



**LA ENSEÑANZA DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS EN
GRADO SEGUNDO DE EDUCACIÓN BÁSICA**

DENISE ROCÍO TETEYE BOTYAY

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2021**

**LA ENSEÑANZA DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS EN GRADO
SEGUNDO DE EDUCACIÓN BÁSICA**

**DENISE ROCÍO TETEEYE BOTYAY
1703563**

**DIRIGIDO POR:
MSC. DIANA XIMENA ORTIZ COLLAZOS**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2021**

Resumen Analítico	
Título:	La enseñanza de los poliedros regulares convexos en grado segundo de educación básica.
Autores:	Denise Rocío Teteye Botyay denise.teteye@correounivalle.edu.co
Tutora del trabajo de grado:	MSc. Diana Ximena Ortiz Collazos Diana.ximena.ortiz@correounivalle.edu.co
Evaluable:	David Benítez Diego Garzón
Corrección de estilo y normas técnicas:	Sebastián Aguirre Duque sadw621@gmail.com
Nombre del programa y sede:	Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática – Sede Cali
Palabras Clave:	Diseño de tareas, sólidos regulares convexos, geometría, enseñanza y orquestación instrumental.
Objetivos:	<i>Objetivo general</i>

	Caracterizar los procesos de enseñanza de los poliedros regulares convexos (el cubo y el tetraedro) en grado segundo de educación básica, desde la perspectiva de la orquestación instrumental en torno a un diseño de tareas que integra el uso de material concreto y GeoGebra 3D. <i>Objetivos específicos</i> Describir los pensamientos, procesos y contextos matemáticos asociados con la enseñanza del cubo y el tetraedro, desde una perspectiva de los lineamientos curriculares en matemáticas. Configurar un diseño de tareas, integrando material concreto y GeoGebra 3D, para la enseñanza del cubo y el tetraedro tomando como referente la orquestación instrumental. Analizar el desarrollo del tipo de orquestación instrumental que surge en la implementación del diseño de tareas sobre el cubo y el tetraedro.
Enfoque Metodológico:	Enfoque cualitativo
Estrategia Metodológica:	Estudio de casos

Resumen

En el presente informe, se caracteriza el proceso de enseñanza de acuerdo con la perspectiva de la orquestación instrumental, para dar cuenta del profesor como orquestador en la puesta en acto de una clase en la que se abordan a los sólidos geométricos, particularmente el cubo y el tetraedro, mediante la integración de artefactos manipulativos virtuales.

Se emplea la aproximación metodológica cualitativa y como estrategia metodológica se recurre al estudio de casos, para analizar lo que sucede en la implementación de una secuencia de tareas exploratorias, las cuales fueron realizadas por dos profesoras; una de ellas aplicó en una institución pública con un grupo regular en presencialidad y la otra en una institución privada con un grupo de ocho estudiantes en situación de alternancia educativa; estos aspectos incidieron en las tipologías de orquestación utilizadas.



FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Vicedecano de Investigaciones

ACTA DE SUSTENTACIÓN

Programa Académico: **Maestría en Educación - Énfasis Educación Matemática**

Código del programa: 7412

Resolución del programa: 11 118

Día	Mes	Año
22	10	2021

Título del Trabajo o Proyecto de Grado

"LA ENSEÑANZA DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS EN GRADO SEGUNDO DE EDUCACIÓN BÁSICA"

Se trata de:

Trabajo de grado de Maestría ☒

Director

DIANA XIMENA ORTIZ COLLAZOS

Evaluadores

Nombres y Apellidos

DAVID BENÍTEZ MOJICA

DIEGO GARZÓN CASTRO

Filiación Universitaria

UNIVERSIDAD DEL VALLE

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Estudiantes

Nombres y Apellidos

DENISE ROCÍO TETEYE BOTYAY

Código

1703563

E-mail

drteteye@gmail.com

Teléfonos de contacto

314-7578667

Evaluación

Aprobado

☒

Mérito

☐

Laureado

☐

Aprobado con recomendaciones

☐

No Aprobado

☐

Incompleto

☐

En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐

Primer Evaluador ☐

Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: dd mm aa

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firma

Prof. DIANA XIMENA ORTIZ COLLAZOS

Director del Trabajo o Proyecto de Grado

Prof. DAVID BENÍTEZ MOJICA

Jurado Evaluador

Prof. DIEGO GARZÓN CASTRO

Jurado Evaluador

Prof. HENRY GIOVANY CABRERA CASTILLO

Vicedecano de Investigaciones

Prof. MYRIAM B. VEGA RESTREPO

(En reemplazo del Vicedecano de Investigaciones)

AGRADECIMIENTOS

A mi tutora Diana Ximena Ortiz Collazos por sus orientaciones en las diferentes etapas del trabajo de investigación porque su experiencia me ha guiado oportunamente.

Igualmente, a mis compañeros de maestría y profesores por todos sus aportes y observaciones durante todo el proceso de formación.

Sinceros agradecimientos a mis padres Raúl Teteye Ugeche (Q.E.P.D) y María Fátima Botyay Carvajal por su dedicación y apoyo constante en mi formación académica.

A mis hermanos Yesid, Edwin y José, por sus palabras y enseñarme que con perseverancia se pueden lograr la metas que se anhelan.

A Gabriel y a mis hijos Luis y Sofía, por su comprensión y compañía durante todo este proceso.

A todos, muchas gracias.

Tabla de contenido

Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación	13
1.2 Justificación	17
1.2.1. <i>Antecedentes personales</i>	17
1.2.2. <i>Antecedentes investigativos</i>	19
1.3 Planteamiento de los objetivos.....	21
Capítulo 2. Marco teórico	22
2.1. Referente matemático	22
2.1.1. <i>El cubo y el tetraedro</i>	22
2.2. Referente curricular	25
2.3. Referente cognitivo	28
2.3.1. <i>La aproximación instrumental</i>	28
2.3.2 <i>Orquestación instrumental</i>	30
2.4. Referente didáctico	36
2.4.1. <i>Diseño de tareas</i>	36
El profesor y las tareas.....	38
2.4.2. <i>Materiales manipulativos</i>	40
2.4.3. <i>Software para geometría 3D - GeoGebra 3D</i>	42
2.4.4. <i>Visualización geométrica</i>	43

Capítulo 3. Consideraciones metodológicas	45
3.1. Enfoque metodológico	45
3.2. Estrategia metodológica: estudio de casos.....	46
3.3. Participantes.....	48
3.4. Diseño metodológico	49
3.4.1. <i>Recolección de información</i>	51
3.5. Estrategias e instrumentos utilizados para la recolección de la información.....	52
3.5.1. <i>Videograbaciones de las sesiones de clase</i>	52
3.5.2. <i>Rejilla de análisis elaborada desde la perspectiva de la orquestación</i>	53
3.6. El diseño de tareas que involucran material concreto y GeoGebra 3D	54
3.6.1. <i>Tarea 1: Calentando motores</i>	56
3.6.2. <i>Tarea 2: La caja de Juan</i>	57
3.6.3. <i>Tarea 3: Las propiedades de los sólidos geométricos</i>	59
Capítulo 4. Análisis y resultados	61
4.1. Implementación del diseño de tareas	61
4.1.1. <i>Caso profesora Diana</i>	61
Tarea 1: Calentando motores.	63
Tarea 2: La caja de Juan.....	65
Tarea 3: Las propiedades de los sólidos geométricos.	69
4.1.2 <i>Caso de la profesora Rocío</i>	71

Tarea 1: Calentando motores.	74
Tarea 2: La caja de Juan.....	77
Tarea 3: las propiedades de los sólidos geométricos.	79
4.1.3. Descripción de la práctica de enseñanza según la aproximación teórica de la orquestación instrumental	84
Capítulo 5. Conclusiones	91
Limitaciones y proyecciones.....	96
Referencias Bibliográficas	98

Lista de tablas

<i>Tabla 1</i>	24
<i>Tabla 2</i>	44
<i>Tabla 3</i>	53
<i>Tabla 4</i>	63
<i>Tabla 5</i>	64
<i>Tabla 6</i>	66
<i>Tabla 7</i>	67
<i>Tabla 8</i>	68
<i>Tabla 9</i>	71
<i>Tabla 10</i>	74
<i>Tabla 11</i>	75
<i>Tabla 12</i>	76
<i>Tabla 13</i>	78
<i>Tabla 14</i>	79
<i>Tabla 15</i>	82
<i>Tabla 16</i>	83

Lista de Figuras

<i>Figura 1</i>	42
<i>Figura 2</i>	50
<i>Figura 3</i>	62
<i>Figura 4</i>	66
<i>Figura 5</i>	73
<i>Figura 6</i>	80
<i>Figura 7</i>	82
<i>Figura 8</i>	86

Capítulo 1. Aspectos generales de la investigación

En este capítulo se presentan los elementos que permitieron estructurar formalmente la investigación, la naturaleza y alcances del problema. Para este se tuvieron en cuenta aquellas problemáticas y estudios que se han realizado con relación a la enseñanza de la geometría espacial en grado segundo de educación básica, los cuales permiten justificar y formular los objetivos que guían la investigación.

1.1. Presentación del problema

Desde hace varios años, la enseñanza de la geometría ha sido objeto de interés de algunos investigadores, entre ellos: Gutiérrez (1998), Guillén (1997; 2000; 2004; 2010), Guillén y Figueras (2005), González y Guillén (2006), González et al. (2008) y Camargo y Acosta (2012), quienes reconocen la importancia de plantear propuestas que se apoyen en la fundamentación didáctica y geométrica que favorezcan el razonamiento de los estudiantes.

Sin embargo, la revisión de los antecedentes en relación con los sólidos geométricos, permite reconocer que existen problemas relativos a la enseñanza, tales como: las carencias del profesor en el conocimiento matemático (Ribeiro et al., 2010), enseñanza por contenidos separados (Guillén y Figueras 2005) y enseñanza limitada a las actividades de papel, lápiz y pizarra (Pérez, 2009).

Ribeiro et al., (2010) analizan las implicaciones del conocimiento matemático para enseñar en la escuela primaria al abordar la noción de cubo. Los autores concluyen que las carencias en el conocimiento especializado del contenido, ponen en evidencia la imposibilidad del profesor para que su noción de cubo se despliegue en explicaciones y procedimientos

matemáticos para hacerlo enseñable, afectando el razonamiento que se pretende desarrollar por parte del educando.

Además, Guillén y Figueras (2005) logran corroborar que la enseñanza de la geometría de los sólidos y del plano es llevada a cabo como contenidos separados, sin incluir las conexiones entre los dos espacios geométricos; esto lo observaron en el ejercicio de algunos docentes mexicanos, quienes no tenían en cuenta las sugerencias dadas en el currículo para la enseñanza de los sólidos geométricos, el cual menciona que se debe partir de los objetos y de la vida real, esto no era claro para muchos de ellos. El estudio constató que impartían sus clases a partir de las definiciones y el reconocimiento de las formas para luego avanzar en la aritmetización con el estudio del volumen.

En cuanto a la enseñanza limitada a las actividades de papel, lápiz y pizarra, Pérez afirma que,

los docentes se preocupan principalmente de enseñar cuales son las figuras geométricas básicas, sin explicar detalladamente sus propiedades y muchos menos darles la oportunidad a los niños que atribuyen sentidos a estos conocimientos mediante la exploración de su entorno, pues solo usan el cuaderno y pizarrón como únicos recursos.

La escuela ha limitado la selección de los problemas geométricos: los del meso-espacio, cuya geometría es limitada al aula, al pupitre y sobre todo al cuaderno, donde el niño no tiene que moverse ni trasladarse; ya que solo es una geometría de papel y de tijeras.

(2009, p. 11)

Las anteriores dificultades muestran diversas situaciones, entre ellas que un alto porcentaje de profesores de primaria tienen una formación general en todas las áreas, algunos

tienen profundización en un área específica y de ellos unos pocos en el área de matemáticas; por tanto, desconocen los distintos significados de los temas de las matemáticas. En el caso de los sólidos geométricos, se reduce a actividades de conteo de aristas y vértices sin establecer otros tipos de relaciones que enriquezcan los razonamientos de los estudiantes.

De este modo, se resalta la importancia de desarrollar procesos de enseñanza en torno al pensamiento espacial que enriquezcan las prácticas del aula. En particular, los lineamientos curriculares en matemática (MEN, 1998), proponen que se trabaje a partir de un enfoque de geometría activa, que permita al estudiante encontrar las relaciones geométricas, mediante actividades exploratorias y representaciones del espacio, con actividades escolares desde un contexto matemático y cotidiano, que a su vez permitan el desarrollo de unos procesos, en este caso la comunicación y el razonamiento. En este sentido, Lappan y Winter (citados por MEN, 1998) advierten que una dificultad que tienen los estudiantes en el proceso de comprensión se da porque muchas de las experiencias que se ofrecen a los estudiantes aún son representaciones bidimensionales a través de libros, figuras o la televisión.

Asimismo, persisten en el aula experiencias de este tipo, los profesores todavía ofrecen actividades desde un plano bidimensional y que corresponden a un plano tridimensional. Un ejemplo de ello son los sólidos geométricos, los cuales se representan con un dibujo en el tablero que el estudiante debe reproducir en el cuaderno, esto no permite visualizar sus lados, la formas, el número de vértices, entre otros elementos a considerar; pero sin llegar a establecer relaciones geométricas. Algo similar sucede cuando se trabaja con los textos escolares, se logra observar los sólidos geométricos, pero en muchos casos los estudiantes no identifican sus características dado que no pueden arrastrar la figura desde diferentes vistas para analizar los elementos que la

componen y, así, dar respuestas a interrogantes como los siguientes: ¿Qué relación existe entre figuras bidimensionales y figuras tridimensionales? ¿Si un cuadrado es una figura regular, el cubo también lo es? Este tipo de discusiones son limitadas en el aula y una de las causas son los artefactos que se incorporan para dar cuenta de estos objetos matemáticos.

Por esto, es necesario pensar en propuestas de enseñanza orientadas al desarrollo del pensamiento espacial en los primeros grados de educación básica. En particular, es importante analizar una propuesta de enseñanza que plantea el diseño de una secuencia de tareas que integra material concreto (objetos del mundo real que tengan forma de cubo y tetraedro) y GeoGebra 3D, acompañado de procesos como la comunicación y el razonamiento con actividades exploratorias y representaciones, en las que se prevé avanzar con la visualización y el arrastre en aspectos como las relaciones geométricas (bidimensional y tridimensional), analizando relaciones o diferencias cuando la figura se amplía o disminuye.

Respecto a la implementación de la tecnología, se plantea, desde *Los lineamientos curriculares en matemáticas* (MEN, 1998), que su uso ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría. Asimismo, se ha mencionado que la implementación de los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) son una buena estrategia. De acuerdo con la propuesta de McClintock et al. (2002), se afirma que el uso del software facilita la resolución de los problemas al permitir a los estudiantes confirmar o rechazar con facilidad sus conjeturas. En consonancia con lo anterior, Sinclair y Robutti (2013) citaron investigaciones que dan cuenta de la potencialidad del arrastre, como reconocimiento de invariancias en las figuras geométricas. Por ello se considera necesario incluir los Ambientes de Geometría Dinámica como estrategias didácticas trascendentales que proporcionan interesantes ventajas en la enseñanza de la

geometría, pues con su uso el estudiante cuenta con herramientas que le permiten explorar y verificar propiedades de los sólidos geométricos.

Así pues, se tiene en consideración que al integrar Ambientes de Geometría Dinámica, cambia el rol del profesor ya que se convierte en un orquestador de la clase, como quien maneja una orquesta y prepara los instrumentos necesarios para la función. Por ello, esta propuesta de investigación se apoya del referente teórico de la Orquestación Instrumental de Guin y Trouche (2002), puesto que permite evidenciar la organización de la clase que realiza el profesor, los instrumentos que pone a disposición y las tipologías que emanan en la puesta en acto.

En este sentido, la pregunta orientadora es:

¿Qué caracteriza la enseñanza y el aprendizaje de los poliedros regulares convexos desde la perspectiva de la orquestación instrumental?

1.2 Justificación

1.2.1. Antecedentes personales

Como docente de educación básica primaria y formada en Etnoeducación, reflexioné en torno a mi quehacer como docente de los procesos de enseñanza y aprendizaje en las matemáticas y en particular de la geometría. Esto me lleva a reconocer la insuficiencia de los conceptos y nociones matemáticas, lo cual me conduce a indagar sobre la formación de maestros en el campo de las matemáticas.

Por ello, opté en inscribirme al programa de maestría en educación con énfasis en matemática, en el cual, a través de los cursos, entré en contacto con los enfoques teóricos para la enseñanza. Esta experiencia de formación que promueve el intercambio entre estudiantes y la

colaboración profesional de los profesores del programa de maestría, me permitieron confrontar mis conocimientos desde el ejercicio de talleres, exposiciones, el debate en las clases, la asistencia a simposios, sustentaciones de tesis y otros.

En este contacto surge un interés personal por la enseñanza de situaciones encaminadas al desarrollo del pensamiento espacial, que estuvo definida por la deficiencia o desconocimiento de los conceptos y nociones de este campo. Para el caso específico de los sólidos geométricos, evidenciaba poca claridad con los conocimientos matemáticos y del campo tan inmenso para abordar su enseñanza.

Este desconocimiento es la causa más relevante para que se mantengan estrategias de enseñanza que se apoyan en selecciones basadas en los textos, especialmente con pocas horas en la enseñanza de la geometría. En algunos textos de los primeros grados de educación primaria, el apartado de los sólidos geométricos tiene como principal estrategia el coloreado de las formas, la identificación de las formas por su nombre, imágenes de sólidos geométricos con sus nombres, imágenes de sólidos con los elementos que los caracterizan (vértices, aristas y caras), y marcar objetos que se parecen a un sólido. Esto lleva a que el profesor se limite a estos elementos básicos y no experimente con relación a las potencialidades que implica la enseñanza de los sólidos geométricos.

En relación con las potencialidades y la necesidad de procesos que lleven a la construcción del conocimiento de los sólidos geométricos, es una tarea poco fácil encontrar secuencias de tareas que apoyen al profesor en la construcción y apropiación de los saberes, que además consideren aspectos como la vinculación de materiales manipulativos y la tecnología.

De acuerdo con lo anterior, identifico que en estos procesos de enseñanza de los sólidos geométricos, es necesario partir del entorno del estudiante con el reconocimiento de las formas, vincular materiales que dinamicen y brinden oportunidades de comunicación de acuerdo a las posibilidades del desarrollo de los estudiantes; en una etapa posterior, con apoyo de la tecnología, establecer relaciones con los saberes previos, consolidar supuestos y confrontarlos en el aula, apoyados en las representaciones y así aproximarse al concepto matemático.

1.2.2. Antecedentes investigativos

En la etapa de formulación del problema, se realiza una revisión de documentos (artículos de investigación, trabajos de grado, libros y otros) en relación con la enseñanza de los sólidos geométricos, en particular en educación primaria.

De esta manera se describen a continuación:

a. Documentos que dan cuenta de la importancia de la enseñanza de los sólidos en educación básica primaria.

En este grupo se encuentran documentos relacionados con la enseñanza de los sólidos geométricos en primaria: *¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿y la investigación?* (Guillén, 2010); *La enseñanza de la geometría de los sólidos* (Guillén et al., 1992); *La geometría, su enseñanza y aprendizaje* (Camargo y Acosta, 2012); *Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en los niveles primaria y secundaria* (Gutiérrez y Jaime, 2012).

b. Documentos cuyo eje es la vinculación de la tecnología digital para la enseñanza de la geometría en la escuela.

En este grupo se encuentran los siguientes documentos: *Duo of Digital and Material Artefacts Dedicated to the Learning of Geometry at Primary School* (Voltolini, 2018); *The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem.* (Mackrell et al., 2013); *Frameworks for Analysing the Expertise That Underpins Successful Integration of Digital Technologies into Everyday Teaching Practice* (Ruthven, 2014).

c. Documentos que indican métodos y propuestas para la enseñanza de la geometría en la educación primaria.

En este grupo se encuentran los siguientes: *Métodos de enseñanza de cuerpos y figuras geométrica en tercer grado de básica primaria* (Orozco et al., 2013); *El uso de tres tipos de material didáctico en la solución de una situación problema con objetos tridimensionales* (Amador, 2013); *Algunos elementos del modelo de competencia inicial para enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en el magisterio* (González et al., 2008); *Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría en educación primaria* (Cruz, 2017).

Además, se identifica que las nuevas oportunidades para la enseñanza de los sólidos geométricos en la educación primaria, dependen del trabajo experimental y la integración de la tecnología en las actividades que lleva el profesor al aula.

Con el presente trabajo, se pretende caracterizar la enseñanza de los sólidos geométricos, particularmente el cubo y el tetraedro, para ello se contempla el uso de material concreto (objetos de su entorno que contengan estas forma de cubo y tetraedro); la idea de esto es partir de lo concreto para para llegar a lo abstracto en donde se pretende implementar un software diseñado

con finalidades didácticas, como lo es GeoGebra 3D, para reconocer las características de estos sólidos y las relaciones que se pueden establecer desde el plano bidimensional y tridimensional.

1.3 Planteamiento de los objetivos

De acuerdo al interrogante planteado, se determinaron los siguientes objetivos, los cuales permitieron orientar el desarrollo del trabajo.

Objetivo general

Caracterizar los procesos de enseñanza de los poliedros regulares convexos (el cubo y el tetraedro) en grado segundo de educación básica, desde la perspectiva de la orquestación instrumental en torno a un diseño de tareas que integra el uso de material concreto y GeoGebra 3D.

Objetivos específicos

- Describir los pensamientos, procesos y contextos matemáticos asociados con la enseñanza del cubo y el tetraedro, desde una perspectiva de los lineamientos curriculares en matemáticas.
- Configurar el diseño de tareas, integrando material concreto y GeoGebra 3D, para la enseñanza del cubo y el tetraedro tomando como referente la orquestación instrumental.
- Analizar el desarrollo del tipo de orquestación instrumental que surge en la implementación del diseño de tareas sobre el cubo y el tetraedro.

Capítulo 2. Marco teórico

En este capítulo, se presentan los elementos teóricos que fundamentan este trabajo de grado, organizados por referentes: matemáticos, curriculares, cognitivos y didácticos, que se tendrán en consideración para caracterizar un proceso de enseñanza de los poliedros regulares convexos: el cubo y el tetraedro.

2.1. Referente matemático

2.1.1. *El cubo y el tetraedro*

Para dar cuenta de este apartado, se deben considerar los elementos matemáticos que conciernen a los poliedros regulares convexos, particularmente el cubo y el tetraedro, para ello es necesario considerar algunos conceptos asociados a la geometría plana: punto, línea y plano; y de la geometría espacial: anchura, altura y profundidad.

En la geometría plana existen tres conceptos fundamentales: el punto, la línea y el plano, estos forman el espacio geométrico y es relativo a los elementos que se usan. El punto tiene dimensión 0, una línea se considera un espacio de dimensión 1 y el plano tiene dimensión 2. En cada espacio se asigna una dimensión de acuerdo a los movimientos necesarios para ubicar un punto cualquiera en el espacio a partir de un punto de referencia (Hernández, 2013).

De acuerdo a lo anterior, Hernández (2013) señala que en este espacio geométrico se encuentran los objetos bidimensionales como los polígonos, estos pueden ser de dos tipos: regulares, cuando todos sus ángulos tienen la misma amplitud y todos sus lados tienen la misma longitud; e irregulares, si no presentan estas características. Los polígonos regulares: el triángulo y el cuadrado los define Euclides en su libro I de la siguiente manera: “Definición 20. De los

triángulos, el equilátero es el que tiene los tres lados iguales”; “Definición 22 De los cuadriláteros, cuadrado es el que tiene los lados iguales y los ángulos rectos” (Joyce, 1996).

En ese orden de ideas, es necesario mencionar las propiedades geométricas y elementos que los caracterizan. Del triángulo equilátero, se tiene que es un polígono regular con lados de la misma longitud y ángulos con misma amplitud y que sus ángulos interiores suman 180° . Por su parte, el cuadrado presenta como características los lados iguales, cuatro ángulos rectos, paralelismo entre lados, ejes de simetría y que sus diagonales se cortan en el punto medio.

En relación con la geometría del espacio, esta trata de las propiedades y el estudio de las formas geométricas en el espacio tridimensional. Para poder ubicar un punto en el espacio son necesarios tres movimientos, en tres direcciones, con relación a un punto de referencia: la anchura, la altura y profundidad (Hernández, 2013). En este espacio se hayan los objetos que presentan tres dimensiones, como es el caso de los sólidos geométricos. Euclides define estas figuras de la siguiente manera: “un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad. Y el extremo de un sólido es la superficie” (Puertas, 1996, p. 199).

Entre otras características de los poliedros, Guillén (1997) menciona que se encuentran formados por polígonos regulares que se juntan de dos en dos y sus vértices son iguales. Sus partes son definidas, así: *caras*, son los polígonos que forman el poliedro; *aristas*, es cualquier lado común a dos caras; y *vértices*, los puntos donde se juntan más de dos caras.

Como parte esencial del diseño, se presenta el cubo y el tetraedro, sus definiciones y propiedades geométricas. Euclides en el libro XI realiza la siguiente definición para el cubo: “Definición 25: Un cubo es la figura sólida que está comprendida por seis cuadrados iguales” (Puertas, 1996, p. 203); para el tetraedro se incluye la definición de pirámide como “una figura

sólida limitada por planos, que se constituye desde un plano a un punto arbitrario” (Puertas, 1996, p. 201).

En relación con los poliedros regulares, se pueden ampliar las propiedades geométricas y los elementos que los caracterizan: en el caso del tetraedro, es un sólido platónico que tiene triángulos equiláteros por sus caras y tiene tres caras que se encuentran en cada vértice, este sólido tiene en total cuatro caras con triángulos equiláteros, cuatro vértices y seis aristas; del cubo, es un sólido platónico que tiene seis caras cuadradas y tiene tres caras que se encuentran en cada vértice, este sólido tiene en total seis caras cuadradas, ocho vértices y doce aristas. Los atributos del cubo y el tetraedro se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1.

ATRIBUTOS DEL CUBO Y EL TETRAEDRO.

Poliedro	Número de vértices	Número de aristas	Número de caras	Forma de las caras
Tetraedro	4	6	4	Triángulo equilátero
Hexaedro o cubo	8	12	6	Cuadrado

Fuente: Elaboración propia.

En otras palabras, el cubo y el tetraedro pertenecen a los poliedros regulares, también llamados sólidos platónicos, que tienen caras que son polígonos regulares iguales, con el mismo número de caras reunidas por cada vértice.

Se destaca que estos elementos asociados a las figuras tridimensionales, se considerarán para el diseño de las tareas con las cuales se tiene como expectativa de aprendizaje que los estudiantes puedan avanzar en establecer relaciones entre figuras bidimensionales y tridimensionales, a partir de la descripción de sus elementos; además, avanzar en el desarrollo del pensamiento espacial a través del manejo de conceptos geométricos y la visualización.

2.2. Referente curricular

De acuerdo con los documentos que estructuran el proceso formativo de los estudiantes en el sistema educativo colombiano, *Lineamientos curriculares* (MEN, 1998), *Estándares Básicos de Competencia* (MEN, 2006) y los *Derechos Básicos de Aprendizaje* (MEN, 2017), en la geometría de la escuela primaria todos los estudiantes deben tener oportunidades para *ser matemáticamente competentes*.

En relación con la enseñanza de la geometría, esta debe centrarse en aquellos procesos específicos que desarrollan el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el cual es concebido como un conjunto de procesos cognitivos en los que se construyen y se manipulan representaciones mentales de los objetos del espacio, contemplando las acciones del estudiante y las relaciones espaciales (MEN, 1998).

La particularidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas exige articular actividades matemáticas como la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, el razonamiento, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (MEN, 1998). Para la realización de este trabajo se hará énfasis en la comunicación y el razonamiento.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) plantea que la comunicación juega un papel fundamental al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los estudiantes tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. Cuando los estudiantes ven diferentes representaciones, son capaces de describir muchas situaciones distintas; empiezan a comprender la potencia de las matemáticas cuando se dan cuenta de que hay formas de representar un problema que son más útiles que otras; y empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas.

Ahora bien, en cuanto al proceso de razonamiento, este debe estar presente en todo el trabajo matemático de los estudiantes ya que permite dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones, justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas y utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar (MEN, 1998).

Por otro lado, de acuerdo con Duval (2001), para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría se articulan la visualización geométrica y el lenguaje, en donde se involucran tres tipos de procesos cognitivos para su desarrollo: visualización, con referencia a las representaciones espaciales; la construcción, que alude a la construcción de configuraciones mediadas por instrumentos; y el razonamiento, relacionado con los procesos discursivos. La visualización, trata de las representaciones espaciales que permiten la ilustración de

proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, vistazos sinópticos sobre ellas y verificaciones subjetivas.

Por ello, en este trabajo se consideran los conocimientos matemáticos en relación con el pensamiento espacial para el área de matemáticas en el ciclo de primero a tercero de primaria. A partir de los *Estándares Básicos de Competencia Matemática* se tuvo en consideración las siguientes competencias: a) “Describo cuerpos o figuras tridimensionales” y b) “Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales” (MEN, 2006, p.80); y de los *Derechos Básicos de Aprendizaje* se consideró el eje de progresión de las formas y sus relaciones con los siguientes derechos: a) “Comparar objetos del entorno y establece semejanzas y diferencias empleando características geométricas de las formas bidimensionales y tridimensionales (curvo o recto, abierto o cerrado, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros)” (MEN, 2016, p. 11); y b) “Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales” (MEN, 2017, p. 18). En particular, se enfocará en la enseñanza de los poliedros regulares convexos, cubo y tetraedro, con el fin de involucrar estrategias que permitan avanzar en el desarrollo del pensamiento espacial a través de procesos de razonamiento, comunicación y visualización.

Junto a los referentes curriculares para la enseñanza de las matemáticas, se consideran las aproximaciones teóricas relativas a los aspectos didácticos para la implementación de las actividades propuestas en el trabajo de investigación. Aquellas se analizan en la siguiente sección.

2.3. Referente cognitivo

En esta sección se aborda la aproximación instrumental y se exponen los aportes que se pueden integrar para la enseñanza de la geometría; asimismo, se tendrá en cuenta la orquestación instrumental debido a que posteriormente se desea analizar la implementación de un diseño de tareas.

2.3.1. *La aproximación instrumental*

De acuerdo con los planteamientos de Trouche (2004), la *aproximación instrumental* es un enfoque teórico que genera un aporte a la didáctica de las matemáticas, puesto que este referente introduce los elementos a considerar en una implementación en el aula. La *aproximación instrumental* resulta importante para la presente investigación puesto que esta integra un sistema de instrumentos en los cuales se resalta un *ambiente de geometría dinámica* (AGD), como lo es GeoGebra 3D, donde se busca hacer evidente los elementos abstractos de los sólidos geométricos, aportando de manera significativa a la comprensión del objeto matemático. Adicionalmente, esta teoría será la encargada de complementar otro de los referentes teóricos que aborda esta propuesta, tal como lo es la *orquestación instrumental* (Drijvers et al., 2010; Drijvers et al., 2014) la cual se desarrollará más adelante.

Así pues, es importante delimitar a qué se hace referencia con la palabra *artefacto*. De acuerdo con los planteamientos de Trouche (2004), artefacto se entiende como un dispositivo material o simbólico utilizado por el sujeto en la actividad instrumentada. Para este trabajo los artefactos a usar son las tabletas, el software GeoGebra 3D, el material manipulativo y los objetos que están en su entorno. Este referente menciona la relación que emerge del artefacto

hacia el instrumento. El instrumento presenta una entidad mixta constituida por el sujeto, pero al mismo tiempo relacionado con el artefacto.

En la mediación instrumental se estudia el impacto de los instrumentos cuando media una construcción de conocimiento. A partir de esto, interesa indagar por la mediación instrumental que se genera con la incorporación de un software GeoGebra 3D.

En relación con la acción mediada del sujeto, Santacruz plantea que:

La acción mediada del sujeto requiere previamente la construcción o desarrollo de instrumentos por parte del sujeto, el cual no le está dado desde el principio y es éste el que lo elabora en un proceso que es conocido como Génesis Instrumental, el cual se construye a partir de un proceso doble de instrumentación e instrumentalización. (2009, p. 3)

En cuanto a la *génesis* instrumental, la instrumentalización está dirigida hacia el artefacto, su funcionamiento, sus propiedades, etc. Y la instrumentación está relacionada con el sujeto, con la emergencia y evolución de los esquemas sociales de utilización y de acción instrumentada (Santacruz, 2009).

La instrumentación corresponde a los aspectos del proceso de génesis que se orientan al sujeto, las cualidades y restricciones de la herramienta influyen las estrategias de resolución de problemas del estudiante y las concepciones emergentes (Santacruz, 2009).

De acuerdo con lo anterior, se considera la influencia de los instrumentos en el aprendizaje y en los modos de construcción, así como también el papel del profesor cuando se

incorporan instrumentos a la clase, de este modo la mediación instrumental genera un impacto en el contrato didáctico, el cual hace parte de una mirada didáctica del aprendizaje.

Para este trabajo es de interés analizar los procesos de enseñanza, los cuales, a través de la introducción de nuevos artefactos a la clase, cambian de manera directa los sistemas de instrumentos ya construidos.

2.3.2 Orquestación instrumental

La primera noción de *orquestación instrumental* fue definida como un arreglo sistemático de un agente intencional, que surgió como un modelado del proceso de enseñanza en un entorno que involucra artefactos y humanos. En esta primera noción se presentan dos elementos principales: *configuración didáctica* y *modos de explotación* (Guin y Trouche, 2002).

La noción de *orquestación instrumental* trata acerca de cómo los maestros integran la tecnología para la enseñanza de las matemáticas al interior de un proceso que requiere una adaptación y una apropiación de herramientas digitales para el aprendizaje, con el fin de construir conocimiento mediante el proceso de génesis instrumental, es decir, nuevas técnicas que el profesor reorganiza y adapta para las necesidades del aula que integra tecnología (Trouche, 2004).

Para resaltar que la *orquestación instrumental* es algo más que una organización intencional y sistemática que un profesor prepara de antemano, Drijvers et al. (2010) agregaron la *actuación didáctica*, la *orquestación instrumental* es definida como la organización intencional y sistemática del profesor cuando integra diversos instrumentos a sus clases, con el fin de construir conocimiento mediante el proceso de la *génesis* instrumental.

El conjunto de tres elementos que tiene la *orquestración instrumental*, dirige las génesis instrumentales de los estudiantes: una *configuración didáctica*, se refiere a la organización de los artefactos en un ambiente de enseñanza; un *modo de explotación*, es cómo el profesor hace uso de la configuración didáctica para el beneficio de los propósitos de la enseñanza, además de prever los posibles desarrollos de la interacción: artefacto - estudiantes; y una *actuación didáctica* que se refiere a la realización de la enseñanza propuesta en la *configuración didáctica*, aparte de eso involucra decisiones del profesor en el transcurso de la clase y otros aspectos inesperados de la tarea matemática o la herramienta tecnológica (Drijvers et al., 2010).

Por otra parte, se exponen las dimensiones local y global, *la dimensión local* trata la configuración instrumental apropiada para un contexto didáctico específico, adaptado a un grupo y unos propósitos; mientras que, *la dimensión global* trata la configuración instrumental que involucra todas las estrategias y métodos de enseñanza que utiliza el profesor en el salón de clase. En este trabajo se centrará la atención en *la dimensión local*.

Se describen diferentes tipos de orquestración a partir de los aportes de Drijvers et al. (2010) y Drijvers et al. (2014), en los cuales se identifican la *configuración didáctica*, un *modo de explotación* y una *actuación didáctica* para cada caso. Estos permitirán describir la práctica de enseñanza y su relación con los instrumentos involucrados en la implementación.

Drijvers et al. (2010) señalan en sus estudios que identificaron seis tipos de orquestración para la enseñanza de toda la clase, estos se denominan: *technical-demo*, *explain-the-screen*, *link-screen-board*, *discuss-the screen*, *spot-and-show*, *Sherpa at work*. Los tres primeros tipos de orquestración están centrados en el papel que desempeña el profesor, los tres últimos tienen más

participación los estudiantes; y un tipo de orquestación individual o en parejas denominado *work and walk*. A continuación, se amplían los tipos de orquestación.

La orquestación *technical demo*, se refiere a la demostración de herramientas técnicas por parte del profesor, es decir, cuando este instruye en el uso de las herramientas del applet. Se caracteriza porque la *configuración didáctica* incluye el acceso al applet y al Entorno Digital de Matemáticas (EDM), las cuales permiten facilidades para proyectar la pantalla del computador para toda la clase, además, la distribución de los estudiantes en el aula, les permite seguir la demostración. Como *modo de explotación* los profesores pueden realizar demostraciones del uso técnico de algunas herramientas para una situación particular o utilizar el trabajo de los estudiantes para mostrar nuevas técnicas. La demostración presentada está instrumentada por las herramientas técnicas, por ello es específica con limitaciones y oportunidades.

La orquestación *explain-the-screen*, se refiere a la explicación de toda la clase, por parte del profesor, guiada por lo que sucede en la pantalla del computador. Esta explicación implica contenido matemático. Las *configuraciones didácticas* pueden ser similares a las *technical demo*. Como *modos de explotación*, los maestros pueden tomar el trabajo de los estudiantes como punto de partida para la explicación, o comenzar con su propia solución para una tarea.

En la orquestación *link-screen-board*, el profesor destaca la relación entre lo que sucede en el entorno tecnológico y cómo se representa en las matemáticas convencionales del papel, el libro y la pizarra. Además de las instalaciones de acceso y proyección de un EDM, una *configuración didáctica* incluye un tablero y un entorno de aula para que tanto la pantalla como el tablero sean visibles. De igual manera que en las anteriores orquestaciones, los *modos de*

explotación de los maestros pueden tomar el trabajo de los estudiantes como un punto de partida o comenzar con una tarea o situación problemática que ellos mismos establezcan.

La orquestación *discuss-the-screen*, se refiere a una discusión de toda la clase acerca de lo que sucede en la pantalla del computador. Una *configuración didáctica* incluye el acceso de un EDM y las instalaciones de proyección, preferiblemente el acceso al trabajo de los estudiantes y un entorno de aula favorable para la discusión. Como *modos de explotación*, el trabajo de los estudiantes, una tarea, un problema o un enfoque establecido por el maestro puede servir como punto de partida para las reacciones de los estudiantes. La ventaja de la discusión en un entorno tecnológico es que las sugerencias para diferentes representaciones y técnicas, tal como surgen en el debate, se pueden probar fácilmente con retroalimentación, rápida y dinámica, de los resultados obtenidos.

En la orquestación *spot-and-show*, el razonamiento de los estudiantes se pone en primer lugar a través de la identificación de su trabajo durante la realización de la lección y su uso en la argumentación en el salón de clases. En este tipo de orquestación la *configuración didáctica* incluye el acceso al EDM durante la realización de la lección. Como *modo de explotación*, los maestros pueden hacer que los estudiantes muestren y expliquen su razonamiento, asimismo, los demás estudiantes y el profesor pueden realizar observaciones al trabajo expuesto por el estudiante.

En la orquestación *Sherpa at work*, un estudiante llamado Sherpa utiliza la tecnología para presentar su trabajo o para llevar a cabo acciones que el profesor solicita, estas sirven como referencia o guía permitiendo la comparación de diferentes técnicas instrumentadas y dando al maestro información acerca de los esquemas de utilización. Las *configuraciones didácticas*

usadas son similares a las del tipo de orquestación *discuss-the-screen*, el entorno del aula debe ser tal que el estudiante Sherpa pueda tener el control del uso de la tecnología, además todos los estudiantes deben ser capaces de seguir las acciones realizadas por el estudiante Sherpa y las acciones solicitadas por el profesor. Como *modos de explotación*, los profesores pueden tener trabajo presentado o explicado por el Sherpa-alumno o pueden plantear preguntas al estudiante Sherpa y pedirle que lleve a cabo acciones específicas en el entorno tecnológico.

La orquestación *Work and walk*, se caracteriza porque los estudiantes trabajan individualmente o por parejas y el profesor camina por el aula, responde a las preguntas de los estudiantes y monitorea su progreso. La *configuración didáctica* consiste, básicamente, en que los estudiantes están organizados para el trabajo frente a los dispositivos tecnológicos y en algunas ocasiones puede haber disponible un proyector o un tablero. El *modo de explotación* se caracteriza por un trabajo individual o por parejas de los estudiantes. El profesor para responder a las preguntas de los estudiantes puede usar el proyector o el tablero, generando una interacción individual con el estudiante que hace la pregunta.

A continuación, se describen los diferentes tipos de orquestación de acuerdo con los aportes de Drijvers et al. (2014), *guide-and-explain*, *board-instruction* y la orquestación individual *Work and walk* con las cinco suborquestaciones identificadas.

La orquestación de *guide- and-explain*, incluye una *configuración didáctica* de acceso a la tecnología y las instalaciones de proyección, preferiblemente acceso al trabajo de los estudiantes y un entorno de clase propicio para que los estudiantes sigan la explicación. El *modo de explotación* se extiende a explicar y discutir lo que sucede en la pantalla; basado en las

proyecciones de la pantalla, el profesor explica y genera preguntas limitadas, por tanto, las interacciones que se dan no se consideran una discusión abierta (Drijvers et al., 2014).

La orquestación de *board-instruction*, se refiere a la instrucción tradicional de un profesor a toda la clase frente al tablero. El tablero puede ser de diferentes materiales, pero es usado únicamente para escribir y no se hace ninguna conexión con el uso de la tecnología digital. La *configuración didáctica* es la clásica del profesor al frente del aula trabajando con el tablero. Son posibles diferentes *modos de explotación*, con distintos grados de participación e interacción de los alumnos (Drijvers et al., 2014).

En relación con la orquestación *Work and walk*, se identificaron cinco suborquestaciones, todas comparten la *configuración didáctica*, pero difieren en los *modos de explotación*.

Individual-technical-support, en esta orquestación el profesor apoya al estudiante en problemas técnicos e incluye un soporte para el trabajo de la clase, tales como dificultades de inicio de sesión, errores de software o problemas de hardware.

Individual-technical-demo, en esta orquestación el profesor usa la demostración individual de técnicas para el uso de la tecnología digital, con el fin de evitar obstáculos por parte de los estudiantes al utilizar el entorno.

Individual-guide-and-explain, la explotación de esta orquestación implica intercambios individuales entre el profesor y algunos estudiantes. El profesor brinda orientación e instrucción, explica técnicas y métodos relacionados con lo que sucede en la pantalla, hace preguntas para que los estudiantes revisen sus trabajos y resultados.

Individual-link-screen-book, en esta orquestación la interacción es profesor - estudiante, el profesor utiliza la configuración didáctica para combinar representaciones y técnicas

adquiridas en un entorno digital con las contrapartes convencionales papel, lápiz y el libro. Su propósito es vincular las matemáticas de la pantalla con las matemáticas a partir del papel y lápiz. Como requisito adicional para la *configuración didáctica*, debe permitir el cambio entre la pantalla, el cuaderno y el libro de texto.

Individual-discuss-the-screen, en esta orquestación la actividad en la pantalla conduce a una discusión entre el profesor y el estudiante. Esta discusión puede iniciar con preguntas del estudiante o explicaciones del profesor. El objetivo de la discusión no es claro y el estudiante es una gran influencia en la dirección y el contenido de la charla, por ejemplo, explicando su problema.

Las orquestaciones mencionadas permitirán examinar las herramientas que el profesor elige, cómo va a realizar la *configuración didáctica* y los *modos de explotación* que va elegir para guiar el trabajo de los estudiantes.

2.4. Referente didáctico

El siguiente apartado precisa en aquellos aspectos didácticos que se consideraron para fundamentar el diseño de tareas para la enseñanza y los artefactos involucrados: materiales concretos y un AGD. Además, se consideran los aportes de Duval (2016) para la enseñanza de geometría.

2.4.1. Diseño de tareas

En la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se han realizado estudios específicos al papel de las tareas. En el año 2013, la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) presentó una variedad de conceptos relacionados con las palabras *tarea*, *secuencia de tareas* y *propuesta de tareas*; además, se presentó una experiencia llamada *Tareas ricas*, las

cuales involucran materiales o entornos diseñados para promover matemáticas complejas (Margolinas, 2013, p. 9).

Dentro del estudio ICMI (Margolinas, 2013), se establecen las definiciones para el diseño de tareas, la tarea o las secuencias de tareas, las cuales se consideran como un conjunto que se involucra para la enseñanza. A partir de estas se toma esta postura:

tarea como una declaración de una situación a resolver por los alumnos. Se presenta a los estudiantes tanto por escrito como forma oral, junto con indicaciones sobre el tiempo disponible para trabajar en la tarea, el tipo de producción de los estudiantes esperada, y el modo de organización del trabajo propuesto. Una tarea puede corresponder a una sola pregunta o a una secuencia estructurada de preguntas relacionadas (y posiblemente subpreguntas). (Da Ponte et al., 2013, p. 495)

La **secuencia de tareas** se considera con el objetivo de enseñar todo un campo conceptual. Las tareas anteriores en una secuencia deben proporcionar experiencias que faciliten al estudiante la solución de tareas posteriores, permitiendo participar en matemáticas más sofisticadas; en otras, las tareas anteriores deben proporcionar imágenes o experiencias que permitan tareas posteriores que deben llevarse a cabo con comprensión de situaciones (Margolinas, 2013).

En este ámbito de las tareas, definieron las **tareas exploratorias** como aquellas tareas que pueden llevar a los estudiantes a la actividad exploratoria, a realizar actividades significativas y a aprender nuevas matemáticas. Además, mencionan que los estudiantes tienen que interpretar situaciones en términos matemáticos, formular preguntas matemáticas, justificar de manera inductiva, hacer conjeturas y generalizaciones. Es decir, con estas tareas exploratorias se

construyen los cimientos para que el estudiante empiece a formalizar ideas, proporcionar justificaciones y afirmaciones basadas en hechos y propiedades conocidas, supuestos y definiciones (Da Ponte et al., 2013).

El profesor y las tareas.

Aquí se plantea que el papel de las tareas en la enseñanza de las matemáticas es clave y exigente para el profesor, pues la selección de tareas implica para el docente comprensión de las matemáticas involucradas, así como un conocimiento profundo sobre habilidades e intereses de los estudiantes. Los profesores deben saber cómo introducir tales tareas, negociar los significados que son críticos para el trabajo a realizar, pero sin proporcionar demasiadas pistas para resolver la tarea por los estudiantes (Da Ponte et al., 2013).

Otro rasgo de las tareas exploratorias, implica que los profesores apoyen el trabajo autónomo de los estudiantes, manteniendo un interés por la tarea a desarrollar y conducir discusiones productivas durante las cuales las ideas matemáticas son presentadas, confrontadas y aclaradas. En estas discusiones, los profesores deben proporcionar oportunidades para que todos los estudiantes puedan intervenir, mediante la estimulación de momentos de controversia y argumentación, así como momentos de sistematización y formalización de ideas matemáticas. De acuerdo con lo anterior, con el propósito de que las actividades exploratorias sean fluidas, se producen tareas o elementos que incluyen preguntas (Da Ponte et al., 2013).

En las tareas exploratorias se consideran cuatro **criterios de diseño**: primero, los objetivos apoyan el desarrollo de nuevas representaciones, conceptos y estrategias, otras pretenden llevar a los estudiantes a movilizar y aclarar las nociones matemáticas como a establecer relaciones entre

diferentes ideas; segundo, la estructura varía de lo simple a lo complejo con diferentes tipos de preguntas; tercero, la organización de las tareas se plantea en una secuencia que se lleva a cabo en varias clases para promover la comprensión de una idea matemática o tema por parte del estudiante, es decir, deben ser tareas atractivas para la mayoría de los estudiantes y deben conducir a la formulación de nociones matemáticas; cuarto, las tareas exploratorias tienen diferentes tipos de contexto, algunas pueden partir de un contexto matemático apoyado en los números o las figuras geométricas o de un contexto cercano a los estudiantes (Da Ponte et al., 2013).

En este trabajo se pretende utilizar las tareas con fines pedagógicos, generando una secuencia de tareas con la cual se promueva la enseñanza de los sólidos geométricos, particularmente el cubo y el tetraedro, en una transición de lo simple a lo complejo. Lo simple se entiende como aquellas tareas que parten de los objetos que están en su entorno, generando discusiones que emanen de sus conocimientos previos. Lo anterior, con la finalidad de abordar nuevas tareas a través del uso de GeoGebra 3D y poder formalizar ideas matemáticas relacionados con los sólidos geométricos mencionados.

En consecuencia, el diseño de tareas tendrá unos objetivos de aprendizaje que surgen a partir del estándar de competencia relacionado con los sólidos geométricos del ciclo de primero a tercero de primaria, con una secuencia de tareas estructurada desde lo simple a lo complejo, guiada por diferentes tipos de preguntas y actividades matemáticas que permitan procesos de comunicación y razonamiento, en las que se introducen diferentes contextos (exploración del entorno, manipulación de objetos y GeoGebra 3D).

2.4.2. Materiales manipulativos

Investigadores y profesores están de acuerdo en recomendar el uso de materiales manipulativos tanto por su función motivadora como, también, el hecho de obtener las imágenes mentales a partir de los modelos que se construyen o modelos contruidos (Barrantes y Barrantes, 2017). De esta manera, se evidencia que los profesores deben plantear unas tares más activas en el aula.

Asimismo, Navarrete (2017) en el trabajo de grado *La importancia de los materiales didácticas en el aprendizaje de las matemáticas*, afirma que la educación es cada vez más consciente de la importancia y la necesidad que tiene el juego, la manipulación y la interacción activa de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Por ello, con la finalidad de generar experiencias desde el entorno, adecuadas a la edad de los estudiantes, con los materiales manipulativos, se pretende generar interacciones entre el material y los estudiantes que permitan el descubrimiento y, de ser posible, una enseñanza más significativa y un aprendizaje más sólido. En particular, en la enseñanza de la geometría, Alsina et al. (1999) afirman que el material didáctico: “juega un papel fundamental en la enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Su correcta utilización constituye una importante baza en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos geométricos ya que posibilita una enseñanza activa de acuerdo con la evolución intelectual del alumno” (p. 199).

Además, los manipuladores matemáticos fueron definidos por Bartolini y Martignone (2014) en la *Enciclopedia de Matemáticas* como:

artefactos utilizados en la educación matemática: son manejados por los estudiantes con el fin de explorar, adquirir o investigar conceptos o procesos matemáticos y realizar actividades de resolución de problemas basándose en la percepción (visual, táctil o, más generalmente, evidencia sensorial. (p. 365)

También, mencionan que hay varios tipos de manipulativos uno, por la interacción con el usuario y otro por el origen del manipulativo, estos se describen a continuación:

Los *manipuladores concretos* son artefactos físicos que los estudiantes pueden manejar de manera concreta y ofrecen un conjunto amplio y profundo de experiencia sensorial.

Los *manipuladores virtuales* son artefactos digitales que se asemejan a objetos físicos y pueden manipularse, generalmente con un mouse, de manera similar a sus contrapartes auténticas y concretas.

Los *manipuladores histórico - culturales* son artefactos concretos que se han creado en la larga historia de las matemáticas para explorar o resolver problemas específicos, tanto dentro como fuera de las matemáticas.

Los *manipuladores “artificiales”* son artefactos que han sido diseñados por educadores con objetivos educativos específicos.

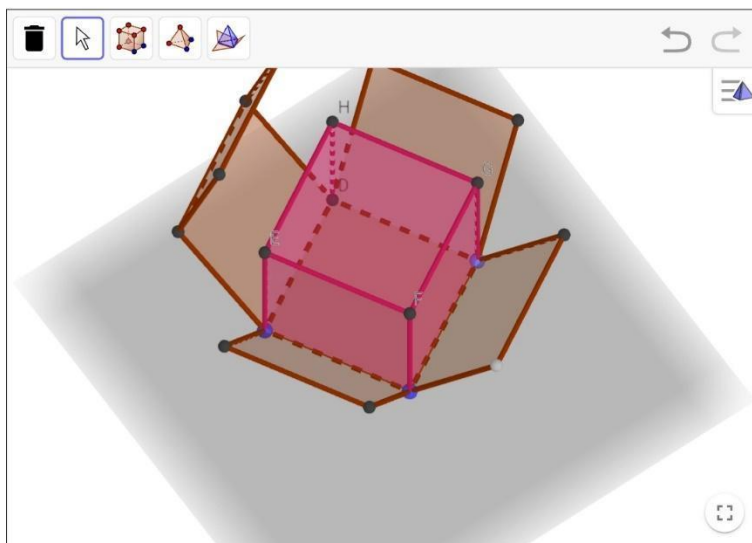
En la propuesta del diseño de tareas para la enseñanza de los poliedros, se consideran materiales manipulativos concretos y virtuales. En la segunda tarea únicamente se vinculan los materiales manipulativos concretos y en la tercera tarea se integran materiales manipulativos virtuales.

2.4.3. Software para geometría 3D - GeoGebra 3D

El desarrollo del software GeoGebra 3D ha proporcionado una variedad de entornos geométricos en los cuales los alumnos pueden manipular objetos 3D directamente en la pantalla. GeoGebra 3D se utiliza como medio para presentar conceptos matemáticos; en los estudiantes de primaria, se presenta mediante Libros GeoGebra 3D con recursos educativos de libre uso para la enseñanza de geometría. En este estudio se implementará la aplicación de GeoGebra 3D centrada en el desarrollo de habilidades de visualización que permitan diferentes maneras de ver y explorar las propiedades geométricas a partir de construcciones en GeoGebra 3D (Duval, 2006), usando algunas herramientas como mueve, borrar, cubo, tetraedro y desarrollo. La Figura 1 muestra la imagen de la aplicación en uso.

Figura 1

APPLET DE GEOGEBRA 3D.



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra 3D.

2.4.4. Visualización geométrica

Duval (2005) afirma que la deconstrucción dimensional de formas es el proceso central de la visualización geométrica. Esta se define como el mecanismo mediante el cual se identifican unidades figurativas que constituyen una figura dada y sus relaciones geométricas. Las dimensiones son consideradas como entidades de menor dimensión que la figura inicial. Para el caso del cubo, se considera en su totalidad como forma 3D, los polígonos (2D), un conjunto de aristas (1D) y el conjunto de vértices (0D). Esta noción es importante para el presente trabajo pues introduce criterios para la configuración de las tareas que se implementarán.

Duval (2016), en el documento *Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos*, explica las entradas que usualmente se dan en el aprendizaje de la geometría. Por ello, en el diseño de las tareas, se buscará implementar las estrategias que permitan avanzar desde la visualización icónica a la visualización no icónica o deconstrucción de formas, valiéndose de actividades que movilicen las maneras de ver y las propiedades geométricas.

Se configuran unidades de análisis a partir de aspectos presentes en cada uno de los referentes mencionados anteriormente, esto porque interesa caracterizar una práctica de enseñanza de la geometría en grado segundo de Educación Básica, y que por tanto se tendrán en cuenta para el diseño de tareas de la propuesta, la implementación y su análisis posterior:

Tabla 2

CATEGORÍAS Y UNIDADES DE ANALISIS.

Categoría de análisis	Unidad de análisis
Referente matemático	Sólidos geométricos: tetraedro y cubo. Conceptos geométricos.
Referente curricular	Lineamientos curriculares: desarrollo del pensamiento espacial relacionado con los procesos de razonamiento, comunicación y visualización. Estándares Básicos de Competencia: pensamiento espacial relacionado con el eje de progresión las formas y sus relaciones . Visualización.
Dimensión cognitiva	Aproximación instrumental. Orquestación instrumental. Tipologías de orquestación instrumental: • Orquestaciones grupales (<i>technical-demo, explain-the-screen, link-screen-board, discuss-the screen, spot-and-show, Sherpa at work, guide and explain, board instruction</i>). • Orquestaciones individuales word and walk (<i>individual technical support, individual technical – demo, individual guide and explain, individual link-screen-book, Individual discuss – screen</i>).
Referente didáctico	Diseño de tareas. Tareas exploratorias. • Objetivos • Estructura: simple a compleja guiada por preguntas. • Secuencia de tareas. • Diferentes tipos de contexto. Visualización. • Unidades figurativas (3D, 2D, 1D, 0D).

Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 3. Consideraciones metodológicas

En este trabajo se utilizó un enfoque metodológico cualitativo y el estudio de casos para estudiar las prácticas de enseñanza de dos profesoras en ejercicio en la educación primaria. Se describen las participantes en la implementación y el diseño metodológico de la investigación: construcción del problema, diseño y análisis de los datos.

3.1. Enfoque metodológico

La investigación cualitativa se centra en comprender fenómenos y explorarlos en su entorno natural y en relación con su contexto (Hernández et al., 1991). En este sentido, Taylor y Bogdan (2000) consideran que este tipo de investigación es inductiva, puesto que los investigadores desarrollan conceptos y comprensiones a partir de los datos, siguiendo un diseño de investigación flexible y se parte de interrogantes vagamente formulados; holística, porque el investigador ve la situación en un todo integral de funcionamiento y de significación, interactiva y reflexiva, pues permite que los investigadores asuman su rol y sean sensibles a los efectos que causan sobre el estudio; naturalista, ya que se enfocan en comprender la lógica de la realidad que se analiza; libre, pues el investigador cualitativo se aparta de sus creencias y no las impone; abierta, ya que todas las perspectivas son valiosas y dignas de estudio; humanista, pues el investigador busca acceder a las experiencias particulares y captar las percepciones de las acciones de quien las protagoniza; y rigurosa, ya que los investigadores buscan resolver los problemas de validez y de confiabilidad.

Por otro lado, según una visión más centrada en la investigación socio-educativa, Gurdíán-Fernández (2007) menciona algunos fundamentos teóricos de la investigación cualitativa, entre ellos la fenomenología, que se encarga de describir la experiencia sin acudir a explicaciones causales; la teoría de la acción comunicativa, que se encarga de la identificación y eliminación de los factores estructurales que distorsionan la comunicación.

Schoenfeld (1998) señala que en educación matemática los modelos cualitativos son usados cada vez más, la variedad y complejidad de los métodos de investigación son aplicables y que tienen diversos criterios para evaluar la calidad y relevancia de las investigaciones. También aclara que el campo de investigación en educación matemática es relativamente nuevo, por ello los métodos y perspectivas no se aplican de manera directa, sino que por el contrario, se debe estar abierto a una amplia variedad de ideas que se puedan usar.

En síntesis, trabajar con el enfoque cualitativo en educación matemática es hacer uso de metodologías, perspectivas y estrategias que han desarrollado diferentes enfoques y orientaciones, y profundizar en un caso para conocerla.

3.2. Estrategia metodológica: estudio de casos

El estudio de casos es un enfoque de la investigación cualitativa que facilita la exploración de un fenómeno en su contexto utilizando diversas fuentes de datos (Baxter y Jack, 2008). A continuación, se tratarán dos enfoques que guían la metodología de los estudios de casos.

El estudio de casos, según Yin (1994), es una forma de investigación empírica que estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real y en la que se utilizan múltiples

fuentes de evidencia. Además, Yin determina unas características de los estudios de casos según la naturaleza del informe, dentro de los cuales se encuentran los descriptivos, interpretativos y evaluativos.

Cabe mencionar, además, que Yin (citado en Baxter y Jack, 2008) describe la diferencia entre un estudio de caso único, estudio de casos holístico y estudio de casos múltiples. En el estudio de casos múltiples, describe el examen de varios casos para comprender las similitudes y diferencias entre los casos, además señala que este tipo de diseño tiene sus ventajas y desventajas.

Por su parte, Stake (1995) plantea el estudio de casos como algo particular y complejo, que se encuentra enfocado en un objeto de estudio singular y así se pretende lograr una mayor comprensión y profundizar en las interacciones. Asimismo, Stake señala que es necesario poner un límite a la investigación mediante dos factores: el tiempo y la actividad, el caso puede ser una persona, un programa, un evento, un proceso o un grupo social. Propone, también, que según el objetivo que busca el estudio se presentan los siguientes modelos: intrínseco, instrumental y colectivo.

En este trabajo se contempla el estudio colectivo de casos, puesto que permite conocer una situación específica, determinada a través de un caso particular. Más aún, el método de estudio de caso es una herramienta valiosa con la cual se mide y se registra la conducta de los participantes en el análisis del fenómeno estudiado.

En síntesis, se seleccionaron dos casos, en estos se desea estudiar la manera en la cual dos profesoras orquestan una clase de matemática para grado segundo de primaria, que gira en torno a los sólidos geométricos e involucra un diseño de tareas que requiere de artefactos

manipulativos y tecnológicos. Analizar las condiciones en las cuales se dan la implementación, las interacciones con los estudiantes, las acciones del profesor en acto, entre otros aspectos que posiblemente van a emanar de las evidencias fílmicas que se recojan, y que se analizarán de acuerdo al enfoque cualitativo, el cual busca incrementar el conocimiento y obtener conclusiones acerca de esta realidad, interpretando y comprendiendo una situación determinada que lleva a reflexionar cómo mejorar las actuaciones educativas.

3.3. Participantes

La profesora Diana¹ es egresada de la Escuela Normal Superior de Cali, licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas y Magíster en Educación con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle. Cuenta con una experiencia de 18 años en educación básica, 5 años en primaria y 13 años en secundaria. Actualmente labora como profesora en la Institución Educativa Jorge Robledo del municipio de Vijes (Sitio donde se realizará la implementación).

Los estudiantes que atiende la institución son del casco urbano del municipio de Vijes. La institución cuenta con tres sedes (preescolar, primaria y secundaria), este trabajo se aplicó en la sede de primaria, al grado segundo, el cual está conformado por 24 estudiantes. Esta institución cuenta con salones, biblioteca, canastas educativas y está focalizada con el Programa Todos a Aprender - PTA del Ministerio de Educación Nacional. Es una institución que realiza valoraciones de los estudiantes con capacidades educativas especiales.

¹ Para preservar la identidad de la profesora se cambió el nombre a Diana.

La profesora Rocío² es Licenciada en Etnoeducación de la Universidad Pontificia Bolivariana en convenio con el Instituto Misionero de Antropología en modalidad semipresencial con sede en Medellín, Antioquía. Se encuentra realizando estudios de maestría en educación con énfasis en Educación Matemática en la Universidad del Valle. Cuenta con una experiencia de 5 años en docencia. Actualmente, es profesora de educación primaria en una institución educativa pública de Santiago de Cali, Valle del Cauca.

Para el caso de la profesora Rocío, la implementación no se pudo realizar en el colegio en el cual labora por motivos de la pandemia ocasionada por la Covid-19, razón por la cual su aplicación se realizó en el Colegio Bilingüe Lauretta Bender de Santiago de Cali; institución privada que ofrece el servicio educativo desde el año 1978. La propuesta pedagógica está centrada en el aprendizaje significativo, cuenta con la implementación de aulas digitalizadas que contribuyen a su modelo educativo. La institución ha tenido reconocimiento a nivel nacional, muy superior, en las pruebas saber y se encuentra entre los 10 mejores colegios privados de Colombia. En este trabajo participan en el estudio de caso el grado segundo, en la jornada de la mañana, el grupo está conformado por estudiantes que se encuentran con una edad en promedio de 7 años.

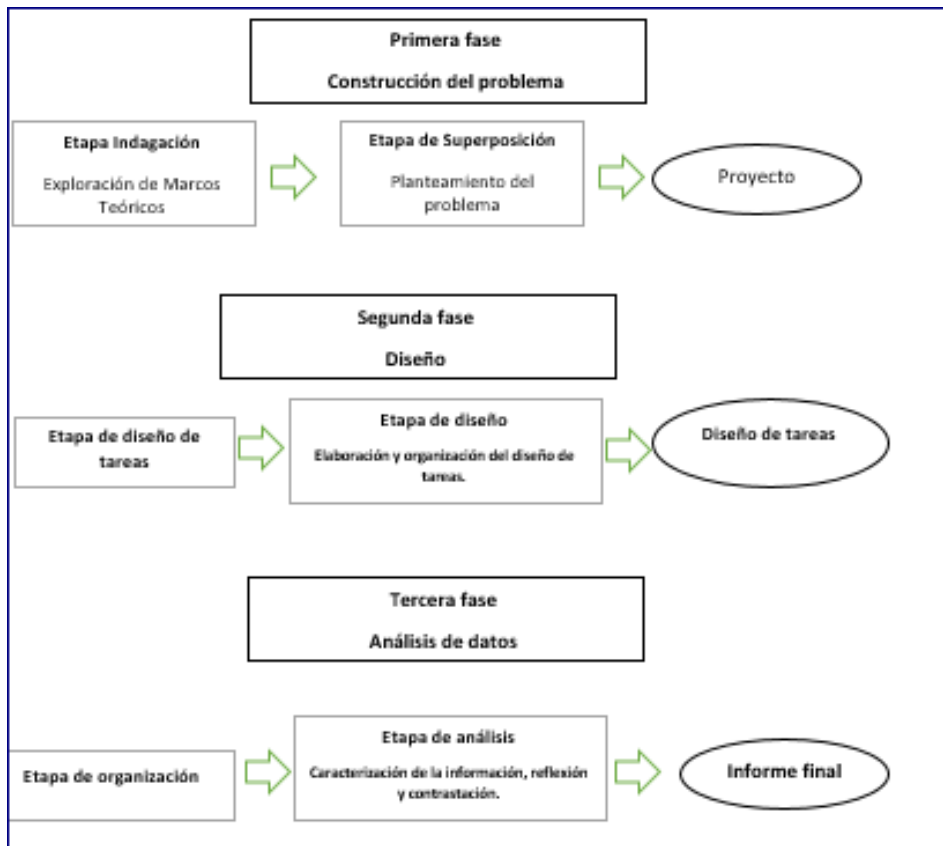
3.4. Diseño metodológico

Para llevar a cabo el presente trabajo se elaboraron tres fases de acuerdo a los objetivos planteados (Figura 2).

² Para preservar la identidad de la profesora se cambió el nombre a Rocío.

Figura 2

FASES DEL DESARROLLO METODOLÓGICO.



Fuente: Elaboración propia.

La primera fase consistió en el planteamiento del problema, para lo cual se formuló una pregunta de investigación que determinó los aspectos centrales del trabajo de investigación. A partir de ello se abordaron distintas bases de datos de revistas e información, las cuales son

accesibles desde el portal de la Biblioteca de la Universidad del Valle, entre ellas: Springer y Science Direct. Asimismo, se abordaron trabajos de grado de la Biblioteca Digital de la Universidad del Valle y en el Centro de Documentación del Instituto de Educación y Pedagogía. Esta búsqueda ha permitido direccionar este trabajo.

En la segunda fase se construyeron tareas dirigidas a estudiantes de segundo grado que han explorado herramientas básicas de GeoGebra 3D. Para lo cual se tomaron los principios teóricos de la *orquestración instrumental* (Trouche, 2004), el diseño de tareas (Margolinas, 2013; Da Ponte et al., 2013) y los referentes curriculares: Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (MEN, 2006) y Derechos Básicos de Aprendizaje (MEN, 2017).

3.4.1. Recolección de información.

Para la evaluación del experimento, se realizaron videograbaciones de la clase, las cuales permitieron evidenciar el trabajo de los estudiantes, las interacciones profesor – estudiantes, las interacciones por parte del profesor al manipular artefactos, las interacciones por parte de los estudiantes al manipular artefactos, con el fin de analizar las diferentes tipologías que surgieron en la puesta en acto.

En la tercera fase, de análisis de datos, se procedió a transcribir las evidencias fílmicas, focalizando la atención en lo relacionado con las tipologías de la *orquestración instrumental*, particularmente las relacionadas con los procesos de enseñanza, se segmentaron los apartados teniendo en cuenta las categorías involucradas en los modos de actuación de la rejilla de análisis, para luego identificar y analizar las tipologías que surgieron de la puesta en acto.

3.5. Estrategias e instrumentos utilizados para la recolección de la información

La información para esta investigación se obtiene a partir de videograbaciones de las sesiones de clases.

3.5.1. Videograbaciones de las sesiones de clase

El caso a investigar corresponde a las prácticas de enseñanza de dos profesoras de educación primaria que implementaron un diseño de tareas para la enseñanza de los poliedros regulares convexos: cubo y tetraedro. La intención de este instrumento es recolectar información de las prácticas de enseñanza, esto en coherencia con el objetivo general de la investigación. Se realizó registro de cada puesta en acto. Para las videograbaciones se hizo registro con una cámara fija y con micrófonos para la grabación de los diálogos durante el desarrollo de las clases.

Posterior a ello, las grabaciones fueron organizadas y se realizó transcripción de las interacciones entre las profesoras y los estudiantes. Se identificaron las interacciones de acuerdo a las tres tareas que componen el diseño que se implementó y se seleccionaron apartados que mostraran situaciones que evidenciaran las indicaciones generales de las profesoras y la interacción de los estudiantes con los materiales propuestos en dichas tareas.

3.5.2. *Rejilla de análisis elaborada desde la perspectiva de la orquestación*

Esta rejilla fue adaptada del trabajo de Benítez y Ortiz (2020), se organizó en relación con tres aspectos fundamentales de la *orquestación instrumental*: la *configuración didáctica*, los *modos de explotación* y la *actuación didáctica*. En cada aspecto se formularon preguntas considerando el objeto matemático y el diseño de tareas para la enseñanza de los sólidos regulares convexos con estudiantes de grado segundo de educación básica primaria. En la Tabla 3 se presenta la rejilla de análisis que contiene los tres aspectos de la aproximación instrumental con las preguntas de análisis.

Tabla 3

REJILLA DE ANÁLISIS DESDE UNA APROXIMACIÓN A LA ORQUESTACIÓN INSTRUMENTAL.

REJILLA DE ANALISIS		
Configuración didáctica	Modos de explotación	Actuación didáctica
1. ¿Qué tipo de artefactos se usan para llevar a cabo la secuencia de tareas?	1. ¿Qué elige el profesor como punto de partida para el desarrollo de tareas diseñadas?	1. ¿En qué momento el profesor utiliza el tablero para representar las matemáticas convencionales?
2. ¿Cómo se distribuye el tiempo para el uso de los artefactos?	2. ¿De qué forma el profesor muestra las estrategias de solución más representativas empleadas por los estudiantes?	2. ¿En cuál de las tareas el profesor explica ante todo el grupo lo que sucede en el proyector del video beam o en el computador?
3. ¿Qué aspectos curriculares considera el profesor para la configuración del diseño de secuencia de tareas?	3. ¿En qué momentos el profesor propone la interacción entre pares y cuál es su finalidad?	3. ¿Se generan espacios grupales para interactuar en relación con lo que sucede en las pantallas?
4. ¿Qué aspectos se consideran en el diseño en relación con la mediación de los artefactos para el reconocimiento de las	4. ¿En qué momento el profesor escoge a un estudiante para que exponga su estrategia de solución?	4. ¿Se evidencian tipologías de orquestación en

propiedades de los poliedros regulares convexos?	5. ¿Cómo se validan las estrategias de solución correctas?	relación con el estudiante? ¿Cuáles?
5. ¿Qué acciones toma el profesor frente al objeto matemático y la manera como se articulan en la secuencia de tareas?	6. ¿Qué intervenciones se dan por parte de los estudiantes frente a las estrategias propuestas por sus compañeros?	5. ¿De qué manera el profesor constata el progreso de los estudiantes?
6. ¿De qué manera el artefacto favorece la construcción del objeto matemático?	7. ¿En qué momento el profesor usa el software GeoGebra 3D para explicar la tarea?	6. ¿Qué relaciones o similitudes se presentan en los dos casos analizados?
7. ¿Cuál es el propósito de cada tarea con respecto a las preguntas que se articulan?	8. ¿Los argumentos de los estudiantes evidencian el cumplimiento de los objetivos planteados?	

Fuente: elaboración propia a partir de Benítez y Ortiz (2020).

Estas preguntas permitirán una descripción global de las acciones de las profesoras en relación con la perspectiva de la *orquestración instrumental*.

3.6. El diseño de tareas que involucran material concreto y GeoGebra 3D

Para el diseño se consideran los aportes de secuencia de tareas (Margolinas, 2013) y tareas exploratorias (Da Ponte et al., 2013) con los cuatro criterios:

i) objetivos, esto indica que se definieron los objetivos en relación con sólidos geométricos para la enseñanza en grado segundo de educación básica de acuerdo con los estándares básicos de competencia de matemáticas (MEN, 2006) y derechos básicos de aprendizaje en matemáticas (MEN, 2017);

ii) la estructura de lo simple a lo complejo con diferentes tipos de preguntas, como consecuencia se plantearon tres tareas que buscan movilizar y aclarar las nociones matemáticas;

iii) secuencia de tareas, como resultado se definen tres tareas que pretenden avanzar desde el estudio de los poliedros regulares convexos hasta el desarrollo del pensamiento espacial con los procesos de comunicación y razonamiento;

iv) diferentes tipos de contexto, se vinculan en cada tarea un contexto cercano al estudiante y uno matemático en el cual se vinculan artefactos.

En este estudio, se diseña una secuencia de tareas para clases con grado segundo de educación básica primaria, que consiste en enseñar los sólidos geométricos como el cubo y el tetraedro, teniendo como objetivo de aprendizaje: *“Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones entre las formas bidimensionales y tridimensionales”* con apoyo de material concreto y GeoGebra 3D. El diseño consta de tres tareas.

En las tareas se vinculan artefactos: en la primera tarea, objetos de uso común para identificar las figuras bidimensionales cuadrado y triángulo; en la segunda tarea, objetos de uso común con formas tridimensionales y manipulables; en la tercera tarea, GeoGebra 3D para que puedan establecer relaciones entre figuras bidimensionales y tridimensionales, promoviendo así el que los estudiantes realicen el reconocimiento de sus elementos y las propiedades geométricas en el espacio.

En las expectativas de aprendizaje también se busca en el estudiante el desarrollo del pensamiento espacial con habilidades cognitivas de razonamiento y comunicación. Igualmente, se busca que los estudiantes puedan emplear las propiedades, interpretar y procesar la información visual.

La propuesta de enseñanza se basa en el trabajo por tareas, para ello se tuvo en consideración los siguientes aspectos: objetivos de aprendizaje, con una estructura de lo simple a lo complejo con preguntas relacionadas para promover la comprensión de los estudiantes; una secuencia de tareas, que tiene varias etapas, las cuales buscan conducir al estudiante al reconocimiento de los sólidos geométricos con tareas exploratorias en diferentes contextos.

3.6.1. Tarea 1: Calentando motores

La primera tarea, nombrada **Calentando motores**, tiene como objetivo: *“Identificar en su entorno inmediato figuras y sólidos geométricos, según sus características”*. Se busca que los estudiantes usen conocimiento previo para relacionar elementos de las figuras geométricas con los sólidos geométricos.

La organización de la clase es por grupos pequeños de estudiantes, con la finalidad de permitir la interacción entre compañeros para las actividades de comparación, descripción y discusión.

Las intervenciones de la profesora se enmarcan en orientaciones para fomentar la discusión con preguntas como: *¿Cuáles objetos de tu entorno tienen la forma de triángulos? ¿Por qué? ¿Cuáles objetos de tu entorno tienen forma de cuadrados? ¿Por qué?* de igual manera, puedes formular las siguientes preguntas en relación con los sólidos geométricos: *¿Cuáles objetos de tu entorno tienen forma de cubo? ¿Por qué? ¿Cuáles objetos de tu entorno tienen forma de tetraedro? ¿Por qué?* La idea de involucrar la pregunta *¿Por qué?* tiene la finalidad de buscar que el estudiante mencione los atributos propios de las figuras y los sólidos geométricos. Adicionalmente, se le solicita a los estudiantes que consignent su respuesta en la

hoja de trabajo. Luego, se escogen algunas respuestas y se realizan precisiones necesarias para evitar contradicciones en los conocimientos en construcción.

Otro aspecto de esta primera tarea son las habilidades de reconocimiento, de los estudiantes, de formas bidimensionales en objetos cercanos del aula, estas habilidades se ponen a prueba mientras intentan elegir los objetos que tienen forma cuadrada y triangular. A medida que observan el aula se espera que puedan describir objetos, independientemente del tamaño o el color, tales como los vértices, las aristas, las caras, el número de lados, la longitud de los lados en el cuadrado, entre otros aspectos a considerar. Asimismo, los estudiantes comparten sus conocimientos previos para reconocer formas geométricas en su entorno, con criterios de comparación como: curvo o recto, abierto o cerrado, líneas paralelas, líneas perpendiculares, plano o sólido, número de lados, número de caras, entre otros, a partir de objetos presentes en el aula regular.

3.6.2. Tarea 2: La caja de Juan

La segunda tarea, nombrada **La caja de Juan**, tiene como objetivo de aprendizaje: *“reconocer las relaciones que existen entre una figura bidimensional y una tridimensional”*. Con relación a la organización de los estudiantes, se continúa por grupos pequeños.

En cuanto a los artefactos, la propuesta indica organizar *La caja de Juan* con objetos del mundo que representen sólidos geométricos como el cubo y el tetraedro, se esperaba respuestas tales como: dados (cubo), una pirámide egipcia (tetraedro) entre otros; también se vinculan materiales para la implementación, como el proyector, tablero, marcador, hojas de trabajo impresas.

Entre las posibles intervenciones del profesor, se encuentra: primero, se presenta la situación en la que los estudiantes deben ayudar a Juan a describir los objetos que se encuentran en una Caja, para ello la situación se formula en los siguientes términos: *Sofía es la tía de Juan y se encuentra en otro país, ella quiere hacerse una idea de las cosas que Juan tiene en su caja, Juan la llama por teléfono y le describe detalladamente cada uno de los objetos que contiene su caja.* Esta lectura puede ser realizada por un estudiante o el profesor.

Segundo, en cada grupo elegir a un estudiante y pedirle que ayude a Juan a describir los objetos; luego permitir un espacio de discusión para que los estudiantes compartan sus ideas. Aquí se propone usar preguntas orientadoras como: ¿Qué objeto es este? ¿Para qué sirve? ¿Qué característica tiene ese objeto? ¿Se podría decir que este sólido tiene vértices? ¿Qué es un vértice? ¿Cuál es la diferencia entre el vértice de una figura geométrica y el vértice de un sólido geométrico? ¿Qué figura geométrica tienen las caras del cubo? ¿Qué es una figura regular? ¿Si el cuadrado es una figura regular entonces el cubo sería un sólido regular? Enseguida, en otro grupo, permitir que elijan otro objeto y pedirles que lo describan, que se apoyen en su grupo de trabajo para comentar los atributos del objeto. Para este momento se proponen las siguientes preguntas orientadoras para la discusión: ¿Qué característica tiene ese objeto? ¿Qué relación encuentras entre el triángulo y el tetraedro? Señala los vértices del tetraedro. ¿Qué relación encuentras entre el cuadrado y el cubo? ¿En qué se diferencia el cubo del tetraedro? ¿Qué relación tienen el cubo y el tetraedro? ¿Conoces otros objetos que tienen esta forma?

Tercero, la profesora puede explicar y guiar a sus estudiantes ampliando los conceptos trabajados; observar la interacción entre sus estudiantes y de ellas describir los elementos que caracterizan a un objeto tridimensional, es decir, mencionar las propiedades que debe cumplir

para ser parte de este grupo y diferenciarlo de los objetos bidimensionales; sugerir comparaciones que permitan identificar elementos bidimensionales en los objetos tridimensionales. Por otro lado, se espera que los estudiantes mejoren en las habilidades para describir las formas bidimensionales y tridimensionales, es decir, que puedan mencionar propiedades que deben cumplir para ser parte de cada grupo.

3.6.3. Tarea 3: Las propiedades de los sólidos geométricos

La tercera tarea, nombrada ***las propiedades de los sólidos geométricos*** presenta como objetivo: “*reconocer las propiedades de los poliedros regulares convexos; el cubo y el tetraedro en GeoGebra 3D*”. Entre los artefactos se tiene previsto usar computadoras, un proyector, tablero, marcador, hojas de trabajo impresas y GeoGebra 3D.

Se tiene previsto para la tercera tarea, que la profesora pueda anunciar que trabajarán con GeoGebra 3D, generar un espacio de 10 minutos para la exploración de las herramientas del software y explicar el uso de hoja de trabajo con las instrucciones para la exploración y el desarrollo de las actividades a partir de indicaciones generales.

Para el desarrollo de la tarea se vincula el software de GeoGebra 3D en la construcción de figuras en tercera dimensión, como es el caso del cubo y el tetraedro. La actividad se desarrolla en torno a dos vistas, la bidimensional y la tridimensional, para la construcción de los sólidos mencionados, para ello los estudiantes emplearán figuras en desarrollo, lo cual les permite manipular las caras del sólido construido. Entre las estrategias de solución previstas con ayuda del GeoGebra 3D, la profesora busca que los estudiantes descubran con las actividades de observación, construcción y descripción las propiedades de las partes que conforman a estos sólidos geométricos.

Con las orientaciones de la profesora, se entrega a los estudiantes una hoja de trabajo por grupos. En esta se especifican las instrucciones para la exploración de los sólidos, dando respuesta a los siguientes interrogantes; ¿Cuántos vértices tiene el cubo? ¿Cuántas aristas tiene el cubo? ¿Cuántas caras tiene el cubo? ¿Qué forma tienen? ¿Cuántos vértices tiene el tetraedro? ¿Cuántas aristas tiene el tetraedro? ¿Cuántas caras tiene el tetraedro? ¿Qué forma tienen? ¿En qué se diferencia el cubo del tetraedro? ¿Qué relación tienen el cubo y el tetraedro?

De acuerdo con las preguntas que emergen en la clase, la profesora puede indicar otras preguntas que permitan superar el reconocimiento de las figuras por su nombre y forma típica, para avanzar en la visualización geométrica al reconocer formas bidimensionales y tridimensionales a través de actividades como: observación, reproducción, construcción, descripción, y, de esta manera, enriquecer el conocimiento de las partes que componen las figuras bidimensionales y cómo estas componen a las formas tridimensionales.

Capítulo 4. Análisis y resultados

4.1. Implementación del diseño de tareas

En este apartado se presenta el análisis de la implementación de las tareas anteriormente expuestas. Se presenta el caso de dos profesoras de educación básica usando el diseño de tareas en su clase de geometría. De esta práctica se recogieron evidencias filmicas, fotográficas y las hojas entregadas a los estudiantes.

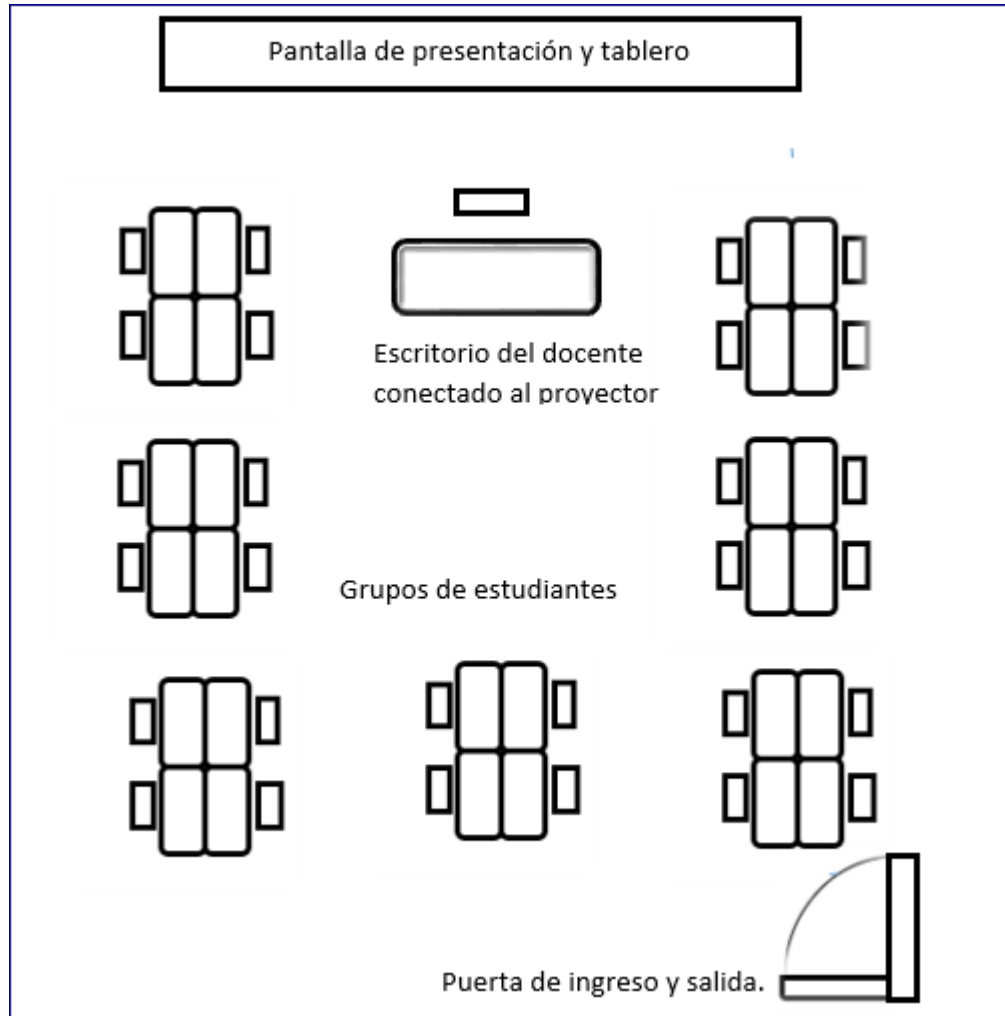
Las selecciones de los casos corresponden a las prácticas de enseñanza cuando dos profesoras implementan una secuencia de tareas, como se mencionó, en la recolección de datos se llevó a cabo con un registro audiovisual, el cual se describe a continuación y se interpreta en una aproximación a los aportes que realizaron Drijvers et al. (2014) acerca de las tipologías de orquestación.

4.1.1. Caso profesora Diana

La profesora Diana (un seudónimo) utilizó dos sesiones para el desarrollo de las tareas, cada una de las sesiones con un tiempo aproximado de 45 minutos, la clase se aplicó de manera presencial, esta estaba integrada por 24 estudiantes (10 niñas y 14 niños) de segundo grado de educación básica primaria. El salón estaba dispuesto con un proyector, computadores portátiles (uno por grupo), hojas de trabajo y materiales concretos (dados, pirámides, entre otros). En la Figura 3 se puede observar la disposición de los recursos físicos en el salón de clase.

Figura 3

ORGANIZACIÓN DE LOS GRUPOS EN EL AULA



Fuente: Elaboración propia.

Para dar inicio, la profesora indicó los pactos de aula (algo propio de la metodología de la profesora en relación con aspectos de convivencia y disciplina) y propuso el trabajo por grupos con sus respectivos roles dentro de cada grupo: monitores, relojeros, coordinadores de disciplina y coordinadores de materiales. Como se pudo observar, cada estudiante sabía las funcionalidades que les correspondían según su rol en el grupo. Adicionalmente inició su discurso mencionando

que la clase tenía la intención de dar continuidad al trabajo realizado la semana anterior, en donde se habían abordado las figuras geométricas y sus características, después de mencionar esto dio paso al desarrollo de las tareas.

Tarea 1: Calentando motores.

Para dar inicio a la clase, la profesora proyectó una imagen que ilustra algunas figuras geométricas, como lo son: el cuadrado y el triángulo. Luego, preguntó a los estudiantes si reconocían las figuras que se ilustraban en la proyección y si identificaban sus características, los estudiantes en masa mencionan sus nombres. Después, la profesora propuso la discusión que giró en torno a las figuras geométricas, se ilustra en la Tabla 4. Cabe mencionar que para la descripción de este diálogo se establecieron las convenciones *P* para representar las intervenciones de la profesora y *E* para las de los estudiantes, quienes, además, fueron enumerados de acuerdo a la organización que tenían en el aula de clases.

Tabla 4

DIÁLOGO ACERCA DEL CUADRADO

Participantes	Diálogo
P	¿Quién me dice cuáles son las características del cuadrado?
E1	Todos sus lados son iguales.
E2	Tiene vértices y aristas.
P	¡Excelente! ¿Cuáles son los vértices y las aristas?
E1	(Se levanta de su puesto, se dirige a la imagen y la señala).
P	¿Están de acuerdo?
E6	Sí (Responden todos).

Fuente: Elaboración propia.

Las preguntas formuladas por la profesora durante la clase, permitieron reconocer las percepciones que los estudiantes manejan en relación con las figuras geométricas, las afirmaciones dadas por los grupos, a partir de lo mostrado en la pantalla, generaban un espacio para dinamizar las respuestas con relación a los atributos de las formas, por ello se interpreta que la profesora se aproxima a una tipología de orquestación *Discuss-the-screen*, por los que estas acciones permiten la discusión grupal de lo que se muestra en la computadora, donde el entorno de la clase se torna favorable para la discusión en relación con el objeto matemático. Este mismo ejercicio lo realiza la profesora con la otra figura, la discusión se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5

DIÁLOGO ACERCA DEL TRIÁNGULO

Participantes	Dialogo
P	¿Y si hablamos del triángulo? ¿Qué características encontramos?
E10	2 lados, 3 vértices y 3 aristas. (El estudiante cuenta las aristas y los vértices de la figura que la profesora proyecta en el tablero).
E13	Eso está malo, el triángulo tiene más lados
P	¿Más lados? Explícanos.
E13	Si, mira la imagen 1, 2 y 3 (Se levanta y señala cada uno de los lados de la imagen proyectada).
P	¿Todos están de acuerdo con el compañero?
E6	Sí, profe.

Fuente: Elaboración propia.

En este diálogo se destacan los argumentos de los estudiantes en relación con los aportes que sus compañeros proveen de la tarea, es por ello que se interpreta que la profesora, en esta ocasión, usa es la tipología *Spot-and- show*, abriendo un espacio de discusión entre pares, puesto que permite que los estudiantes muestren y explique desde el trabajo en las pantallas.

Posteriormente, la profesora propuso reconocer estas figuras en objetos cercanos del aula de clase, actividad que los estudiantes responden nombrando la figura geométrica y el objeto; genera la oportunidad los estudiantes de compartir sus respuestas con los compañeros y los orienta para que utilicen términos geométricos para nombrar las figuras.

Tarea 2: La caja de Juan.

Para dar inicio a esta actividad, la profesora le pide a una estudiante que realice la lectura en voz alta del enunciado proyectado en la diapositiva, esta lectura es la siguiente: *“Sofía es la tía de Juan y se encuentra en otro país, ella quiere hacerse una idea de las cosas que Juan tiene en su caja, Juan la llama por teléfono y le describe detalladamente cada uno de los objetos de que contiene su caja”*.

En la Figura 4, se observa que la profesora toma la caja y le pide a un estudiante que agarre un objeto, el estudiante toma uno, a partir de esta acción se genera un diálogo entre la profesora y el estudiante, allí la profesora hace una serie de preguntas alrededor de las características del objeto escogido.

Figura 4

MANIPULANDO OBJETOS DE LA CAJA DE JUAN



Fuente: Elaboración propia.

La interacción entre la profesora y los estudiantes en el desarrollo de la Tarea 2 se presenta en la Tabla 6.

Tabla 6

DIÁLOGO ACERCA DE LOS OBJETOS DE LA CAJA DE JUAN

Participantes	Diálogo
P	¿Qué figura tienes?
E11	Hay un dado en forma de cubo. Se usa para jugar.
P	¿Para qué sirve? ¿Dónde han visto los dados?
E11	Sirve para jugar parqués.
P	Ahora miremos los vértices. ¿Cuántos vértices tiene?
E 11	Profe, los vértices son como los del cuadrado.
P	¿Cómo son los del cuadrado?
E11	Es el puntico que une los lados.
P	¿Cuántos lados o aristas se unen en el cubo?
E11	¡Tres, profe!
P	Muy bien, ¿entonces qué son los vértices?
E13	La unión de las aristas.
P	¿Y qué son las aristas?
E14	Los laditos.

Fuente: Elaboración propia.

Las preguntas que direccionó la profesora permitieron que los estudiantes encontraran la relación entre objetos conocidos por ellos y sus nociones matemáticas, entre ellas la idea de vértice y las diferencias entre un vértice de una figura geométrica (cuadrado) y el vértice de un sólido geométrico (cubo). Seguidamente, la profesora presentó nuevas preguntas en relación con el paso de lo bidimensional a lo tridimensional. Este diálogo se presenta en la Tabla 7.

Tabla 7

DIÁLOGO ACERCA DEL CUBO

Participantes	Diálogo
<i>P</i>	¿Qué relación encuentra entre el cuadrado y el cubo?
<i>E1</i>	Las caras del cubo son cuadradas.
<i>E5</i>	El cuadrado es un polígono regular, los vimos en la otra clase.
<i>P</i>	¿Qué es una figura regular?
<i>E5</i>	Las figuras regulares son las que tienen los lados iguales.
<i>P</i>	¿Si el cuadrado es una figura regular, entonces el cubo sería un sólido regular?
<i>E6</i>	Si porque sus caras son cuadradas.

Fuente: Elaboración propia.

Luego, la profesora se desplazó con la caja a otro grupo, solicitando a uno de los integrantes que escogiera uno de los objetos contenidos al interior de la caja, el estudiante sacó una pirámide y se generó el siguiente diálogo (Tabla 8).

Tabla 8

DIÁLOGO SOBRE UNA PIRÁMIDE (TETRAEDRO)

Participantes	Diálogo
P	¿Qué objeto es este?
E1	Es una pirámide.
P	¿Dónde han visto una pirámide?
E1	En las películas de momias.
P	Es verdad, en películas relacionadas con la historia las encontramos, pero cuénteme ¿Cuántas caras tiene? ¿Cómo son las caras de esta figura?
E1	Son triangulares.
P	¿Qué relación hay entre la pirámide y el triángulo?
E1	En esa pirámide las caras son triangulares.
P	¿Se podría decir que este sólido tiene vértices?
E1	Sí tiene, es donde se reúnen las aristas. El punto donde se reúnen.

Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, la profesora utiliza los objetos de la caja de Juan para que los estudiantes puedan descubrir las características del cubo y el tetraedro, usa las explicaciones que ellos realizan acerca de estos objetos y amplía los contenidos matemáticos para toda la clase.

Para su interpretación, se consideran las tipologías de orquestación propuestas por Drijvers et al. (2014) y, de acuerdo a las interacciones, se identifican las acciones de la tipología *spot-and-show* en el desarrollo de los razonamientos del estudiante cuando relaciona lo que comprende como vértice en la figura geométrica y su relación en el sólido geométrico, como también la relación entre la figura regular y el sólido regular.

También se evidencia la tipología *guide-and-explain*, esta se ilustra en los diálogos que se presentan entre la profesora y los estudiantes, en donde la profesora dirige al estudiante con preguntas para dar cuenta de las propiedades del objeto matemático.

Tarea 3: Las propiedades de los sólidos geométricos.

Para el desarrollo de esta actividad, la profesora vinculó el uso de GeoGebra 3D, computadores y video beam. Organizó a los estudiantes por parejas para el trabajo en el computador y les pidió abrir GeoGebra 3D. Posteriormente, la profesora explicó los pasos para hacer la construcción de un cubo, para ello les pidió abrir dos vistas, la bidimensional y la tridimensional. En la vista tridimensional, les solicitó abrir la herramienta cubo, a continuación, les indicó realizar dos puntos sobre el plano. Esta acción evidenció la tipología *technical-demo*, en donde la profesora explica las herramientas que se deben usar para hacer la construcción, dando las pautas desde el computador principal.

Más adelante, la profesora les pide que usen la herramienta desarrollo para abrir las caras del cubo y con la herramienta mueve lo hagan girar sobre el plano. Frente a esto los estudiantes se tornan entusiasmados y sorprendidos.

Para mirar si los estudiantes hacen bien la construcción, la profesora camina por el salón revisando que los estudiantes hayan seguido las instrucciones, en determinados casos se detiene en algunos grupos para hacer precisiones o responder a inquietudes con relación a la construcción que realizan, esta acción evidencia la orquestación *Work and walk*. En algunos casos los estudiantes presentaron problemas técnicos, dado que el software no abría o se quedaba bloqueado, frente a esto la profesora tomaba el computador, revisaba la situación y la solucionaba, en uno de los casos la solución fue cambiar de portátil ya que tuvo fallas de batería; esta acción evidenció un caso de orquestación individual como es el caso de *Individual-Technical-support*.

Al cabo de su revisión, la profesora interviene explicando las características del cubo, esto lo hace apoyándose en los argumentos que los estudiantes dieron en los apartados anteriores mientras señala la construcción que se encuentra en el computador principal, donde muestra cuáles son las caras, los vértices y las aristas. Esta intervención evidencia la tipología *Explain-the-screen*.

Como parte de la socialización, la profesora proyecta en el video beam un applet de GeoGebra 3D diseñado por ella, el cual contiene un cubo y las siguientes preguntas: ¿Cuántos vértices tiene el cubo? ¿Cuántas aristas tiene el cubo? ¿Cuántas caras tiene el cubo? ¿Qué forma tienen? El applet está configurado para validar las respuestas dadas por los estudiantes, demarcando un resultado correcto con una imagen de una carita feliz y uno incorrecto con una carita triste.

Este mismo trabajo de construcción, exploración y socialización se realiza con el tetraedro. En la Tabla 9 se presenta el diálogo de la profesora con los estudiantes en este momento de la clase.

El applet que descargó la profesora de la plataforma *GeogebraTube*, le permitió a los estudiantes verificar si sus respuestas son correctas. En este ejercicio la profesora integra el software de GeoGebra 3D, como se tiene planteado, en el diseño de tareas, generando que los estudiantes comuniquen las características del cubo y del tetraedro.

De esta manera permite que sus estudiantes usen un lenguaje rutinario para describir sus conocimientos previos en relación con el objeto matemático, sin la formalidad del lenguaje matemático, evidenciando el tipo de orquestación denominado, *explain-the-screen* y *spot-and-show*.

Tabla 9*DIÁLOGO ACERCA DEL CUBO*

Participantes	Diálogo
P	Vamos a empezar y vamos a mirar si están de acuerdo o no están de acuerdo. ¿Cuántos vértices tendrá este cubo?
E1	Tiene ocho (el estudiante se aproxima a la imagen proyectada y los cuenta).
P	Quien me dice ¿Cuántas aristas hay?
E1	12 aristas.
P	¿Quién me dice cuántas caras hay?
E	Hay seis caras (algunos estudiantes la cuentan).
P	¿Qué forma tiene las caras del cubo?
E1	Cuadradas.
P	¿Recordemos cómo se llama unión entre las caras?
E1	Aristas.
P	¿Y los puntos que están acá? (señalando los vértices).
E1	Vértices.

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de la profesora Diana, se observa que en la tarea uno, el estudiante E1 tiene más participación que los demás estudiantes, por ello se privilegia las orquestaciones *discuss-the-screen* y *spot-and-show*, mientras que en la segunda y la tercera hay una participación más directa por parte de la profesora lo que evidencia las orquestaciones *spot-and-show*, *guide-and-explain*, *explain-the-screen*.

4.1.2 Caso de la profesora Rocío

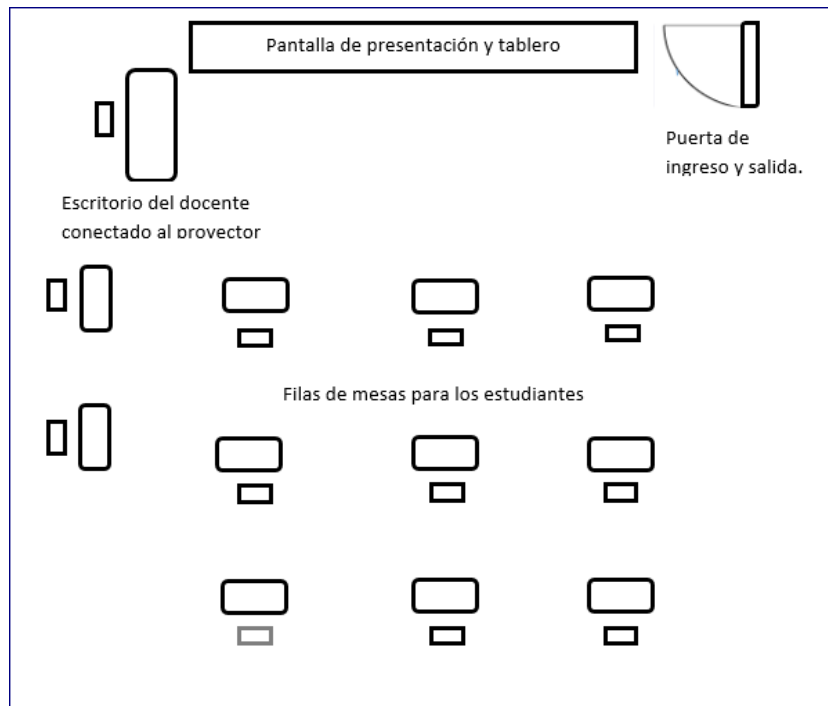
Se contempló la posibilidad de aplicar la situación en la institución pública en la que labora la profesora Rocío, con un grupo regular de 37 estudiantes, pero debido a la situación de emergencia sanitaria declarada por la pandemia del COVID – 19, las instituciones públicas no se encuentran realizando clases presenciales, por esta razón y teniendo en cuenta que el diseño de

tareas contempla el uso de material concreto, se requería de una clase presencial en la cual los estudiantes pudieran manipular dicho material.

De este modo, se buscó espacios escolares en donde se trabajara en alternancia educativa, que es la opción de continuar con el servicio mediante la combinación de estrategias de trabajo académico en casa con encuentros presenciales en los colegios. En esta búsqueda de instituciones, que habían iniciado labores bajo el esquema de alternancia, se encontró el Colegio Bilingüe Laurretta Bender, de la ciudad de Cali, donde citan entre 6 a 8 estudiantes diariamente por cada grado.

Figura 5

ORGANIZACIÓN DEL AULA CON PROTOCOLOS DE BIOSEGURIDAD



Fuente: Elaboración propia.

Para la implementación, se siguió un protocolo de bioseguridad dentro del aula, el cual consistía en el distanciamiento de los estudiantes de acuerdo con la demarcación establecida por la institución (Figura 5), uso de careta y tapabocas por parte del profesor, uso de tapabocas por los estudiantes; asimismo, en el protocolo que adoptó la institución se incluye la desinfección de objetos con alcohol en aerosol antes, durante y después de la implementación.

Para esta clase, se trabajó con ocho estudiantes en un tiempo de una hora y diez minutos. A continuación, se describe la implementación de la profesora con el tipo de orquestación que se evidencia en cada una de las tareas.

Tarea 1: Calentando motores.

La profesora Rocío inicia su discurso vinculando las figuras y los sólidos geométricos con objetos del entorno, para ello usa la pantalla para proyectar las imágenes: el triángulo, el cuadrado, el cubo y el tetraedro, adicionalmente les pregunta ¿Qué objeto es este? ¿Para qué sirve? ¿Qué característica tiene ese objeto? ¿Se podría decir que este sólido tiene vértices? ¿Qué es un vértice? ¿Cuál es la diferencia entre el vértice de una figura geométrica y el vértice de un sólido geométrico? ¿Qué figura geométrica tiene las caras del cubo? ¿Qué es una figura regular? ¿Si el cuadrado es una figura regular entonces el cubo sería un sólido regular?. Luego, permite que los estudiantes participen enunciando los nombres de cada figura, preguntándoles si reconocen los sólidos que hay en la imagen y sus características. Frente a esto surgieron algunas interacciones que son presentadas en la Tabla 10.

Tabla 10

DIÁLOGO ACERCA DEL CUADRADO

Participantes	Diálogo
P	¿Puedes encontrar un objeto de tu entorno que representa una de las figuras o sólidos? Puede ser en el salón, en la casa, en la finca (la profesora señala en la pantalla las formas del cubo, cuadrado, triángulo y tetraedro) ... Miren en el salón.
E2	Profe, en el locker, la puerta se parece a un cuadrado (señalando el objeto).
P	¿Se parece o tiene forma cuadrada?
E2	Es cuadrado, profesora, sirve para que los niños puedan meter los libros.
E5	El piso profe (señalando las baldosas del aula).
P	¿Qué forma tiene?
E6	Son baldosas cuadradas.
P	Sigamos buscando.
E3	Profe, en la silla de allá encontramos un cuadrado.
E5	El horario.
P	El horario será ¿cuadrado o rectángulo?

E7	Es un rectángulo, no es cuadrado.
P	Recuerden, el cuadrado tiene todos los lados iguales, mientras que el rectángulo tiene longitudes diferentes, miren en el tablero (la profesora procede a dibujar un rectángulo mostrando las diferencias en las longitudes de la figura).
E4	Profe, las aplicaciones del computador.
P	Los iconos, tienen forma cuadrada. ¡Excelente!

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar, la intención de la profesora es abrir un diálogo en relación con lo proyectado en la pantalla. Dicho diálogo también pretende explorar los conocimientos previos de los estudiantes, de esta manera se aborda la tipología de orquestación *explain-the-screen*, como también la orquestación *link-screen-board* dado que la profesora hace uso de la pantalla y de la proyección del computador para clarificar la diferencia entre el cuadrado y el rectángulo. La profesora continúa el diálogo con otra figura geométrica (Tabla 11).

Tabla 11

DÍALOGO ACERCA DE LOS OBJETOS CON FORMA DE TRIÁNGULOS

Participantes	Diálogo
P	Ahora niños, vamos a continuar con ejemplos con triángulos ¿Dónde podemos ver triángulos?
E2	Mi cuaderno tiene triángulos, mira (la niña señala las formas de triángulos en el cuaderno).
E8	Mira es un triángulo (la niña muestra un juguete que tiene una imagen triangular).
E1	Profe, allí (señalando el techo y hace la forma del triángulo juntando las dos manos).
P	Excelente es la estructura del techo podemos ver que tiene muchos triángulos. ¿Dónde más encontramos triángulos?

Fuente: Elaboración propia.

Los primeros diálogos por parte de los estudiantes giraron en torno a las figuras geométricas, por ello la profesora hizo claridad en que esas figuras son bidimensionales ya que tienen largo y ancho (se dirige al tablero y con el dibujo realizado en el caso anterior muestra el largo y el ancho del rectángulo y del cuadrado), mientras que en las figuras tridimensionales contempla el largo, el ancho y alto (ilustra esto con la imagen proyectada); esta acción evidencia la orquestación *link-screen-board* y lo amplía con la relación de las figuras que hay en el entorno (Tabla 12).

Tabla 12

DIÁLOGO SOBRE OBJETOS CON FORMAS DE CUBO Y TETRAEDRO

Participantes	Diálogo
P	Esas formas son las bidimensionales. Ahora miremos las formas tridimensionales, ¿cómo se llaman?
E1	La de allí es un cubo y la otra es una pirámide.
P	Muy bien, ahora miremos en el salón. Busquemos estas formas. Vamos a mirar.
E3	No hay profe, pero en mi casa yo tengo juguetes en forma de cubo.

Fuente: Elaboración propia.

En el diálogo con los estudiantes se observó que tenían más acercamiento con las figuras geométricas que con los sólidos geométricos, ya que en sus ejemplos se ilustran las figuras geométricas. Por ello la profesora decidió abrir un espacio para traer ejemplos en relación con los sólidos geométricos, mencionando las pirámides y las cajas, esto con la finalidad de representar el cubo y el tetraedro. Adicionalmente, la profesora hizo preguntas con relación a las características de las figuras y los sólidos, buscando que los estudiantes enunciaran sus conocimientos previos acerca de estas: *¿Cuántos lados tiene el cuadrado? ¿Cuántos lados tiene*

el triángulo? Frente a ello, los estudiantes se dieron cuenta del número de lados en el caso del triángulo y realizaron la identificación de la figura con su respectivo nombre.

Tarea 2: La caja de Juan.

Para el desarrollo de esta tarea no se pudo llevar una caja, dado los protocolos de bioseguridad propios de la institución. Por lo tanto, la profesora tomó la decisión de decirle a los estudiantes que se había llevado los objetos de la caja de Juan, los cuales fueron revisados y desinfectados previamente por los entes administrativos del colegio. Los elementos de la caja de Juan consisten en juguetes con forma de cubo y tetraedro, como lo son dos dados del juego de mesa parqués y las fichas de un juego de roles; de los cuales, los primeros tienen forma cúbica y los segundos forma de tetraedro. Adicionalmente, se les llevó los cubos de Rubik.

Para dar inicio a la tarea, la profesora le pide a un estudiante que realice la lectura en voz alta del enunciado proyectado en la diapositiva, este dice: *“Sofía es la tía de Juan y se encuentra en otro país, ella quiere hacerse una idea de las cosas que Juan tiene en su caja, Juan la llama por teléfono y le describe detalladamente cada uno de los objetos de que contiene su caja”*.

Dado que la actividad debía ser desarrollada de forma individual, por la bioseguridad de los estudiantes, la profesora le entrega los juguetes a cada uno, con el propósito de que puedan observarlos, manipularlos, jugar con ellos y comprobar lo que han descubierto acerca de los elementos para ayudar a Juan a describir de manera detallada sus juguetes.

Posteriormente, la profesora interviene haciendo preguntas con la intención de que los estudiantes sean quienes, luego de la exploración, enuncien los atributos de los juguetes con forma de sólidos, tales como el número de caras, el número de vértices el número de aristas. En

las tablas 13 y 14, se presenta el diálogo entre la profesora y los estudiantes en el desarrollo de la tarea 2.

Tabla 13

DIÁLOGO ACERCA DEL CUBO

Participantes	Diálogo
P	Vamos a escuchar a su compañera, atentos chicos.
E3	El dado, profe, tiene seis caras, mira, uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis. (La estudiante tiene en la mano el dado y cuenta las caras del dado).
P	Esta forma ¿cómo se llamará?
E2	El cubo.
E3	El cubo.
E7	El cubo.
P	¡Muy bien! Vamos descubriendo cosas (la profesora se dirige a otro estudiante). Por acá ¿Quién descubrió más cosas?
E6	El cuadrado... El cubo tiene ocho vértices y seis caras (el estudiante retoma su explicación y aclara que es un cubo).
P	¡Muy bien! Ya lo tienes, el cubo tiene ocho vértices y seis caras. Recordemos que las líneas que unen las caras ¿cómo se llaman?
E7	Profe, son las aristas, este dado tiene 12 aristas, aquí hay 4, acá otras 4 y por debajo otras 4 (El estudiante tiene en la mano el dado).
P	Así es, para identificarlas debemos ir en orden. Muy bien. ¿Conocen otros objetos con estas formas?
E8	Si hay muchas, las cajas, los dados de Rubik y otras.
P	Ahora, miremos el cuadrado y el cubo ¿son similares?
E5	Bueno, el cubo tiene las caras cuadradas.

Fuente: Elaboración propia.

Asimismo, la profesora orienta y le pide a los estudiantes que le ayuden a Juan a describir sus juguetes a fin de que puedan mencionar sus propiedades. A continuación, el diálogo con la manipulación de la ficha del juego de rol con forma de tetraedro.

Tabla 14

DÍALOGO ACERCA DEL TETRAEDRO

Participantes	Diálogo
P	Niños, vamos a escuchar a su compañera, ella qué nos va a mostrar.
E3	El tetraedro profe. El tetraedro tiene tres caras y tiene tres... (la niña se queda pensativa).
P	Retomemos. Mira, ¿Qué forma tienen esas caras?
E3	Son triángulos.
P	Ahora veamos, ¿Cuántas caras tiene el tetraedro?
E3	Tiene uno, dos, tres, cuatro triángulos. Tiene cuatro caras.
P	Ahora, miremos, ¿Cuántos vértices tiene el tetraedro?
E3	Tiene uno, dos, tres, cuatro.
P	Muy bien. Ahora mira las aristas ¿cuántas aristas tiene el tetraedro?
E3	Aquí tiene una, dos, tres y cuatro, cinco y seis.
P	Ahora miremos ¿el triángulo y el tetraedro que tienen algo en común?
E3	Esta figura, la pirámide tiene las caras con triángulos.

Fuente: Elaboración propia.

De esta manera, la profesora utiliza los objetos de la caja de Juan para que los estudiantes puedan descubrir las características del cubo y el tetraedro, les pide que observen y manipulen los juguetes, les hace preguntas y los orienta. En el desarrollo de esta tarea se usó la orquestación *guide-and-explain*, guiada por la imagen de la presentación, ya que vincula los objetos del entorno para que describan los atributos presentes en dichos objetos.

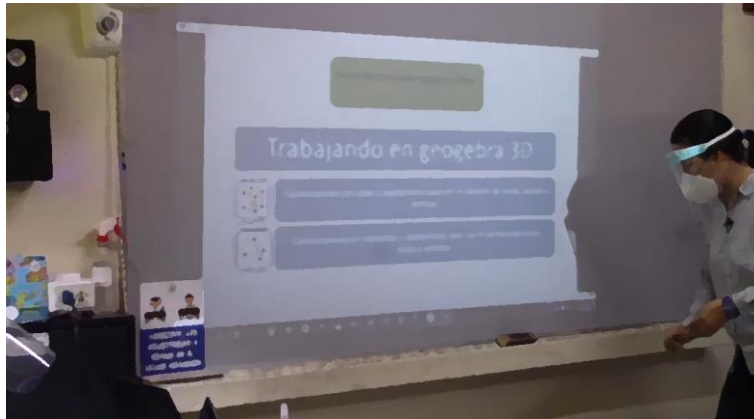
Tarea 3: las propiedades de los sólidos geométricos.

En esta tarea, la profesora Rocío usó un applet de GeoGebra 3D para que los estudiantes reconozcan los elementos abstractos de los sólidos geométricos, para ello facilitó a los estudiantes tabletas para uso personal y el proyector para las indicaciones generales de la clase.

La organización de los estudiantes en el aula se mantuvo para el desarrollo del trabajo individual, y separados según las disposiciones de bioseguridad.

Figura 6

EXPLICACIÓN DE LA PANTALLA



Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 6, se puede ver que la profesora presentó en la pantalla la tercera tarea, tomó una tableta con la aplicación abierta y se las mostró a los estudiantes mientras intervenía con la siguiente orientación *“Bueno estudiantes, ahora vamos a trabajar con GeoGebra 3D y vamos a explorar las herramientas que están allí, fijémonos en cada una, mire que cada una de las herramientas trae una indicación y su nombre”*. Luego, le entrega las tabletas con la aplicación abierta y les pide que hagan clic sobre cada una de las herramientas dispuestas en la aplicación de GeoGebra 3D, para que así logaran leer las indicaciones dadas.

A modo de ejemplo, la profesora acude al cubo e indica: *“ubica dos puntos en el plano y con el icono ‘cubo’ selecciona los dos puntos realizados”*, los estudiantes proceden a seguir las instrucciones dadas por la profesora. Es aquí donde se evidencia la tipología *technical-demo*, la

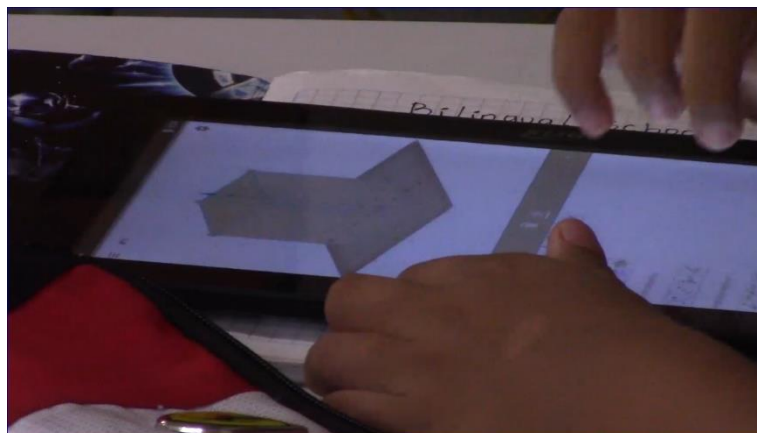
cual se complementa con dos tipologías más, *Work and walk* dado que la profesora se desplaza por los puestos revisando las construcción del sólido geométrico; e *individual-technical-demo* ya que los estudiantes tenían problemas relacionados con experiencias técnicas con el uso de GeoGebra 3D el applet se cerró, no sabe cómo abrir nuevamente GeoGebra 3D , se apagó la tableta y no funciona, no saben cómo usar las herramientas de GeoGebra 3D y tampoco la ubicación de sus herramientas.

A partir de esa estructura creada con la herramienta cubo, la profesora les pide que usen la herramienta *mueve* para hacer girar al cubo sobre uno de sus vértices y encontrar aquellas propiedades presentes. Luego del tiempo de trabajo con la herramienta *mueve*, la profesora les indica que pueden elegir la herramienta *desarrollo* de GeoGebra 3D para que a través de la imagen presentada en vista 3D de las caras del cubo, el estudiante pueda reconocer las formas que tiene las caras y el desarrollo plano del cubo.

En la Figura 7, se evidencia el trabajo de construcción realizado por los estudiantes mientras la profesora se acerca a sus estudiantes observando el trabajo que realizan, sugiere indicaciones para el desarrollo del trabajo y da indicaciones para retomar el trabajo con las formas cubo y tetraedro.

Figura 7

USO DEL APLET DE GEOGEBRA 3D



Fuente: Elaboración propia.

A continuación, un dialogo de la interacción de la profesora y los estudiantes (Tabla 15).

Tabla 15

DIÁLOGO ACERCA DEL CUBO CON GEOGEBRA 3D

Participantes	Diálogo
P	Bueno estudiantes, ahora vamos a trabajar con GeoGebra 3D y vamos a explorar las herramientas que están allí, fijémonos en cada una.
E1	¿Cómo se hacen profe?
P	Vamos a hacer clic sobre cada herramienta y leemos la indicación.
P	El cubo nos dice: “ubica dos puntos en el plano”.
E4	Dos puntos, y ya profe, tengo un cubo.
P	Ahora vamos a explorar sus números de caras, sus aristas y vértice. Pueden utilizar la herramienta <i>mueve</i> para explorar los elementos del cubo.
E4	Profe el cubo tiene 12 aristas y 8 vértices.
P	Ahora pueden usar la herramienta <i>desarrollo</i> .
E4	Profe el cubo tiene 6 caras cuadradas.

Fuente: Elaboración propia.

La profesora continua la secuencia, pero ahora con el tetraedro. La explicación a la clase y la interacción con algunos de sus estudiantes se presentan en la Tabla 16.

Tabla 16

DÍALOGO ACERCA DEL TETRAEDRO CON GEOGEBRA 3D

Participantes	Dialogo
P	Atentos chicos, vamos a mirar acá, vamos a explorar el tetraedro. Recuerden usar la herramienta <i>mueve</i> y <i>desarrollo</i> (la profesora les muestra la tableta con las herramientas).
E7	Así profe, ya lo construí.
P	Muy bien. Estamos con el tetraedro. Estudiantes, ¿Cuántas caras tiene el tetraedro?
E7	Profe hice el desarrollo, las caras del tetraedro son triangulares.
P	Estudiantes, ¿Cuántas aristas tiene el tetraedro?
E7	Tiene seis.
EP	Muy bien.

Fuente: Elaboración propia.

En el desarrollo de la tarea se usó la orquestación denominada *Explain-the-screen*, la configuración didáctica para las orquestaciones fue similar. Para explicitar las respuestas de los estudiantes o sus inquietudes, la profesora usó la orquestación *Discuss-the-screen*, esta se evidencia en la explicación de las nociones relacionadas con las propiedades de los sólidos geométricos y que los estudiantes verificaban usando el applet de GeoGebra 3D. En resumen, se identificaron los tipos de orquestación *explain-the-screen* y *link-screen-board*, en la tarea uno; *guide-and-explain*, en la tarea dos; y *explain-the-screen* y *discuss-the-screen*, en la tarea tres.

4.1.3. Descripción de la práctica de enseñanza según la aproximación teórica de la *orquestración instrumental*

En este apartado se utilizará la rejilla de análisis a partir de una aproximación teórica de la *orquestración instrumental* y el uso del diseño de tareas, para analizar las prácticas de enseñanza en torno a una clase de poliedros regulares convexos, cubo y tetraedro, que incorpora el uso de geometría dinámica.

Para identificar las acciones realizadas por las profesoras con relación a los tres aspectos de la *orquestración instrumental* (*configuración didáctica*, *modos de explotación* y *actuación didáctica*), se partió de la descripción general del uso que las profesoras hicieron del diseño de tareas para la enseñanza de los poliedros.

Para dar cuenta cuáles acciones realizaban las profesoras con relación a la *configuración didáctica* (Trouche, 2004), se centró la atención en algunas preguntas que permitieran identificar los tipos de artefactos usados en la secuencia, la distribución del tiempo para el uso de los artefactos, los aspectos curriculares presentes en la secuencia de tareas y los usos del artefacto para la construcción del objeto matemático.

Con relación a los *modos de explotación* (Trouche, 2004), se identificaron las acciones de enseñanza dando respuesta a ocho preguntas, con las cuales se buscó dar cuenta del punto de inicio de una tarea, las estrategias de solución más representativas, los momentos de interacción entre pares, la presentación de estrategias de solución por parte de estudiantes, el uso del software para explicar una tarea y el uso de argumentos por los estudiantes para explicar un concepto.

Asimismo, se realizó el análisis de la *actuación didáctica* (Trouche, 2004) en relación con seis preguntas para dar cuenta del uso de artefactos, las explicaciones para toda la clase con apoyo de proyector o computador y las interacciones grupales o individuales en el desarrollo de las tareas.

Así pues, se comentan los hallazgos que surgen de la práctica de enseñanza. **La configuración didáctica** fue elaborada a partir de unas intencionalidades didácticas, teniendo en cuenta la implementación de artefactos manipulativos y tecnológicos, dichos artefactos fueron articulados a la secuencia de tareas de manera que el tiempo de uso dependía de los avances de los estudiantes en el desarrollo de razonamientos respecto a los sólidos geométricos (cubo y tetraedro).

Para la configuración de la secuencia de tareas, las profesoras indagaron por los referentes curriculares, cognitivos, matemáticos y didácticos. Esta última permitió estructurar la idea de secuencia de tareas y esclarecer qué tipo de tareas se querían proponer que para este caso en particular. Fueron tareas exploratorias, es decir, tareas en las cuales el estudiante, a partir de sus conocimientos previos, construye estrategias de solución a los enunciados propuestos por el profesor, las implementa, reflexiona acerca de sus aciertos o errores y construye nuevos aprendizajes. Frente a esto, el profesor crea espacios de interacción entre pares en relación con el objeto matemático.

Respecto a los aspectos cognitivos, se condicionó con la mediación de los artefactos, es por ello que en la configuración de las tareas con GeoGebra 3D (Figura 7) se buscaba que el entorno digital devuelva una respuesta al introducir los datos y de esta manera el estudiante pueda validar si sus conocimientos eran acertados o errados, esto le permitiría reflexionar y

volver accionar, creando nuevas estrategias de solución, la idea era crear un diálogo entre el estudiante y el artefacto, donde la visualización y el arrastre fueran un factor importante para cimentar aprendizajes.

Figura 8

SOCIALIZACIÓN DE LAS RESPUESTAS EN EL APLET DE GEOGEBRA



Fuente: Elaboración propia.

En cuanto a lo curricular, para la configuración se tuvo en cuenta que se deseaba desarrollar el pensamiento espacial, particularmente lo relacionado con los sólidos geométricos (cubo y tetraedro), por ello se pensó en trabajar desde el entorno inmediato del estudiante para luego dar la introducción a la tecnología con GeoGebra 3D. También se abordaron los procesos de razonamiento y comunicación, para ello se tuvo en cuenta el tipo de preguntas que se le iba a proponer a los estudiantes, cada una de ellas tenía la finalidad de permitir la construcción del objeto matemático, por ello también fue importante reconocer cuáles eran las características y propiedades que se deseaban desarrollar con la clase.

Respecto a los **modos de explotación**, en ambos casos se eligió como punto de partida abordar el entorno inmediato de los estudiantes, parten de sus conocimientos previos, las figuras geométricas (cuadrado y triángulo equilátero), para dar cuenta de las estrategias de solución, crean espacios de diálogo en los cuales hay interacción entre pares, cuya finalidad, por parte del profesor, es debatir las estrategias de solución, analizar sus argumentos y confrontarlos con los de sus compañeros.

Para introducir el software GeoGebra 3D, se pidió a los estudiantes hacer una construcción desde un plano 3D, dicha construcción es usada para que visualicen los sólidos, sus características, propiedades y dimensiones, esto se complementa con la herramienta *desarrollo* que le da un dinamismo propio de este micro mundo.

En relación con la interacción entre pares, se hizo más evidente en el caso de la profesora Diana, la cual pudo hacer la aplicación presencial con un grupo regular, organizándose en mesas de trabajo; en el caso de la profesora Rocío las interacciones se hicieron de manera general con la participación activa de los ocho estudiantes, con las medidas de distanciamiento físico. A pesar de las variaciones que surgieron en ambos casos, se aprovecharon las intervenciones de los estudiantes para que mencionaran las propiedades de los sólidos geométricos abordados, evidenciándose en los estudiantes los aprendizajes que dan cuenta de los objetivos planteados.

En cuanto a la **actuación didáctica**, se puede mencionar que al iniciar la implementación de la secuencia de tareas, la profesora Diana presentó el objetivo de aprendizaje apoyándose en un derecho básico de aprendizaje, este es: *“Clasifica, describe y representa objetos del entorno a partir de sus propiedades geométricas para establecer relaciones geométricas entre las formas bidimensionales y tridimensionales de la secuencia”*, el cual estaba como guía del diseño de las

tareas. Sin embargo, la profesora Rocío orientó a los estudiantes presentando el eje conceptual, los sólidos geométricos y las tareas de aprendizaje, *calentando motores, la caja de Juan y propiedades de los sólidos geométricos con GeoGebra 3D*, que se abordarían tal como estaba en la guía del diseño de tareas.

Para la tarea *Calentando motores*, con relación al objeto matemático, la profesora Diana inicia vinculando las figuras geométricas (cuadrado y triángulo), mientras que la profesora Rocío inicia las tareas vinculando las figuras geométricas y los sólidos geométricos (cubo y tetraedro). En cuanto a la *configuración didáctica*, la profesora Diana organizó a los estudiantes por grupos para el desarrollo de la tarea, de esta manera orientó y generó la participación de los estudiantes para las discusiones que surgían o las preguntas que les hacía; por otro lado, la profesora Rocío, usó una configuración didáctica con los estudiantes en una disposición para el trabajo individual y de esta manera orientó a todo el grupo, permitiendo que los ocho estudiantes presentes en las clases participaran. De acuerdo con lo anterior, se observa que la profesora Diana usó la orquestación *discuss-the-screen*, mientras que la profesora Rocío usó *explain-the-screen* y *link-screen-board*.

La profesora Diana promueve la discusión en el aula al introducir las imágenes de las formas geométricas que aparecen en la pantalla, esta orientación está dirigida para que los estudiantes describan el uso de las formas geométricas propuestas; en cambio, la profesora Rocío, usa la explicación de la pantalla a partir de las imágenes de figuras geométricas y sólidos geométricos, y orienta a los estudiantes a describir y comparar las formas que aparecen en la proyección.

Para la tarea *La caja de Juan*, de acuerdo con la secuencia de tareas, se vincularon artefactos manipulativos y la situación a resolver, la cual tenía como actividad la descripción de los sólidos geométricos (cubo y tetraedro) por parte de los estudiantes. En esta tarea, las profesoras vinculan distintos materiales manipulativos; por un lado, la profesora Diana usó una caja con diferentes artefactos para ser manipulados por todos los grupos; mientras que la profesora Rocío, utilizó artefactos para ser manipulados de manera individual.

En relación con las orquestaciones, la profesora Diana usó orquestaciones grupales *guide-and-explain* y *Spot-and-show*, la primera para introducir el cambio de tarea con base a lo que sucedía en la pantalla con la vinculación a los materiales manipulativos, lo que permite a los estudiantes coger y mover los objetos con sus manos; y la segunda, hace que los estudiantes muestren sus ideas matemáticas, expliquen y compartan comentarios sobre el desarrollo de esta tarea. En contraste, la profesora Rocío usa la orquestación *guide-and-explain* para introducir el cambio de tarea a toda la clase a través de la presentación en la pantalla y, a su vez, la orquestación *individual-guide-and-explain* que condujo a una interacción profesor – estudiante, mediada por preguntas y el uso de material manipulativo para que las tareas sean resueltas por los estudiantes.

En la tarea *las propiedades de los sólidos geométricos*, las profesoras vincularon un material manipulativo virtual como lo es GeoGebra 3D, siguiendo el objetivo de aprendizaje descrito: “*reconocer las propiedades de los poliedros regulares convexos; el cubo y el tetraedro en GeoGebra 3D*”. La profesora Diana, usó la aplicación de GeoGebra 3D con todas las herramientas que esta tiene, en cambio, la profesora Rocío usó una actividad limitando el número de herramientas a las que tenía acceso el estudiante. En relación con la manera de

orquestrar, las profesoras Diana y Rocío recurrieron a las orquestaciones grupales *Explain-the-screen*, la cual permite explicar las tareas a resolver por los estudiantes con apoyo de la presentación en la pantalla a la que todos tienen acceso; y *Technical-support*, que señala un trabajo más dedicado a resolver cuestiones técnicas como el encendido de los computadores, la conexión de los equipos a la red eléctrica, fallas al tratar de abrir la aplicación de GeoGebra 3D. Además, en esta tarea la profesora Rocío usó la orquestación *Individual-discuss-the-screen* que condujo a una interacción individual con preguntas generadas por la profesora, que buscaba que los estudiantes expresaran sus ideas matemáticas a través de la vinculación del material manipulativo virtual y el uso de las herramientas dispuestas en applet.

Ahora bien, en relación a las adaptaciones que se le realizaron a la secuencia, se pudo evidenciar que en el caso de la profesora Rocío, dado que tuvo que aplicar la clase en una situación de pandemia que la llevó a adecuarla con relación al uso de los tiempos, los protocolos de bioseguridad para la implementación del material concreto y el uso individual de tabletas para cada estudiante, entre otros aspectos.

Capítulo 5. Conclusiones

En este apartado se presentan los resultados de la investigación en cuatro momentos: el primero trata de aspectos relacionados con el problema de investigación, la metodología y el marco teórico; en el segundo, se revisa el cumplimiento de los objetivos; en el tercero, se consideran algunos hallazgos del diseño de tareas y la planificación; y en la cuarta, se resaltan los aportes logrados desde un análisis reflexivo del proceso de investigación.

El primer momento encierra aquellos aspectos relacionados con el problema, la metodología y el marco teórico. Con relación al planteamiento del problema, se pudo constatar que al caracterizar el proceso de enseñanza de acuerdo con la perspectiva de la *orquestración instrumental*, se puede dar cuenta del profesor como orquestador en la puesta en acto, tener en cuenta los artefactos y la mediación que se logra con ellos y, también, reconocer que las tipologías de orquestración varían de acuerdo al contexto o situación social en la que el profesor se enfrenta, como es el caso de las clases en situación de alternancia. Adicionalmente tener en cuenta que, aunque las tareas son las mismas, la manera en la que el profesor orquesta varía y esto se debe a la situación social, como ya se mencionó, a la formación del maestro, a los ritmos de aprendizaje de los estudiantes en relación con sus conocimientos previos, entre otros aspectos a considerar.

Respecto a la metodología de investigación, se asumió un enfoque cualitativo, aplicado con la estrategia metodológica del estudio de casos, lo que permitió documentar la experiencia de dos profesoras cuando realizaban la implementación de una secuencia de tareas y, en

particular, dar cuenta de la manera de orquestar cuando se integran materiales manipulativos concretos y virtuales en la enseñanza de los sólidos geométricos.

Esta metodología cumplió tres fases, a saber: i) construcción del problema; ii) diseño e implementación; y iii) análisis de datos; todas coherentes con los objetivos de investigación. En la primera, se fundamentó a partir de diferentes la problemática de la enseñanza de los poliedros regulares convexos en educación primaria, esto permitió reconocer la importancia de algunos fenómenos, pensamientos y procesos asociados con su enseñanza y aprendizaje para la consolidación del diseño de tareas e implementación mediante la articulación de artefactos; para la segunda fase del diseño, se realizó la secuencia de tareas y se analizaron los objetivos de aprendizaje, el avance en la construcción del objeto matemático, y los aportes y retos de los materiales manipulativos concretos y virtuales; en la tercera fase, se realizó la implementación de la secuencia de tareas y se realizó el análisis de cada uno de los casos, en ellos se establecieron las similitudes y diferencias, para esto se analizaron los videos que se obtuvieron durante la implementación de la secuencia de tareas.

En cuanto al marco teórico, este permitió orientar la configuración del diseño de tareas, las cuales se enmarcaron en las tareas exploratorias, además, se consideraron bases conceptuales relacionadas con la enseñanza de los poliedros regulares convexos.

En particular, el objetivo central de este trabajo era *caracterizar los procesos de enseñanza de los poliedros regulares convexos (el cubo y el tetraedro) en grado segundo de educación básica, desde la perspectiva de la orquestación instrumental*. Esto se logró en la medida en que se consideraron los momentos de la orquestación, *configuración didáctica*, los *modos de explotación y actuaciones didácticas*, estos fueron analizados de acuerdo con las

tipologías de orquestación, en donde algunas describen el quehacer del profesor y otras el del estudiante. A pesar de que este último no fue el objeto de estudio debido a que el trabajo pretende dar cuenta de la enseñanza, se tuvieron en cuenta algunas tipologías relacionadas con los estudiantes que se evidenciaron en la transcripción de las evidencias filmicas.

Ahora bien, este objetivo general contempló unos objetivos específicos:

El primero, se relaciona al hecho de que los educadores deben reflexionar en torno a los referentes teóricos validados en la educación matemática y las sugerencias curriculares del MEN. El objetivo versa así: *Describir los pensamientos, procesos y contextos matemáticos asociados con la enseñanza del cubo y el tetraedro, desde una perspectiva de los lineamientos curriculares en matemáticas*. De este se concluye que las profesoras participantes se interesaron en trabajar con enfoques diferentes y organizaron los objetivos de aprendizaje de acuerdo a las particularidades de cada escuela y al momento en el que se encontraban. Además, cada perspectiva aportó en la configuración de la propuesta de enseñanza como se describe desde los siguientes objetivos.

Para dar respuesta al segundo objetivo, *configurar un diseño de tareas, integrando material concreto y GeoGebra 3D, para la enseñanza del cubo y el tetraedro tomando como referente la orquestación instrumental*, se construyó una secuencia de tareas como propuesta para la enseñanza de los sólidos regulares convexos, integrando material concreto y GeoGebra 3D. Para el caso de la secuencia de tareas, se incluyen los materiales manipulativos para promover aprendizajes significativos.

De esta manera, la secuencia de tareas involucró preguntas con las cuales las profesoras gestionaron la enseñanza. En cada tarea había una entrada para las actividades por resolver, estas

permitieron a las profesoras guiar, explicar y mostrar apoyados en los materiales manipulativos para maximizar las posibilidades de comprensión de los estudiantes. En particular, la intención era buscar el uso de atributos para describir las formas geométricas, que los estudiantes expresasen lenguajes propios de las matemáticas en relación con los sólidos geométricos y discutan acerca de las situaciones planteadas, de conceptos y conexiones entre las palabras y los materiales manipulativos.

En relación con el tercer objetivo: “*Analizar el desarrollo del tipo de orquestación instrumental que surge en la implementación del diseño de tareas sobre el cubo y el tetraedro*”, se puede constatar que en beneficio de las prácticas de enseñanza, las profesoras asumen el diseño, la aplicación y la evaluación de los mismos. Esta implementación del diseño de tareas para la enseñanza de los poliedros, tuvo en cuenta los criterios de tareas (Da Ponte et al., 2013), los cuales resultan ser útiles porque promueven actividades matemáticas para promover procesos de comunicación y razonamiento.

Además, se puede concluir que los tipos de orquestación para toda la clase *discuss-the-screen*, *explain-the-screen* y *guide-and-explain*, permiten reconocer la gestión que realiza el profesor en relación con la implementación de la secuencia de tareas. Asimismo, este referente inspiró la integración de artefactos manipulativos concretos y virtuales en las clases de geometría, que posibilitaron la enseñanza en relación a crear más conexiones y que los estudiantes pudieran comprender ideas de geometría con diferentes materiales para resolver las tareas geométricas. Sin embargo, también se muestra que estas prácticas de enseñanza son desafiantes, permiten al profesor reflexionar sobre nuevas posibilidades o maximizar sus prácticas.

En el tercer momento se consideran algunos elementos centrales de los análisis del diseño y planificación. Para ello se presentan los resultados en relación con los *modos de explotación* y se concluye que la secuencia de tareas favorece la enseñanza porque las profesoras se beneficiaron de las tareas de la propuesta. Esto se evidencia porque en ambos casos las profesoras utilizaron el diseño de tareas para la enseñanza de los poliedros, dado que proporciona una secuencia de tareas adaptadas y que promueven oportunidades de aprendizaje al vincular varios materiales manipulativos, además, para promover en los estudiantes la consolidación del objeto matemático mediante tareas que les permitieron compartir sus ideas, comprobarlas en GeoGebra 3D y confrontarlas con sus compañeros.

El aprovechamiento de las interacciones en aula, tanto para los participantes en conjunto como de manera individual, permitió que los estudiantes comunicaran sus ideas, orientaran sus preguntas, recomendaran acciones para solucionar problemas con el uso de la tecnología y profundizaran en el conocimiento que evolucionaba en cada tarea. Finalmente, los estudiantes realizaron intervenciones más fluidas con relación a las propiedades de los sólidos (cubo y tetraedro).

Además, se presenta este trabajo como aporte y reflexión para todos los profesores que se interesan por mejorar las prácticas de enseñanza, pues se propone como guía para que mediante esta experiencia los profesores generen actividades de diseño de tareas y cada vez más amplíen sus posibilidades, incluyan materiales manipulativos concretos y virtuales, se apoyen y dinamicen desde cada uno los conocimientos en los tengan un interés.

Por último, cabe resaltar que este tipo de trabajos, desde su inicio, sirve como un recurso para el profesor y su formación profesional, para hacer mejoras en las prácticas de enseñanza,

profundizar en los diferentes referentes teóricos tanto de enseñanza como de aprendizaje, y atender estrategias que lleven al estudiante a comprender un concepto matemático apoyándose en los materiales manipulativos.

Limitaciones y proyecciones

En cuanto a las limitaciones que se encontraron para la realización de este trabajo, se debe mencionar que se vivió un momento difícil debido a la pandemia, pues los colegios públicos y privados empezaron a trabajar por medios virtuales y como la propuesta de la implementación de este trabajo se apoyaba principalmente en el uso de material manipulativo concreto, la ejecución de la secuencia de tareas se debía llevar a cabo en la presencialidad. La idea inicial era que ambas profesoras lo pudieran hacer en sus escenarios laborales, las cuales eran instituciones públicas, pero se tuvo que realizar una búsqueda en instituciones privadas, algunas de ellas estaban apáticas a la idea de implementar la propuesta debido a los riesgos que se generaban al dejar ingresar a personas externas. Después de un largo mes de búsqueda y solicitud de permisos, se pudo dar paso a la segunda implementación.

Ahora bien, en relación con las proyecciones investigativas, se debe mencionar que este trabajo representa un insumo para futuros trabajos de la línea de nuevas tecnologías y educación matemática, sin embargo, aún quedan aspectos por ahondar que fortalecen los procesos de enseñanza y aprendizaje, entre ellos:

¿Qué caracteriza el proceso de enseñanza que integra un diseño de tareas exploratorias con GeoGebra 3D para dar cuenta de los sólidos geométricos en grado quinto de educación básica? Esta pregunta surge dado que, si bien el trabajo fue implementado en el grado segundo, puede tener continuidad en los siguientes grados, donde se abordarían sólidos de mayor

dificultad, como sucedería en grado quinto con los sólidos que no son regulares, generando por parte del profesor otro tipo de orquestación en relación con la configuración didáctica, los modos de explotación y las actuaciones didácticas empleadas.

¿Qué decisiones didácticas surgen en torno a una comunidad de práctica con la implementación de una secuencia de tareas exploratorias relacionada con los sólidos geométricos? Esta pregunta surge dado que sería interesante documentar las decisiones que toma un grupo de docentes en relación a la planeación, implementación y reflexión de una clase alrededor de los sólidos geométricos.

Referencias Bibliográficas

- Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1999). *Materiales para construir la geometría*. Editorial Síntesis S.A..
- Amador, M. (2013). *El uso de tres tipos de material didáctico en la solución de una situación problema con objetos tridimensionales*. [Trabajo de pregrado, Universidad Tecnológica de Pereira]. Recuperado de <https://core.ac.uk/download/pdf/71397181.pdf>
- Barrantes, M y Barrantes, M. (2017) *Geometría en la educación primaria*. Indugrafic Digital.
- Bartolini, M. y Martignone, F. (2014). Manipulatives in mathematics education BT. En S. Lerman (Ed). *Encyclopedia of mathematics education*. (pp. 365 - 372). Springer.
- Baxter, P. y Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *The Qualitative Report*, 13(4), 544–559.
- Camargo, L. y Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED, Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, 32, 4–8.
http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0121-38142012000200001&lng=en&nrm=iso&tlng=es
- Cruz, A. (2017). *Criterios de idoneidad didáctica para el estudio de la visualización y geometría espacial en educación primaria. Aplicación al análisis de orientaciones curriculares*. [Trabajo de fin de Máster, Universidad de Granada].
<https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29085.82408>

- Da Ponte, J., Pereira, J., Enriques, A. y Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. En C. Margolinas (Ed.). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 493 -502). HAL. Archives-Ouvertes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v2>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234.
- Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., Doorman, M. y Boon, P. (2013). Digital resources inviting changes in mid-adopting teachers' practices and orchestrations. *ZDM Mathematics Education*, 45, 987–1001. <https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/s11858-013-0535-1>
- Drijvers, P., Tacoma, S., Besamusca, A., van den Heuvel, C., Doorman, M. y Boon, P. (2014). Digital technology and mid-adopting teachers' professional development: A case study. En A. Clark-Wilson, O. Robutti y N. Sinclair (Eds) *The mathematics teacher in the digital era*, vol 2. (pp. 189-212). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_9
- Duval, R. (2001). La Geometría desde un punto de vista cognitivo. *Pmme-Unison*, 2, 1-12. <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5- 55.

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval, A. Sáenz-Ludlow (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 13-60). DIE.
- González, E., Guillén, G. y Figueras, O. (2008). *Algunos elementos del modelo de competencia inicial para la enseñanza de la geometría de los sólidos en primaria. Análisis de un modelo de enseñanza en magisterio*. Trabajo presentado en Investigación En Educación Matemática XII, 2008, ISBN 978-84-934488-9-9.
- Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: observación de procesos de aprendizaje* (tesis doctoral). Universitat de València, Valencia.
- Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos: ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias*, 18(1), 35-53.
<https://core.ac.uk/download/pdf/38990609.pdf>
- Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, 16(3), 103–125. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516306>
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?, ¿y en la investigación? En M. Moreno, J. Carrillo, A. Estrada (Eds.).

- Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. <http://funes.uniandes.edu.co/1681/>
- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A. y Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la Geometría de los sólidos en la E.G.B. <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf>
- Guillén, G. y Figueras, O. (2005). Estudio exploratorio sobre la enseñanza de la geometría en primaria: curso-taller como técnica para la obtención de datos. Trabajo presentado en *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. ISBN 84-7801782-8, P. 227-234.
- Guin, D. y Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *ZDM*, 34(5), 204-211. <https://link-springer-com.bd.univalle.edu.co/content/pdf/10.1007/BF02655823.pdf>
- Gurdián-Fernández, A. (2007). *El Paradigma Cualitativo en la Investigación Socio-Educativa*. PrintCenter.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193-220.
- Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED. Revista de la Facultad de Ciencia y Tecnología*, 32, 55-70. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1859>
- Hernández, E. (2013). Geometría. Figuras Bidimensionales y Tridimensionales K - 3°. Universidad de P. R. en Bayamón.

https://matematicasiesoja.files.wordpress.com/2013/10/t5_figuras_bidimensionales_y_tridimensionales1ro_a_3ro1.pdf

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (1991). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Joyce, D. (1996). Euclid's Elements. Recuperado de <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI>.

Mackrell, K., Maschietto, M. y Soury-Lavergne, S. (2013). The interaction between task design and technology design in creating tasks with Cabri Elem. Shenton, A. K. (2004). En C. Margolinas (Ed.). *Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22*, pp. 79-88. Oxford. U.K. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v3>.

McClintock, E., Jiang, Z. y July, R. (2002). Students' development of three-dimensional visualization in the geometer's sketchpad environment. Trabajo presentado en *Proceedings of The Annual Meeting Of The North American Chapter Of The International Group For The Psychology Of Mathematics Education*. 2-17.

Margolinas, C. (2013). *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*. HAL. Archives-Ouvertes. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054v2>

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio.

MEN. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales*. Enlace Editores LTDA. http://colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN (Ed). *Estándares Básicos de Competencias En Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*, 46–95.

https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN. (2017). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Matemáticas. V2*. Panamericana Formas e Impresos S.A.

http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf

Navarrete, P. (2017). *Importancia de los materiales didácticos en el aprendizaje de las matemáticas* [Trabajo fin de grado, Universidad de Jaen].

http://tauja.ujaen.es/bitstream/10953.1/5752/1/Navarrete_Rodriguez_PedroJos_TFG_Educacion_Primary.pdf

Orozco, E., López, D. y Serna, M. (2013). *Métodos de enseñanza de cuerpos y figuras geométrica en tercer grado de básica primaria*. [Trabajo de grado, Universidad Tecnológica de Pereira].

<http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/3883/37276O74.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Pérez, K. (2009). *Enseñanza de la geometría para un aprendizaje significativo a través de actividades lúdicas* [Trabajo de grado, Universidad de los Andes]. Venezuela.

http://bdigital.ula.ve/storage/pdfthesis/pregrado/tde_arquivos/28/TDE-2012-09-27T08:44:25Z-1815/Publico/perezkeyla.pdf

Puertas, M. (1996). *Traducción del libro Elementos: libros X-XIII*. Gredos S.A.

Ribeiro, C., Monteiro, R. y Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento matemático del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática*, 22(2), 123–138.

http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262010000200006&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Ruthven, K. (2014). Frameworks for Analysing the Expertise That Underpins Successful Integration of Digital Technologies into Everyday Teaching Practice. En A. Clark-Wilson, O. Robutti y N. Sinclair (Eds.). *The Mathematics Teacher in the Digital Era: An International Perspective on Technology Focused Professional Development*. (pp. 373–393). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_16

Santacruz, M. (2009). La gestión del profesor desde la perspectiva de la mediación instrumental. Trabajo presentado en *10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*.

Schoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4 (1), 1-94. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED462374.pdf>

Sinclair N. y Robutti, O. (2012) Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. En: M. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. Leung (Eds) *Third International Handbook of Mathematics Education*. Springer International Handbooks of Education. https://doi-org.bd.univalle.edu.co/10.1007/978-1-4614-4684-2_19

Stake, R. (1995). *The art of case study research*. Sage Publications

Taylor, S. y Bogdan, R. (2000) *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*.

Ediciones Paidós

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307.

Voltolini, A. (2018). Duo of Digital and Material Artefacts Dedicated to the Learning of Geometry at Primary School. En: L. Ball, P. Drijvers, S. Ladel, H. Siller, M. Tabach y C. Vale (Eds) *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_5

Yin, R. (1994). Investigación sobre Estudios de Casos. Diseño y Métodos. *Applied Social Research Methods Series*, 5, 1–35. [http://www.polipub.org/documentos/YIN ROBERT .pdf](http://www.polipub.org/documentos/YIN%20ROBERT.pdf)