenden los niños: contexto sociales del desarrollo cognito. Editorial: Siglo XXI México.*

Anexos

Anexo 1

 **INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA** 
Universidad del Valle Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas Instituto de Educación y Pedagogía

Propósito: El presente cuestionario pretende identificar los gustos de los estudiantes para articularlos al diseño de tareas relacionadas a su contexto.

Por ello, rogamos que de manera clara responda las siguientes preguntas.

Nombre: _____ Grado: _____

¿Cuáles son los juegos que más le gustan?

Las escondidas, El Fútbol, Ponchao,
Ponchao loco, dieciocho,

¿Cuáles son sus lugares favoritos?

El cine, La cancha, Los piscina, centro comercial.

¿Cuáles son sus galletas favoritas?

La muvu, La mamu, La festi-val, La milo
Craquero, Salin Noel, las doraditas, las ducales
Las oreo, las cura, la recreo.

Las respuestas en este cuestionario serán sumamente confidenciales.

Muchas gracias por su participación

Anexo 2



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas



Propósito: El presente cuestionario pretende identificar los gustos de los estudiantes para articularlos al diseño de tareas relacionadas a su contexto.

Por ello, rogamos que de manera clara responda las siguientes preguntas.

Nombre: _____ Grado: _____

¿Cuáles son los juegos que más le gustan?

los juegos que mas me gustan son: las escondidas, Futbol
Parchado, Diez y ocho,

¿Cuáles son sus lugares favoritos?

los lugares favoritos son: ir al cine, el parque la 14, el éxito,

¿Cuáles son sus galletas favoritas?

las galletas favoritas son: Festival, saltin roto, mila, arco, xcam

Las respuestas en este cuestionario serán sumamente confidenciales.

Muchas gracias por su participación

Anexo 3



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas



Propósito: El presente cuestionario pretende identificar los gustos de los estudiantes para articularlos al diseño de tareas relacionadas a su contexto.

Por ello, rogamos que de manera clara responda las siguientes preguntas.

Nombre: _____ Grado: _____

¿Cuáles son los juegos que más le gustan?

con la muñecas soy Luna
Pico
La Gafina ciega
Los patinos

¿Cuáles son sus lugares favoritos?

El Exito
El centro
al cine

¿Cuáles son sus galletas favoritas?

La Festival
La de Papa Noel
La oreo
La milo
La crakerias

Las respuestas en este cuestionario serán sumamente confidentes.

Muchas gracias por su participación

Anexo 4



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas


Tarea 1: Los juguetes de Camilo

Camilo tiene diferentes juguetes en cada bolsa, él desea saber cuántos juguetes tiene en total. Camilo realizó el siguiente dibujo

1) ¿Cuántos juguetes tiene Camilo en cada una de las bolsas?

A= 3	B=9	C=1

2) ¿Cuántos juguetes tiene en total Camilo? 13

3) Mencione las bolsas de menor cantidad de juguetes hasta la que tenga mayor cantidad de juguetes. C

a
B

4) Si Camilo tiene en cada una de las tres bolsas 6 juguetes ¿Cuántos juguetes tiene en total? $6+6+6=18$ juguetes

Anexo 5

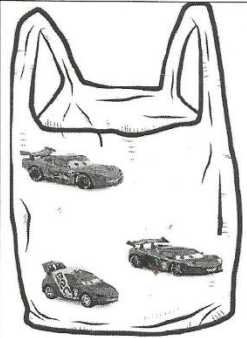
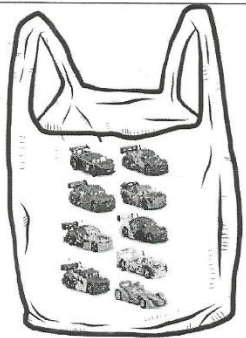
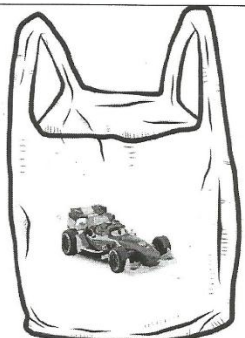


INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas


Tarea 1: Los juguetes de Camilo

Camilo tiene diferentes juguetes en cada bolsa, él desea saber cuántos juguetes tiene en total. Camilo realizó el siguiente dibujo

1) ¿Cuántos juguetes tiene Camilo en cada una de las bolsas?

		
A= 3	B= 9	C= 1

2) ¿Cuántos juguetes tiene en total Camilo? 13 Juguetes

3) Mencione las bolsas de menor cantidad de juguetes hasta la que tenga mayor cantidad de juguetes. C A B

4) Si Camilo tiene en cada una de las tres bolsas 6 juguetes ¿Cuántos juguetes tiene en total? $6+6+6=18$

Anexo 6



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 1: Los juguetes de Camilo

Camilo tiene diferentes juguetes en cada bolsa, él desea saber cuántos juguetes tiene en total. Camilo realizó el siguiente dibujo

1) ¿Cuántos juguetes tiene Camilo en cada una de las bolsas?

A= 3	B= 9	C= 1

2) ¿Cuántos juguetes tiene en total Camilo?

$$\begin{array}{r} 3 \\ + 9 \\ + 1 \\ \hline 13 \end{array}$$

13 juguetes

3) Mencione las bolsas de menor cantidad de juguetes hasta la que tenga mayor cantidad de juguetes.

C A y B

4) Si Camilo tiene en cada una de las tres bolsas 6 juguetes ¿Cuántos juguetes tiene en total?

6 6 6

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 6 \\ + 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

18 juguetes

Anexo 7



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 1: Los juguetes de Camilo

Camilo tiene diferentes juguetes en cada bolsa, él desea saber cuántos juguetes tiene en total. Camilo realizó el siguiente dibujo

1) ¿Cuántos juguetes tiene Camilo en cada una de las bolsas?

A= 3	B= 9	C= 1

2) ¿Cuántos juguetes tiene en total Camilo? $3+9+1=13$

3) Mencione las bolsas de menor cantidad de juguetes hasta la que tenga mayor cantidad de juguetes. C - A - B

4) Si Camilo tiene en cada una de las tres bolsas 6 juguetes ¿Cuántos juguetes tiene en total? $6+6+6=18$

Anexo 8

1)

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 800 \\
 + 800 \\
 + 400 \\
 \hline
 1200
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 1200 \\
 + 400 \\
 \hline
 1600
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 1600 \\
 + 400 \\
 \hline
 2000
 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r}
 400 \\
 400 \\
 400 \\
 \hline
 = 1200
 \end{array}$$

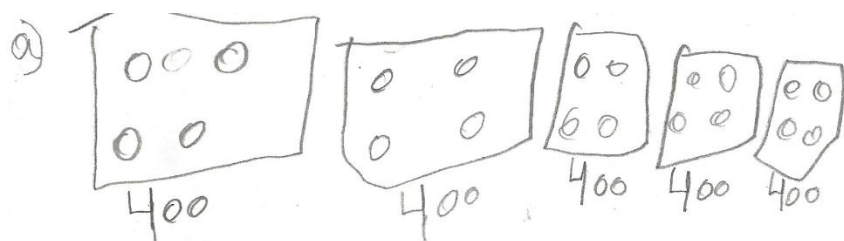
$$\begin{array}{r}
 600 \\
 600 \\
 600 \\
 600 \\
 600 \\
 \hline
 = 3000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + 600 \\
 600 \\
 \hline
 1200 \\
 + 600 \\
 \hline
 1800 \\
 + 600 \\
 \hline
 2400 \\
 + 600 \\
 \hline
 3000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3000 \\
 1200 \\
 \hline
 4200
 \end{array}$$

Naranja - vainilla
 Mango - vainilla
 Naranja - chocolate
 mango - chocolate
 Naranja - fresa
 mango - fresa

Anexo 9



$$400 + 400 + 400 + 400 + 400 = 2.000$$

b)

$$+ 400 + 400 + 400 = 1.200$$

$$600 + 600 + 600 + 600 + 600 = 3.000$$

$$+ \begin{array}{r} 1.200 \\ 3.000 \\ \hline 4.200 \end{array}$$

c)

Galleta - Jugo

fresa - Naranja

fresa - mango

chocolate - Naranja

chocolate - mango

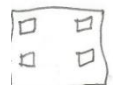
Vainilla - Naranja

Vainilla - mango

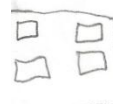
6 Combinaciones

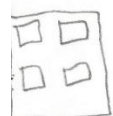
Anexo 10

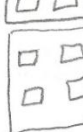
1) $4 + 4 = 8$
 400

 400

 400

 400

 $\frac{400}{12000}$

 2)  400
 400
 $\frac{400}{12000}$

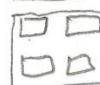
3000

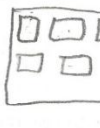
1200

4200
 600

 600

 600

 600

 $\frac{600}{3000}$

3) Freu = Naranja

chocolate = Mango

Vainilla = Naranja

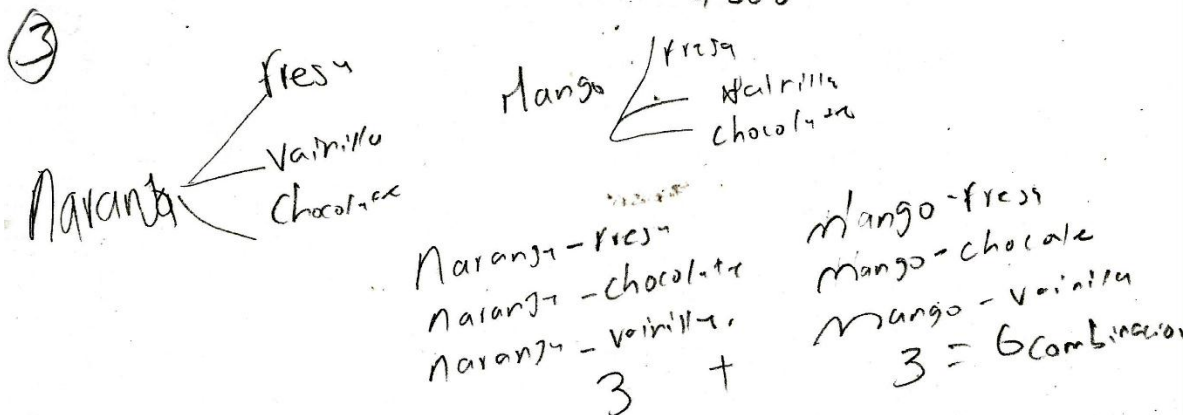
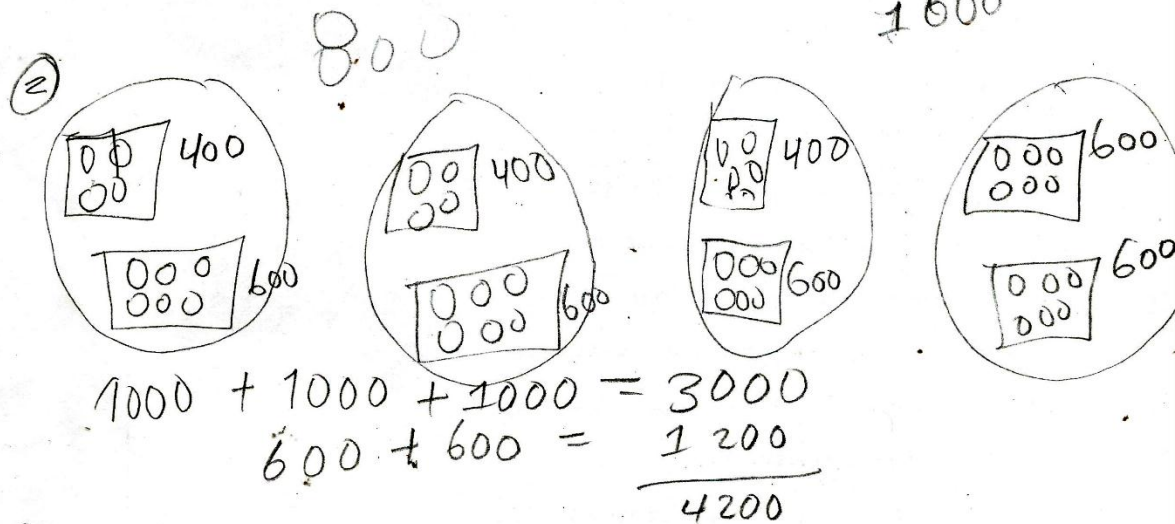
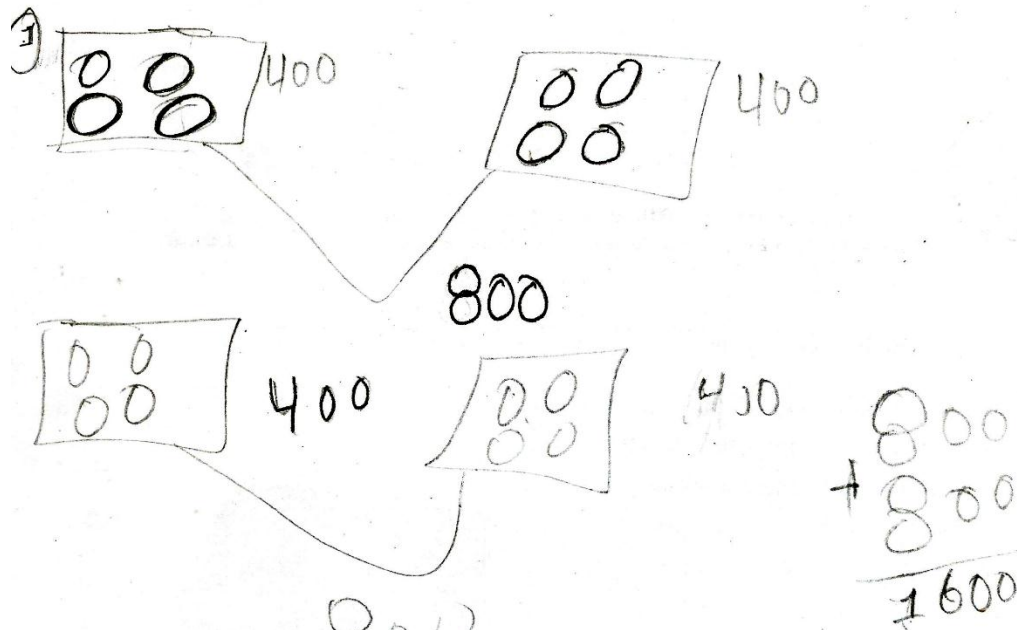
Fresa = Mango

Chocolate = Naranja

Vainilla = Mango

6 combinaciones

Anexo 11



Anexo 12

Grupo 1



Universidad
del Valle

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

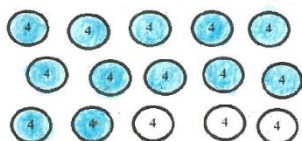


Instituto
de Educación
y Pedagogía

Tarea 3: Las escondidas

Los niños y niñas juegan a las escondidas en la escuela, Laura es la que busca a sus compañeros. Cada 3 minutos ella encuentran a 4 de sus compañeros.

- 1) Si Laura desea encontrar a sus 48 compañeros. Rellena los círculos necesarios para saber cuántos grupos de cuatro debe encontrar.



- 2) Daniel realizó el siguiente dibujo para llevar el tiempo que se está demorando Laura, pero le hicieron falta unos números ayúdale a Daniel a encontrarlos.



¿Cuántos minutos se demorará Laura en encontrarlos?

- 3) Complete la tabla que muestra el número de estudiantes encontrados por cada 3 minutos

Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados
3	4
6	8
9	12
12	16



- 4) ¿Es posible que Laura encuentre a 32 compañeros en 21 minutos? ¿Por qué?
5) ¿Cuánto tiempo se demorará Laura en encontrar a 24 compañeros?

Anexo 13

$$\begin{array}{r}
 +4 \rightarrow 1 \\
 \hline
 8 \rightarrow 2 \quad 12 \text{ grupo de 6 en contrar} \\
 +4 \\
 \hline
 12 \rightarrow 3 \\
 +4 \\
 \hline
 16 \rightarrow 4 \\
 +4 \\
 \hline
 20 \rightarrow 5 \\
 +4 \\
 \hline
 24 \rightarrow 6 \\
 +4 \\
 \hline
 28 \rightarrow 7 \\
 +4 \\
 \hline
 32 \rightarrow 8 \\
 +4 \\
 \hline
 36 \rightarrow 9 \\
 +4 \\
 \hline
 40 \rightarrow 10 \\
 +4 \\
 \hline
 44 \rightarrow 11 \\
 +4 \\
 \hline
 48 \rightarrow 12
 \end{array}$$

- 4) Si sumamos 8 veces 4 es igual a 32 entonces tenemos que multiplicar 8×3 que es igual a 24 entonces no porque lavarse demora 24 minutos en encontrarlos.
- 5) $6 \times 3 = 18$ minuto

2) (cuando pasa de un número al otro está sumando el tres,

$$(3) - (6) - (9) - (12) - (15) - (18) - (21) - (24) - (27) - (30) - (33) - (36)$$

$$\begin{array}{r}
 +9 \quad +24 \\
 \hline
 3 \quad 3 \\
 \hline
 12 \quad 27 \\
 +3 \quad +3 \\
 \hline
 15 \quad 30 \\
 +3 \quad +3 \\
 \hline
 18 \quad 33 \\
 +3 \quad +3 \\
 \hline
 21 \quad 36 \\
 +3 \quad + \\
 \hline
 24
 \end{array}$$

Anexo 14

Grupo 2



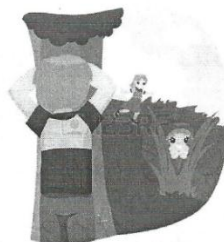
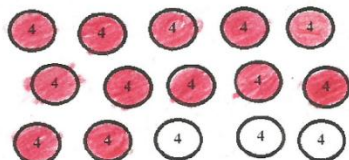
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



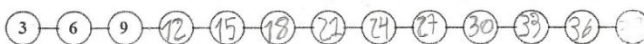
Tarea 3: Las escondidas

Los niños y niñas juegan a las escondidas en la escuela, Laura es la que busca a sus compañeros. Cada 3 minutos ella encuentran a 4 de sus compañeros.

- 1) Si Laura desea encontrar a sus 48 compañeros. Rellena los círculos necesarios para saber cuántos grupos de cuatro debe encontrar.



- 2) Daniel realizó el siguiente dibujo para llevar el tiempo que se está demorando Laura, pero le hicieron falta unos números ayúdale a Daniel a encontrarlos.



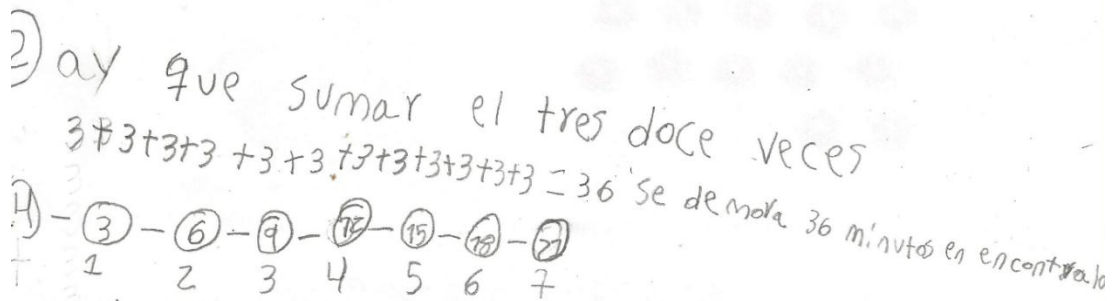
¿Cuántos minutos se demorará Laura en encontrarlos?

- 3) Complete la tabla que muestra el número de estudiantes encontrados por cada 3 minutos

Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados
3	4
6	8
9	12
12	16



- 4) ¿Es posible que Laura encuentre a 32 compañeros en 21 minutos? ¿Por qué?
5) ¿Cuánto tiempo se demorará Laura en encontrar a 24 compañeros?



$4+4+4+4+4+4+4=28$ No es posible que encuentren 9
los 32 compo =

los 32 compañeros en 21 minutos porque en 21 minutos encuentra a 22 compañeros

5) $3 \times 6 = 18$ minutos porque son seis grupos que deben encontrarse en tres minutos.

Anexo 16

Grupo 3

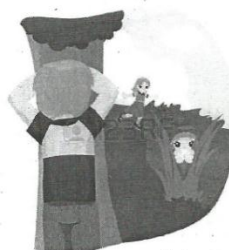
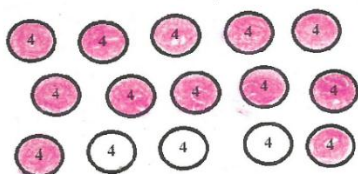


INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

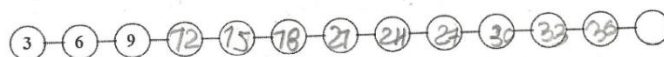
**Tarea 3: Las escondidas**

Los niños y niñas juegan a las escondidas en la escuela, Laura es la que busca a sus compañeros. Cada 3 minutos ella encuentran a 4 de sus compañeros.

- 1) Si Laura desea encontrar a sus 48 compañeros. Rellena los círculos necesarios para saber cuántos grupos de cuatro debe encontrar.



- 2) Daniel realizó el siguiente dibujo para llevar el tiempo que se está demorando Laura, pero le hicieron falta unos números ayúdale a Daniel a encontrarlos.



¿Cuántos minutos se demorará Laura en encontrarlos?

- 3) Complete la tabla que muestra el número de estudiantes encontrados por cada 3 minutos

Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados
3	4
6	8
9	12
12	16



- 4) ¿Es posible que Laura encuentre a 32 compañeros en 21 minutos? ¿Por qué?
- 5) ¿Cuánto tiempo se demorará Laura en encontrar a 24 compañeros?

Anexo 17

$$4 + 4 = 8 \dots$$

$$8 + 4 = 12 \dots$$

$$12 + 4 = 16 \dots$$

$$16 + 4 = 20 \dots$$

$$20 + 4 = 24 \dots$$

$$24 + 4 = 28 \dots$$

$$28 + 4 = 32 \dots$$

$$32 + 4 = 36 \dots$$

$$36 + 4 = 40 \dots$$

$$40 + 4 = 44 \dots$$

$$44 + 4 = 48 \dots$$

12

Va de tres en tres por que $3 + 3 = 6$ y $6 + 3 = 9$

12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36

E) ultimo no ser llena porque son 12 grupos

La primera fila es la tabla del 3 y la segunda la tabla del 4

32 son 8 grupos porque se demora 24 minutos

$$8 \times 3 = 24$$

$$6 \times 3 = 18 \text{ minutos}$$

Anexo 18

Grupo 4



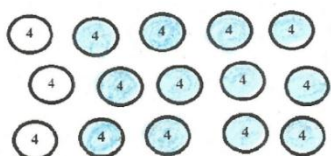
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 3: Las escondidas

Los niños y niñas juegan a las escondidas en la escuela, Laura es la que busca a sus compañeros. Cada 3 minutos ella encuentran a 4 de sus compañeros.

- 1) Si Laura desea encontrar a sus 48 compañeros. Rellena los círculos necesarios para saber cuántos grupos de cuatro debe encontrar.



- 2) Daniel realizó el siguiente dibujo para llevar el tiempo que se está demorando Laura, pero le hicieron falta unos números ayúdale a Daniel a encontrarlos.



¿Cuántos minutos se demorará Laura en encontrarlos?

- 3) Complete la tabla que muestra el número de estudiantes encontrados por cada 3 minutos

Tiempo(minutos)	Número de compañeros encontrados
3	4
6	8
9	12
12	16



- 4) ¿Es posible que Laura encuentre a 32 compañeros en 21 minutos? ¿Por qué?
5) ¿Cuánto tiempo se demorará Laura en encontrar a 24 compañeros?

Anexo 19

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 1 \\
 0
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 8 \\
 4 \\
 12
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 12 \\
 4 \\
 16
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 16 \\
 4 \\
 20
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 20 \\
 4 \\
 24
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 24 \\
 4 \\
 28
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 28 \\
 4 \\
 32
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 4 \\
 36
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 36 \\
 4 \\
 40
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 40 \\
 4 \\
 44
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 44 \\
 4 \\
 48
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \\
 3 \\
 6
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 6 \\
 3 \\
 9
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 9 \\
 3 \\
 12
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 12 \\
 3 \\
 15
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 15 \\
 3 \\
 18
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 18 \\
 3 \\
 21
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 21 \\
 3 \\
 24
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 24 \\
 3 \\
 27
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 27 \\
 3 \\
 30
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 30 \\
 3 \\
 33
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 33 \\
 3 \\
 36
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 36 \\
 3 \\
 39
 \end{array}$$

39 minutos

3)

tiempo	Número de compás
3	4
6	8
9	12
12	16
15	20
18	24
21	28
24	32
27	36
30	40
33	44
36	48

Se suma de tres en tres

Se suma de cuatro en cuatro

4) la tabla dice que en 21 minutos se encenderán a 28 no a 32

5) Se demoran 18 minutos.

Anexo 20

Grupo 1



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Tarea 4: Salida a cine

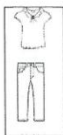
Sofía quiere ir al cine y aún no ha decidido que ponerse, ella desea realizar todas las combinaciones posibles para poder elegir una.

Sofía tiene:

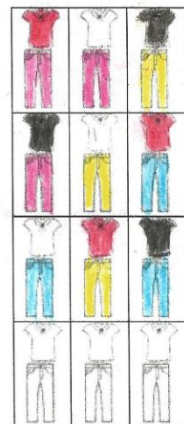
Pantalones de color: Fucsia, Azul y Amarillo

Blusas de color: Blanca, Negra y Roja

- 1) Realiza las combinaciones posibles coloreando cada uno sin repetir.
- 2) Si Sofia desea ponerse el pantalón de color azul ¿Es posible que tenga el mismo número de combinaciones que ponerse el de color amarillo?
- 3) ¿Cuántos rectángulos quedaron coloreados?



→ Rectángulo



- 4) ¿De cuantas formas se puede vestir Sofia con las tres blusas y los tres pantalones? ¿Por qué?
- 5) Si Sofia tuviera 5 pantalones y 4 blusas ¿De cuántas formas se puede vestir?



Anexo 21

2)

si por que tiene las misma opcion

3) 9

4) $3+3+3=9$ Formas5) $5+5+5+5=20$ Formas $5 \times 4 = 20$

Anexo 22

Grupo 2



Universidad
del Valle

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas



Instituto
de Educación
y Pedagogía

Tarea 4: Salida a cine

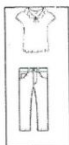
Sofía quiere ir al cine y aún no ha decidido que ponerse, ella desea realizar todas las combinaciones posibles para poder elegir una.

Sofía tiene:

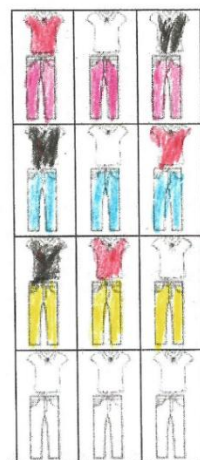
Pantalones de color: Fucsia, Azul y Amarillo

Blusas de color: Blanca, Negra y Roja

- 1) Realiza las combinaciones posibles coloreando cada uno sin repetir.
- 2) Si Sofía desea ponerse el pantalón de color azul ¿Es posible que tenga el mismo número de combinaciones que ponerse el de color amarillo?
- 3) ¿Cuántos rectángulos quedaron coloreados?



→ Rectángulo



- 4) ¿De cuántas formas se puede vestir Sofía con las tres blusas y los tres pantalones? ¿Por qué?
- 5) Si Sofía tuviera 5 pantalones y 4 blusas ¿De cuántas formas se puede vestir?



Anexo 23

2) Si porque tiene las mismas formas

3) a rectángulos coloreados

4) Por cada Pantalón tiene tres combinaciones o sea $3 + 3 + 3$ que es lo mismo que 3×3 que es 9

5) $5 \times 4 = 20$ 20 combinaciones hay.
 $5 + 5 + 5 + 5 = 20$

Anexo 24

Grupo 3



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

**Tarea 4: Salida a cine**

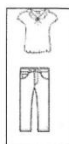
Sofía quiere ir al cine y aún no ha decidido que ponerse, ella desea realizar todas las combinaciones posibles para poder elegir una.

Sofía tiene:

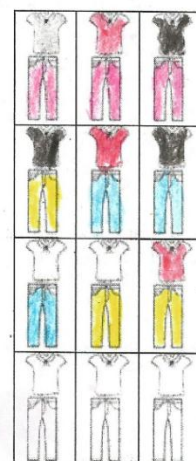
Pantalones de color: Fucsia, Azul y Amarillo

Blusas de color: Blanca, Negra y Roja

- 1) Realiza las combinaciones posibles coloreando cada uno sin repetir.
- 2) Si Sofía desea ponerse el pantalón de color azul ¿Es posible que tenga el mismo número de combinaciones que ponerse el de color amarillo?
- 3) ¿Cuántos rectángulos quedaron coloreados?



→ Rectángulo



- 4) ¿De cuántas formas se puede vestir Sofía con las tres blusas y los tres pantalones? ¿Por qué?
- 5) Si Sofía tuviera 5 pantalones y 4 blusas ¿De cuántas formas se puede vestir?



Anexo 25

2) si por que trenz combinaciones parecires

3) 9

4) si se ponet) panta bi kusuja tinetres combinasi

si se pone el azul tambien 3 y el amarillo tambien
res entonse $3 + 3 + 3 = 9$ $3 \times 3 = 9$

5) $5 + 5 + 5 + 5 = 20$ maneras

$$5 \times 4 = 20$$

Anexo 26

Grupo 4



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

**Tarea 4: Salida a cine**

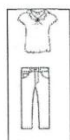
Sofía quiere ir al cine y aún no ha decidido que ponerse, ella desea realizar todas las combinaciones posibles para poder elegir una.

Sofía tiene:

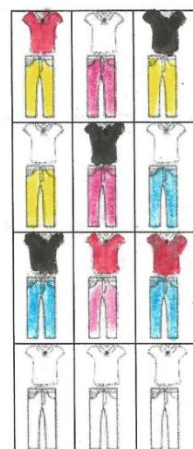
Pantalones de color: Fucsia, Azul y Amarillo

Blusas de color: Blanca, Negra y Roja

- 1) Realiza las combinaciones posibles coloreando cada uno sin repetir.
- 2) Si Sofía desea ponerse el pantalón de color azul ¿Es posible que tenga el mismo número de combinaciones que ponerse el de color amarillo?
- 3) ¿Cuántos rectángulos quedaron coloreados?



→ Rectángulo



- 4) ¿De cuantas formas se puede vestir Sofía con las tres blusas y los tres pantalones? ¿Por qué?
- 5) Si Sofía tuviera 5 pantalones y 4 blusas ¿De cuántas formas se puede vestir?



Anexo 27

② Si Porque tienen iguales bloques

③ a) nueve

④ 3 rectangulos $3 \times 3 = 9$
 3 rectangulos
 3 rectangulos

 9 rectangulo

⑤ 5
 + 5
 5 $5 \times 4 = 20$
 5
 5

20 maneras posibles que se pueda vestir

Anexo 28



Anexo 29

