

Estimación de posición tridimensional mediante la fusión de sensores de un teléfono inteligente y sensores externos para la navegación de un vehículo aéreo no tripulado

Duvan Santiago Becerra Chilito

duvan.becerra@correounivalle.edu.co



Programa de pregrado de Ingeniería Electrónica
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Facultad de Ingeniería
Diciembre 2025

Estimación de posición tridimensional mediante la fusión de sensores de un teléfono inteligente y sensores externos para la navegación de un vehículo aéreo no tripulado

Duvan Santiago Becerra Chilito
duvan.becerra@correounivalle.edu.co

Trabajo de grado dirigido al
Programa de pregrado de Ingeniería Electrónica
como requisito para optar por el título de
Ingeniero Electrónico

Director: Dr.-Ing. Esteban Rosero

Codirector: Pedro Luis Muñoz Murillo, MSc.

Programa de pregrado de Ingeniería Electrónica
Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica
Facultad de Ingeniería
Diciembre 2025

Aceptación

Nota de aceptación:

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Dr.-Ing. Esteban Rosero, Director

Pedro Luis Muñoz Murillo, MSc., Codirector

Cali, diciembre de 2025

Agradecimientos

Al concluir este trabajo y mirar hacia atrás, es inevitable regocijarse al contemplar el largo, pero gozoso, proceso que culmina en estas páginas. Tras recopilar tantos momentos, valoro hoy especialmente aquellas experiencias que me enseñaron que la verdadera forma de aprender es disfrutando del camino: con sus aciertos y errores, con frustraciones y alegrías, con las intensas y largas horas de estudio, así como con los ratos de ocio compartidos con amigos.

Agradezco profundamente a mi padre y a mi hermana, quienes siempre han sido un apoyo incondicional. A mi madre, agradezco infinitamente su guía y ejemplo de resiliencia, compromiso y, sobre todo, dedicación. A mi abuelo, maestro silencioso y mi mayor referente de sabiduría y paciencia, le debo la semilla de curiosidad que hoy define gran parte de quien soy.

Quiero expresar también mi más sincero agradecimiento a mi director, el profesor Esteban Rosero, por brindarme la oportunidad de desarrollar este proyecto, y especialmente a mi codirector, Pedro Muñoz, por su disposición, apoyo y tutoría constante desde el primer momento. A Juan Aguirre, quien hoy, más que un compañero o amigo, se ha convertido en un verdadero hermano de la vida.

Por último, pero no menos importante, agradezco a mis compañeros, quienes compartieron innumerables momentos conmigo y con quienes tuve el placer de disfrutar mis estudios, dejando amigos que permanecerán para toda la vida.

Gracias.

Duvan Becerra

Resumen

Los vehículos aéreos no tripulados han presentado avances significativos en sus sistemas de navegación y sensado, lo que ha incrementado su precisión, pero también sus costos operativos en áreas como la industria y la agricultura de precisión. En estos sectores, los UAV se emplean cada vez más para tareas de monitoreo, mapeo o riego, actividades que requieren exactitud en los sistemas de posicionamiento, tradicionalmente dependientes de sistemas costosos o de difícil adquisición. Ante la necesidad de obtener estimaciones confiables de posición, velocidad y altitud, surge el desafío de implementar soluciones más económicas, eficientes y sostenibles sin comprometer el desempeño del sistema.

En este contexto, la tecnología integrada en los teléfonos inteligentes se consolida como una alternativa prometedora. En este trabajo se propone el diseño de un algoritmo de estimación tridimensional para el control de un UAV, iniciando con el desarrollo de estrategias de control de altitud, postura y posición. Posteriormente, se implementa un esquema de estimación basado en el Filtro Kalman Extendido, destacando una metodología de sintonización de las matrices de covarianza fundamentada en la caracterización estadística del ruido. Finalmente, se desarrolla una aplicación para dispositivos Android que integra los sistemas de control y estimación, los cuales se validan mediante pruebas de vuelo, demostrando la viabilidad y eficiencia del sistema de estimación implementado en un teléfono móvil.

Palabras clave: estimación, posición, caracterización, covarianza, sensado, filtrado, control, cuadricóptero.

Abstract

Unmanned aerial vehicles have shown significant advances in their navigation and sensing systems, increasing their accuracy but also their operational costs in areas such as industry and precision agriculture. In these sectors, UAVs are increasingly used for monitoring, mapping, and irrigation tasks, activities that demand high accuracy in positioning systems, which have traditionally relied on expensive or hard-to-acquire technologies. Given the need to obtain reliable estimates of position, velocity, and altitude, the challenge arises of implementing more economical, efficient, and sustainable solutions without compromising system performance.

In this context, the technology integrated into smartphones emerges as a promising alternative. This work proposes the design of a three-dimensional estimation algorithm for UAV control, starting with the development of altitude, pose, and attitude control strategies. Subsequently, an estimation scheme based on the Extended Kalman Filter is implemented, highlighting a covariance-matrix tuning methodology grounded in the statistical characterization of noise. Finally, an application for Android devices is developed to integrate the control and estimation systems, which are validated through flight tests, demonstrating the feasibility and efficiency of implementing the estimation system on a mobile device.

Keywords: estimation, position, characterization, covariance, sensing, filtering, control, quadcopter.

Glosario

EKF *Extended Kalman Filter*. 7, 9, 29, 31, 34–36, 46, 50–53, 55, 56, 58, 59, 62, 67–71, 73, 75–77, 79

ESC *Electronic Speed Control*. 26, 56, 57

GNSS *Global Navigation Satellite System*. 5, 6

GPS *Global Positioning System*. 6–8, 18, 21, 33, 43, 51, 53–56, 60, 61, 64, 66–71, 73, 75–78

GUI *Graphical User Interface*. 58

IMU *Inertial Measurement Unit*. 6, 7

KF *Kalman Filter*. 6, 31

LiDAR *Light Detection And Ranging*. 1

NFC *Near Field Communication*. 5

RMSE *Root Mean Square Error*. 73–77

RTK *Real-Time Kinematics*. 64, 71, 73, 77

SNR *Signal to Noise Ratio*. 73–77

UAV *Unmanned Aerial Vehicle*. III, 1, 2, 6, 8–10

UKF *Unscented Kalman Filter*. 7

USB *Universal Serial Bus*. 6, 58

WLAN *Wireless Local Area Network*. 6

Tabla de contenido

	Pág.
Aceptación	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Glosario	V
Índice General	VI
Lista de figuras	IX
Lista de tablas	XI
1. Introducción.....	1
1.1. Marco teórico	2
1.1.1. Descripción del cuadricóptero	2
1.1.1.1. Dinámica de posicionamiento	2
1.1.1.2. Modelado teórico	3
1.1.2. El teléfono inteligente	5
1.1.2.1. Capacidad de sensado.....	5
1.1.2.2. Capacidad de comunicación	5
1.1.3. Sensado.....	6
1.1.4. Estimación	6
1.2. Descripción y contextualización del problema	8
1.3. Justificación	9
1.4. Objetivos	10
1.4.1. Objetivo general	10
1.4.2. Objetivos específicos.....	10
1.5. Estructura del libro.....	11
2. Control de postura, posición y altitud	12
2.1. Introducción.....	12
2.2. Control PID en cascada	12
2.2.1. Control de altitud	13
2.2.2. Control de postura	14

2.2.3.	Control de posición	15
2.3.	Sintonización de los controladores	16
2.4.	Mediciones accesibles para el control del cuadricóptero	17
2.4.1.	Sensores disponibles para medición	18
2.4.2.	Sensores externos	20
2.4.3.	Cálculo de medidas no disponibles	20
2.5.	Filtrado de señales	21
2.5.1.	Filtrado mediante un filtro Butterworth de segundo orden	23
2.6.	Distribución de las fuerzas	24
2.6.1.	Configuración en 'X' del cuadricóptero	25
2.6.2.	Conversión a PWM	26
2.6.3.	Limitaciones	26
2.7.	Conclusiones	28
3.	Filtro Kalman	29
3.1.	Introducción	29
3.1.1.	Filtro Kalman como observador de estado	29
3.2.	Filtro Kalman Extendido	31
3.2.1.	Descripción del modelo del filtro	31
3.2.2.	Etapas de predicción	32
3.2.3.	Etapas de actualización	32
3.3.	Diseño del estimador de posición tridimensional	33
3.3.1.	Discretización del modelo no lineal del cuadricóptero	35
3.3.2.	Aproximación lineal del modelo del cuadricóptero	36
3.3.3.	Método de diferencias finitas para el cálculo del Jacobiano	38
3.3.4.	Disponibilidad de observación	39
3.3.5.	Matriz de observación	40
3.4.	Matrices de covarianza	41
3.4.1.	Ajuste de la matriz de covarianza de medida R_k	42
3.4.2.	Ajuste de la matriz de covarianza de proceso Q_k	45
3.5.	Conclusiones	48
4.	Desarrollo del sistema	49
4.1.	Introducción	49
4.2.	Consideraciones iniciales para el desarrollo del estimador	49
4.2.1.	Tiempo de muestreo	50
4.2.2.	Matrices de covarianza establecidas	51
4.3.	Pruebas en simulación	52
4.3.1.	Conformación del sistema de simulación	53
4.3.2.	Pruebas simuladas	54
4.4.	Arquitectura general del sistema	56
4.5.	Entorno de desarrollo Android	58
4.6.	Interfaz	58
4.6.1.	Ajuste de parámetros	59

4.7.	Algoritmo de control y estimación integrados	60
4.7.1.	Tiempo de ejecución de los algoritmos integrados.....	61
4.8.	Conclusiones	62
5.	Validación, pruebas y resultados	63
5.1.	Introducción.....	63
5.2.	Metodología de las pruebas experimentales.....	63
5.2.1.	Trayectoria	64
5.3.	Pruebas experimentales	64
5.3.1.	Altitud	65
5.3.2.	Vuelo estacionario	66
5.3.3.	Seguimiento de referencias de posición.....	67
5.3.3.1.	Trayectoria cuadrada con cambio de altura	67
5.3.3.2.	Trayectoria H	69
5.4.	Velocidades lineales estimadas	72
5.5.	Análisis cuantitativo de los resultados	73
5.6.	Conclusiones	77
	Conclusiones	79
	Trabajos futuros	80
	Referencias	81
	Apéndice A. Especificaciones de hardware	85
A.1.	Teléfono móvil	85
A.2.	Comandos de manejo	85

Lista de figuras

FIGURA	Pág.
1.1. Ángulos de rotación.....	3
2.1. Lazo de control de altitud.	13
2.2. Estructura de control de postura.	14
2.3. Estructura de control de posición.	15
2.4. Metodología general de sintonización basada en Ziegler–Nichols.	16
2.5. Base empleada para la sintonización y pruebas preliminares.	16
2.6. Señales filtradas de aceleración en el eje x	24
2.7. Configuración en 'X'.	25
3.1. Arquitectura del FK como observador de estado.	30
3.2. Operación de las funciones de densidad de probabilidad.	30
3.3. Propagación de las funciones de distribución de probabilidad.	37
3.4. Trayectoria utilizada para la caracterización de sensores.....	44
3.5. Comparación entre la referencia de aceleración y la aceleración medida.	44
3.6. Caracterización del error para la aceleración en el eje X para la matriz R	45
3.7. Comparación entre la aceleración medida y la predicción del modelo.....	47
3.8. Caracterización del error para la aceleración en el eje X para la matriz Q	47
4.1. Estructura general del sistema de simulación.	53
4.2. Trayectoria cuadrada simulada en el plano x - y	54
4.3. Trayectoria H simulada en el plano x - y	55
4.4. Arquitectura general del sistema.....	57
4.5. Montaje general del cuadricóptero.....	57

4.6. Ventanas de ajuste y monitoreo en la aplicación móvil.	59
4.7. Interfaces de ajuste de parámetros en la aplicación móvil.	60
4.8. Lazos de control de postura, posición y altitud integrados con el estimador. .	60
4.9. Tiempo de procesamiento de los algoritmos integrados.	62
5.1. Trayectoria definida en campo para la validación experimental.	64
5.2. Resultados de la prueba de control y estimación de altitud.....	65
5.3. Resultados de la prueba de vuelo estacionario para los ejes x e y	66
5.4. Respuestas del sistema en los ejes x e y frente a la trayectoria cuadrada.	67
5.5. Acercamientos de las señales en los ejes x e y en la trayectoria cuadrada.	68
5.6. Trayectoria cuadrada completa en el plano x - y	68
5.7. Comportamiento de la altitud durante la trayectoria cuadrada.	69
5.8. Respuestas del sistema en los ejes x e y frente a la trayectoria H.	70
5.9. Acercamientos de las señales en los ejes x e y en la trayectoria H.....	70
5.10. Trayectoria H completa en el plano x - y	71
5.11. Comportamiento de la altitud durante la trayectoria H.....	72
5.12. Velocidades estimadas por el EKF.....	72
5.13. Señales de posición para la trayectoria cuadrada.	74
5.14. Señales de posición para la trayectoria H.	75
A.1. Especificaciones técnicas del teléfono utilizado.	85
A.2. Esquema general de control y asignación de funciones.	85

Lista de tablas

TABLA	Pág.
1.1. Comparación de técnicas de estimación.	7
2.1. Parámetros PID — Lineales y Angulares	17
2.2. Resumen de sensores y sus magnitudes medidas.....	18
3.1. Variables lineales y angulares del sistema.	40
4.1. Frecuencia de muestreo de los sensores disponibles.....	50
4.2. Tiempos de muestreo de los sensores.	50
4.3. Clasificación de las señales según su origen.	61
5.1. Resultados comparativos GPS vs EKF para trayectoria cuadrada.	75
5.2. Resultados comparativos GPS vs EKF para trayectoria H.	76
5.3. Resultados globales para ambas trayectorias.....	78
5.4. Resumen comparativo de métricas GPS vs. EKF para ambas trayectorias. ...	79

Capítulo 1

Introducción

La constante evolución en el desarrollo de los vehículos aéreos no tripulados (UAV, por sus siglas en inglés *Unmanned Aerial Vehicle*) supone una mejoría de sus herramientas de operación, así como de su relación costo/beneficio [1]. Una de las características fundamentales que requiere todo sistema de control y, en especial, los sistemas de vuelo para su correcto funcionamiento, es la capacidad de estimar correctamente datos de altitud, posición y velocidad de manera que se tenga la confiabilidad para efectuar acciones de control de navegación aérea [2]. Para satisfacer esta necesidad, los UAV cuentan actualmente con complejos sistemas de detección de variables físicas, como los sistemas LiDAR (de sus siglas en inglés *Light Detection And Ranging*), que se caracterizan por su alta resolución y precisión. Sin embargo, también se destacan por su elevado costo, complejidad y gasto energético [3]. Esto implica un aumento gradual en el costo de adquisición y operación de los UAV, lo que dificulta su implementación en tareas donde podrían ser beneficiosos para reducir costos y optimizar procesos. Los investigadores en esta área están trabajando para desarrollar una solución económica que ofrezca el rendimiento requerido con un tamaño y un consumo de energía razonables [3]. Considerando los factores económicos y operativos, resulta fundamental identificar características de los UAV que permitan incorporar mejoras o adaptaciones de bajo costo y bajo consumo energético. Estas optimizaciones deben reducir los costos operativos sin comprometer la integridad ni el desempeño del sistema, contribuyendo así a una mejor relación costo-beneficio y a su sostenibilidad a largo plazo [4, 5]. Una alternativa prometedora para este propósito es la integración de tecnología de teléfonos móviles [6]. Los dispositivos modernos reúnen sensores avanzados, capacidad de procesamiento, almacenamiento y múltiples opciones de conectividad, lo que puede cubrir diversas necesidades de los UAV. Su incorporación ofrece una solución económica y energéticamente eficiente, al aprovechar tecnología madura y ampliamente disponible para mejorar la funcionalidad y reducir los costos operativos [7].

1.1. Marco teórico

El presente trabajo tiene como objetivo desarrollar un estimador de posición tridimensional que combine datos de los sensores de un teléfono inteligente con información de sensores externos, con el fin de generar datos de navegación para un UAV. Para ello, se presentan los conceptos fundamentales que sustentan el diseño e implementación del sistema.

En primer lugar, se describe el UAV tipo cuadricóptero, resaltando sus características y principios de operación. Posteriormente, se analizan las capacidades de los teléfonos inteligentes, cuyos sensores y mecanismos de comunicación son clave para la adquisición y procesamiento de datos. Finalmente, se revisan los conceptos de sensado y se realiza un análisis comparativo de los algoritmos comúnmente utilizados en estimación.

1.1.1. Descripción del cuadricóptero

Un UAV tipo cuadricóptero es un vehículo aéreo no tripulado que utiliza cuatro rotores dispuestos de forma que hélices adyacentes giran en sentidos opuestos, eliminando la necesidad de un rotor de cola. Esta configuración equilibra el momento angular y proporciona estabilidad en vuelo [8]. Además, el cuadricóptero se modela como un sistema dinámico acoplado, donde los cambios en la velocidad de los motores afectan simultáneamente la postura y la posición del UAV. Variaciones en la potencia de un rotor modifican la altitud y el desplazamiento, exigiendo un control preciso para mantener el equilibrio y la trayectoria [9].

1.1.1.1. Dinámica de posicionamiento

La dinámica de posicionamiento de un cuadricóptero describe el proceso mediante el cual se determina y mantiene su ubicación en el espacio tridimensional durante el vuelo. La orientación de la aeronave se define mediante tres ángulos de rotación, conocidos como ángulos de Euler [10], representados en la figura 1.1, y asociados a un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) .

Estos ángulos se describen de la siguiente forma:

- **Yaw (Giro):** rotación alrededor del eje vertical (z), que define la orientación.
- **Pitch (Cabeceo):** rotación alrededor del eje longitudinal (y), que determina el movimiento hacia adelante o atrás.
- **Roll (Alabeo):** rotación alrededor del eje transversal (x), que determina el movimiento lateral.

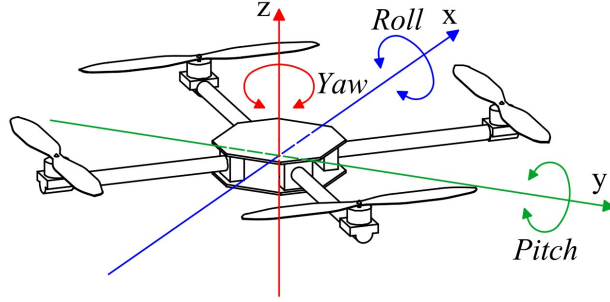


Figura 1.1: Ángulos de rotación.

1.1.1.2. Modelado teórico

En los estudios [10] y [6], se presenta un modelo linealizado en términos de variables de estado. Este modelo se deriva de las ecuaciones de Euler-Lagrange y se divide en dos partes: una para la dinámica de las coordenadas de posición ξ y otra para las coordenadas angulares η , de la siguiente forma:

$$\xi = \begin{cases} \dot{x} = (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi) \frac{u_1}{m}, \\ \dot{y} = (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi) \frac{u_1}{m}, \\ \dot{z} = -g + (\cos \phi \cos \theta) \frac{u_1}{m}, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\eta = \begin{cases} \dot{\psi} = \dot{\phi} \left(\frac{I_x - I_y}{I_z} \right) + \frac{u_2}{I_z}, \\ \dot{\theta} = \dot{\phi} \left(\frac{I_z - I_x}{I_y} \right) + \frac{u_3}{I_y}, \\ \dot{\phi} = \dot{\theta} \left(\frac{I_y - I_z}{I_x} \right) + \frac{u_4}{I_x}, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde:

- ξ = coordenadas (x, y, z) ,
- η = coordenadas para los ángulos de Euler (ψ, θ, ϕ) ,
- (x, y, z) son las coordenadas en el plano horizontal y vertical,
- (ψ, θ, ϕ) son los ángulos de orientación Euler *yaw*, *pitch* y *roll* respectivamente,

- (I_z, I_y, I_x) son las inercias del cuerpo en los movimientos de los ángulos *yaw*, *pitch* y *roll* respectivamente,
- u_1, u_2, u_3, u_4 son las cuatro entradas de señales de control. La primera entrada es de fuerza y las entradas restantes son torques, en los ángulos *yaw*, *pitch* y *roll* respectivamente,
- m es la masa del cuadricóptero,

Definiendo las variables de estado como:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})^T = (x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi})^T, \quad (1.3)$$

y las cuatro entradas de control

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} T_u & \tau_\psi & \tau_\theta & \tau_\phi \end{pmatrix}^T, \quad (1.4)$$

donde $T_u, \tau_\psi, \tau_\theta, \tau_\phi$ es la entrada de control de fuerza y las entradas de control de torques en los ángulos *yaw*, *pitch* y *roll* respectivamente, se puede reescribir el modelo no lineal del cuadricóptero como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ (\cos x_{11} \sin x_9 \cos x_7 + \sin x_{11} \sin x_7) \frac{u_1}{m} \\ x_4 \\ (\cos x_{11} \sin x_9 \sin x_7 - \sin x_{11} \cos x_7) \frac{u_1}{m} \\ x_6 \\ -g + (\cos x_{11} \cos x_9) \frac{u_1}{m} \\ x_8 \\ x_{10} x_{12} \frac{(I_x - I_y)}{I_z} + \frac{u_2}{I_z} \\ x_{10} \\ x_8 x_{12} \frac{(I_z - I_x)}{I_y} + \frac{u_3}{I_y} \\ x_{12} \\ x_8 x_{10} \frac{(I_y - I_z)}{I_x} + \frac{u_4}{I_x} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Es importante señalar que el modelo presentado incluye explícitamente las posiciones y velocidades como estados. Incluir las aceleraciones como estados podría mejorar el desempeño del sistema, aunque conllevaría la dificultad adicional de extender el modelo para que incluya la dinámica de actuación.

1.1.2. El teléfono inteligente

Los teléfonos inteligentes se han convertido en herramientas esenciales gracias a sus capacidades de comunicación, procesamiento y sensado. Integran múltiples sensores, como acelerómetros, giroscopios, sensores de luz y lectores de huellas, que permiten una interacción intuitiva y personalizada [10, 9]. Además, incorporan procesadores de alto rendimiento capaces de ejecutar aplicaciones y tareas complejas sin comprometer el desempeño. Asimismo, disponen de diversas interfaces de conectividad, como Wi-Fi, *Near Field Communication* (NFC) y Bluetooth, que facilitan el intercambio de datos y la integración con otros dispositivos.

1.1.2.1. Capacidad de sensado

Los teléfonos inteligentes actuales, independientemente de su gama, incorporan una amplia variedad de sensores capaces de registrar datos de posición, aceleración, orientación y variables ambientales con alta precisión. Estas capacidades sensoriales resultan fundamentales en aplicaciones que requieren medir el movimiento del dispositivo en tres dimensiones y monitorear condiciones del entorno [11]. La plataforma Android clasifica sus sensores en tres categorías principales:

- **Sensores de movimiento:** detectan aceleraciones y rotaciones en los ejes x , y , z . Incluyen acelerómetros, giroscopios y sensores de vector de rotación.
- **Sensores ambientales:** miden variables del entorno como temperatura, presión, luminosidad y humedad. Entre ellos se encuentran el barómetro, el sensor de luz ambiente y el sensor de temperatura.
- **Sensores de posición:** determinan la ubicación física y orientación del dispositivo. Incluyen el magnetómetro, los sensores de orientación y los receptores GNSS.

1.1.2.2. Capacidad de comunicación

La capacidad de comunicación en dispositivos móviles es un componente esencial, pues permite la transferencia de datos y el acceso a redes inalámbricas y cableadas. Los principales métodos de comunicación presentes en la mayoría de dispositivos actuales son:

- **Wi-Fi:** permite la conexión a redes inalámbricas de área local WLAN [12].
- **USB:** el estándar *Universal Serial Bus* (USB) habilita transferencias de datos de alta velocidad mediante conexión cableada [13].
- **Red móvil:** permite la comunicación entre dispositivos en movimiento mediante una infraestructura distribuida de antenas y terminales móviles [6, 10].

1.1.3. Sensado

El sensado es un componente fundamental en los sistemas de estimación, ya que proporciona los datos necesarios para determinar el estado del sistema, incluyendo variables como posición, velocidad y orientación. Los sensores empleados en sistemas de navegación pueden clasificarse en las siguientes categorías:

- **Sensores inerciales:** una unidad de medición inercial (IMU, por sus siglas en inglés *Inertial Measurement Unit*) integra acelerómetros y giroscopios para medir aceleraciones lineales y velocidades angulares. Estos datos permiten estimar la orientación y, mediante integración, los cambios de posición y velocidad [14].
- **Sensores de posicionamiento (GPS/GNSS):** proporcionan la posición absoluta en coordenadas geográficas, aunque pueden verse afectados por interferencias y ruido en las señales satelitales [15].
- **Sensores de velocidad relativa:** tecnologías como el radar Doppler o los sensores ópticos de flujo miden la velocidad del UAV respecto al suelo, ayudando a corregir los errores acumulados por integración de la IMU.
- **Fusión sensorial:** combina la información de múltiples sensores para mejorar la precisión y robustez de la estimación del estado. Estos métodos integran datos inerciales y de posicionamiento absoluto mediante algoritmos de fusión [16].

1.1.4. Estimación

En cualquier sistema de estimación, las mediciones están afectadas por ruido y diversas fuentes de incertidumbre, lo que limita la exactitud de las predicciones. En los sistemas de estimación probabilísticos, como el Filtro de Kalman (KF, por sus siglas en inglés *Kalman Filter*) y sus variantes, la incertidumbre se modela mediante una **matriz de covarianza**, la cual cuantifica la variabilidad de cada estado y sus correlaciones [17].

Para sistemas no lineales como el cuadricóptero, las alternativas más utilizadas son el Filtro Kalman Extendido (EKF, por sus siglas en inglés *Extended Kalman Filter*), el Filtro Kalman Unscented (UKF, por sus siglas en inglés *Unscented Kalman Filter*) y los Filtros de Partículas (PF). Estos difieren principalmente en dos aspectos relevantes para aplicaciones embarcadas: *eficiencia computacional* y *capacidad de fusión multisensorial*.

Desde el punto de vista computacional, el EKF mantiene una complejidad del orden $\mathcal{O}(n^3)$ debido a las operaciones matriciales asociadas a la propagación e inversión de la matriz de covarianza [18, 19], siendo n el número de estados. El UKF, aunque evita la linealización explícita mediante el uso de puntos sigma, incrementa el costo computacional al requerir $2n + 1$ propagaciones del modelo por iteración [20, 21]. Por su parte, los Filtros de Partículas presentan una complejidad aproximada $\mathcal{O}(N_p)$, donde N_p es el número de partículas [22], el cual suele ser elevado (cientos o miles) para mantener precisión adecuada, lo que los hace menos adecuados para plataformas con recursos limitados.

En términos de fusión multisensorial, tanto el EKF como el UKF permiten integrar mediciones de diversas fuentes (IMU, GPS, barómetro, magnetómetro) dentro de un marco probabilístico consistente, mediante la definición explícita de matrices de covarianza de proceso y medida. En contraste, filtros complementarios como los de Mahony o Madgwick [23, 24] presentan muy bajo costo computacional, pero están diseñados principalmente para estimación de actitud y no permiten una integración directa y rigurosa de múltiples sensores de posición dentro de un modelo dinámico completo. La Tabla 1.1 resume la comparación bajo los criterios considerados.

Método	Complejidad	Fusión multisensorial
KF lineal	$\mathcal{O}(n^3)$	Sí (lineal)
EKF	$\mathcal{O}(n^3)$	Sí (no lineal)
UKF	$\mathcal{O}(n^3) + 2n + 1$ propagaciones	Sí (no lineal)
PF	$\mathcal{O}(N_p)$	Sí (no lineal, no gaussiano)
Mahony / Madgwick	$\mathcal{O}(n)$	Limitada (actitud)

Tabla 1.1: Comparación de técnicas de estimación.

Considerando que el sistema propuesto emplea un modelo dinámico no lineal y se implementa en un teléfono inteligente con recursos limitados, el EKF representa un compromiso adecuado entre precisión, capacidad de integración multisensorial y eficiencia computacional.

1.2. Descripción y contextualización del problema

En todos los sistemas robóticos móviles es de vital importancia contar con una correcta estimación de las variables de posición tridimensional, lo que habilita su uso en una amplia gama de aplicaciones. Actualmente, los sistemas de vuelo no tripulados deben ser capaces de determinar su posición de manera precisa para lograr un desplazamiento correcto o incluso realizar maniobras complejas. Esta problemática ha sido abordada en diferentes trabajos de investigación desde diferentes enfoques.

Específicamente en la Universidad del Valle, se han realizado trabajos como el presentado en [10], donde se exploró una solución para el control de vuelo de un cuadricóptero utilizando un teléfono inteligente como controlador. El objetivo de la investigación es aprovechar las capacidades de sensado, procesamiento, almacenamiento y comunicación que ofrecen estos dispositivos para ejecutar acciones de control. Sin embargo, esta solución se centró en el control de la elevación del vehículo mediante el uso de datos provenientes de los sensores integrados en el celular. Durante la implementación, surgieron desafíos relacionados con la variabilidad de las mediciones de los sensores, lo cual afectó significativamente el control del sistema. Para abordar este problema, se consideró la aplicación de algoritmos de estimación, como se describe en el trabajo realizado en [6], donde se emplearon dichos algoritmos para obtener mediciones más precisas de la elevación y velocidad de elevación, y además se utilizó el GPS para obtener mediciones de posición. No obstante, esta última estrategia también planteó desafíos relacionados con la información obtenida de los sensores, como el error de posicionamiento y el tiempo de actualización de la señal GPS.

Una de las metodologías comúnmente utilizadas para optimizar el uso de la información de los sensores es la fusión sensorial. Esta técnica permite tomar medidas y aprovechar las características de cada tipo de sensor, tomando decisiones basadas en la información procesada [25]. A pesar de esto, persisten problemas significativos en la estimación precisa de la posición tridimensional de los UAV, debido a la variabilidad en las mediciones, los tiempos predefinidos para la entrega de la información de algunos sensores y del sistema de posicionamiento, además de las limitaciones de los sensores integrados. Lo anterior plantea desafíos que afectan la confiabilidad y precisión de las acciones de control en la navegación aérea.

En [26] se implementa un sistema de fusión sensorial en un cuadricóptero utilizando un teléfono inteligente para mejorar la estimación de posición tridimensional. El trabajo desarrolla un estimador basado en el modelo no lineal del vehículo y emplea un Filtro Kalman Extendido (EKF), para el cual se linealizan las matrices requeridas y se ajustan de forma permisiva las matrices de covarianza. El algoritmo de control y estimación se implementa en Android y se valida frente a un sistema de posicionamiento estandarizado. Los resultados muestran que el estimador mejora la estimación de posición, aunque presenta una alta sensibilidad a ciertos patrones de movimiento debido a las limitaciones de los sensores del teléfono.

Como alternativa para mitigar esta problemática, se propone la incorporación de sensores adicionales y establecer una metodología clara para la sintonización de las matrices de covarianza, con el fin de construir un sistema más robusto y con datos provenientes de múltiples fuentes que mejoren la precisión de la fusión sensorial.

A partir de este planteamiento, surge la pregunta: ¿cómo se puede estimar la posición tridimensional de un vehículo aéreo no tripulado utilizando los sensores de un teléfono inteligente en conjunto con sensores externos?

1.3. Justificación

Los teléfonos inteligentes modernos integran sensores avanzados como acelerómetros, giroscopios y magnetómetros, capaces de proporcionar datos útiles para la navegación y el control de vehículos aéreos no tripulados. El uso de estos sensores integrados, en lugar de equipos especializados, puede reducir significativamente los costos de hardware y disminuir el peso del UAV, lo que, a su vez, mejora su autonomía y rendimiento operativo [27]. Además, estos dispositivos cuentan con capacidades de procesamiento suficientes para ejecutar algoritmos de análisis en tiempo real, permitiendo implementar funciones como detección de obstáculos, planificación de trayectorias y toma de decisiones sin procesadores adicionales. Esto facilita la incorporación de técnicas de visión por computadora y aprendizaje automático, aumentando la eficiencia del sistema [28].

En términos de almacenamiento los teléfonos inteligentes disponen de memoria amplia y de acceso rápido, útil para registrar datos de vuelo, capturar imágenes o almacenar información del sistema sin sistemas externos, simplificando la arquitectura del UAV [29].

Su conectividad mediante redes móviles y Wi-Fi permite transmitir datos en tiempo real y habilitar el control remoto desde aplicaciones móviles, evitando sistemas de comunicación dedicados y facilitando funciones como telemetría y transmisión de video [30]. Sin embargo, sensores como acelerómetros y giroscopios presentan limitaciones inherentes —ruido, deriva y restricciones físicas— que afectan la precisión de las estimaciones. La fusión sensorial compensa estas limitaciones al combinar múltiples fuentes de información, mejorando la estimación tridimensional en entornos dinámicos y con alta incertidumbre [31, 32].

En conclusión, la integración de la tecnología presente en los teléfonos inteligentes con sensores externos representa una alternativa viable para reducir costos y mejorar la eficiencia operativa. Este enfoque aprovecha sus capacidades de sensado, procesamiento, almacenamiento y conectividad, optimizando la relación costo-beneficio y favoreciendo la adopción de los UAV.

1.4. Objetivos

Con el ánimo de responder a las necesidades planteadas en este trabajo, se estableció el siguiente objetivo general y sus objetivos específicos.

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar un estimador de posición tridimensional, implementado en un teléfono inteligente, mediante la fusión de sensores internos al teléfono y sensores externos, para la navegación de un vehículo aéreo no tripulado.

1.4.2. Objetivos específicos

- Realizar un análisis comparativo de algoritmos y/o técnicas de estimación, enfocados en la navegación de vehículos aéreos no tripulados.
- Establecer la arquitectura del sistema de estimación, a partir de los sensores internos de un teléfono inteligente y sensores externos disponibles.
- Desarrollar la estrategia de estimación de posición para implementarla en un teléfono inteligente.
- Validar la estrategia de estimación de posición implementada en un teléfono inteligente.

1.5. Estructura del libro

El documento se organiza en varios capítulos, cada uno orientado a un aspecto específico del desarrollo del trabajo de grado. En el capítulo 1 se presenta el problema de investigación y el marco teórico, ofreciendo un marco teórico detallado sobre los temas relevantes, como la descripción y arquitectura del cuadricóptero, las capacidades del teléfono inteligente, el sensado y un análisis comparativo de las técnicas de estimación típicas, así como la contextualización, justificación y objetivos del estudio. El capítulo 2 describe el diseño del sistema de control de altitud, postura y posición, incluyendo la arquitectura adoptada, la sintonización de los controladores y la adquisición y adecuación de las mediciones utilizadas. En el capítulo 3 se exponen los fundamentos del filtro Kalman y sus extensiones, como el filtro Kalman Extendido, se analiza la disponibilidad de observación del sistema y se propone una metodología de sintonización de las matrices de covarianza basada en la caracterización estadística del ruido de los sensores y del proceso. El capítulo 4 detalla la implementación del sistema, partiendo de pruebas simuladas, especificando los requisitos y el montaje general, así como la integración del algoritmo de estimación con el sistema de control en el entorno de desarrollo de *Android*. En el capítulo 5 se validan los resultados obtenidos a través de múltiples pruebas experimentales, siguiendo una metodología definida y realizando un análisis cuantitativo de los resultados. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo, sintetizando los hallazgos más importantes, aportes del estudio y trabajos futuros.

Capítulo 2

Control de postura, posición y altitud

2.1. Introducción

El control PID es un algoritmo ampliamente estudiado y utilizado en el control de sistemas dinámicos [33]. Su simplicidad y capacidad de adaptación lo convierten en una herramienta eficaz para implementar arquitecturas de control en sistemas inestables, como los vehículos aéreos [34]. En este contexto, la estructura de control en cascada constituye una estrategia adecuada para gestionar las dinámicas complejas del cuadricóptero [35], ya que permite el control simultáneo de múltiples magnitudes físicas para garantizar una operación estable y una manipulación precisa.

En este capítulo se aborda el desarrollo del algoritmo encargado de ejecutar el control de altitud, postura y posición del cuadricóptero. Asimismo, se realiza un análisis detallado del acceso a las mediciones y referencias necesarias para la implementación del algoritmo, incluyendo el preprocesamiento y filtrado de señales involucradas en la adquisición de datos. Finalmente, se presentan las limitaciones y consideraciones técnicas que deben tenerse en cuenta para garantizar un desempeño confiable del sistema.

2.2. Control PID en cascada

La función en tiempo discreto del controlador PID paralelo se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$u(z) = K_p e(z) + K_i T_s \frac{1}{1 - z^{-1}} e(z) + \frac{k_d}{T_s} (1 - z^{-1}) e(z), \quad (2.1)$$

donde K_p , K_i y K_d representan las ganancias proporcional, integral y derivativa, respectivamente; $e(z)$ corresponde al error entre la señal de salida y la referencia, y T_s denota el período de muestreo.

Entendiendo el cuadricóptero como un sistema compuesto por diversas dinámicas interrelacionadas, cuyo control requiere ser abordado de forma coordinada, es posible establecer una relación funcional entre cada una de esas dinámicas y su impacto en el comportamiento general del sistema.

Tal como se especifica en la definición del modelo del cuadricóptero del capítulo 1, las cuatro entradas de control se definen como:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} T_u & \tau_\psi & \tau_\theta & \tau_\phi \end{pmatrix}^T,$$

donde T_u es la entrada de control de fuerza y τ_ψ , τ_θ , τ_ϕ son las entradas de control de torques en los ángulos *yaw*, *pitch* y *roll* respectivamente.

Bajo esta consideración, y dada la naturaleza específica de las dinámicas involucradas, se definen cuatro lazos de control independientes: uno para la altitud (eje z), otro para la orientación angular *yaw*, y dos adicionales para el control de posición en el plano horizontal (ejes x e y). En particular, estos últimos presentan la característica de que sus lazos pueden entenderse estructurados en dos etapas: por un lado, el control de la postura, que implementa el algoritmo para regular las magnitudes angulares (*pitch* y *roll*); y por el otro, el control de las magnitudes lineales (x e y) que sirven como referencias para la etapa de control angular.

Esta estructura será abordada en mayor profundidad en las siguientes secciones, donde se desarrollará detalladamente el diseño del control de postura y de posición.

2.2.1. Control de altitud

El control de altitud tiene como objetivo regular y mantener la elevación del cuadricóptero con respecto al eje z . La estructura de control en cascada se representa en la figura 2.1.

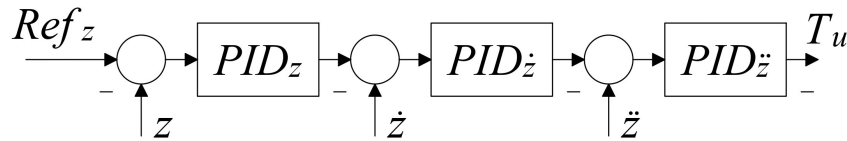


Figura 2.1: Lazo de control de altitud.

Donde Ref_z representa la entrada de referencia de altura, z corresponde a la medición de altura, y e_z es el error, el cual se envía al primer controlador que genera la señal de control $u_{\dot{z}}$, la cual sirve como referencia para el control de la velocidad de elevación. De manera similar, la señal de error $e_{\dot{z}}$ se utiliza como referencia para el controlador de aceleración, que finalmente genera la entrada de control T_u .

2.2.2. Control de postura

Para realizar el control de posición lineal del cuadricóptero, es necesario primero ejecutar el control de su postura angular, dado que el desplazamiento lineal depende directamente de la regulación de los ángulos de inclinación del vehículo. Bajo esta consideración, como se mencionó anteriormente, aunque los controladores de posición para x e y , así como los de postura para *pitch* y *roll*, forman parte de un mismo lazo de control, pueden entenderse como dos etapas independientes.

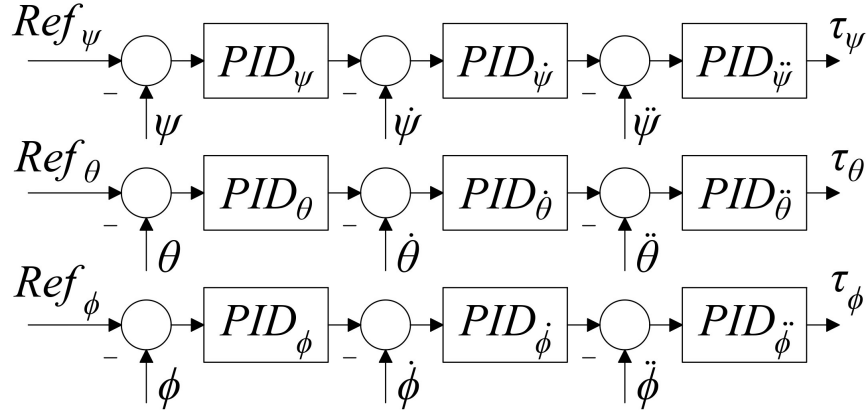


Figura 2.2: Estructura de control de postura.

La estructura de control en cascada para la postura se representa en la figura 2.2. En esta estructura, el control de postura se encarga de estabilizar el vehículo durante el vuelo, mientras que el control de posición genera las referencias de inclinación que permiten su desplazamiento.

De igual manera, el control de la postura para el ángulo *yaw* regula el giro respecto al eje z . En este caso particular, el control de *yaw* no requiere referencias provenientes de etapas anteriores, ya que puede definirse directamente. Para simplificar la implementación, se establece la referencia como $Ref_\psi = 0 \text{ rad}$, lo que fija una postura estática respecto al eje z .

De forma análoga al control de altitud, $Ref_\psi, Ref_\theta, Ref_\phi$ representan las referencias angulares; ψ, θ, ϕ corresponden a las mediciones de la posición angular en radianes; y e_ψ, e_θ, e_ϕ son los errores angulares, los cuales se envían a los controladores de postura que generan las señales de control u_ψ, u_θ, u_ϕ , que actúan como referencias para los controladores de velocidad angular. De manera similar, las señales de error $e_{\dot{\psi}}, e_{\dot{\theta}}, e_{\dot{\phi}}$ se utilizan como entradas para los controladores de aceleración angular, que finalmente generan las señales de control $\tau_\psi, \tau_\theta, \tau_\phi$.

2.2.3. Control de posición

Los controladores de postura y altitud garantizan un vuelo estable a una altura deseada; sin embargo, para permitir un vuelo con capacidad de regulación del desplazamiento y la posición, se incorporan etapas anteriores a los controladores de postura. Los controladores de posición lineal en los ejes x e y mantienen la misma estructura que el controlador de altitud. La estructura de control en cascada correspondiente se representa en la figura 2.3.

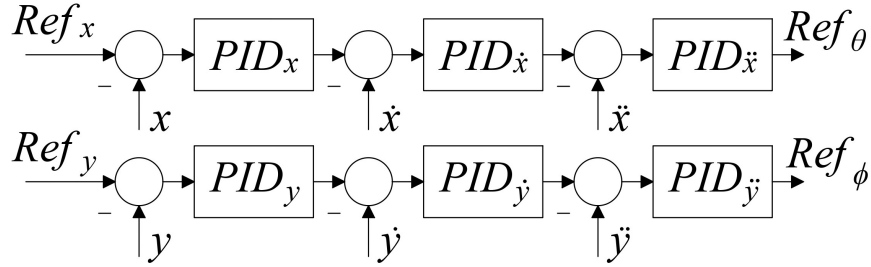


Figura 2.3: Estructura de control de posición.

Las señales Ref_x y Ref_y representan las entradas de referencia de posición proporcionadas por el usuario; x, y corresponden a las mediciones de posición, e_x, e_y son los errores, los cuales se envían al primer controlador que genera las señales de control $u_{\dot{x}}, u_{\dot{y}}$, las cuales actúan como referencias para la velocidad de desplazamiento. De manera similar, las señales de error $e_{\ddot{x}}, e_{\ddot{y}}$ se utilizan como entradas para los controladores de aceleración, que finalmente generan las referencias de postura angular Ref_θ y Ref_ϕ .

En esta etapa es fundamental considerar el tiempo de muestreo de los sensores de posición, típicamente entre 1 y 2 segundos, el cual difiere de las frecuencias de los demás sensores. Por ello, es necesario establecer una frecuencia de muestreo adecuada para el control. Este aspecto se aborda en el capítulo 4, donde se presentan los criterios iniciales y el proceso de desarrollo e integración entre los sistemas de control y estimación.

2.3. Sintonización de los controladores

Para alcanzar un desempeño adecuado del sistema de control, es necesario realizar una sintonización apropiada de los controladores PID. Una de las metodologías más utilizadas para este fin es el método de Ziegler–Nichols, el cual consiste en llevar el sistema experimentalmente al borde de la inestabilidad u oscilación sostenida y, a partir de este punto, ajustar las ganancias de forma iterativa hasta obtener una respuesta estable. Con base en esta técnica, se establece una metodología para el ajuste de todos los controladores del sistema de control propuesto. Esta metodología se divide en tres etapas principales, las cuales se ilustran en la figura 2.4.

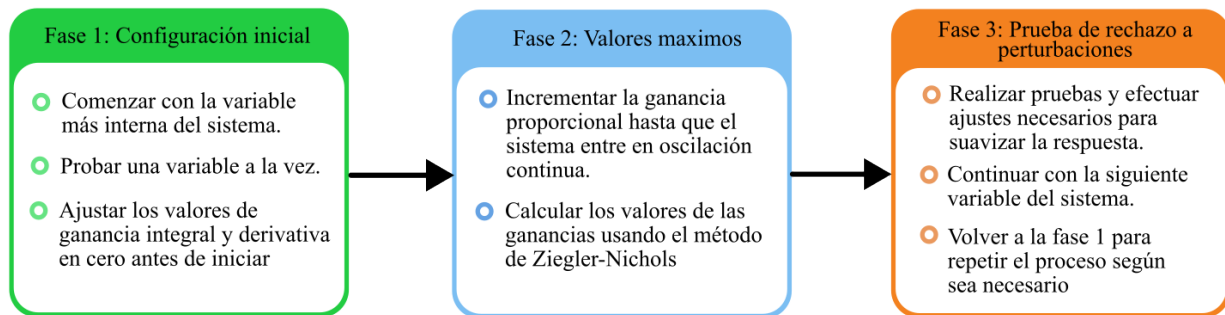


Figura 2.4: Metodología general de sintonización basada en Ziegler–Nichols.

Uno de los aspectos fundamentales para garantizar la repetibilidad del proceso y preservar la integridad del sistema y del usuario es disponer de una estructura física adecuada para el manejo experimental. La figura 2.5 muestra la base estructural empleada para este fin, la cual permitió realizar pruebas preliminares de estabilidad y asegurar condiciones controladas durante la calibración de los controladores.

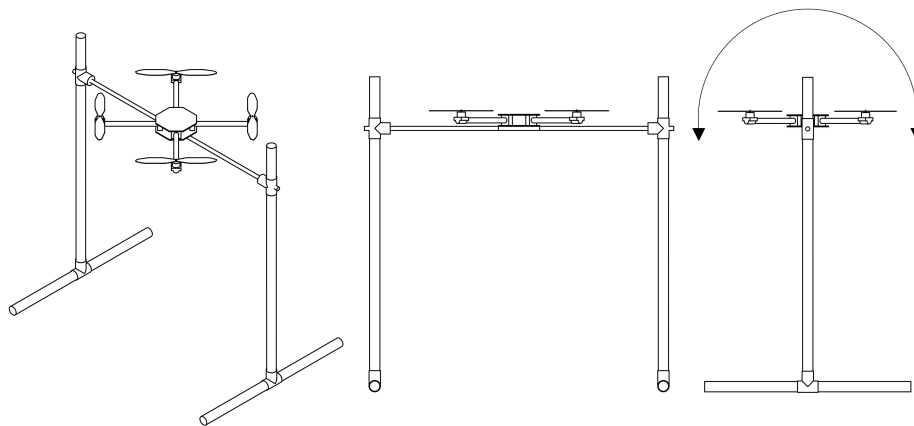


Figura 2.5: Base empleada para la sintonización y pruebas preliminares.

Siguiendo la metodología descrita anteriormente, se llevó a cabo el proceso de ajuste de todos los controladores del sistema. Las ganancias finales obtenidas se presentan en la tabla 2.1. En general, fue suficiente emplear únicamente acciones proporcionales, ya que con estas se alcanzó un desempeño adecuado para los objetivos planteados en el proyecto.

Variable	Kp	Ki	Kd
$\ddot{z}$	1.0	0.0	0.0
$\dot{z}$	2.5	0.0	0.0
z	0.5	0.07	0.0
$\ddot{x}$	0.05	0.0	0.0
$\dot{x}$	1.0	0.0	0.0
x	0.6	0.0	0.0
$\ddot{y}$	0.05	0.0	0.0
$\dot{y}$	1.0	0.0	0.0
y	0.6	0.0	0.0

(a) Ganancias PID para variables lineales.

Variable	Kp	Ki	Kd
$\ddot{\psi}$	0.01	0.0	0.0
$\dot{\psi}$	10.5	0.0	0.0
ψ	15.0	0.0	0.0
$\ddot{\theta}$	0.02	0.0	0.0
$\dot{\theta}$	8.0	0.0	0.0
θ	16.1	0.01	0.0
$\ddot{\phi}$	0.02	0.0	0.0
$\dot{\phi}$	10.5	0.0	0.0
ϕ	14.0	0.0	0.0

(b) Ganancias PID para variables angulares.

Tabla 2.1: Parámetros PID — Lineales y Angulares

El desempeño del sistema de control fue evaluado mediante respuestas al escalón en las posiciones x , y y z . En los ejes x y y se obtuvo un tiempo de estabilización cercano a 20s, con un sobrepaso inferior al 25%. Para el eje z , el tiempo de estabilización fue aproximadamente de 15s, manteniendo igualmente un sobrepaso por debajo del 25%. Si bien estos resultados evidencian un comportamiento estable y aceptable para la aplicación planteada, es importante señalar que la sintonización alcanzada no constituye una solución definitiva y es susceptible a mejoras.

2.4. Mediciones accesibles para el control del cuadricóptero

El funcionamiento adecuado de los controladores encargados de la estabilización del cuadricóptero depende del acceso a mediciones confiables que permitan ejercer control sobre las distintas dinámicas de vuelo. La disponibilidad de información suficiente y adecuada sobre las magnitudes físicas relevantes es fundamental para garantizar un desempeño correcto del sistema.

2.4.1. Sensores disponibles para medición

Tal como se menciona en el capítulo 1, el teléfono móvil utilizado para la implementación del sistema cuenta con la capacidad de adquirir las magnitudes físicas enumeradas en la tabla 2.2.

Tipo de Medición	Sensor	Magnitudes
Posición lineal horizontal	GPS	x, y
Posición lineal vertical	Barómetro	z
Aceleración lineal	Acelerómetro	$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$
Posición angular (rotación)	Orientación absoluta	ψ, θ, ϕ
Velocidad angular	Giroscopio	$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$

Tabla 2.2: Resumen de sensores y sus magnitudes medidas.

Dado que algunos sensores, como el GPS o el de orientación absoluta, pueden generar señales crudas en marcos de referencia distintos a los requeridos para el control, es necesario realizar un preprocesamiento que permita transformarlas y adecuarlas al marco coherente con el algoritmo de control empleado.

- **Preprocesamiento del GPS:** los sistemas de posicionamiento global suelen proporcionar información de geolocalización en coordenadas geográficas de latitud y longitud.

Aunque tradicionalmente se expresan en grados, minutos y segundos, en la actualidad se emplean principalmente grados decimales por su facilidad de procesamiento digital. Bajo esta representación, es posible convertir el desplazamiento angular a una distancia en metros de la siguiente manera:

El desplazamiento en el eje Norte-Sur (o eje x) se calcula como:

$$\Delta x = R \cdot \Delta lat \quad (2.2)$$

y el desplazamiento en el eje Este-Oeste (o eje y) se calcula como:

$$\Delta y = R \cdot \Delta lon \cdot \cos\left(\frac{lat_1 + lat_2}{2}\right), \quad (2.3)$$

donde las diferencias de latitud y longitud en radianes se calculan como:

$$\Delta lat = lat_2 - lat_1, \quad (2.4)$$

$$\Delta lon = lon_2 - lon_1, \quad (2.5)$$

donde R es el radio de la Tierra (aproximadamente $R = 6,371,000$ m), lat es la latitud en radianes y lon es la longitud en radianes.

- **Preprocesamiento del sensor de orientación absoluta:** el sensor de orientación absoluta presente en el teléfono, no entrega directamente las posiciones angulares en ángulos de Euler, sino un cuaternión de la forma:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, \quad (2.6)$$

donde w es la componente escalar y x, y, z son las componentes vectoriales.

Para convertir este cuaternión a ángulos de Euler ψ, θ, ϕ (*yaw, pitch, roll*), se utilizan las siguientes ecuaciones:

El *yaw*, o ángulo alrededor del eje z , se calcula como:

$$\psi = \text{atan2} \left(2(q_0q_3 + q_1q_2), 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) \right). \quad (2.7)$$

El *pitch*, o ángulo alrededor del eje y , se calcula como:

$$\theta = \text{asin} \left(2(q_0q_2 - q_3q_1) \right). \quad (2.8)$$

El *roll*, o ángulo alrededor del eje x , se calcula como:

$$\phi = \text{atan2} \left(2(q_0q_1 + q_2q_3), 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \right). \quad (2.9)$$

Además, es fundamental tener en cuenta que los sensores integrados en teléfonos inteligentes suelen ser dispositivos de bajo costo que presentan incertidumbre, ruido y desviaciones sistemáticas, afectando directamente la calidad de las mediciones y, por ende, el desempeño de los algoritmos de control.

Un caso representativo es el barómetro del teléfono, cuya señal presenta desviaciones atípicas que impiden obtener una estimación confiable de la altitud, volviéndola inapropiada para el lazo de control. A ello se suma su baja frecuencia de muestreo respecto a los demás sensores, lo que limita aún más su utilidad.

2.4.2. Sensores externos

La solución para adquirir las señales necesarias para el control y la estimación, pero que no se encuentran disponibles en el teléfono móvil o no cumplen con la precisión requerida, consiste en incorporar sensores externos al sistema. En el caso del barómetro, se integró el módulo *BMP390* de *Adafruit*, un sensor de presión barométrica que permite obtener una estimación más confiable de la altitud. Para estimar la altitud a partir de la presión atmosférica medida por el barómetro, se emplea la ecuación barométrica, la cual relaciona la presión con la altitud bajo condiciones atmosféricas estándar:

$$h = - \left(\frac{RT}{Mg} \right) \cdot \ln \left(\frac{P}{P_0} \right), \quad (2.10)$$

donde:

- h : altitud o altura sobre el nivel del mar (en metros, m),
- R : constante universal de los gases ideales (8.3144621 J/mol·K),
- T : temperatura absoluta (en kelvins, K),
- M : masa molar del aire (0.0289644 kg/mol),
- g : aceleración gravitacional (9.80665 m/s²),
- P : presión atmosférica medida (en pascales, Pa),
- P_0 : presión atmosférica a nivel del mar (en pascales, Pa), típicamente 101325 Pa.

2.4.3. Cálculo de medidas no disponibles

Hasta este punto se ha garantizado la adquisición de la mayoría de las mediciones necesarias para la realimentación de los controladores del cuadricóptero; sin embargo, aún es necesario asegurar la obtención de las mediciones de velocidad lineal y aceleración angular, requeridas para la realimentación de los controladores correspondientes.

Estas magnitudes, al no poder medirse directamente por la ausencia de los transductores necesarios, deben calcularse mediante métodos matemáticos como la diferenciación numérica. Sin embargo, estos métodos suelen amplificar el ruido y los errores de las señales, lo que puede afectar el rendimiento del sistema de control.

Considerando esto, es posible aproximar la velocidad lineal a partir de la diferencia finita aplicada a la posición proporcionada por el GPS para los ejes x e y , y por el barómetro para el eje z . De forma análoga, la aceleración angular puede estimarse mediante la diferencia finita de la velocidad angular dada por el giroscopio. En ambos casos se emplea la expresión de diferencia hacia atrás, dada de forma general por:

$$d_x[n] = \frac{\Delta x[n]}{T_s} = \frac{x[n] - x[n-1]}{T_s}, \quad (2.11)$$

donde:

- $d_x[n]$ representa una aproximación discreta de la derivada,
- $x[n]$ corresponde a la señal de entrada en el instante n ,
- $x[n-1]$ es la señal de entrada en el instante anterior,
- T_s es el intervalo de tiempo entre muestras (tiempo de muestreo).

Estas señales constituyen una aproximación inicial a las variables requeridas para el lazo de control. No obstante, su uso demanda especial precaución, ya que el cálculo analítico puede amplificar el ruido de las mediciones y generar sesgos sistemáticos si no se aplica un tratamiento adecuado. Este aspecto se aborda en la siguiente sección, dedicada al filtrado de las señales, y en el capítulo 4, donde se integra el sistema de control con el de estimación.

2.5. Filtrado de señales

Además del preprocesamiento de señales como la ubicación geográfica proporcionada por el GPS y la presión atmosférica medida por el barómetro, empleadas para estimar las componentes de posición x , y y z , es necesario aplicar un filtrado adecuado a las señales crudas provenientes de los sensores.

Esto se debe a que magnitudes como la velocidad angular y la aceleración lineal suelen presentar ruido de alta frecuencia, capaz de afectar de forma notable el desempeño del sistema de control. Dicho ruido compromete especialmente la gestión de dinámicas rápidas en los lazos de velocidad y aceleración, pudiendo inducir respuestas erráticas, aumentar el esfuerzo de control o incluso comprometer la estabilidad global del sistema.

Bajo estas consideraciones, se adopta un proceso inicial de filtrado mediante un filtro paso bajo discreto de primer orden. Este filtro, de bajo costo computacional y estructura simple, permite atenuar el ruido de alta frecuencia sin introducir retardos significativos, lo que lo convierte en una etapa preliminar adecuada antes de emplear técnicas de filtrado más robustas. El filtro se describe mediante la siguiente ecuación:

$$y[n] = \alpha \cdot x[n] + (1 - \alpha) \cdot y[n - 1], \quad (2.12)$$

donde:

- $x[n]$ es la señal de entrada en el instante n ,
- $y[n]$ es la señal filtrada en el instante n ,
- $y[n - 1]$ es la señal filtrada en el instante anterior,
- α es el coeficiente de suavizado, con $0 < \alpha < 1$.

Este filtro discreto, es la versión digital de un sistema continuo de primer orden con constante de tiempo τ . Cuya función de transferencia está dada por:

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (2.13)$$

Al discretizar se obtiene que:

$$\alpha = \frac{T_s}{\tau + T_s}, \quad (2.14)$$

donde T_s es el intervalo de tiempo entre muestras (tiempo de muestreo) y τ es la constante de tiempo del filtro.

Las constantes de tiempo utilizadas para las diferentes señales fueron las siguientes:

- $\tau = 0.4$ s para la posición lineal z ,
- $\tau = 0.05$ s para las orientaciones angulares ψ , θ , ϕ ,
- $\tau = 0.01$ s para las velocidades angulares $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\phi}$.

Las constantes de tiempo fueron determinadas mediante un procedimiento experimental estructurado, basado en el análisis sistemático de cada señal medida. En primer lugar, se realizó una adquisición de datos en condiciones controladas y con $T_s = 10$ ms, con el propósito de replicar el comportamiento de las mediciones durante el vuelo, generando escenarios que incluyeran tanto perturbaciones suaves como variaciones bruscas intencionales, además del ruido inherente en los sensores. Posteriormente, para cada señal se aplicó el filtro paso bajo realizando un barrido de la constante de tiempo τ .

En cada iteración se evaluaron dos criterios: (i) la capacidad de supresión de picos asociados al ruido de alta frecuencia y (ii) la preservación de las variaciones dinámicas intencionalmente inducidas en la señal. Adicionalmente, se impuso como restricción que el retardo introducido por el filtrado no superara 10 ms, valor considerado compatible con los requerimientos dinámicos del sistema de control. El impacto del proceso de filtrado se aprecia en la figura 2.6, en la cual se muestra, con fines ilustrativos, el resultado correspondiente al eje x del acelerómetro con $\tau = 0.05$ s.

Finalmente, la constante de tiempo seleccionada para cada señal correspondió a la mejor relación entre atenuación de ruido, fidelidad dinámica y retardo admisible.

2.5.1. Filtrado mediante un filtro Butterworth de segundo orden

Además del filtrado inicial mediante filtros de primer orden para atenuar componentes de alta frecuencia, es necesario recurrir a técnicas de filtrado más avanzadas cuando se requiere una mayor suavidad en la señal y una pendiente de atenuación más pronunciada. Este es el caso de señales altamente sensibles al ruido, como las aceleraciones lineales medidas por el acelerómetro, cuyas variaciones rápidas pueden afectar de manera significativa tanto la estimación de estados como el desempeño del sistema de control.

Para este propósito, se emplea un filtro Butterworth de segundo orden en su implementación discreta. Este filtro se caracteriza por una respuesta en frecuencia plana en la banda pasante, evitando ondulaciones indeseadas y ofreciendo un equilibrio adecuado entre atenuación, estabilidad y eficiencia computacional. El filtro Butterworth de segundo orden se expresa mediante la siguiente ecuación en diferencias:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2], \quad (2.15)$$

donde $x[n]$ y $y[n]$ corresponden a las muestras de entrada y salida en el instante n , respectivamente, y $x[n-1], x[n-2], y[n-1], y[n-2]$ representan sus dos muestras previas. Los coeficientes del filtro a_i y b_i dependen de la frecuencia de corte normalizada y se calculan como:

$$b_0 = \omega_c^2 \text{ norm}, \quad b_1 = 2b_0, \quad b_2 = b_0, \quad (2.16)$$

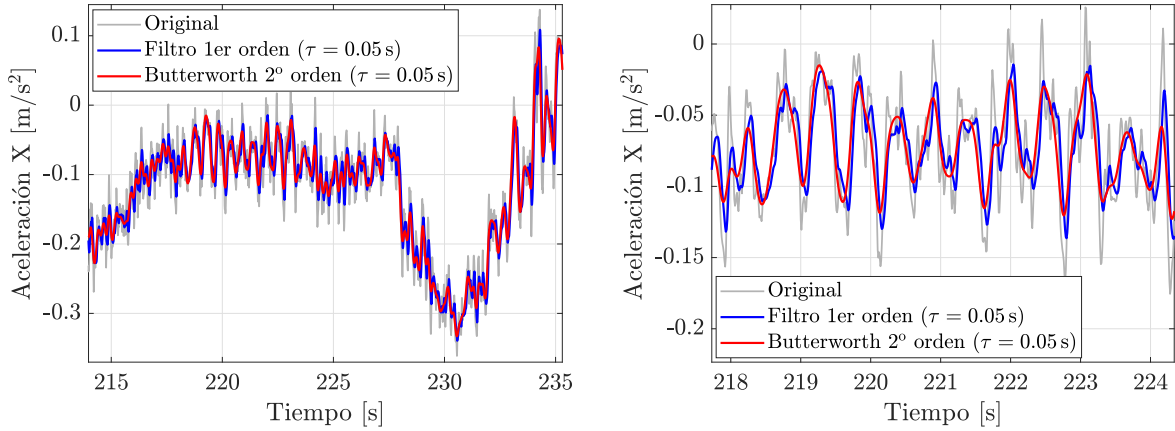
$$a_1 = 2 \frac{\omega_c^2 - 1}{1 + \sqrt{2} \omega_c + \omega_c^2}, \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{2} \omega_c + \omega_c^2}{1 + \sqrt{2} \omega_c + \omega_c^2}, \quad (2.17)$$

con:

$$\omega_c = \tan\left(\pi \frac{f_c}{f_s}\right), \quad (2.18)$$

$$f_s = \frac{1}{T_s}, \quad f_c = \frac{1}{2\pi\tau}, \quad \text{norm} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}. \quad (2.19)$$

Este filtro se aplica exclusivamente a las señales del acelerómetro y a la aceleración angular obtenida mediante la diferenciación finita de la velocidad angular, la cual es previamente filtrada con el filtro de primer orden. El filtrado se realiza de manera independiente en cada eje de aceleración lineal ($\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$) y angular ($\ddot{\phi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\psi}$). Las constantes de tiempo se determinaron experimentalmente a partir del análisis individual de las señales, siguiendo el mismo procedimiento descrito para el filtro de primer orden. El efecto del filtrado puede observarse en la figura 2.6, donde se presenta, a modo ilustrativo, el resultado obtenido para el eje x del acelerómetro con $\tau = 0.05$ s.



(a) Señal de aceleración en el eje x filtrada.

(b) Acercamiento a las señales.

Figura 2.6: Señales filtradas de aceleración en el eje x .

2.6. Distribución de las fuerzas

Las señales generadas por los cuatro lazos de control se expresan como fuerza y torques respecto a los ejes del cuadricóptero. En particular, T_u representa la fuerza total de sustentación, mientras que τ_ψ , τ_θ y τ_ϕ corresponden a los torques alrededor de los ejes z , y y x , respectivamente. Sin embargo, para emplear estas señales en el control del sistema es necesario convertirlas en comandos individuales, de modo que las fuerzas y torques se distribuyan correctamente entre los cuatro actuadores del cuadricóptero.

2.6.1. Configuración en 'X' del cuadricóptero

En esta configuración del cuadricóptero, la distribución de los motores se presenta en la figura 2.7, donde cada motor está representado por la fuerza F_{M_i} que genera.

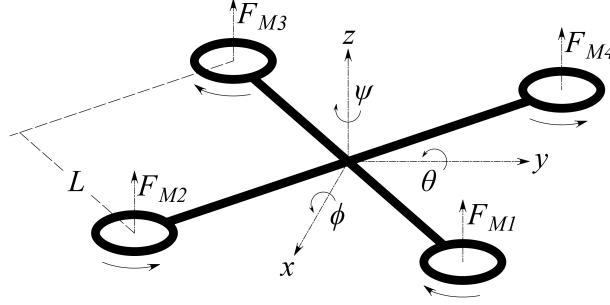


Figura 2.7: Configuración en 'X'.

En este sentido, las ecuaciones que describen la distribución de las fuerzas entre los cuatro motores del cuadricóptero se expresan como:

$$T_u = \sum_{i=1}^4 F_{M_i}, \quad (2.20)$$

$$\tau_\psi = k_M (F_{M_2} + F_{M_4} - F_{M_1} - F_{M_3}), \quad (2.21)$$

$$\tau_\theta = L_X (F_{M_3} + F_{M_4} - F_{M_2} - F_{M_1}), \quad (2.22)$$

$$\tau_\phi = L_X (F_{M_2} + F_{M_3} - F_{M_1} - F_{M_4}), \quad (2.23)$$

donde k_M representa la constante de proporcionalidad entre el torque y la fuerza aplicada, y $L_X = L \cdot \cos(\pi/4)$ corresponde a la distancia entre el centroide del cuadricóptero y los ejes laterales de los motores.

De esta forma, es posible construir la matriz de asignación para la distribución de las fuerzas en los cuatro motores, como:

$$\begin{bmatrix} F_{M_1} \\ F_{M_2} \\ F_{M_3} \\ F_{M_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -k_m & k_m & -k_m & k_m \\ -L_X & -L_X & L_X & L_X \\ -L_X & L_X & L_X & -L_X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_u \\ \tau_\psi \\ \tau_\theta \\ \tau_\phi \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.6.2. Conversión a PWM

La fuerza generada por los motores es proporcional a su velocidad de giro, la cual es regulada por los controladores electrónicos de velocidad (ESC, por sus siglas en inglés *Electronic Speed Control*) a partir de las señales PWM enviadas por el sistema de control. La distribución de estas fuerzas entre los cuatro motores se realiza mediante la matriz de asignación definida anteriormente.

Para establecer la relación entre la señal PWM y la fuerza generada, se requiere una caracterización experimental basada en un barrido lineal de la señal PWM y el registro de la fuerza resultante. Este procedimiento permite obtener el modelo matemático que describe la dependencia entre la señal de control y la fuerza desarrollada por los motores. En [6] se desarrolla detalladamente este procedimiento y se presenta la siguiente ecuación experimental, válida para señales PWM en el rango de 0 a 255:

$$F_{M_i} = -1.983 (\text{PWM}_i)^2 + 47.84 (\text{PWM}_i) + 3.835, \quad (2.25)$$

donde F_{M_i} se expresa en newtons.

2.6.3. Limitaciones

El funcionamiento de los motores está restringido por limitaciones físicas asociadas a la fuerza máxima que pueden generar a su velocidad de giro nominal, correspondiente al valor máximo de la señal PWM establecida. Por lo tanto, resulta necesario determinar los límites propios del sistema, para establecer rangos de operación seguros y asegurar que el control nunca entregue señales que superen dichos márgenes. Considerando que el límite superior de la señal PWM está dado por 255. La condición de saturación es:

$$\text{PWM}_i > 255 \quad \Longleftrightarrow \quad aF_{M,i}^2 + bF_{M,i} + c > 255. \quad (2.26)$$

Esto equivale a resolver la desigualdad cuadrática:

$$q(F) = aF^2 + bF + (c - 255) > 0, \quad (2.27)$$

donde los coeficientes son: $a = -1.983$, $b = 47.84$, $c = 3.835$.

Dado que $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo y la condición se cumple entre las raíces reales de $q(F)$:

$$F_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c - 255)}}{2a} \approx 7.7214 \text{ N}, \quad (2.28)$$

Así, se tiene:

$$\text{PWM}_i \leq 255 \iff F_{M,i} \leq 7.7214 \text{ N}. \quad (2.29)$$

Las fuerzas individuales F_{M_i} se obtienen a partir de las señales de control $u = [T_u, \tau_\psi, \tau_\theta, \tau_\phi]^\top$ mediante:

$$F_M = S \cdot u, \quad (2.30)$$

donde S es la matriz inversa de asignación. Para los parámetros $k_m = 0.021$ y $L = 0.113$ se obtiene:

$$S \approx \begin{bmatrix} 0.25 & -11.9048 & -2.2124 & -2.2124 \\ 0.25 & 11.9048 & -2.2124 & 2.2124 \\ 0.25 & -11.9048 & 2.2124 & 2.2124 \\ 0.25 & 11.9048 & 2.2124 & -2.2124 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

La componente i -ésima de F_M se expresa como:

$$F_{M,i} = s_{i1}T_u + s_{i2}\tau_\psi + s_{i3}\tau_\theta + s_{i4}\tau_\phi.$$

■ Punto de operación

Se considera como punto de operación:

$$T_u = mg = 1.538 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 15.0878 \text{ N}, \quad \tau_\psi = 0 \text{ N}.$$

En este punto, con $\tau_\theta = \tau_\phi = 0$, las fuerzas resultan:

$$F_{M,i} = s_{i1}T_u. \quad F_{M,i} = 0.25 \cdot 15.0878 \text{ N} \approx 3.7719 \text{ N}.$$

$$F_{M,i} \approx 3.7719 \text{ N} \quad \forall i,$$

es decir, por debajo de F_- , lo que garantiza PWM menores a 255 en operación nominal.

■ **Condiciones sobre τ_θ y τ_ϕ**

Para evitar que algún motor alcance el valor máximo de fuerza permitido por las limitaciones físicas del actuador ($F_{M,i} \geq 7.7214$), se establece la siguiente condición suficiente:

$$F_{M,i} \leq F_-, \quad \forall i. \quad (2.32)$$

Sustituyendo en la ecuación de asignación, se obtiene:

$$s_{i3} \tau_\theta + s_{i4} \tau_\phi \leq F_- - s_{i1} T_u, \quad (2.33)$$

donde el lado derecho resulta numéricamente constante para todos los motores:

$$F_- - s_{i1} T_u \approx 3.9495 \text{ N}.$$

Por lo tanto, se deducen las siguientes restricciones sobre los torques de control:

Si $\tau_\phi = 0$, entonces: $-1.7851 \text{ N} \leq \tau_\theta \leq 1.7851 \text{ N}$.

Si $\tau_\theta = 0$, entonces: $-1.7851 \text{ N} \leq \tau_\phi \leq 1.7851 \text{ N}$.

2.7. Conclusiones

En este capítulo se abordó el diseño y desarrollo del sistema de control de altitud, postura y posición para un cuadricóptero, partiendo de la definición general del esquema empleado, basado en controladores PID en cascada. Asimismo, se propuso una metodología para la sintonización fundamentada en la técnica de Ziegler–Nichols, estableciendo un procedimiento sistemático para la obtención de las ganancias de los controladores. Posteriormente, se evaluó el proceso de adquisición de mediciones requerido por los distintos lazos de control, junto con las etapas de adecuación y filtrado. Finalmente, se analizaron las consideraciones para la implementación en una plataforma física, así como las limitaciones para garantizar un desempeño adecuado del sistema.

A partir del procedimiento desarrollado en las secciones 2.2.2 y 2.4.3, se presentó el siguiente artículo:

Muñoz Pedro, Becerra Duvan, Rosero Esteban. *Angular Acceleration Control for Accurate Tracking for Quadrotor-Based Smartphone*. 2025 IEEE 7th Colombian Conference on Automatic Control (CCAC), October 14–17, 2025, Pereira, Colombia.

Capítulo 3

Filtro Kalman

3.1. Introducción

Con base en el análisis comparativo presentado en la Sección 1.1.4, y atendiendo a los criterios de precisión en la estimación y eficiencia computacional, se adopta el EKF como el método de estimación para la implementación propuesta.

El filtro Kalman es un algoritmo matemático que estima el estado no observable de un sistema dinámico a partir de mediciones ruidosas y parciales. Propuesto en 1960 por Rudolf E. Kalman, se aplica ampliamente en sistemas con evolución temporal, como el seguimiento de objetos y la navegación de vehículos [17]. Su funcionamiento consiste en combinar predicciones del estado del sistema, obtenidas a partir de un modelo matemático, con observaciones reales que pueden estar afectadas por ruido e incertidumbre, ajustando iterativamente la estimación mediante un enfoque probabilístico [17, 36].

En este capítulo se define el filtro de Kalman como observador de estado y se presenta su extensión al caso no lineal mediante el filtro Kalman Extendido, aplicado al cuadricóptero. También se describe el modelo empleado, el proceso de discretización y la aproximación lineal implementada mediante diferencias finitas. Finalmente, se analiza la definición de las matrices de covarianza a partir de la caracterización estadística del ruido, junto con las consideraciones prácticas de implementación y las conclusiones correspondientes.

3.1.1. Filtro Kalman como observador de estado

El observador de estado es una extensión en el lazo de control diseñado para modelar la dinámica del sistema físico, ver figura 3.1. Este observador estima los estados del sistema a partir de la respuesta del modelo y las mediciones disponibles de manera que sus valores convergen gradualmente hacia los estados reales del sistema.

Teniendo en cuenta lo anterior, se reconoce que toda medición es ruidosa y, por lo tanto, no refleja con total precisión la realidad. Si se conoce el modelo del sistema, es posible aplicar la entrada para estimar la salida $\hat{x}_k$; sin embargo, esta estimación tampoco es perfecta, ya que está sujeta a incertidumbre debido al ruido del proceso.

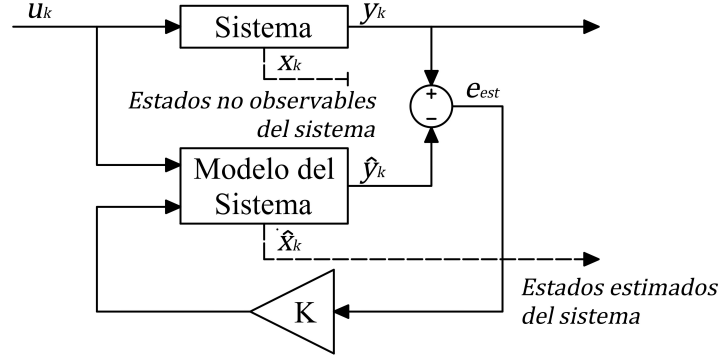


Figura 3.1: Arquitectura del FK como observador de estado.

El filtro de Kalman combina estos datos (medición y predicción) para obtener la mejor estimación posible en presencia de ruido e incertidumbre. La estimación óptima se obtiene al operar sobre las funciones de probabilidad de la predicción $\hat{x}_k$ y la medición y_k , escalando el resultado y calculando la media de la función de densidad de probabilidad resultante. Esta operación puede representarse gráficamente en la figura 3.2.

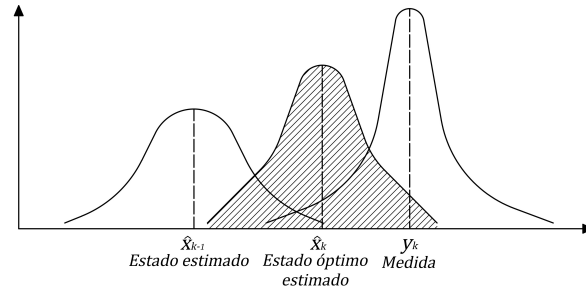


Figura 3.2: Operación de las funciones de densidad de probabilidad.

Computacionalmente, la operación de estas funciones se relaciona con la ecuación del filtro Kalman discreto, basado en la estructura del modelo lineal descrito como:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_k, \quad y_k = H_k x_k + v_k, \quad (3.1)$$

donde x_k representa el vector de estados, u_k la entrada de control, y_k el vector de mediciones, A y B las matrices del modelo dinámico, H_k la matriz de observación, y w_k , v_k los ruidos de proceso y medición, respectivamente.

Bajo esta formulación, el observador y la expresión del filtro Kalman adoptan la siguiente estructura:

$$\text{Observador de estado: } \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + K(y_k - H_k\hat{x}_k), \quad (3.2)$$

$$\text{Filtro Kalman: } \hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + K(y_k - H_k(A\hat{x}_{k-1} + Bu_k)), \quad (3.3)$$

donde:

$$A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} = \hat{x}_k^- : \text{Estimación a priori.}$$

Esta expresión permite predecir el estado actual $\hat{x}_k^-$ a partir de la estimación del estado en un instante anterior $\hat{x}_{k-1}$ y la entrada aplicada. De esta forma, la ecuación puede reescribirse como:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(y_k - H_k\hat{x}_k^-), \quad (3.4)$$

donde $\hat{x}_k^-$ corresponde a la predicción, K_k corresponde a la ganancia de Kalman, y_k representa la medición y H_k corresponde a la matriz de observación. La segunda parte de la ecuación emplea la medición y_k para corregir la predicción y obtener una estimación más precisa del estado. Este resultado es conocido como la estimación a posteriori $\hat{x}_k$.

Para garantizar el correcto funcionamiento del KF, el sistema debe ser controlable y observable. El análisis y verificación de estas propiedades se presentan en [26].

3.2. Filtro Kalman Extendido

El Filtro Kalman Extendido (EKF) es una versión del filtro clásico adaptada a sistemas no lineales, que emplea una linealización local de las funciones del modelo alrededor del estado estimado actual.

3.2.1. Descripción del modelo del filtro

El filtro de Kalman Extendido se fundamenta en la representación no lineal del sistema:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1}, \quad z_k = h(x_k) + v_k, \quad (3.5)$$

donde x_k representa el vector de estados, u_k la entrada de control, z_k el vector de mediciones, y w_k , v_k los ruidos de proceso y medición, respectivamente.

El algoritmo del filtro de Kalman se divide en dos etapas principales: **predicción** y **actualización**. A continuación, se presentan las ecuaciones que integran cada fase y la forma en que interactúan dentro del proceso de estimación.

3.2.2. Etapa de predicción

La etapa de predicción se encarga de estimar el estado futuro y su incertidumbre basada en el modelo del sistema y la información disponible hasta el instante de tiempo anterior $k - 1$, y está definida por las siguientes ecuaciones:

- Predicción del estado:

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}). \quad (3.6)$$

- Predicción de la matriz de covarianza:

$$P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^T + B_kQ_{k-1}B_k^T. \quad (3.7)$$

Se considera que el ruido Q_k afecta directamente a todos los estados sin ninguna transformación adicional; por lo tanto, $B_k = I$, y la ecuación se reduce a:

$$P_k^- = F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1}, \quad (3.8)$$

donde F_{k-1} representa el Jacobiano del modelo de estado utilizado para realizar la aproximación lineal del sistema no lineal, definido como:

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1}, u_{k-1}}. \quad (3.9)$$

3.2.3. Etapa de actualización

En esta etapa, se incorporan las mediciones en el modelo para corregir la predicción y reducir la incertidumbre. Está definida por las ecuaciones:

- Residuo de medición:

$$y_k = z_k - h(\hat{x}_k^-). \quad (3.10)$$

Para efectos de linealización, se utiliza el Jacobiano de la función de medición:

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\hat{x}_k^-}. \quad (3.11)$$

- Covarianza del residuo:

$$S_k = H_k P_k^- H_k^T + R_k, \quad (3.12)$$

donde R_k es la matriz de covarianza del ruido de medición.

- Ganancia de Kalman:

$$K_k = P_k^- H_k^T S_k^{-1}. \quad (3.13)$$

- Actualización del estado:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k y_k. \quad (3.14)$$

- Actualización de la matriz de covarianza:

$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-, \quad (3.15)$$

donde P_k representa la nueva incertidumbre del estado después de incorporar la medición.

3.3. Diseño del estimador de posición tridimensional

Con el objetivo de mejorar el desempeño en la estimación, se considera el uso de todas las mediciones disponibles que aporten información sobre el comportamiento del sistema. Esto permite estimar variables no medibles y mejorar la estimación de aquellas afectadas por altos niveles de ruido o medidas a frecuencias diferentes, como ocurre con el GPS.

Dado que se dispone de mediciones de posición lineal, aceleración lineal, orientación angular y velocidad angular, es necesario replantear el modelo descrito en el capítulo 1, mediante la ecuación 1.5. Esto se debe a que dicho modelo no incluye explícitamente las aceleraciones como estados, lo que impide aprovechar de forma directa las mediciones del acelerómetro para mejorar la estimación de la posición. Bajo esta consideración, y tomando como referencia los resultados presentados en [37], se propone como aporte de este trabajo la adopción de un modelo basado en las ecuaciones del *jerk*, definido como la tercera derivada de las posiciones lineales y angulares, es decir, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$.

La incorporación del *jerk* permite extender el vector de estados incluyendo explícitamente las aceleraciones, garantizando coherencia dinámica entre posición, velocidad y aceleración dentro del modelo de transición. De esta manera, las mediciones inerciales pueden integrarse de forma consistente en el EKF, mejorando la capacidad del filtro para capturar variaciones dinámicas rápidas y reduciendo errores asociados a la omisión de estados intermedios. Así, para el diseño del estimador de posición tridimensional se utilizará el siguiente modelo dinámico aumentado:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \psi \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \\ \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_{14} \\ \dot{x}_{15} \\ \dot{x}_{16} \\ \dot{x}_{17} \\ \dot{x}_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \frac{\dot{u}_1}{m}\Gamma_1 + \frac{u_1}{m}\dot{\Gamma}_1 \\ x_5 \\ x_6 \\ \frac{\dot{u}_1}{m}\Gamma_2 + \frac{u_1}{m}\dot{\Gamma}_2 \\ x_8 \\ x_9 \\ \frac{\dot{u}_1}{m}\Gamma_3 + \frac{u_1}{m}\dot{\Gamma}_3 \\ x_{11} \\ x_{12} \\ J_1 \\ x_{14} \\ x_{15} \\ J_2 \\ x_{17} \\ x_{18} \\ J_3 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

donde los términos de orientación se definen como:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \cos(x_{10}) \sin(x_{13}) \cos(x_{16}) + \sin(x_{10}) \sin(x_{16}), \\ \Gamma_2 &= \cos(x_{10}) \sin(x_{13}) \sin(x_{16}) - \sin(x_{10}) \cos(x_{16}), \\ \Gamma_3 &= \cos(x_{10}) \cos(x_{13}), \end{aligned}$$

y sus derivadas temporales como:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_1 = & -\sin(x_{10})x_{11}\sin(x_{13})\cos(x_{16}) + \cos(x_{10})\cos(x_{13})x_{14}\cos(x_{16}) - \cos(x_{10})\sin(x_{13})\sin(x_{16})x_{17} \\ & + \cos(x_{10})x_{11}\sin(x_{16}) + \sin(x_{10})\cos(x_{16})x_{17},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}_2 = & -\sin(x_{10})x_{11}\sin(x_{13})\sin(x_{16}) + \cos(x_{10})\cos(x_{13})x_{14}\sin(x_{16}) + \cos(x_{10})\sin(x_{13})\cos(x_{16})x_{17} \\ & - \cos(x_{10})x_{11}\cos(x_{16}) + \sin(x_{10})\sin(x_{16})x_{17},\end{aligned}$$

$$\dot{\Gamma}_3 = -\sin(x_{10})x_{11}\cos(x_{13}) - \cos(x_{10})\sin(x_{13})x_{14}.$$

Las derivadas de las aceleraciones angulares (jerks angulares) se expresan como:

$$\begin{aligned}J_1 &= \frac{I_x - I_y}{I_z} \left(\ddot{\phi}x_{14} + x_{11}\ddot{\theta} \right) + \frac{\dot{u}_2}{I_z}, \\ J_2 &= \frac{I_z - I_x}{I_y} \left(\ddot{\phi}x_{17} + x_{11}\ddot{\psi} \right) + \frac{\dot{u}_3}{I_y}, \\ J_3 &= \frac{I_y - I_z}{I_x} \left(\ddot{\theta}x_{17} + x_{14}\ddot{\psi} \right) + \frac{\dot{u}_4}{I_x}.\end{aligned}$$

En este punto, es importante considerar la complejidad del modelo, ya que, al tratarse de un sistema no lineal e inherentemente inestable, el ruido presente en los sensores puede afectar la ejecución de las señales de control. Por ello, para la operación adecuada del EKF resulta fundamental una selección adecuada de las matrices de covarianza Q_k y R_k , que representan el ruido de proceso y de medición, respectivamente. El procedimiento utilizado para la definición de estas matrices, se detalla en la sección 3.4.

3.3.1. Discretización del modelo no lineal del cuadricóptero

Para implementar el EKF en un teléfono inteligente, es necesario discretizar el modelo de manera que pueda ejecutarse de forma eficiente y estable en dicho entorno. El método de Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) constituye una opción precisa y robusta para la discretización de sistemas con dinámicas no lineales, permitiendo aproximar la evolución temporal del sistema con alta exactitud [38, 39]. Este método es un esquema numérico empleado para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad (3.17)$$

donde x representa los estados del sistema y u denota la entrada de control.

Mediante este procedimiento, la ecuación diferencial continua se transforma en una expresión discreta que permite estimar el estado en el siguiente instante de muestreo.

Este método calcula iterativamente la aproximación de los estados x en el instante $k+1$ mediante la siguiente ecuación:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T_s}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (3.18)$$

donde T_s representa el tiempo de muestreo y los coeficientes intermedios k_1, k_2, k_3 y k_4 se calculan como:

$$k_1 = f(x_k, u_k), \quad (3.19)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{T_s}{2}k_1, u_k\right), \quad (3.20)$$

$$k_3 = f\left(x_k + \frac{T_s}{2}k_2, u_k\right), \quad (3.21)$$

$$k_4 = f(x_k + T_s k_3, u_k). \quad (3.22)$$

Cada coeficiente k_i representa una evaluación de la función f en diferentes puntos intermedios dentro del intervalo de tiempo T_s . Al tomar un promedio ponderado de estos valores, RK4 logra una mejor aproximación que métodos más simples.

3.3.2. Aproximación lineal del modelo del cuadricóptero

El EKF se fundamenta en el uso de un sistema dinámico no lineal, el cual se modela generalmente de la siguiente forma:

$$x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k, \quad y_k = h(x_k) + v_k, \quad (3.23)$$

donde:

- x_k es el vector de estados en el instante k ,
- $f(x, u)$ es una función no lineal que describe la evolución del sistema,
- u_k es la entrada de control,
- w_k es el ruido del proceso con covarianza Q_k .
- y_k es la medición observada,
- $h(x)$ es la función no lineal de observación,
- v_k es el ruido de medición con covarianza R_k .

El filtro Kalman no puede aplicarse directamente a modelos de sistemas dinámicos no lineales, ya que si $f(x)$ no es una función lineal, la distribución de densidad de probabilidad resultante de la combinación de las funciones de probabilidad de la predicción x_k y la medición y_k deja de ser gaussiana (ver figura 3.3a).

Como consecuencia, el algoritmo del filtro puede no converger correctamente, lo que afecta su capacidad para predecir con precisión la incertidumbre de los estados. Esto puede provocar que el filtro subestime o sobreestime la covarianza del error, generando inestabilidad en la estimación del estado y, con el tiempo, llevando a resultados erróneos.

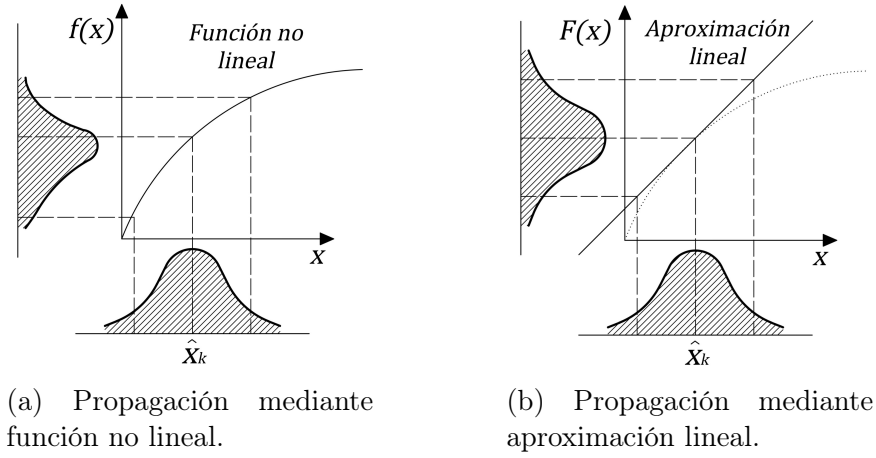


Figura 3.3: Propagación de las funciones de distribución de probabilidad.

Teniendo en cuenta lo anterior, el filtro Kalman solo es aplicable a sistemas lineales que pueden representarse mediante la estructura descrita en [26], expresada por las ecuaciones:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k, \quad (3.24)$$

$$y_k = Hx_k + v_k. \quad (3.25)$$

En ambos modelos, los términos w_k y v_k representan los ruidos de proceso y de medida, respectivamente, en el instante k . No es posible determinar un valor exacto para w_k y v_k , ya que estos ruidos varían en cada instante debido a las incertidumbres inherentes del modelo, al procesamiento de datos y a la naturaleza ruidosa de las mediciones. Estos ruidos se modelan mediante distribuciones de probabilidad con covarianzas Q y R , respectivamente, de la siguiente manera:

$$p(w) = \mathcal{N}(0, Q), \quad p(v) = \mathcal{N}(0, R). \quad (3.26)$$

El análisis detallado de estos ruidos se abordará en la sección 3.4, donde se explicará el establecimiento de las matrices de covarianza.

El filtro de Kalman tiene como propósito principal estimar el estado x_k de la ecuación que describe el modelo del sistema. Para ello, se apoya en el conocimiento de las dinámicas del sistema (modelo lineal aproximado), las características de las perturbaciones (representadas por las matrices de covarianza Q y R), y en las mediciones afectadas por ruido z_k . El filtro se encarga de reducir al máximo el impacto de las perturbaciones w_k y v_k sobre la estimación del estado [26, 36, 40].

Para extender el Filtro Kalman a sistemas no lineales, se realiza la aproximación lineal del modelo alrededor del estado actual (ver figura 3.3b), empleando la matriz Jacobiana descrita en la ecuación 3.9:

$$F_{k-1} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{k-1}, u_k},$$

donde F_{k-1} aproxima la variación de los estados ante pequeños cambios en x .

Sin embargo, el cálculo directo de las derivadas parciales para construir la matriz Jacobiana puede resultar costoso en términos computacionales, afectando la eficiencia del filtro y elevando los requerimientos de procesamiento. Por esta razón, se emplea una aproximación numérica del Jacobiano que permite ajustar la precisión de las derivadas, logrando así un equilibrio entre exactitud y eficiencia computacional.

3.3.3. Método de diferencias finitas para el calculo del Jacobiano

Para la aproximación del Jacobiano, se hace uso del método de diferencias finitas, un método numérico de fácil implementación y bajo costo computacional [41]. La aproximación numérica de la derivada parcial de f respecto a x_j se obtiene como:

$$F_{ij} \approx \frac{f_i(x + \Delta x_j) - f_i(x)}{\Delta x_j}, \quad (3.27)$$

donde x es el estado actual del sistema, Δx_j representa un incremento en la componente x_j del estado, y $f_i(x)$ corresponde a la i -ésima componente del modelo dinámico.

La matriz Jacobiana se construye calculando esta diferencia para cada estado x_j :

$$F = \begin{bmatrix} \frac{f_1(x+\Delta x_1)-f_1(x)}{\Delta x_1} & \frac{f_1(x+\Delta x_2)-f_1(x)}{\Delta x_2} & \dots & \frac{f_1(x+\Delta x_n)-f_1(x)}{\Delta x_n} \\ \frac{f_2(x+\Delta x_1)-f_2(x)}{\Delta x_1} & \frac{f_2(x+\Delta x_2)-f_2(x)}{\Delta x_2} & \dots & \frac{f_2(x+\Delta x_n)-f_2(x)}{\Delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_n(x+\Delta x_1)-f_n(x)}{\Delta x_1} & \frac{f_n(x+\Delta x_2)-f_n(x)}{\Delta x_2} & \dots & \frac{f_n(x+\Delta x_n)-f_n(x)}{\Delta x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Para la elección de Δx_j , se considera la relación entre precisión numérica y validez de la aproximación. Si el valor es demasiado pequeño, pueden surgir errores debido a la limitación en la precisión numérica; por otro lado, si es demasiado grande, la aproximación deja de ser válida [42]. Por esta razón, se adopta un criterio empírico basado en una elección típica, definida como: $\Delta x_j = \epsilon \cdot \max(|x_j|, 1)$, donde ϵ es un valor pequeño, generalmente del orden de 10^{-5} . Este criterio permite mantener un equilibrio adecuado entre estabilidad numérica y precisión en la estimación del Jacobiano mediante diferencias finitas [43].

3.3.4. Disponibilidad de observación

Antes de continuar con el diseño del estimador, es necesario realizar un análisis de los estados disponibles con el fin de verificar su disponibilidad para la medición en un contexto real.

El filtro de Kalman extendido, al incorporar el modelo del sistema, permite la observación de todos los estados definidos en la tabla 3.1. No obstante, en una aplicación práctica, la observación de los estados está condicionada por las capacidades de los sensores, que solo permiten medir directamente ciertas magnitudes físicas. Como resultado, el conjunto de estados observables se reduce a aquellas variables que pueden ser efectivamente medidas mediante los sensores disponibles.

En el capítulo 2 se detalló la capacidad del sistema para adquirir mediciones de magnitudes físicas obtenidas directamente de los sensores, sin recurrir a algoritmos de fusión ni a cálculos adicionales, más allá del preprocesamiento básico. Dichas mediciones se encuentran listadas en la tabla 2.2.

Categoría	Variables
Posiciones lineales	x, y, z
Velocidades lineales	$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$
Aceleraciones lineales	$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$
Posiciones angulares	ψ, θ, ϕ
Velocidades angulares	$\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$
Aceleraciones angulares	$\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}$

Tabla 3.1: Variables lineales y angulares del sistema.

A partir de lo anterior, se concluye que los estados de velocidad lineal y aceleración angular no son directamente observables, ya que no se dispone de sensores que midan físicamente estas magnitudes. Como se desarrolló anteriormente, dichas variables se obtienen analíticamente a partir de señales medidas, lo que limita su utilidad en el proceso de estimación y genera dificultades asociadas al tiempo de muestreo. Estas problemáticas se abordarán en la sección 4.7, en el marco de la integración del sistema de control con el estimador.

3.3.5. Matriz de observación

Conociendo la disponibilidad de observación de los estados y las mediciones, es posible definir la matriz de observación H_k . La ecuación (3.23), definida como: $y_k = h(x_k) + v_k$, describe el comportamiento de observación de los estados, donde y_k está representada como una función no lineal de los estados x_k .

Generalmente, cuando se conoce esta función no lineal que relaciona las salidas con los estados del sistema, se aplica un proceso de aproximación lineal similar al del modelo, utilizando el Jacobiano de $h(x_k)$, definido como:

$$H_k = \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_k}. \quad (3.29)$$

Sin embargo, cuando las mediciones corresponden directamente a estados del sistema o a combinaciones lineales de estos, la función de observación puede expresarse como una relación estrictamente lineal de la forma $y_k = Hx_k + v_k$.

En tales casos, el modelo de medición no introduce no linealidades adicionales y, por lo tanto, el Jacobiano de $h(x_k)$ coincide con la propia matriz H , resultando constante.

Esta situación es común cuando los sensores entregan mediciones directas de variables como posición, velocidad u orientación, sin involucrar transformaciones trigonométricas ni productos entre estados. Bajo estas condiciones, y conforme a la formulación del EKF presentada en [38, 19], no es necesario recalcular el Jacobiano en cada iteración, ya que la matriz de observación permanece invariante. En consecuencia, para la implementación del filtro en este trabajo se asume un modelo de medición lineal, definiéndose la matriz de observación H_k como:

$$H_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esta formulación, las tres primeras filas de la matriz corresponden a la observación de los estados de posición x, y, z , seguidas por las relacionadas con la aceleración lineal $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$. A continuación, se incluyen las observaciones de la orientación angular ψ, θ, ϕ , y finalmente las de la velocidad angular $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$. Dado que no se cuenta con sensores para medir directamente la velocidad lineal ni la aceleración angular, estos estados no se incluyen en la matriz de observación. De modo que el vector de salidas, queda expresado como:

$$y_k = (x_k, y_k, z_k, \ddot{x}_k, \ddot{y}_k, \ddot{z}_k, \psi_k, \theta_k, \phi_k, \dot{\psi}_k, \dot{\theta}_k, \dot{\phi}_k)^T \quad (3.30)$$

3.4. Matrices de covarianza

El correcto establecimiento de las matrices de covarianza juega un papel fundamental en el desempeño del filtro de Kalman, ya que estas determinan el grado de confianza otorgado a las estimaciones del modelo frente a las mediciones [17, 44]. En particular, dichas matrices reflejan la relación entre la varianza del ruido inherente en los sensores y el ruido asociado al modelo del proceso, influyendo de manera directa en la precisión, estabilidad y capacidad de seguimiento del filtro, así como en el desempeño del sistema de control.

Teniendo esto en consideración, se propone una metodología de parametrización de estas matrices fundamentada en la caracterización estadística del ruido presente en las señales del sistema, siguiendo los lineamientos establecidos en [45].

3.4.1. Ajuste de la matriz de covarianza de medida R_k

Los parámetros definidos en la matriz de covarianza de medición R_k modelan el ruido presente en los sensores en forma de varianzas asociadas a cada una de las mediciones. El valor asignado a cada elemento de la diagonal principal corresponde a la varianza de la medición respecto al estado observado. La matriz de covarianza R_k tiene dimensiones 12×12 y su estructura corresponde a la distribución definida en la matriz H_k . Para el ajuste de dichos parámetros, se propone un procedimiento fundamentado en la caracterización estadística del error entre una señal de referencia y una señal de medición. El flujo matemático está detallado en los siguientes pasos:

- **Definición de las señales:** sean $r_i(t)$, $m_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, las señales de referencia y las señales medidas respectivamente, donde n es el número de señales consideradas y t corresponde al índice temporal discreto con frecuencia de muestreo f_s .
- **Preprocesamiento:** para cada señal de referencia $r_i(t)$ y señal medida $m_i(t)$, se calcula y elimina el bias mediante la resta de su media:

$$\tilde{r}_i(t) = r_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_i(t), \quad \tilde{m}_i(t) = m_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N m_i(t), \quad (3.31)$$

donde N es un número de muestras arbitrario. De esta forma, todas las señales quedan centradas en torno a cero, evitando sesgos sistemáticos.

- **Restricción temporal:** se selecciona un intervalo de tiempo $[t_{\text{ini}}, t_{\text{fin}}]$, expresado en segundos. Dado que el muestreo es discreto, los instantes reales de análisis se definen como: $\mathcal{T} = \{t \in \mathbb{N} : f_s t_{\text{ini}} \leq t \leq f_s t_{\text{fin}}\}$.
- **Cálculo del error:** para cada señal i se define el error puntual como

$$e_i(t) = \tilde{m}_i(t) - \tilde{r}_i(t), \quad \forall t \in \mathcal{T}. \quad (3.32)$$

- **Modelado estadístico del error:** se considera que el error $e_i(t)$ se comporta como una variable aleatoria y se aproxima mediante una distribución normal:

$$e_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2),$$

donde:

$$\mu_i = \frac{1}{|\mathcal{T}|} \sum_{t \in \mathcal{T}} e_i(t), \quad (3.33)$$

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{|\mathcal{T}| - 1} \sum_{t \in \mathcal{T}} (e_i(t) - \mu_i)^2. \quad (3.34)$$

- **Validación empírica:** se construye el histograma de los valores de $e_i(t)$ y se superpone la densidad de probabilidad de la distribución normal ajustada mediante la ecuación:

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(e - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right). \quad (3.35)$$

- **Resultados:** finalmente, los parámetros μ_i y σ_i^2 se utilizan como indicadores de sesgo residual (media del error) y dispersión (varianza del error) de cada señal medida respecto a su referencia.

Para la caracterización de los sensores empleados en el desarrollo del estimador de posición se utilizaron los siguientes dispositivos externos, en conjunto con el teléfono móvil: el módulo giroscopio-acelerómetro de 6 ejes *ICM-45686* para la caracterización del acelerómetro y el giroscopio; el módulo *BNO055* de *Adafruit* para la caracterización del sensor de orientación absoluta; y, finalmente, para la caracterización de las posiciones lineales, se empleó la construcción de trayectorias y distancias establecidas como referencia. La trayectoria empleada para la caracterización de las mediciones inerciales se muestra en la figura 3.4.

El proceso de adquisición de las señales se lleva a cabo mediante toma de datos controladas, en las cuales ambos dispositivos (teléfono y sensor de caracterización) son expuestos a trayectorias definidas y reproducidas manualmente bajo las mismas condiciones experimentales. Estas pruebas permiten obtener señales de aceleración lineal, orientación angular y velocidad angular. En el caso de la posición lineal, se definen trayectorias conocidas en un campo abierto, las cuales se emplean como señales de referencia para la comparación con las mediciones obtenidas por el GPS y el barómetro.

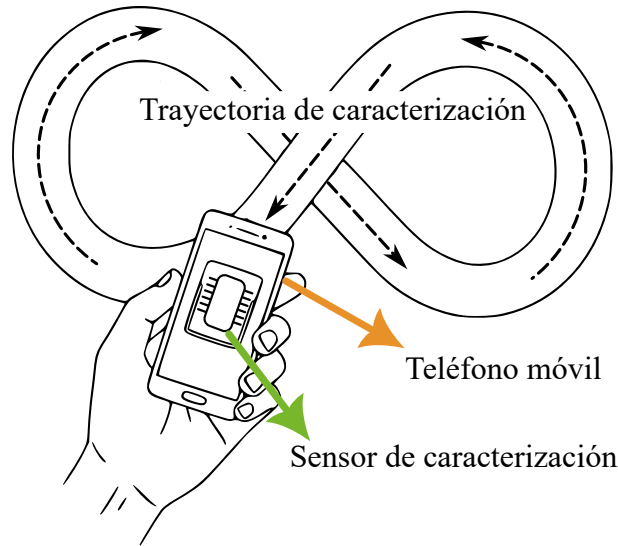


Figura 3.4: Trayectoria utilizada para la caracterización de sensores.

Las etapas del procedimiento se ejemplifican en las gráficas mostradas a continuación para la caracterización del acelerómetro en los tres ejes.

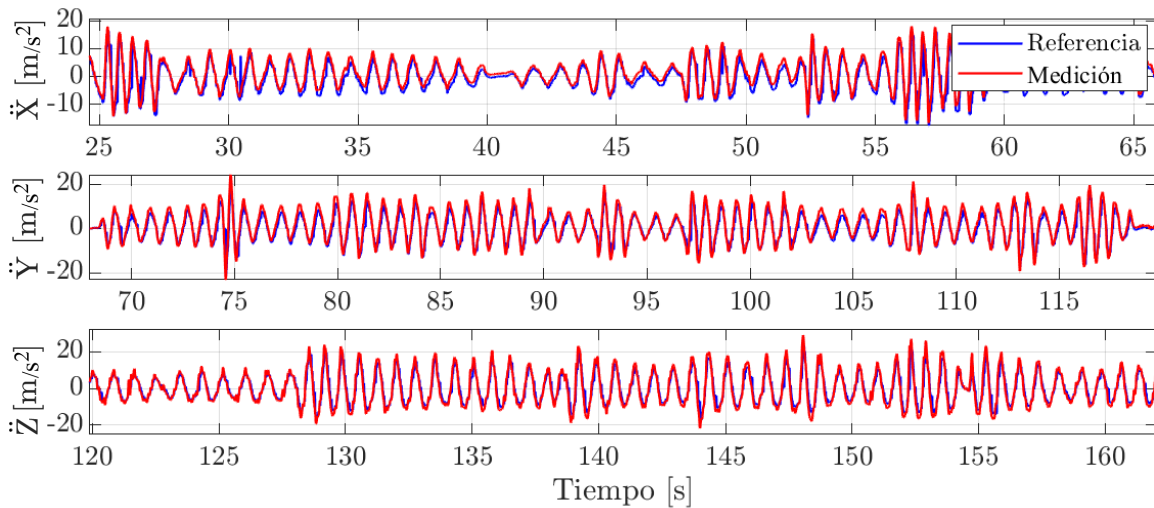


Figura 3.5: Comparación entre la referencia de aceleración y la aceleración medida.

En la figura 3.5 se presenta la comparación entre la señal de referencia obtenida con el módulo *ICM-45686* y la señal medida por el sensor integrado en el teléfono móvil. Por su parte, en la figura 3.6a se muestra el error resultante, calculado como la diferencia entre la medición y la referencia. Posteriormente, se realiza el modelado estadístico del error, asumiendo una distribución normal y calculando los indicadores de sesgo. El ajuste obtenido se presenta en la figura 3.6b.

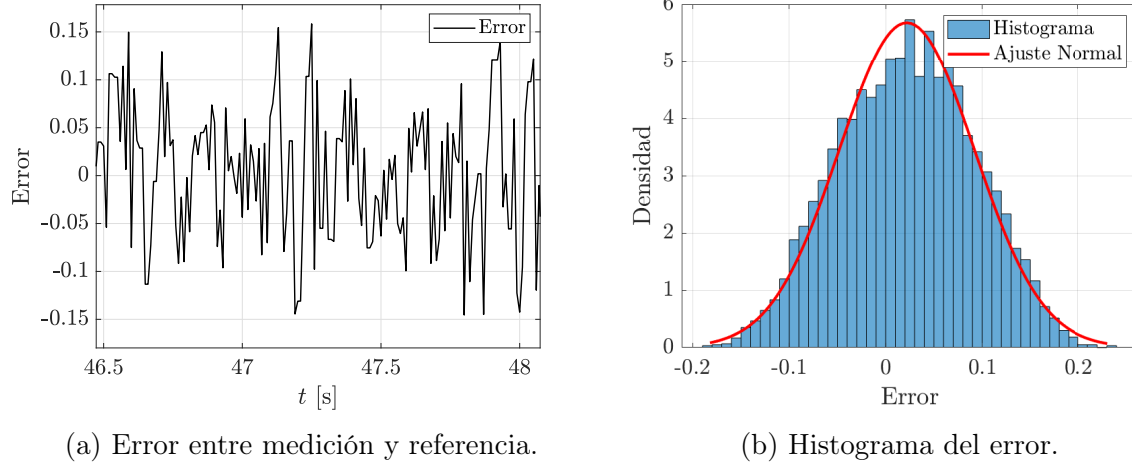


Figura 3.6: Caracterización del error para la aceleración en el eje X para la matriz R .

A partir de la distribución normal ajustada del error, se calculan los indicadores estadísticos mediante las ecuaciones (3.33) y (3.34). En particular, para el caso de la aceleración en el eje x , se obtiene:

$$\mu_i = -0.001, \quad \sigma_i^2 = 0.0049.$$

De manera análoga, bajo el mismo procedimiento, se aplica el método a cada una de las señales consideradas, construyendo así la matriz de covarianza de medición R_k . Esta matriz se obtiene a partir de los parámetros determinados en la caracterización de cada sensor, considerando los respectivos ejes de medición asociados a cada uno.

$$R_k = \text{diag}(r_{p_x}, r_{p_y}, r_{p_z}, r_{a_x}, r_{a_y}, r_{a_z}, r_{\psi}, r_{\theta}, r_{\phi}, r_{\dot{\psi}}, r_{\dot{\theta}}, r_{\dot{\phi}}),$$

donde:

$$\begin{aligned} r_{p_x} &= 1.5000, & r_{a_x} &= 0.0049, & r_{\psi} &= 10^{-5}, & r_{\dot{\psi}} &= 0.0388, \\ r_{p_y} &= 1.5000, & r_{a_y} &= 0.0042, & r_{\theta} &= 10^{-5}, & r_{\dot{\theta}} &= 0.0268, \\ r_{p_z} &= 0.1145, & r_{a_z} &= 0.0181, & r_{\phi} &= 10^{-5}, & r_{\dot{\phi}} &= 0.0341. \end{aligned}$$

3.4.2. Ajuste de la matriz de covarianza de proceso Q_k

La matriz de covarianza de proceso Q_k modela la incertidumbre asociada a la dinámica del sistema dentro del filtro de Kalman, representando las desviaciones entre el modelo predictivo y el comportamiento real.

Para su ajuste, se propone un procedimiento basado en la caracterización estadística del error entre la predicción del modelo y una señal de referencia obtenida experimentalmente mediante vuelos controlados utilizando el sistema de control descrito en el capítulo 2. La metodología empleada se describe a continuación:

- **Selección de datos:** sean $p_i(t)$, $r_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, las señales de predicción del modelo y las mediciones utilizadas de referencia respectivamente, donde n es el número de señales consideradas y t corresponde al índice temporal discreto con frecuencia de muestreo f_s .

- **Cálculo del error de predicción:** el error para cada componente se define como:

$$e_i(t_k) = p_i(t_k) - r_i(t_k), \quad (3.36)$$

- **Estimación del sesgo:** la media del error se calcula mediante:

$$\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e_i(t_k), \quad (3.37)$$

lo que permite cuantificar el sesgo presente entre la dinámica real y la modelada.

- **Estimación preliminar de la covarianza:** la matriz de covarianza del proceso se estima como:

$$Q_p = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (e_i(t_k) - \mu_i)(e_i(t_k) - \mu_i)^T. \quad (3.38)$$

- **Validación estadística:** se analizan las series temporales de los errores y sus histogramas, comparándolos con una distribución normal ajustada:

$$f(e_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(e_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad (3.39)$$

siendo la varianza:

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (e_i(t_k) - \mu_i)^2. \quad (3.40)$$

Esta verificación permite evaluar el grado de adecuación del supuesto de comportamiento gaussiano del error, que es un aspecto fundamental del EKF.

Es importante destacar que la aplicación de este procedimiento requiere disponer previamente de señales de referencia obtenidas de manera experimental.

La figura 3.7 muestra la comparación entre las señales de aceleración lineal provenientes del sistema real y del modelo dinámico, obtenidas durante una prueba preliminar para la adquisición de datos destinados al ajuste estadístico del modelo.

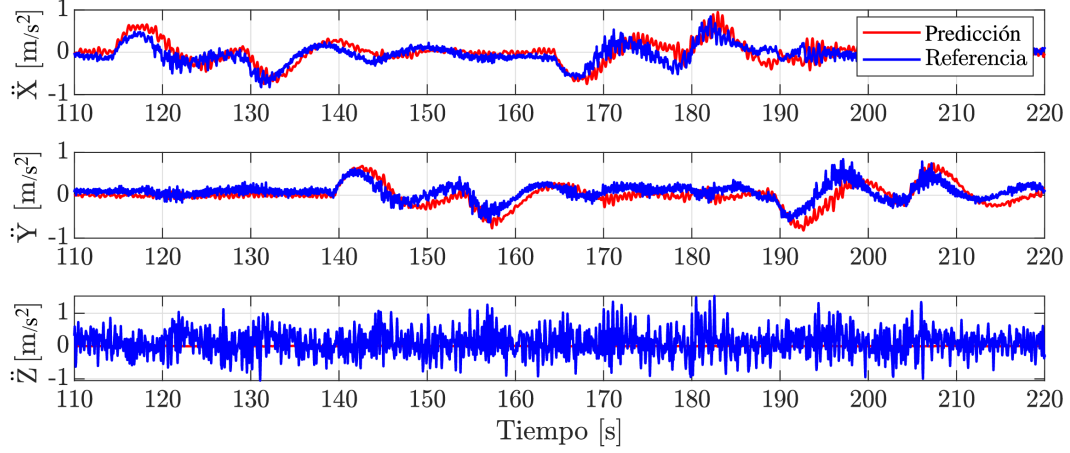
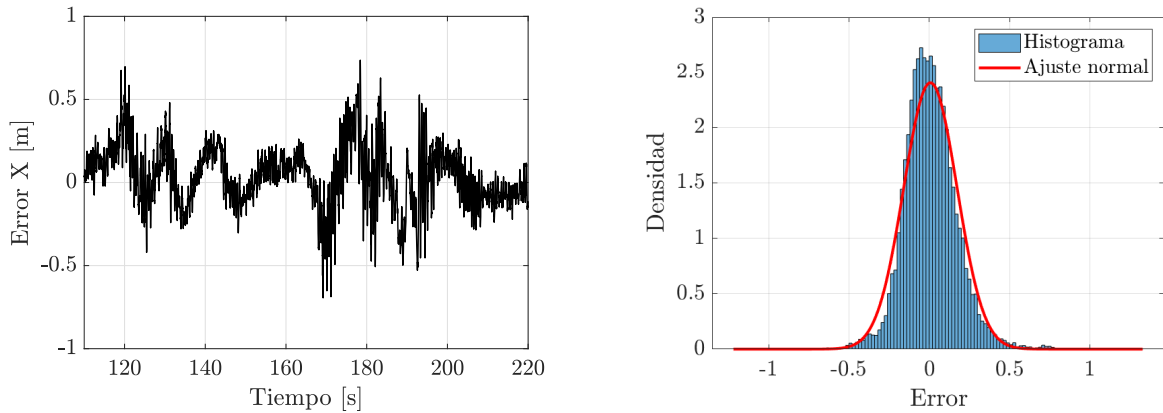


Figura 3.7: Comparación entre la aceleración medida y la predicción del modelo.

A partir de estas señales, es posible aplicar el método propuesto para realizar la caracterización estadística del error. Este procedimiento se ilustra para el caso de la aceleración en el eje X .



(a) Error en la aceleración del eje X .

(b) Ajuste del error a una distribución normal.

Figura 3.8: Caracterización del error para la aceleración en el eje X para la matriz Q .

La figura 3.8a muestra el error entre la señal de referencia y la predicción del sistema, mientras que la figura 3.8b presenta el histograma del error ajustado a una distribución gaussiana, verificando que se cumple el supuesto de gaussianidad. De este modo, es posible estimar la varianza utilizando la ecuación (3.40).

Finalmente, la varianza estimada para la aceleración en el eje X es: $q_{a_x} = 0.0275$.

El mismo procedimiento se aplica a cada una de las magnitudes presentes en la dinámica del sistema. La matriz de covarianza del proceso Q_k queda definida como:

$$Q_k = \text{diag}(q_{p_x}, q_{v_x}, q_{a_x}, q_{p_y}, q_{v_y}, q_{a_y}, q_{p_z}, q_{v_z}, q_{a_z}, q_\psi, q_{\dot{\psi}}, q_{\ddot{\psi}}, q_\theta, q_{\dot{\theta}}, q_{\ddot{\theta}}, q_\phi, q_{\dot{\phi}}, q_{\ddot{\phi}}),$$

donde:

$$\begin{aligned} q_{p_x} &= 3.0558, & q_{v_x} &= 0.2035, & q_{a_x} &= 0.0275, & q_\psi &= 0.0427, & q_{\dot{\psi}} &= 0.3568, & q_{\ddot{\psi}} &= 0.0567, \\ q_{p_y} &= 4.7645, & q_{v_y} &= 0.1936, & q_{a_y} &= 0.0246, & q_\theta &= 1.3712, & q_{\dot{\theta}} &= 0.2516, & q_{\ddot{\theta}} &= 1.7437, \\ q_{p_z} &= 0.0965, & q_{v_z} &= 0.8552, & q_{a_z} &= 0.1100, & q_\phi &= 1.2660, & q_{\dot{\phi}} &= 0.6324, & q_{\ddot{\phi}} &= 1.9155. \end{aligned}$$

Este procedimiento proporciona una estimación empírica adaptada a las características reales del sistema, permitiendo parametrizar la matriz Q_k con base en la estadística del error observada experimentalmente.

3.5. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló un algoritmo de estimación basado en el filtro Kalman Extendido aplicado a un cuadricóptero. Se analizaron las ecuaciones del sistema y se estableció el modelo dinámico aumentado, al cual se incorporaron los estados correspondientes a las aceleraciones lineales $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ y angulares $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$, junto con los métodos auxiliares requeridos para su operación. Asimismo, se evaluó la disponibilidad de observación con el fin de definir adecuadamente la matriz de observación. Finalmente, se propuso y aplicó una metodología para la sintonización de las matrices de covarianza de proceso y de medida, basada en la caracterización estadística del ruido.

A partir del procedimiento desarrollado en este capítulo, está en proceso de preparación el siguiente artículo:

Muñoz Pedro, Becerra Duvan, Rosero Esteban. *A Methodoly for fitting the Extended Kalman Filter covariance matrices for a quadcopter*. 2026. En preparación.

Capítulo 4

Desarrollo del sistema

4.1. Introducción

Para el desarrollo del sistema se plantean dos etapas principales. La primera corresponde a la **fase de simulación**, cuyo objetivo es validar la estructura propuesta tanto para el sistema de control como para el algoritmo de estimación. La segunda etapa comprende el **desarrollo e integración del sistema completo** mediante una aplicación para dispositivos Android, la cual incorpora los algoritmos de control y estimación dentro de una misma plataforma.

En este capítulo se presentan las consideraciones necesarias para la implementación del sistema, iniciando con el desarrollo del entorno de simulación en el ecosistema *MATLAB/Simulink*. Posteriormente, se describe la implementación del sistema físico, incluyendo la definición de la arquitectura general y el diseño de la aplicación móvil para la configuración, control y monitoreo del cuadricóptero.

4.2. Consideraciones iniciales para el desarrollo del estimador

El proceso de desarrollo inicia con pruebas en un entorno simulado y, posteriormente, se avanza hacia el desarrollo de la aplicación en Android. Para garantizar una correcta ejecución de las pruebas y una transición adecuada al desarrollo, se consideran diversos aspectos relevantes que se detallan a continuación.

4.2.1. Tiempo de muestreo

Uno de los principales beneficios del filtro Kalman es su capacidad para integrar múltiples magnitudes provenientes de distintas fuentes sensoriales, incluso cuando estas operan con diferentes tiempos de muestreo o niveles de relevancia dentro del sistema. Dado lo anterior, resulta fundamental analizar el comportamiento global del sistema con el fin de seleccionar un tiempo de muestreo adecuado para la implementación. El criterio inicial para esta selección se basa en la frecuencia máxima de muestreo de los sensores disponibles, tal como se presenta en la tabla 4.1.

Sensor	Frecuencia de muestreo máxima (Hz)
GPS	1 – 2
Barómetro	100 – 200
Acelerómetro	100 – 200
Orientación	100 – 200
Giroscopio	300 – 400

Tabla 4.1: Frecuencia de muestreo de los sensores disponibles.

Estos valores corresponden a las frecuencias de muestreo estándar de los sensores comúnmente integrados en teléfonos inteligentes, aunque pueden presentar variaciones. Por esta razón, la opción más confiable es seleccionar un valor intermedio entre el máximo y el mínimo registrado. Para fines del desarrollo inicial, se consideran los tiempos de muestreo típicos de los sensores de la siguiente manera:

Sensor	Tiempo de muestreo
GPS	$T_{s_{gps}} = 1 \text{ s}$
Barómetro	$T_{s_{bar}} = 10 \text{ ms}$
Acelerómetro	$T_{s_{ace}} = 10 \text{ ms}$
Orientación	$T_{s_{ori}} = 10 \text{ ms}$
Giroscopio	$T_{s_{gir}} = 10 \text{ ms}$

Tabla 4.2: Tiempos de muestreo de los sensores.

Por otra parte, es necesario determinar el tiempo de muestreo con el que operará el estimador basado en el EKF, denominado *tiempo de operación* $T_{s_{op}}$. Si bien este valor no debe coincidir estrictamente con los tiempos de muestreo de las mediciones es conveniente seleccionar un tiempo de operación igual o menor y que además sea múltiplo de los tiempos de muestreo de los sensores disponibles.

Otro aspecto fundamental en esta elección es que la discretización del modelo no lineal introduce errores inevitables. Aunque en intervalos cortos estos errores pueden considerarse despreciables, su efecto acumulativo puede generar desviaciones sistemáticas (*offsets*) en las estimaciones, afectando el rendimiento del filtro. Adicionalmente, el tiempo de operación está limitado por la capacidad de procesamiento del teléfono inteligente, por lo que no puede ser excesivamente pequeño. Con base en estos criterios, se selecciona inicialmente un tiempo de operación de $T_{op} = 10$ ms.

De manera complementaria, debe definirse el tiempo de muestreo para el sistema de control. Las mediciones crudas cuentan con un tiempo de muestreo de 10 ms, excepto el GPS, cuyo periodo es de 1 s. Sin embargo, dado que el sistema de control no utiliza directamente las mediciones, sino las estimaciones generadas por el EKF, y considerando que dichas estimaciones se producen cada 10 ms, se adopta este mismo tiempo como el periodo de muestreo del control.

4.2.2. Matrices de covarianza establecidas

Con el fin de evaluar el desempeño del filtro tanto en simulaciones como en pruebas experimentales preliminares, se incorpora una representación del ruido presente en las mediciones. Esto requiere la inclusión de las matrices de covarianza tanto de proceso como de medición, con parámetros previamente definidos para la experimentación inicial.

Hasta este punto, se dispone de la matriz de covarianza de medición R_k , obtenida mediante el procedimiento descrito en el Capítulo 3. Sin embargo, para poder implementar y ejecutar el procedimiento experimental de estimación y ajuste de la matriz de covarianza de proceso Q_k , es necesario partir de una configuración inicial que permita la operación estable del filtro y la recolección de datos experimentales.

En este sentido, se establecen valores iniciales de carácter experimental para la matriz de covarianza de proceso Q_k , definidos como una aproximación preliminar. Estos valores no corresponden aún a la matriz ajustada final, sino que constituyen un punto de partida indispensable para aplicar el procedimiento de sintonización descrito en las secciones anteriores y, a partir de los resultados obtenidos, realizar su posterior redefinición sistemática.

La dimensión de esta matriz está determinada por el número de estados del sistema, que en este caso es 18. Por lo tanto, la matriz de covarianza de proceso tiene tamaño 18×18 . Los valores de varianza asociados a cada estado se ubican en la diagonal principal, siguiendo el orden definido por los estados del modelo en la ecuación (3.16). Por su parte, los elementos fuera de la diagonal, que representan las covarianzas cruzadas entre estados, se asumen nulos.

Matriz de covarianza de proceso

Como configuración preliminar, se establece la matriz de covarianza de proceso Q_k como una matriz diagonal, cuyos valores son seleccionados con base en valores típicos de la incertidumbre asociada a cada estado del sistema [45, 46]. Este enfoque proporciona un punto de partida para la sintonización del EKF, en ausencia de un modelo exacto de las perturbaciones dinámicas.

De esta forma, la matriz de covarianza de proceso Q_{k_i} inicial queda definida como:

$$Q_{k_i} = \text{diag}(q_{p_x}, q_{v_x}, q_{a_x}, q_{p_y}, q_{v_y}, q_{a_y}, q_{p_z}, q_{v_z}, q_{a_z}, q_\psi, q_{\dot{\psi}}, q_{\ddot{\psi}}, q_\theta, q_{\dot{\theta}}, q_{\ddot{\theta}}, q_\phi, q_{\dot{\phi}}, q_{\ddot{\phi}}),$$

donde:

$$\begin{aligned} q_{p_x} &= 0.01, & q_{v_x} &= 0.1, & q_{a_x} &= 1, & q_\psi &= 10^{-4}, & q_{\dot{\psi}} &= 10^{-3}, & q_{\ddot{\psi}} &= 0.1, \\ q_{p_y} &= 0.01, & q_{v_y} &= 0.1, & q_{a_y} &= 1, & q_\theta &= 10^{-4}, & q_{\dot{\theta}} &= 10^{-3}, & q_{\ddot{\theta}} &= 0.1, \\ q_{p_z} &= 0.01, & q_{v_z} &= 0.1, & q_{a_z} &= 1, & q_\phi &= 10^{-4}, & q_{\dot{\phi}} &= 10^{-3}, & q_{\ddot{\phi}} &= 0.1. \end{aligned}$$

Estas matrices permiten al filtro determinar el nivel de confianza en las mediciones z_k y en las predicciones $\hat{x}_k$, lo que influye directamente en la estimación final del sistema.

4.3. Pruebas en simulación

Las simulaciones fueron realizadas en *MATLAB R2024b*, utilizando scripts y el entorno de simulación *Simulink*. Ambos fueron integrados de manera modular para conformar el sistema, permitiendo que los parámetros de simulación sean modificables directamente desde el script.

4.3.1. Conformación del sistema de simulación

La simulación está estructurada esencialmente en tres partes principales: el sistema controlado, el simulador del ruido en los estados y el bloque de estimación, que contiene la implementación del Filtro Kalman Extendido; esta estructura se presenta en la figura 4.1.

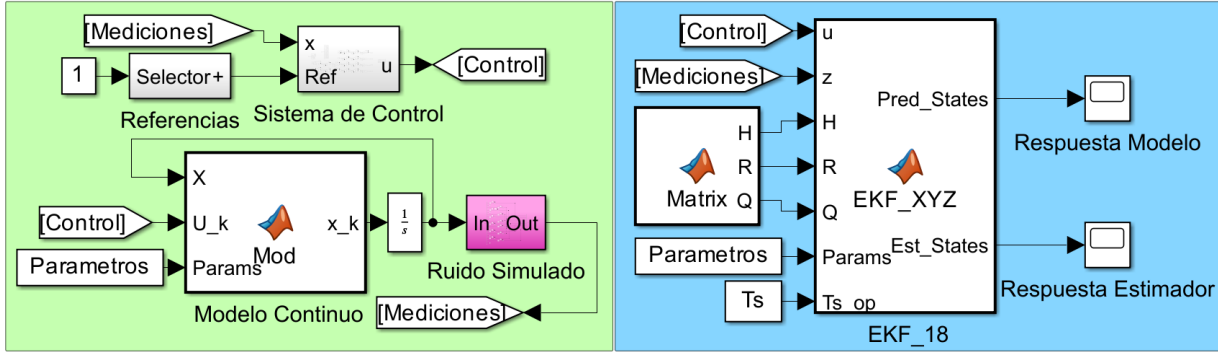


Figura 4.1: Estructura general del sistema de simulación.

Sistema controlado: el sistema controlado se divide en tres secciones principales. La primera es el selector de referencias, donde se definen las trayectorias a seguir. En segundo lugar, se ubica el esquema de control en cascada basado en reguladores PID. Finalmente, se incorpora el modelo del sistema en tiempo continuo, que representa la dinámica real y permite evaluar el desempeño del control en un entorno simulado.

Ruido simulado: El bloque de ruido simulado recibe los estados x_k y les añade perturbaciones aleatorias modeladas como ruido blanco gaussiano de media cero y varianza constante, cuyas propiedades estadísticas se definen a partir de los niveles típicos de ruido de los sensores empleados en el sistema. En particular, se consideran magnitudes representativas tales como: error de posición del GPS del orden de 1–3 m, ruido del acelerómetro en el rango de 0.01–0.05 m/s², ruido del giroscopio del orden de 0.001–0.01 rad/s, incertidumbre en la estimación de orientación cercana a 0.5–2° y ruido barométrico equivalente a variaciones de altura del orden de 0.1–0.5 m. Posteriormente, las señales se discretizan según el tiempo de muestreo de cada sensor para generar el vector de mediciones z_k , compuesto por las variables observables definidas en H_k : posiciones, aceleraciones lineales y posiciones y velocidades angulares. Este proceso reproduce lecturas ruidosas de sensores con diferentes frecuencias (GPS, acelerómetro, sensor de orientación y giroscopio), permitiendo evaluar el desempeño del EKF bajo condiciones de sensado realistas y considerando las limitaciones inherentes del sistema.

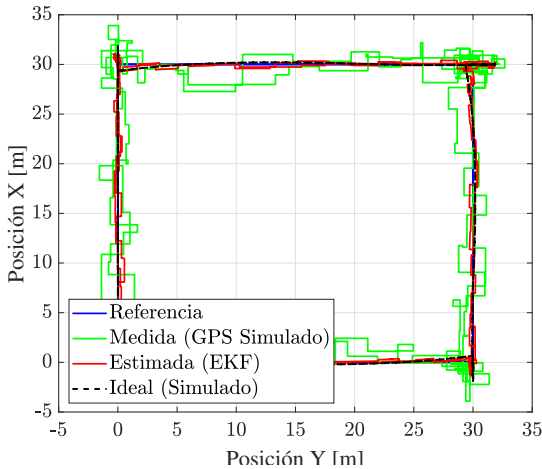
Bloque de estimación: finalmente, el bloque de estimación está compuesto por un único módulo que implementa el algoritmo del filtro Kalman extendido, diseñado en el capítulo 3 y cuenta con todas las entradas y salidas necesarias para la parametrización, funcionamiento y evaluación del sistema.

Adicionalmente, las señales relevantes generadas durante la simulación son exportadas y almacenadas en el entorno de *MATLAB*, con el fin de realizar un análisis posterior más detallado y evaluar métricas de desempeño del sistema.

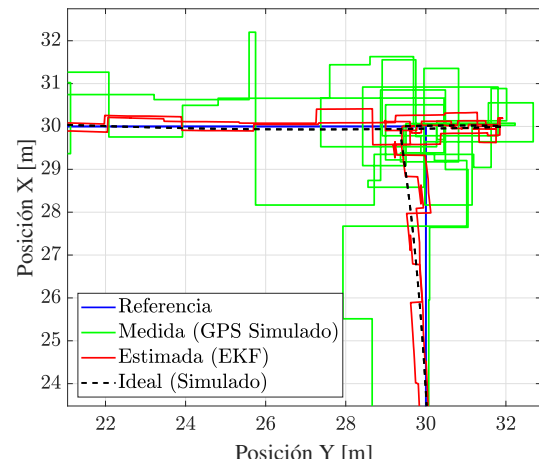
4.3.2. Pruebas simuladas

El GPS puede presentar errores de hasta 3 metros y opera con un tiempo de muestreo de $T_{s_{GPS}} = 1$ s. Con el propósito de reproducir estas condiciones, la simulación incorpora ruido significativo y baja frecuencia de actualización, permitiendo analizar el impacto de mediciones degradadas en el proceso de estimación.

Para las pruebas simuladas se emplearon dos trayectorias de referencia con el fin de verificar el funcionamiento del estimador. La primera referencia corresponde a una trayectoria cuadrada de 30×30 metros. En la figura 4.2a se aprecia la trayectoria completa descrita durante la prueba. Como se observa, la señal de GPS simulada está fuertemente afectada por el ruido para reproducir condiciones reales de operación.



(a) Trayectoria completa.



(b) Acercamiento a las señales.

Figura 4.2: Trayectoria cuadrada simulada en el plano x - y .

Por su parte, la figura 4.2b muestra un acercamiento a las señales, donde se observa una mejora notable en la trayectoria estimada, aun cuando el EKF recibe mediciones altamente ruidosas. Esto evidencia la capacidad del filtro para mitigar el ruido y recuperar una representación más precisa y coherente de la trayectoria real.

La segunda referencia corresponde a una trayectoria en forma de H horizontal que simula vuelos sobre cultivos. De manera análoga al caso anterior, se observa que la trayectoria está fuertemente afectada por el ruido debido a la mayor complejidad del patrón descrito. Esta trayectoria se muestra en la figura 4.3a.

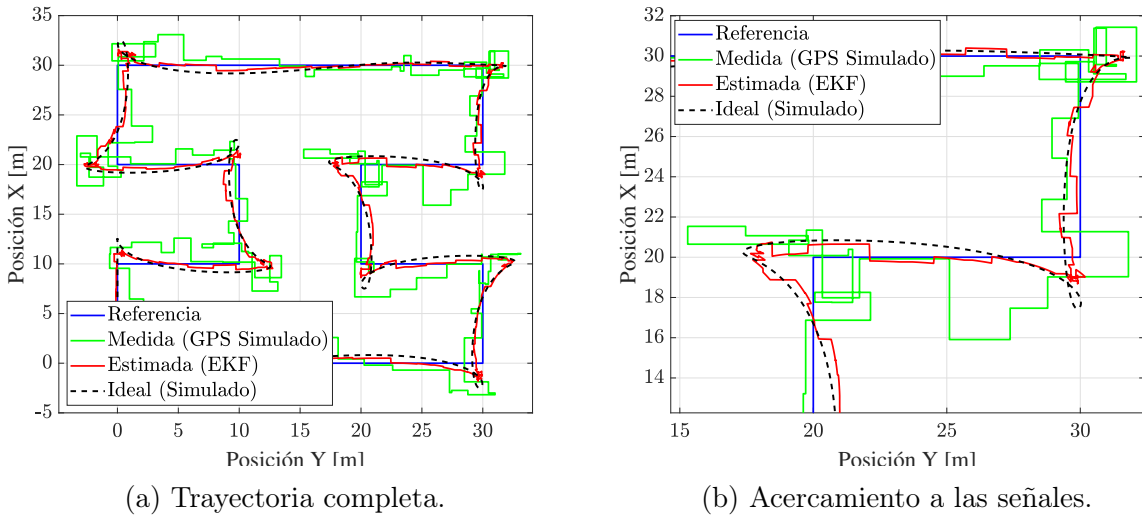


Figura 4.3: Trayectoria H simulada en el plano x - y .

Nuevamente, en la figura 4.3b se aprecia una mejora notable en la reconstrucción de la trayectoria mediante el EKF, obteniendo una estimación más limpia y consistente en comparación con la medición simulada afectada por el ruido.

Para evaluar brevemente el desempeño del estimador, se realiza un análisis del error entre las mediciones simuladas del GPS y las estimaciones del filtro para cada trayectoria. La comparación se lleva a cabo mediante la distancia euclidiana entre la trayectoria ideal y la señal (medida o estimada) en cada instante, definida como:

$$D_e = \sqrt{(x_{ide} - x_{med})^2 + (y_{ide} - y_{med})^2 + (z_{ide} - z_{med})^2}. \quad (4.1)$$

En esta notación, x_{ide} , y_{ide} , z_{ide} representan las componentes de la posición en la trayectoria ideal, mientras que x_{med} , y_{med} , z_{med} corresponden a las componentes de la posición medida o estimada.

Analizando los datos para cuantificar el porcentaje de mejora, se observa que en la trayectoria cuadrada la media del error del GPS es de 2.9506 m, mientras que el EKF reduce este valor a 0.6554 m. Esto representa una mejora del 77.79 % en la precisión. Para la trayectoria en forma de H, el error promedio del GPS es de 3.5573 m, en contraste con los 0.7968 m obtenidos mediante la estimación del filtro, lo que equivale a una mejora del 77.60 %. Aunque se presentan ligeras variaciones entre ambas trayectorias, los resultados muestran una reducción promedio del error cercana al 77.7 %.

Finalmente, los resultados obtenidos en las simulaciones constituyen un mecanismo confiable para la validación preliminar de la arquitectura propuesta. Sin embargo, es necesario reconocer que pueden existir desviaciones respecto al comportamiento real del sistema, producto de dinámicas no modeladas, tales como ruidos no gaussianos, perturbaciones externas y efectos ambientales no considerados. Estas limitaciones son inherentes a los entornos simulados y deben contemplarse al extrapolar los resultados hacia la implementación práctica.

4.4. Arquitectura general del sistema

La arquitectura general del sistema se compone de tres conjuntos principales: el fuselaje, el sistema de accionamiento y el sistema de procesamiento. El **fuselaje** constituye la estructura física que soporta todos los componentes del vehículo. El **sistema de accionamiento** está integrado por los motores eléctricos, los controladores de velocidad (ESC) y la batería encargada de suministrar la potencia requerida. Finalmente, el **sistema de procesamiento** agrupa los elementos responsables del manejo, control y adquisición de datos del cuadricóptero.

La figura 4.4 muestra la disposición de los componentes y la interconexión general entre los subsistemas que conforman la arquitectura propuesta.

El montaje del sistema presenta un diseño modular con configuración en equis (X). Está conformado por un fuselaje central del cual se extienden cuatro brazos laterales y dos patas inferiores que sirven como soporte estructural. Cada brazo del cuadricóptero soporta un motor eléctrico tipo *brushless*, acoplado a una hélice, encargado de generar el empuje requerido para el vuelo.

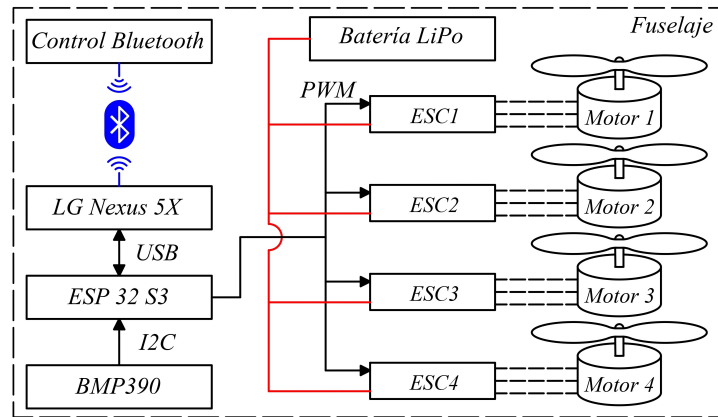


Figura 4.4: Arquitectura general del sistema.

Sobre el fuselaje central se ubica el teléfono móvil junto con los módulos electrónicos adicionales, entre los que se incluyen un microcontrolador *ESP32 S3*, los ESC y el sensor barométrico *BMP390*.

En la parte inferior se encuentran los soportes destinados a la batería *LiPo*, que provee la energía necesaria para la operación de los motores. En la arquitectura propuesta, se emplea el microcontrolador *ESP32-S3* como intermediario para la traducción de señales de control digitales en señales analógicas PWM destinadas a los ESC. Asimismo, este dispositivo realiza la lectura y transmisión de la información proveniente del sensor barométrico *BMP390*, con el cual se comunica mediante el protocolo *I²C*. La figura 4.5 muestra el montaje general del prototipo.



Figura 4.5: Montaje general del cuadricóptero.

La comunicación entre el *ESP32-S3* y el teléfono móvil es bidireccional y se establece a través de una conexión USB. Gracias a sus capacidades *dual-core*, el microcontrolador puede gestionar de manera concurrente tanto la lectura del sensor externo como el intercambio de datos con la aplicación.

4.5. Entorno de desarrollo Android

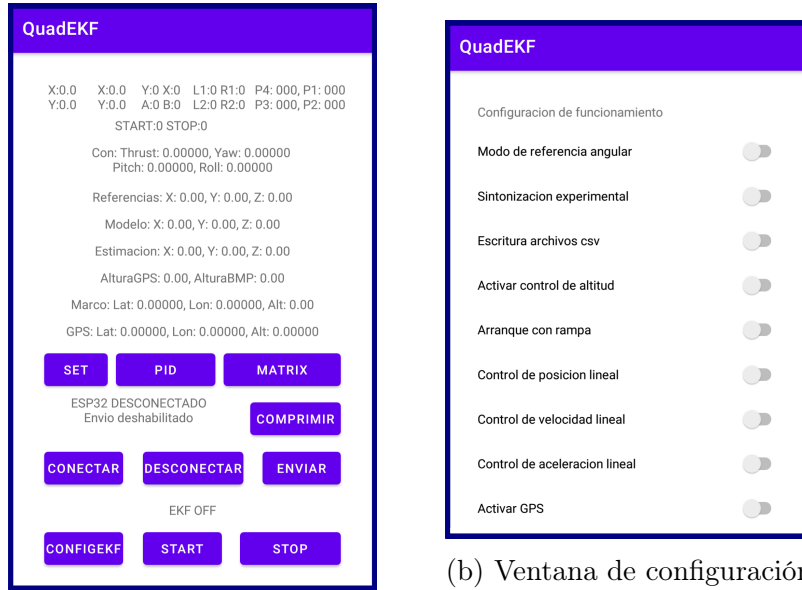
El desarrollo de la aplicación se llevó a cabo en el entorno *Android Studio Electric Eel*, utilizando el lenguaje *Kotlin*. Este entorno proporciona una plataforma robusta para la integración de los sistemas de control y estimación, permitiendo el acceso directo a los recursos del dispositivo y la implementación eficiente de los algoritmos de control y del EKF. Asimismo, se diseñó una interfaz gráfica de usuario (GUI, por sus siglas en inglés *Graphical User Interface*) intuitiva y orientada a la gestión del sistema, que permite la visualización de variables, la configuración de parámetros y la ejecución de pruebas, así como el almacenamiento y envío de la información generada.

La aplicación fue implementada y validada en un dispositivo *LG Nexus 5X* con *Android 8.1 (Oreo)*, seleccionado por su compatibilidad con las herramientas de desarrollo y su capacidad para ejecutar de manera eficiente los algoritmos propuestos.

4.6. Interfaz

Para el desarrollo de la aplicación se plantea una arquitectura basada en la ejecución concurrente mediante el uso de múltiples hilos de procesamiento. El hilo principal se encarga de ejecutar el esquema de control PID en cascada y el EKF para la estimación de estados. De forma complementaria, se definen hilos independientes destinados a la adquisición de datos de los sensores, al almacenamiento de la información y a la comunicación con los dispositivos externos.

La aplicación cuenta con una ventana principal (figura 4.6a) y tres ventanas adicionales orientadas a la configuración del sistema. En ellas es posible definir los parámetros de vuelo, ajustar las ganancias de los controladores y los filtros de los sensores, así como establecer los parámetros de las matrices de covarianza del EKF.



(a) Ventana de monitoreo.

(b) Ventana de configuración del sistema.

Figura 4.6: Ventanas de ajuste y monitoreo en la aplicación móvil.

Esta arquitectura modular facilita la calibración y el ajuste interactivo del sistema. La ventana principal presenta un diseño sencillo y funcional, enfocado en la visualización de las variables más relevantes para el monitoreo y la depuración preliminar. Asimismo, permite realizar ajustes esenciales directamente desde el dispositivo antes de cada prueba experimental.

Adicionalmente, la aplicación incorpora un apartado de configuración general donde se establecen las condiciones de vuelo y los parámetros globales del sistema, como se muestra en la Figura 4.6b. Finalmente, toda la información generada durante la operación se almacena automáticamente en el teléfono móvil, lo que posibilita su análisis posterior.

4.6.1. Ajuste de parámetros

El ajuste de los parámetros de los controladores, los filtros de los sensores y las matrices de covarianza del EKF se realiza de forma interactiva, directamente desde la interfaz de usuario. Para ello, se dispone de ventanas desplegables que presentan una estructura tabular organizada, donde cada parámetro puede modificarse individualmente, permitiendo una configuración precisa y dinámica del sistema. La figura 4.7 muestra una representación de las interfaces desarrolladas para el ajuste de parámetros del sistema.

	K_p	K_I	K_D
<i>Posición lineal</i>			
x	0.0	0.0	0.0
y	0.0	0.0	0.0
z	0.0	0.0	0.0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<i>Aceleración angular</i>			
ψ	0.0	0.0	0.0
θ	0.0	0.0	0.0
ϕ	0.0	0.0	0.0

(a) Ajuste de parámetros de los controladores PID.

	H_k	Q_k	R_k
x	0.0	0.0	0.0
$\dot{x}$	0.0	0.0	0.0
$\ddot{x}$	0.0	0.0	0.0
y	0.0	0.0	0.0
$\dot{y}$	0.0	0.0	0.0
$\ddot{y}$	0.0	0.0	0.0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
ϕ	0.0	0.0	0.0
$\dot{\phi}$	0.0	0.0	0.0
$\ddot{\phi}$	0.0	0.0	0.0

(b) Ajuste de las matrices de covarianza del EKF.

Figura 4.7: Interfaces de ajuste de parámetros en la aplicación móvil.

4.7. Algoritmo de control y estimación integrados

El sistema de control y el algoritmo de estimación operan de manera conjunta para garantizar el correcto funcionamiento del cuadricóptero. Como se indicó en secciones anteriores, una de las principales problemáticas del esquema de control en cascada es asegurar la disponibilidad de mediciones adecuadas para la realimentación de los controladores. Un ejemplo relevante es el GPS, cuyas mediciones crudas presentan un tiempo de muestreo de 1 segundo y un error considerable, lo que impide su uso directo en el lazo de control, el cual opera a una frecuencia significativamente mayor.

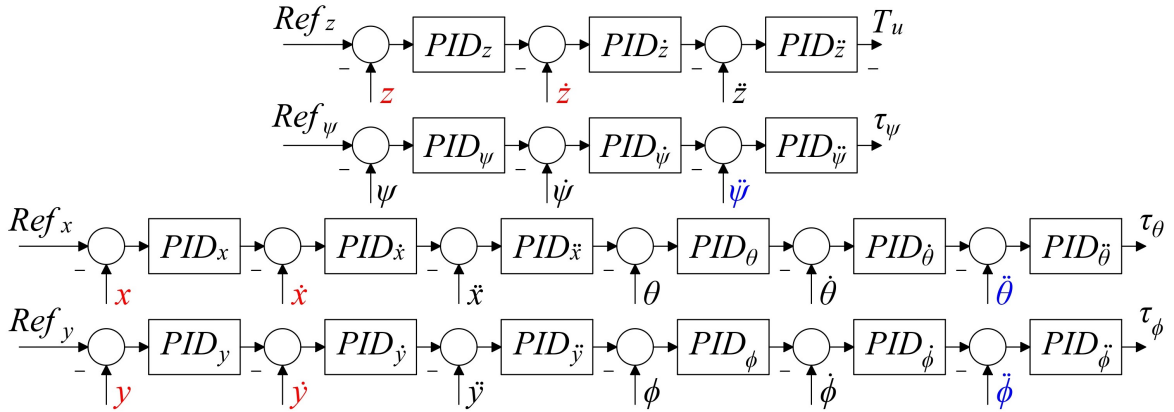


Figura 4.8: Lazos de control de postura, posición y altitud integrados con el estimador.

De forma análoga, las velocidades lineales no se encuentran disponibles de manera directa, y su cálculo presenta las mismas limitaciones asociadas al tiempo de muestreo. Por lo tanto, es necesario recurrir al algoritmo de estimación para obtener estas variables y utilizarlas como señales de realimentación en el sistema de control. En la figura 4.8 se ilustran los lazos de control de postura, posición y altitud.

Las señales empleadas en cada etapa provienen de distintas fuentes, según se detalla en la tabla 4.3.

Categoría	Variables
Estimadas por el EKF	$x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$
Derivaciones analíticas	$\ddot{\psi}, \ddot{\theta}, \ddot{\phi}$
Mediciones directas	$\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$

Tabla 4.3: Clasificación de las señales según su origen.

Esta perspectiva permite la implementación de un lazo de control en cascada basado en mediciones adquiridas y estimadas, integrando el estimador dentro del esquema de control. Al mismo tiempo, el uso de las estimaciones en la realimentación constituye un punto de partida fundamental para la validación experimental del desempeño y coherencia del sistema propuesto. Para los fines de este trabajo, se plantea la utilización exclusiva de las señales de posición y velocidad lineal provenientes del estimador, las cuales son empleadas para la realimentación de los controladores correspondientes.

Este enfoque permite superar la limitación impuesta por el tiempo de muestreo del GPS, garantizando una frecuencia de actualización adecuada para el control. Las señales restantes necesarias para el lazo de control se obtienen conforme a lo descrito en el capítulo 2, donde se detalla el proceso de adquisición y tratamiento de cada magnitud física involucrada.

4.7.1. Tiempo de ejecución de los algoritmos integrados

Para garantizar el correcto funcionamiento del sistema implementado en el teléfono móvil, es necesario verificar que los algoritmos diseñados puedan ejecutarse dentro del tiempo de muestreo establecido. Para ello, se realiza un barrido temporal que permite medir la duración de cada ciclo de procesamiento, cuyo comportamiento se muestra en la figura 4.9.

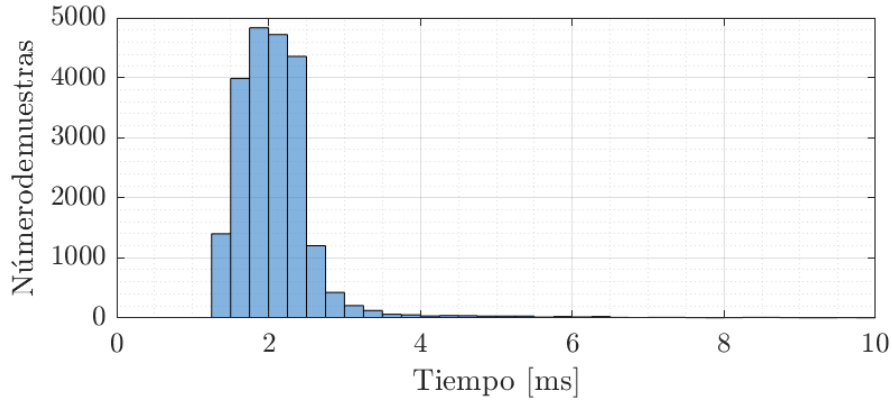


Figura 4.9: Tiempo de procesamiento de los algoritmos integrados.

Como se aprecia, la mayor parte de los tiempos de ejecución se encuentra entre 1,5 ms y 2,25 ms, lo que corresponde a menos del 20 % del tiempo de muestreo de 10 ms. Aunque se registran algunos valores puntuales de hasta 6,5 ms, estos aún permanecen dentro del límite establecido.

4.8. Conclusiones

En este capítulo se desarrolló el sistema propuesto, abordando tanto las consideraciones iniciales del estimador como su integración con el sistema de control. Se definieron el tiempo de muestreo y las matrices de covarianza preliminares para la simulación del sistema, parámetros fundamentales para el correcto desempeño del EKF. Se diseñó y validó la arquitectura mediante pruebas en simulación, lo que permitió verificar el comportamiento del sistema antes de su implementación final. Posteriormente, se estableció la arquitectura general y se desarrolló la aplicación en el entorno Android, integrando los algoritmos de control y estimación junto con una interfaz para configuración, monitoreo y almacenamiento de datos. Finalmente, se analizó el tiempo de ejecución de los algoritmos integrados, comprobando que el procesamiento cumple con los requerimientos temporales del sistema.

Capítulo 5

Validación, pruebas y resultados

5.1. Introducción

En la etapa final del desarrollo del sistema, se busca evaluar su desempeño y verificar la efectividad de la estrategia de estimación propuesta. Para ello, se realizan diversas pruebas experimentales orientadas a analizar tanto la eficiencia del sistema de control implementado como la precisión de las variables estimadas durante la operación.

En este capítulo se presenta el proceso de validación del sistema a partir de las pruebas realizadas y del análisis de sus resultados. Primero, se describe la metodología empleada para la ejecución de los ensayos; luego, se valida el sistema de estimación mediante vuelos controlados con diferentes tipos de pruebas. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos y se realiza un análisis cuantitativo para evaluar la efectividad de la estrategia de estimación de posición propuesta.

5.2. Metodología de las pruebas experimentales

Para la ejecución de las pruebas de vuelo, es necesario considerar diversos aspectos relacionados con la manipulación del cuadricóptero en entornos abiertos. Con el fin de garantizar la seguridad y la repetibilidad de los experimentos, se establece una estrategia de validación en un entorno controlado, donde se definen y demarcan trayectorias conocidas que sirven como referencia para la realización de las pruebas de vuelo. De manera complementaria, las trayectorias se programan para ejecutarse automáticamente en las pruebas, asegurando referencias reproducibles y precisas que coinciden con la ruta física y permiten comparar la posición real, la estimada y la deseada.

5.2.1. Trayectoria

Inicialmente, se establece una trayectoria definida y demarcada en el suelo mediante marcadores físicos. Dicha trayectoria corresponde a una figura cuadrada de 30 metros de lado, como se muestra en la figura 5.1, y sirve como referencia general para las pruebas de vuelo diseñadas. Para el análisis posterior de las trayectorias obtenidas durante estas pruebas, se emplea un receptor de cinemática en tiempo real (RTK, por sus siglas en inglés *Real-Time Kinematics*), que proporciona mediciones de alta precisión que sirven como referencia externa.

Dado que la información proporcionada por el GPS se encuentra expresada en términos de latitud y longitud, es conveniente que las aristas del cuadrado estén correctamente orientadas hacia los puntos cardinales: norte, sur, oriente y occidente. De esta manera, se garantiza que el sistema de referencia local del cuadricóptero mantenga coherencia con el sistema de coordenadas geográficas del GPS, lo que permite una comparación precisa entre las trayectorias de referencia y las registradas durante el vuelo.

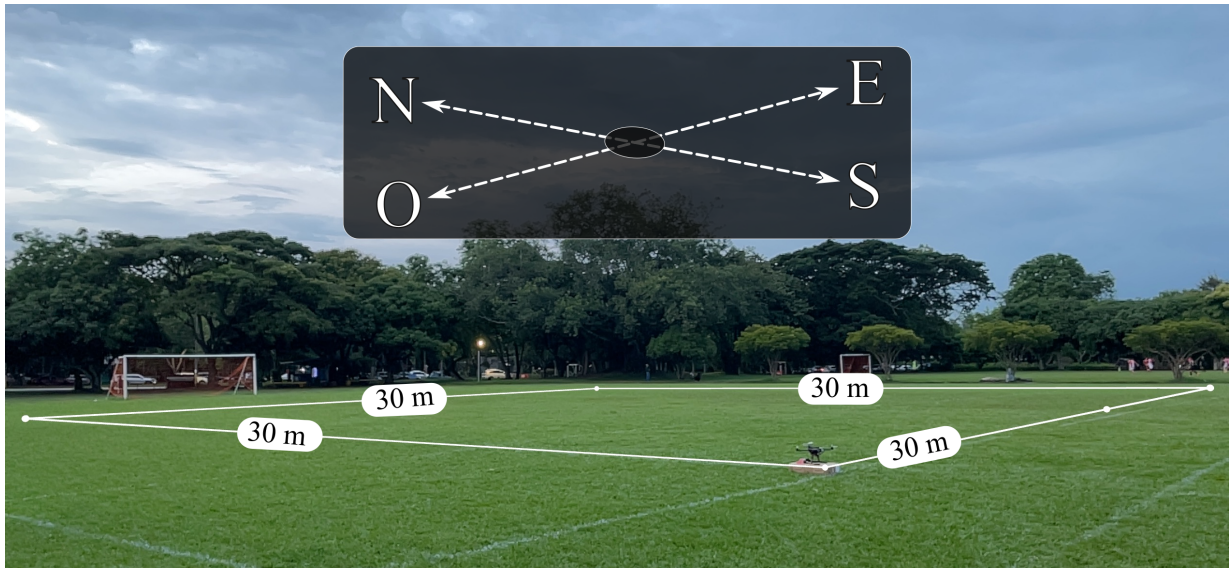


Figura 5.1: Trayectoria definida en campo para la validación experimental.

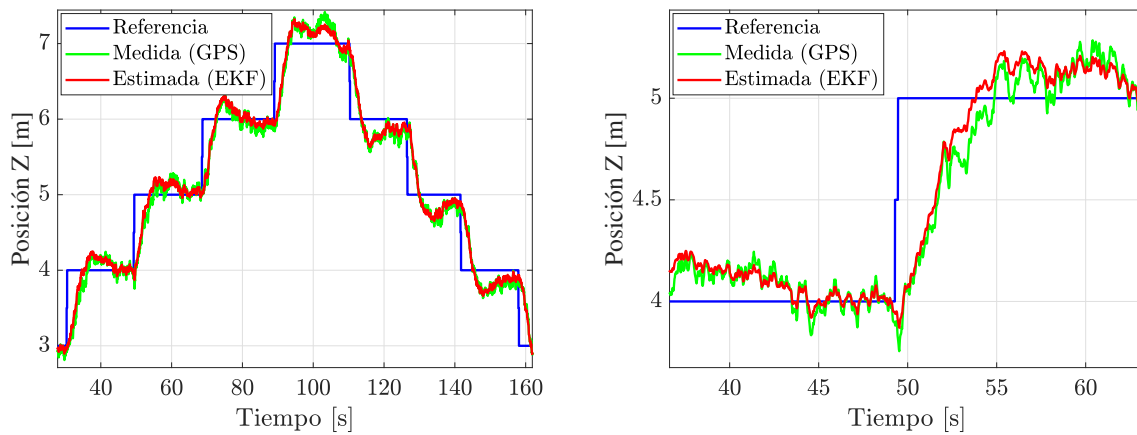
5.3. Pruebas experimentales

Para evaluar el desempeño del sistema se plantean tres pruebas principales, orientadas a verificar tanto el esquema de control propuesto como la capacidad de estimación.

La primera prueba corresponde al control de altitud y tiene como objetivo validar la capacidad del sistema para seguir una referencia de altura y mantener la estabilidad. Posteriormente, se realiza una prueba de vuelo estacionario sin referencias de posición, con el fin de verificar la estabilidad del cuadricóptero en un punto fijo empleando únicamente las señales estimadas. Finalmente, se ejecutan pruebas de seguimiento de trayectorias, orientadas a evaluar la capacidad del sistema para desplazarse y estabilizarse en nuevas posiciones siguiendo referencias definidas.

5.3.1. Altitud

Para la prueba de altitud, se aplica una variación progresiva de la referencia, con incrementos y decrementos de 1 metro en intervalos de ~ 20 segundos, con el fin de permitir que el sistema alcance la estabilidad antes de aplicar la siguiente referencia. Como se observa en la figura 5.2a, el sistema sigue adecuadamente los cambios de referencia, alcanzando un tiempo promedio de estabilización cercano a 5 segundos.



(a) Respuesta del sistema ante variaciones de la referencia de altitud. (b) Acercamiento a las señales de referencia y altitud.

Figura 5.2: Resultados de la prueba de control y estimación de altitud.

En cuanto a la estimación, la figura 5.2b muestra un acercamiento a un intervalo de las señales, donde se aprecia una atenuación efectiva del ruido, principalmente de alta frecuencia. Asimismo, se observa una atenuación de los picos más abruptos sin pérdida significativa de información útil para el control, evitando tanto la introducción de sesgos de estimación como retardos perceptibles en la señal.

5.3.2. Vuelo estacionario

Para esta prueba se establece una referencia de altura constante, manteniendo el cuadricóptero en vuelo libre sin referencias de posición en los ejes x e y . El objetivo es evaluar la capacidad del sistema para mantener una posición fija, rechazando y compensando las perturbaciones externas. La prueba tuvo una duración de ~ 5 minutos.

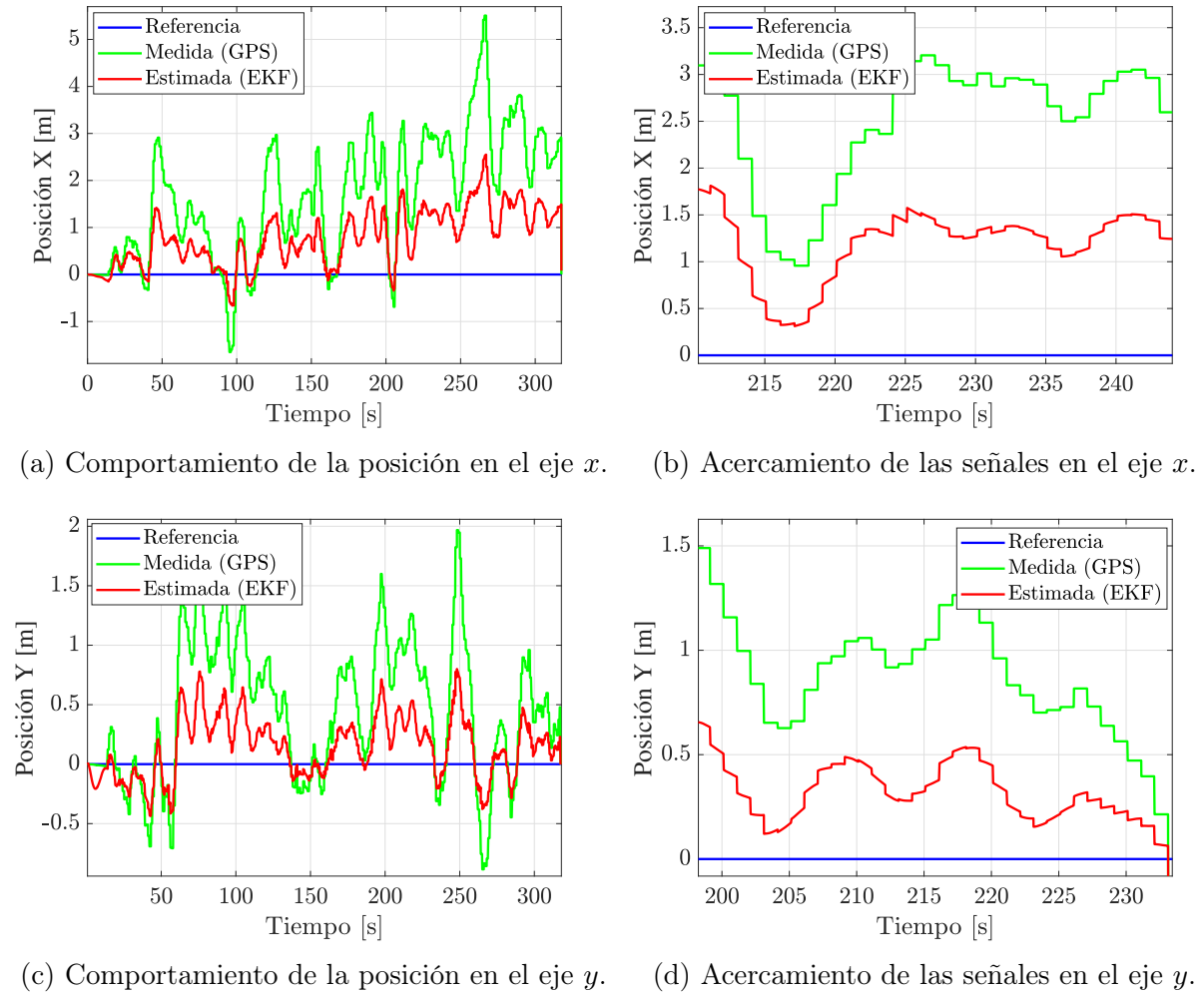


Figura 5.3: Resultados de la prueba de vuelo estacionario para los ejes x e y .

Como se observa en las figuras 5.3a y 5.3c, el sistema se mantiene estable en torno a ambos ejes, presentando únicamente oscilaciones asociadas al control y al ruido de las mediciones. La estimación proporciona una corrección notable sobre las mediciones ruidosas del GPS, reduciendo las variaciones y generando una trayectoria más estable. Durante la prueba, el cuadricóptero se mantuvo dentro de un radio inferior a 1.5 metros.

Las figuras 5.3b y 5.3d presentan acercamientos a intervalos específicos, donde se evidencia una ventaja clave del EKF: su capacidad para mantener estimaciones confiables aun cuando el GPS no entrega mediciones válidas, asegurando una realimentación continua para el control.

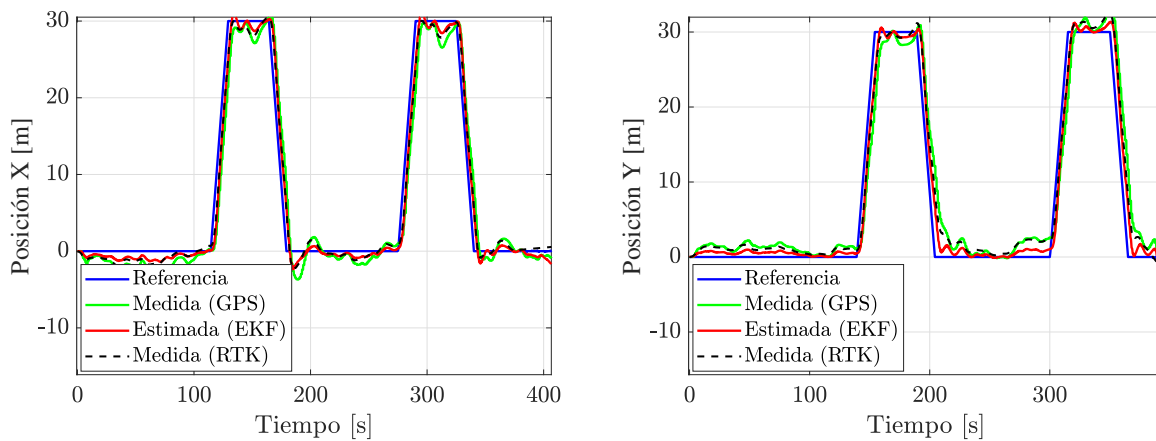
5.3.3. Seguimiento de referencias de posición

Finalmente, para las pruebas de seguimiento de referencias se ejecutan dos vuelos: el primero siguiendo la trayectoria cuadrada definida previamente y el segundo siguiendo una trayectoria con forma de H horizontal.

5.3.3.1. Trayectoria cuadrada con cambio de altura

En la primera prueba, el cuadricóptero sigue referencias de posición generadas mediante señales tipo rampa, evitando transiciones abruptas que produzcan picos de control. En cada vértice de la trayectoria se incluye un intervalo de espera para analizar el comportamiento estacionario del sistema y evaluar su capacidad de estabilización en puntos específicos. Además, la trayectoria se repite incorporando un cambio en la referencia de altitud, con el fin de verificar la respuesta del sistema ante variaciones simultáneas en posición y altura.

Las figuras 5.4a y 5.4b muestran las referencias de posición y las respuestas obtenidas a lo largo del ensayo, el cual tuvo una duración de ~ 7 minutos.



(a) Respuesta en el eje x frente a la referencia. (b) Respuesta en el eje y frente a la referencia.

Figura 5.4: Respuestas del sistema en los ejes x e y frente a la trayectoria cuadrada.

Como se aprecia en los acercamientos de las figuras 5.5a y 5.5b, el sistema realiza un seguimiento adecuado de las referencias, con una respuesta suave y sin oscilaciones relevantes. El EKF mantiene estimaciones confiables incluso durante la ausencia temporal de mediciones del GPS, preservando una trayectoria continua y coherente.

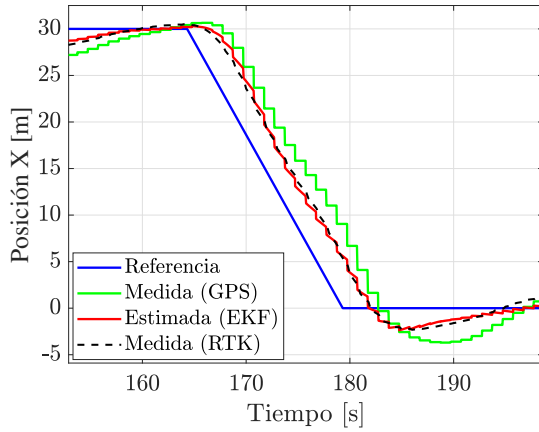
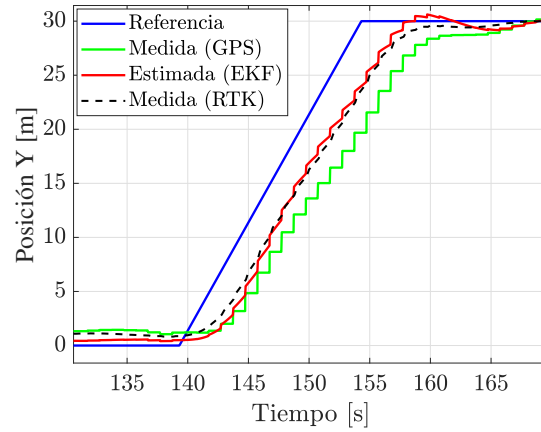
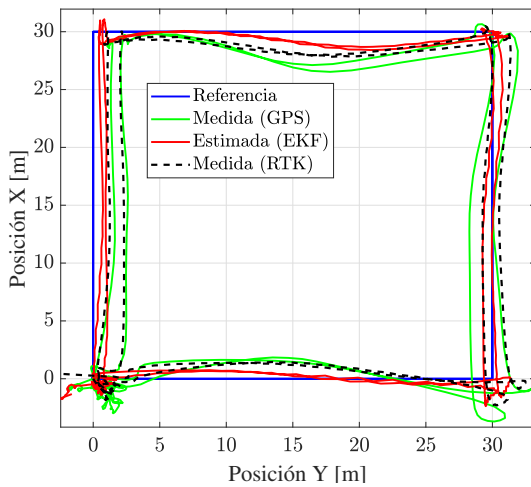
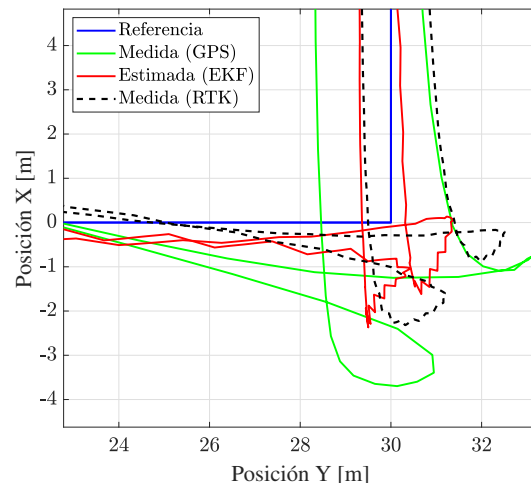
(a) Acercamiento de la señal en el eje x .(b) Acercamiento de la señal en el eje y .

Figura 5.5: Acercamientos de las señales en los ejes x e y en la trayectoria cuadrada.

En la figura 5.6a se presenta la trayectoria completa descrita por el cuadricóptero en el plano x - y . La trayectoria estimada sigue la referencia con mayor precisión en relación con el GPS, presentando solo pequeñas desviaciones en las esquinas y en algunos tramos rectos. En contraste, las mediciones del GPS muestran un comportamiento más ruidoso, con oscilaciones y desviaciones marcadas, especialmente durante los giros.

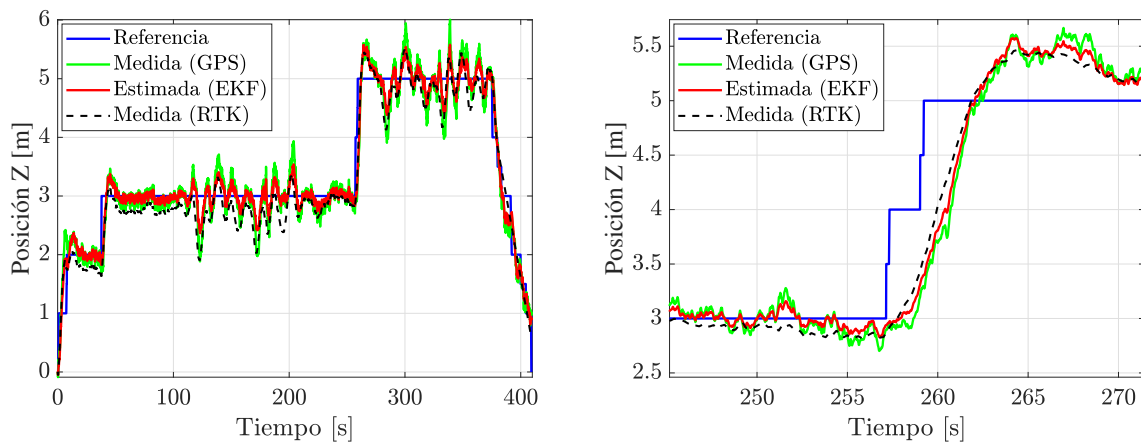
(a) Trayectoria completa en el plano x - y .

(b) Acercamiento a una región específica.

Figura 5.6: Trayectoria cuadrada completa en el plano x - y .

Estos resultados evidencian que el estimador atenúa eficazmente el ruido de las mediciones, generando una reconstrucción más suave y coherente del recorrido. En la figura 5.6b se aprecia con mayor detalle la dispersión del GPS y las trayectorias erráticas asociadas. Aunque la señal estimada presenta una ligera desviación sistemática respecto a la referencia, mantiene un seguimiento estable y consistente.

Por otro lado, la figura 5.7 muestra el comportamiento de la altitud durante toda la prueba. En este ensayo se ejecutaron dos trayectorias cuadradas consecutivas: la primera a una altura aproximada de 3 metros y la segunda a 5 metros.



(a) Respuesta del sistema a cambios de altitud. (b) Acercamiento a una región específica.

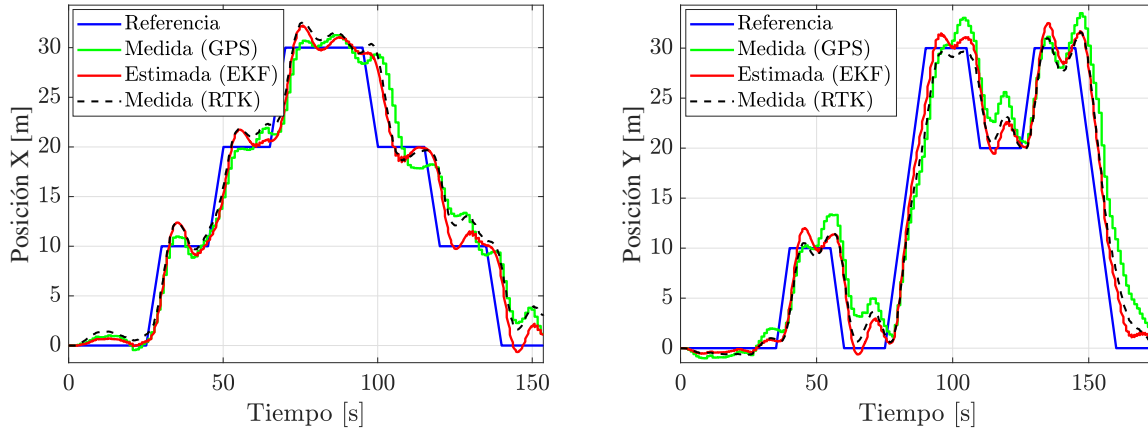
Figura 5.7: Comportamiento de la altitud durante la trayectoria cuadrada.

Se observa que el sistema fue capaz de mantener la altitud de forma estable a lo largo de ambas trayectorias. Aunque se presentaron variaciones asociadas a los desplazamientos horizontales y a los cambios naturales en la dinámica del vuelo, estas fueron corregidas adecuadamente por el controlador, permitiendo conservar la estabilidad vertical sin desviaciones significativas.

5.3.3.2. Trayectoria H

Para la segunda prueba, se definió una trayectoria con forma de H horizontal, con desplazamientos de 10 metros. De manera análoga a la trayectoria anterior, se establecieron intervalos de espera de 15 segundos en cada vértice, con el fin de evaluar el comportamiento estacionario del sistema en los diferentes puntos del recorrido. Este tipo de trayectorias representa un desafío mayor para el EKF, permitiendo evaluar su desempeño bajo condiciones más exigentes.

Las figuras 5.8a y 5.8b muestran las referencias de posición y las respuestas obtenidas para los ejes x e y a lo largo del ensayo, el cual tuvo una duración de ~ 3 minutos.

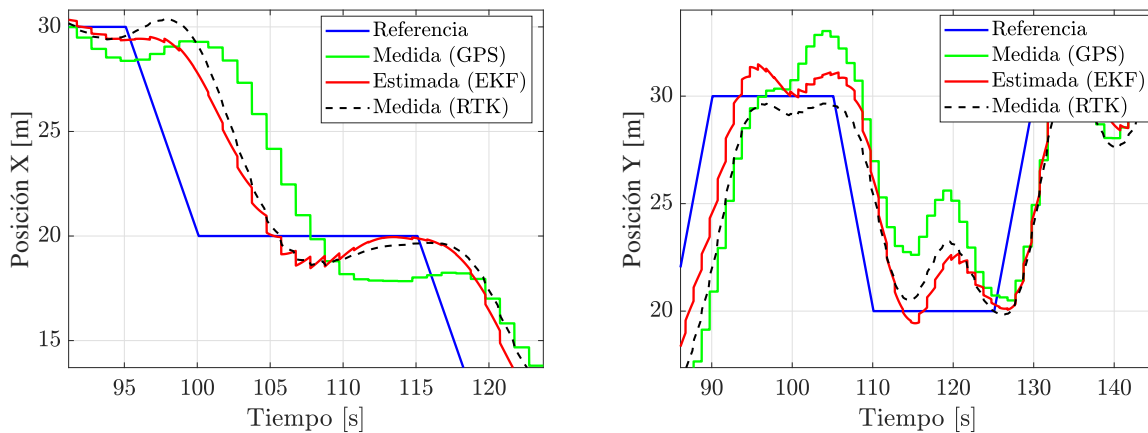


(a) Respuesta en el eje x frente a la referencia. (b) Respuesta en el eje y frente a la referencia.

Figura 5.8: Respuestas del sistema en los ejes x e y frente a la trayectoria H.

Para este tipo de trayectorias, caracterizadas por desplazamientos más cortos, el desempeño del estimador adquiere una mayor relevancia. En estos casos, la incertidumbre y el ruido asociados al GPS tienen un impacto más evidente sobre la medición de la posición, lo que resalta la necesidad de una estimación robusta.

En las figuras 5.9a y 5.9b se observa un acercamiento entre la referencia y la respuesta del sistema, apreciándose con mayor detalle cómo el EKF logra reconstruir adecuadamente la posición incluso en los intervalos en los que no se dispone de información válida del GPS.



(a) Respuesta en el eje x frente a la referencia. (b) Respuesta en el eje y frente a la referencia.

Figura 5.9: Acercamientos de las señales en los ejes x e y en la trayectoria H.

En la figura 5.10a se presenta la trayectoria completa de la prueba en el plano $x-y$. Puede observarse que se trata de un recorrido complejo, con múltiples cambios de dirección, lo que dificulta aún más, una representación fiel durante todo el trayecto. No obstante, de forma visual es posible identificar que el estimador realiza correcciones significativas, especialmente en los vértices o puntos de detención de la trayectoria, compensando las desviaciones sistemáticas del GPS y manteniendo un seguimiento más consistente con la trayectoria registrada por el sistema RTK.

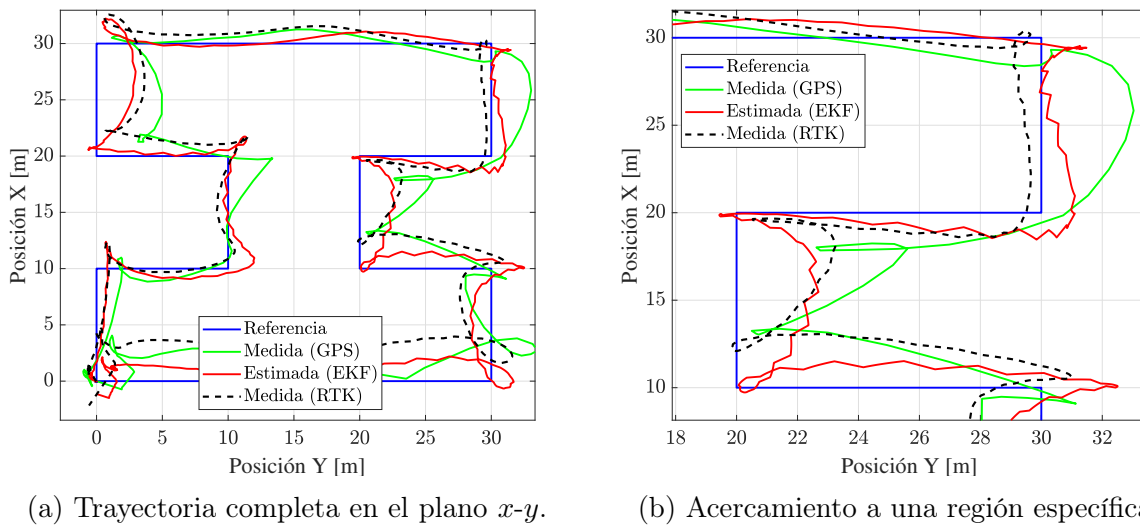
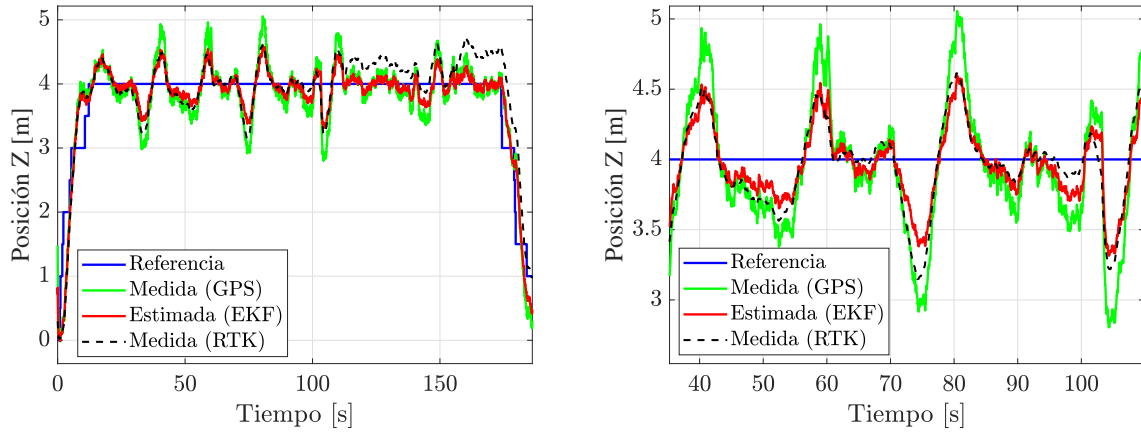


Figura 5.10: Trayectoria H completa en el plano $x-y$.

La figura 5.10b muestra un acercamiento a una región específica del recorrido, donde se evidencia con mayor claridad el efecto correctivo del EKF. Aunque la estimación conserva en cierta medida las perturbaciones introducidas por el GPS, el filtro logra proporcionar una reconstrucción más coherente y estable de la posición durante el movimiento, reduciendo las oscilaciones y desviaciones presentes en la medición directa.

Finalmente, en la figura 5.11 se presenta el comportamiento de la altitud medida y estimada durante la prueba. Si bien la estimación muestra una ligera atenuación en los picos más abruptos, todavía es evidente que el filtro refleja una parte importante del ruido asociado a la medición del barómetro. Este comportamiento es coherente con las limitaciones inherentes del sensor, cuyo nivel de ruido y deriva dificultan una estimación más suave sin afectar la capacidad de respuesta del sistema.



(a) Respuesta del sistema a cambios de altitud. (b) Acercamiento a una región específica.

Figura 5.11: Comportamiento de la altitud durante la trayectoria H.

5.4. Velocidades lineales estimadas

Como se menciona en el capítulo 4, tanto las posiciones como las velocidades lineales empleadas en los lazos de control provienen de las estimaciones del sistema. Aunque la estimación de velocidades no estaba contemplada inicialmente en los alcances del proyecto, se incorporó como una solución práctica para disponer de las variables requeridas en los lazos correspondientes. Por ello, se presenta una breve discusión sobre estas estimaciones para evaluar su utilidad en el control del sistema.

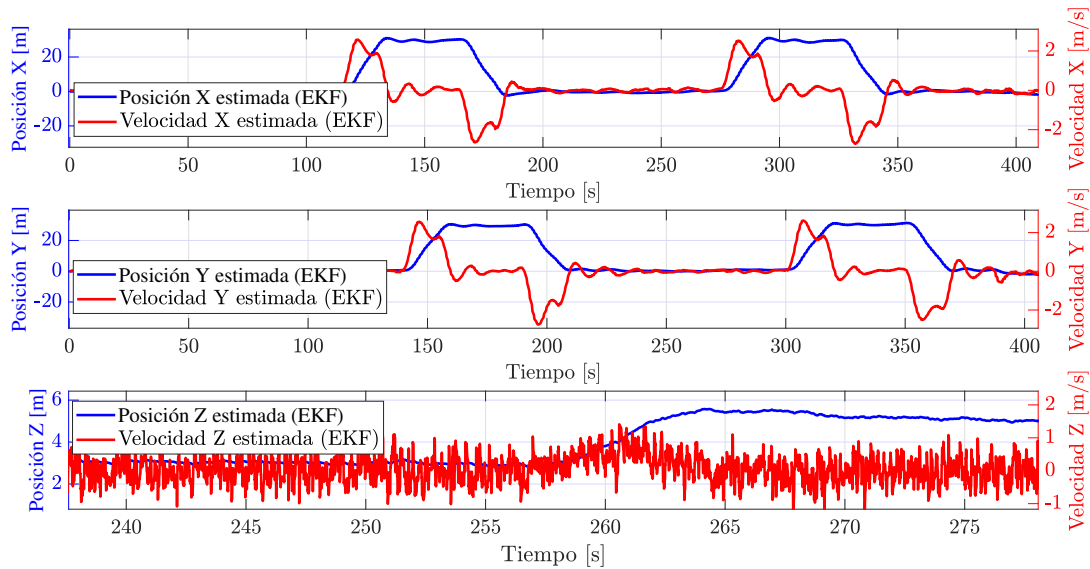


Figura 5.12: Velocidades estimadas por el EKF.

La figura 5.12 muestra las velocidades estimadas por el EKF para los tres ejes coordenados (x , y y z). En los ejes x e y , las velocidades estimadas presentan una tendencia coherente con los cambios en la posición, entendiéndose que, analíticamente, corresponden a la derivada de dicha posición. Por otro lado, aunque la velocidad estimada en el eje z también sigue la tendencia del cambio de altitud, exhibe un comportamiento con componentes de ruido de alta frecuencia. Este efecto se atribuye a la influencia directa de la aceleración de la gravedad sobre el acelerómetro vertical y al carácter ruidoso de la señal barométrica.

Aun así, todas las señales muestran un comportamiento consistente y adecuado para su utilización en los lazos de control correspondientes.

5.5. Análisis cuantitativo de los resultados

Para el análisis cuantitativo de los resultados obtenidos en las pruebas, se propone el uso de dos métricas de desempeño: el error cuadrático medio (RMSE, por sus siglas en inglés *Root Mean Square Error*) y la relación señal-ruido basada en referencia (SNR, por sus siglas en inglés *Signal to Noise Ratio*).

El análisis se lleva a cabo para la posición en los tres ejes coordenados x , y y z , considerando dos comparaciones: GPS vs. RTK y EKF vs. RTK. Esto permite determinar de manera cuantitativa cuál de las señales presenta un mejor desempeño, empleando la trayectoria medida con RTK como referencia absoluta.

Error cuadrático medio (RMSE)

El RMSE es una métrica que cuantifica la diferencia promedio entre los valores predichos y los valores reales de una señal, proporcionando una medida directa de la precisión de la estimación. Está definida por la ecuación:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x[n] - \hat{x}[n])^2}, \quad (5.1)$$

donde $x[n]$ representa la señal de referencia, $\hat{x}[n]$ corresponde a la señal medida o estimada, y N es el número total de muestras.

El RMSE se expresa en las mismas unidades que las señales analizadas. Un valor cercano a cero indica una alta similitud entre la señal estimada y la referencia, mientras que valores mayores reflejan diferencias más notorias entre ambas.

Relación señal-ruido basada en referencia (SNR)

El SNR basado en referencia es una métrica que cuantifica la cantidad de ruido o error presente en una señal medida o estimada con respecto a una señal de referencia conocida. Su definición matemática se expresa como:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=1}^N x[n]^2}{\sum_{n=1}^N (x[n] - \hat{x}[n])^2} \right), \quad (5.2)$$

donde $x[n]$ es la señal de referencia, $\hat{x}[n]$ es la señal medida o estimada, y N es el número total de muestras.

El SNR se expresa en decibelios (dB). Un valor alto indica que la señal estimada se asemeja fuertemente a la referencia (bajo nivel de ruido), mientras que un valor bajo refleja una mayor presencia de distorsión o error en la señal.

La figura 5.13 muestra la comparación simultánea de las señales obtenidas en la prueba de trayectoria cuadrada con cambio de altura para los tres ejes coordenados.

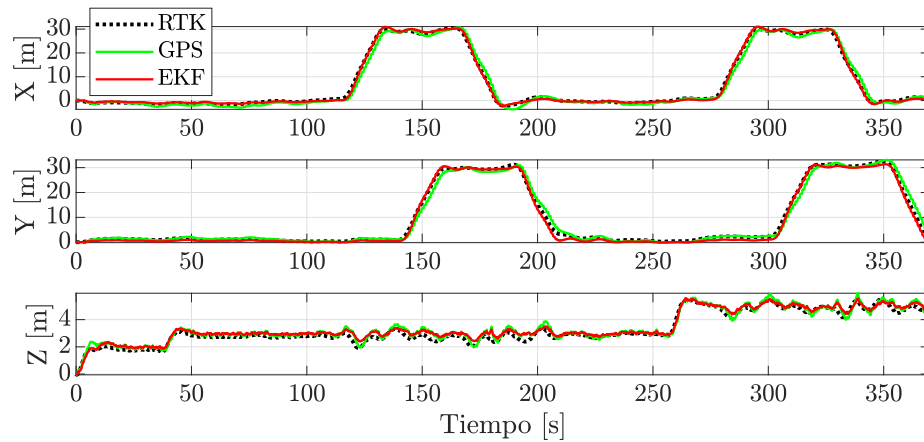


Figura 5.13: Señales de posición para la trayectoria cuadrada.

A partir de estas señales se calcula el RMSE y el SNR utilizando las ecuaciones definidas previamente. Los resultados se presentan en la tabla 5.1.

Métrica	X	Y	Z	Total
RMSE GPS	1.3001	1.2908	0.2593	1.8503
RMSE EKF	0.5054	0.8867	0.2397	1.0484
SNR GPS (dB)	20.82	21.29	22.65	21.09
SNR EKF (dB)	29.02	24.55	23.33	26.03

Tabla 5.1: Resultados comparativos GPS vs EKF para trayectoria cuadrada.

A partir de los resultados de RMSE es posible observar que, para el eje X , el EKF reduce el error aproximadamente en un 61 % con respecto al GPS, mientras que en el eje Y la reducción es cercana al 31 %. En el eje Z la mejora es menor ($\sim 8\%$), lo cual se atribuye a que el barómetro ya proporciona una señal con baja variación y suficiente estabilidad en altura.

En términos generales, el RMSE total para el GPS fue de 1.8503 m, mientras que para el EKF fue de 1.0484 m, lo que evidencia una reducción global del error de posicionamiento cercana al 43 %. Esto demuestra que el EKF corrige de manera significativa la señal proveniente del GPS. En cuanto al SNR, en los tres ejes el EKF presenta valores superiores a los del GPS, con incrementos de +8.2 dB en el eje X , +3.3 dB en el eje Y y +0.7 dB en el eje Z . De forma global, el SNR total del GPS fue de 21.09 dB, mientras que para el EKF fue de 26.03 dB, lo que representa una mejora de ~ 5 dB. Esto indica que el filtro es capaz de suprimir una cantidad significativa de ruido, aumentando la calidad de la señal procesada. Por otro lado, la figura 5.14 muestra la comparación simultánea de las señales obtenidas en la prueba de trayectoria en H para los tres ejes coordenados.

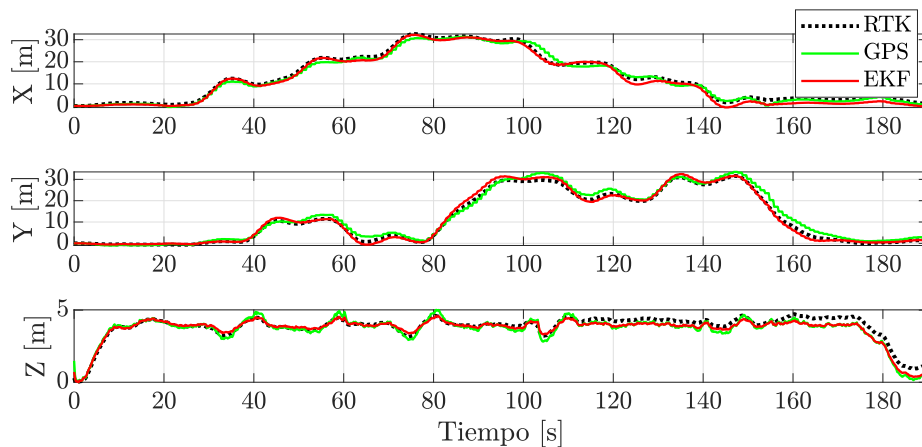


Figura 5.14: Señales de posición para la trayectoria H.

Nuevamente, se calcula el RMSE y el SNR utilizando las ecuaciones definidas. Los resultados se presentan en la tabla 5.2.

Métrica	X	Y	Z	Total
RMSE GPS	1.1692	1.6430	0.3061	2.0396
RMSE EKF	1.3022	0.9410	0.2655	1.6284
SNR GPS (dB)	23.03	19.93	22.17	21.26
SNR EKF (dB)	22.10	24.77	23.40	23.22

Tabla 5.2: Resultados comparativos GPS vs EKF para trayectoria H.

A partir de los resultados de RMSE es posible observar que, para el eje X , el EKF no mejora el desempeño, ya que incrementa el error en aproximadamente un 11 % con respecto al GPS, lo cual puede asociarse a la mayor exigencia dinámica en este eje durante la trayectoria en H, caracterizada por cambios más rápidos y agresivos. En contraste, en el eje Y se aprecia una reducción significativa del error cercana al 43 %, mientras que en el eje Z la mejora es moderada (~ 13 %), lo cual es coherente con el hecho de que el barómetro ya proporciona una señal estable.

En términos generales, el RMSE total para el GPS fue de 2.0396 m, mientras que para el EKF fue de 1.6284 m, lo que evidencia una reducción global del error de posicionamiento cercana al 20 %. Esto indica que, aunque la mejora no es homogénea en todos los ejes, el EKF sí contribuye a optimizar el desempeño general del sistema. En cuanto al SNR, el EKF presenta un comportamiento mixto: en el eje X se observa una ligera disminución de aproximadamente -0.9 dB, mientras que en los ejes Y y Z se registran incrementos de $+4.8$ dB y $+1.2$ dB, respectivamente. Finalmente, el SNR total del GPS fue de 21.26 dB, mientras que para el EKF fue de 23.22 dB, lo que representa una mejora de ~ 2 dB. Esto sugiere que, aunque el filtrado no mejora la calidad de la señal en todos los ejes, sí consigue reducir el ruido de manera efectiva a nivel global.

La disminución general del desempeño en comparación con la trayectoria cuadrada se atribuye a la mayor exigencia dinámica de la trayectoria en forma de H. A diferencia de la trayectoria cuadrada, la trayectoria en H incorpora cambios de dirección significativamente más bruscos y rápidos, además de haber sido ejecutada en aproximadamente la mitad del tiempo total. Esto implica mayores velocidades requeridas y, por tanto, señales de control más agresivas, lo que incrementa la sensibilidad del sistema ante limitaciones del modelo y posibles imprecisiones en la estimación.

Particularmente en el eje X , donde se observa un deterioro más evidente, este comportamiento puede asociarse tanto a la dificultad del modelo para predecir transiciones rápidas en dicho eje como a la presencia de errores sistemáticos en el GPS que el EKF no logra compensar completamente. En conjunto, la mayor agresividad del perfil de referencia favorece la acumulación de pequeños errores que se hacen más notorios a lo largo de la trayectoria.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se presentaron los criterios para la realización de pruebas de vuelo controladas, junto con los resultados experimentales obtenidos para los distintos ensayos. Además, se realizó un análisis cuantitativo enfocado en la validación del sistema de estimación propuesto.

Para el análisis de desempeño se definieron dos pruebas principales de seguimiento de trayectorias: la primera corresponde a una trayectoria cuadrada con cambio de altura, y la segunda a una trayectoria en forma de H , caracterizada por desplazamientos más cortos y exigentes. Para la verificación del desempeño se empleó un sistema RTK como referencia absoluta de posición, tomando como señales de comparación las mediciones del GPS y las estimaciones del EKF. El análisis cuantitativo se llevó a cabo utilizando como métricas de desempeño el error cuadrático medio (RMSE) y la relación señal-ruido (SNR).

En la primera trayectoria, el estimador logra una mejora notable en la precisión, reduciendo de forma significativa el error en los ejes x y y , junto con un incremento en la SNR que evidencia una señal de mayor calidad. En el eje z la mejora es más tenue, coherente con que la variabilidad del sensor barométrico ya es suficientemente baja. En general, para trayectorias con predominio de desplazamientos horizontales, el EKF demuestra un desempeño claramente superior al GPS sin filtrar.

Para la trayectoria en forma de H , el estimador mantiene una mejora global del rendimiento; sin embargo, esta resulta menos pronunciada debido a la mayor complejidad dinámica de la maniobra. En el eje X se evidencia una disminución en el desempeño, asociada a los cambios bruscos de dirección y a las transiciones repetidas de aceleración propias de esta trayectoria, lo que incrementa la sensibilidad a errores de modelado y a la dinámica no lineal.

En contraste, en el eje Y se conserva una mejora clara y consistente, mientras que en el eje Z se mantienen mejoras moderadas, coherentes con el reducido rango de variación vertical. Los resultados globales se presentan en la Tabla 5.3.

Métrica	Total cuadrada	Total H
RMSE GPS	1.8503	2.0396
RMSE EKF	1.0484	1.6284
SNR GPS (dB)	21.09	21.26
SNR EKF (dB)	26.03	23.22

Tabla 5.3: Resultados globales para ambas trayectorias.

En conjunto, los resultados demuestran que el método de estimación propuesto mejora significativamente la precisión respecto al GPS, especialmente en trayectorias amplias, proporcionando una base confiable para su uso en sistemas de control.

Conclusiones

En el trabajo se desarrolló y validó una estrategia completa de control y estimación para un cuadricóptero, incorporando un EKF con un modelo dinámico aumentado de 18 estados, ajustado mediante la caracterización estadística del ruido y validado mediante pruebas de vuelo. La selección del esquema de estimación se fundamentó en un análisis de técnicas aplicables a la navegación de vehículos aéreos no tripulados, lo que permitió definir una arquitectura coherente con las capacidades de sensado y procesamiento disponibles.

La arquitectura propuesta integró los sensores internos del teléfono inteligente junto con sensores externos, estructurando un sistema de estimación implementado directamente en el dispositivo móvil e integrado con el sistema de control. Los resultados experimentales (ver tabla 5.4) muestran que el estimador reduce significativamente el error global de posición y mejora la calidad de las mediciones frente a los datos sin filtrar, lo que demuestra un desempeño significativamente más preciso y adecuado para su uso en tareas de control.

Métrica	Trayectoria cuadrada				Trayectoria H			
	X	Y	Z	Total	X	Y	Z	Total
RMSE GPS	1.3001	1.2908	0.2593	1.8503	1.1692	1.6430	0.3061	2.0396
RMSE EKF	0.5054	0.8867	0.2397	1.0484	1.3022	0.9410	0.2655	1.6284
SNR GPS (dB)	20.82	21.29	22.65	21.09	23.03	19.93	22.17	21.26
SNR EKF (dB)	29.02	24.55	23.33	26.03	22.10	24.77	23.40	23.22

Tabla 5.4: Resumen comparativo de métricas GPS vs. EKF para ambas trayectorias.

En términos globales, el uso del EKF muestra una mejora consistente frente al GPS evaluado en dos trayectorias. Para la trayectoria cuadrada, el EKF reduce el RMSE total en aproximadamente un 43% y aumenta la SNR en un 23%. En la trayectoria en H, aunque la mejora en RMSE es más moderada (alrededor del 20%), la SNR también presenta un incremento cercano al 9%, comportamiento atribuible a la mayor exigencia dinámica de esta trayectoria, caracterizada por cambios más rápidos y agresivos de posición. En particular, en el eje X se observó una ligera degradación relativa del desempeño, asociada a las transiciones repetidas de aceleración y a los cambios bruscos de dirección, que incrementan la sensibilidad a errores de modelado y a efectos no lineales. En conjunto, la implementación práctica y la validación experimental confirman la viabilidad y efectividad de la estrategia de estimación desarrollada.

Trabajos futuros

Como trabajos futuros, se propone fortalecer la estrategia de control y estimación mediante una sintonización más robusta y un análisis más profundo del comportamiento dinámico del sistema, con el fin de mejorar la estabilidad y el desempeño ante perturbaciones y maniobras exigentes.

Adicionalmente, se considera pertinente realizar un análisis en frecuencia del ruido de los sensores que permita determinar de manera analítica las constantes de tiempo empleadas en el filtrado. Asimismo, se sugiere llevar a cabo una caracterización experimental más rigurosa del ruido, utilizando sensores de mayor precisión que puedan proporcionar mediciones de referencia confiables para la validación del modelo.

Finalmente, se plantea ampliar las capacidades del sistema mediante la estimación de nuevas variables de estado, la incorporación de sensores de mayor desempeño y la exploración de canales de comunicación de mayor alcance y robustez. Estas mejoras contribuirían a extender la aplicabilidad del método a escenarios más exigentes y con mayores niveles de autonomía.

Referencias

- [1] S. I. Abdelmaksoud, M. Mailah, and A. M. Abdallah, “Control strategies and novel techniques for autonomous rotorcraft unmanned aerial vehicles: A review,” 2020.
- [2] P. Torr and A. Zisserman, “Modeling and inference in uav navigation systems,” *Journal of Navigation Science*, 2022.
- [3] B. Behroozpour, P. A. Sandborn, M. C. Wu, and B. E. Boser, “Lidar system architectures and circuits,” *IEEE Communications Magazine*, vol. 55, no. 10, 2017.
- [4] M. Zhang and L. Green, “Reducing the cost of drone operations through enhanced battery life and efficient flight patterns,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023.
- [5] Drone Industry Insights, “Global drone market report: Cost reduction innovations and market growth,” 2024.
- [6] A. A. Vigoya, “Design and implementation of flight dynamics control strategies for a smartphone-based quadrotor,” 2017.
- [7] T. Brown, “Leveraging mobile technology for uav applications,” *Technology and Innovation Journal*, vol. 17, no. 3, pp. 143–157, 2024.
- [8] R. C. Sá, G. A. Barreto, A. L. C. de Araújo, and A. T. Varela, “Design and construction of a quadrotor-type unmanned aerial vehicle: Preliminary results,” in *2012 Workshop on Engineering Applications*, pp. 1–6, 2012.
- [9] F. Álvarez, “Cuadricóptero dedicado al seguimiento autónomo de un dispositivo celular inteligente,” Master’s thesis, Universidad del Valle, Cali, 2016.
- [10] P. L. Muñoz Murillo, “Control de elevación para cuadricóptero usando un celular inteligente,” tech. rep., Fundación Universitaria de Ciencias de la Salud, 2017.
- [11] Android Developers, “Retrieve location data on android.” <https://goo.su/EALMxSi>, 2024. Último acceso: 20 de septiembre de 2024.
- [12] Gobierno de Navarra, “Uso de dispositivos móviles.” <https://goo.su/CXYWh>, 2024. Último acceso: 21 de septiembre de 2024.

- [13] Android Developers, “Conectar a periféricos usb en android.” <https://goo.su/79W9a>, 2024. Último acceso: 21 de septiembre de 2024.
- [14] O. Woodman, “An introduction to inertial navigation,” tech. rep., University of Cambridge, 2007.
- [15] J. Farrell, *Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors*. McGraw-Hill Professional, 2008.
- [16] H. Mahdi, “Sensor fusion and its application in modern navigation systems,” *Sensors*, vol. 22, no. 1, pp. 123–145, 2022.
- [17] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [18] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Optimal Filtering*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1979.
- [19] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation, and Control, Volume 1*. New York: Academic Press, 1979.
- [20] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “A new extension of the kalman filter to nonlinear systems,” in *Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, pp. 182–193, 1997.
- [21] E. A. Wan and R. Van Der Merwe, “The unscented kalman filter for nonlinear estimation,” in *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pp. 153–158, IEEE, 2000.
- [22] M. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp, “A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 2, pp. 174–188, 2002.
- [23] R. Mahony, T. Hamel, and J.-M. Pflimlin, “Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 5, pp. 1203–1218, 2008.
- [24] S. O. H. Madgwick, “An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays,” in *Reports of the University of Bristol*, pp. 1–7, 2011.
- [25] M. Kam, X. Zhu, and P. Kalata, “Sensor fusion for mobile robot navigation,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 85, no. 1, pp. 108–119, 1997.

- [26] J. S. R. Díaz, “Estimación de la posición en 3d para un cuadricóptero usando los sensores de un smartphone,” trabajo de maestría, Universidad del Valle, Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Santiago de Cali, Colombia, 2019.
- [27] A. Cohn, “Utilizing smartphone sensors for drone navigation,” *Journal of Advanced Robotics*, 2023.
- [28] J. Smith and R. Lee, “Real-time data processing in drones using mobile technology,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2024.
- [29] S. Miller, “Storage solutions and data management in uav systems,” *International Journal of Robotics Research*, 2024.
- [30] K. Johnson, “Enhancing drone connectivity with mobile technology,” *Tech Insights Review*, 2024.
- [31] M. El-Diasty and S. D. Pagiatakis, “Sensor integration using a kalman filter,” *Journal of Applied Geodesy*, vol. 2, no. 1, pp. 33–49, 2008.
- [32] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “Unscented filtering and nonlinear estimation,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–422, 2004.
- [33] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Minnesota: Pearson, 3 ed., 1998. [En línea] Disponible en <https://bit.ly/2RUQr9m>. Accesado: 07 de enero de 2025.
- [34] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*. Prentice Hall, 12th ed., 2011. Incluye análisis del algoritmo PID y su aplicación en sistemas dinámicos.
- [35] S. A. C. Giraldo, “Control en cascada.” <https://goo.su/VIyXV3>, September 2025. Accesado: 16 de septiembre de 2025.
- [36] M. Grewal and A. Andrews, *Kalman Filtering Theory and Practice Using MATLAB*. California: Wiley - Interscience Publication, 2 ed., 2001. [Online] Available: <https://goo.su/mwQjkcF>. Accesado: 14 de julio de 2025.
- [37] K. Mehrotra and P. R. Mahapatra, “A jerk model for tracking highly maneuvering targets,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 33, pp. 1094–1105, Oct. 1997.
- [38] D. Simon, *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley, 2006. Incluye fundamentos del EKF y aplicaciones en sistemas embebidos y navegación.

- [39] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1991. Presenta el método RK4 como esquema estándar de alta precisión para ODE no lineales.
- [40] G. Welch, Greg y Bishop, “An introduction to the kalman filter,” *University of North Carolina at Chapel Hill, Department of Computer Science*, 1995. Available online: <https://www.cs.unc.edu/welch/kalman/>.
- [41] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 8th ed., 2021. Capítulos de análisis de errores, diferencias finitas y diferenciación numérica.
- [42] S. C. Chapra, *Applied Numerical Methods with MATLAB® for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill Education, 4th ed., 2018. Tratamiento práctico de errores de redondeo y truncamiento en derivadas numéricas.
- [43] S. . F. contributors, “Step size selection for finite difference approximations,” 2025. Explica el equilibrio entre error de truncamiento y redondeo, y da fórmulas para paso óptimo.
- [44] A. Gelb, ed., *Applied Optimal Estimation*. Cambridge, MA: MIT Press, 1974.
- [45] R. G. Brown and P. Y. C. Hwang, *Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering*. New York: John Wiley & Sons, 3 ed., 1997.
- [46] Y. Bar-Shalom, X. R. Li, and T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory Algorithms and Software*. New York, NY, USA: Wiley-Interscience, 2001.

Apéndice A

Especificaciones de hardware

A.1. Teléfono móvil

El teléfono móvil utilizado para la implementación del sistema fue un *LG Nexus 5X*. Las especificaciones técnicas del teléfono se detallan en la figura A.1.

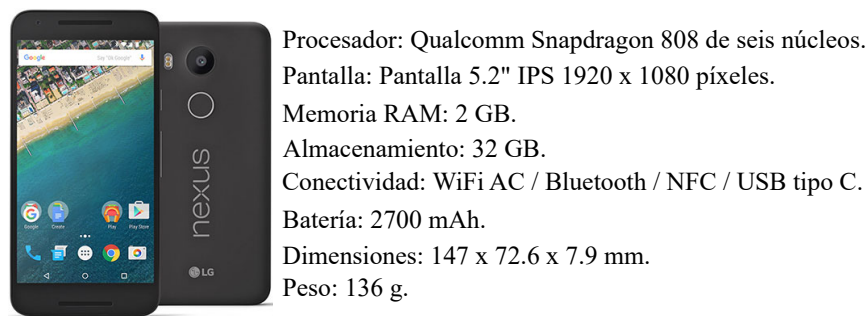


Figura A.1: Especificaciones técnicas del teléfono utilizado.¹

A.2. Comandos de manejo

El manejo completo del sistema se realiza mediante un control inalámbrico universal *Machenike G5 Pro*, conectado al teléfono móvil a través de *Bluetooth*, con un radio de conexión estable de aproximadamente 100 metros. El esquema general de asignación de funciones del control se muestra en la figura A.2.



Figura A.2: Esquema general de control y asignación de funciones.

¹Tomado de <https://goo.su/EEzXYw7>