

TOROS MÍNIMOS EN S^3

LEIDY YISSEDT LARA DÍAZ



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

2012

TOROS MÍNIMOS EN S^3

LEIDY YISSEDT LARA DÍAZ

yissedt.lara@correounivalle.edu.co

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar
al título de Matemático**

Director: HÉBER MESA PALOMINO, Msc.

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI**

2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI

LEIDY YISSEDY LARA DÍAZ, 1989

TOROS MÍNIMOS EN S^3

TEMAS Y PALABRAS CLAVES

Superficies mínimas, Ejemplos de Lawson, Toros mínimos, Relación geodésica

Notas de aprobación

El trabajo de grado titulado “Toros mínimos en S^3 ”, presentado por la estudiante LEIDY YISSEDT LARA DÍAZ, para optar al título de Matemáticas, fue revisado por el jurado y calificado como:

APROBADO

Msc. Héber Mesa Palomino

Director

Ph.D. Gonzalo García Camacho

Jurado

14 de septiembre de 2012

A mi familia

Agradecimientos

A mi familia, por brindarme su amor y permanente apoyo.

A mi director Héber Mesa, por su guía y ayuda en cada una de las etapas de mi carrera.

A la universidad y al departamento de Matemáticas por su calidad académica, profesoral y los múltiples beneficios que aportaron a mi formación integral.

A mis compañeros y amigos, con quienes pude compartir largas jordanas de estudio y diversión, gracias por esos buenos momentos.

LEIDY YISSEDT LARA DÍAZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

14 de septiembre de 2012

Índice general

Resumen	v
Introducción	vi
1. Preliminares	1
1.1. Hipervariedades en $\mathbb{R}^n$	1
1.2. Hipervariedades Mínimas en S^n	7
1.3. Hipervariedades mínimas algebraicas en S^n	9
2. Ejemplos de Lawson	12
2.1. Reflexión geodésica en S^3	12
2.2. Construcción de superficies mínimas en S^3	14
2.3. Las superficies $\xi_{m,k}$ y $\tau_{m,k}$	15
2.3.1. Familia $\{\xi_{m,k}\}$	16
2.3.2. Familia $\{\tau_{m,k}\}$	17
3. Sobre las superficies $\tau_{m,k}$	19
3.1. Minimalidad de las superficies $\tau_{m,k}$	19
3.2. Teselación de las superficies $\tau_{m,k}$	23
3.3. Orientabilidad de las superficies $\tau_{m,k}$	30
3.4. Algebricidad de las superficies $\tau_{m,k}$	43
3.5. Otros resultados sobre las superficies $\tau_{m,k}$	45

3.5.1.	Característica de Euler	45
3.5.2.	Toro de Clifford	46
3.5.3.	Grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$	49
Apéndice		54
Bibliografía		58

Índice de figuras

1.1. Representación de la condición 2, en la definición de variedad.	2
1.2. Proyección estereográfica de la esfera.	3
1.3. Helicoide.	6
1.4. Interpretación geométrica del cono asociado a una variedad.	9
1.5. Toro de Clifford.	11
2.1. Interpretación geométrica de una reflexión geodésica.	13
2.2. Representación de una extensión de la superficie mínima.	14
2.3. Gráficos de la superficie $\xi_{1,1} \cap S_+^3$	16
2.4. Superficies en S_+^3	18
3.1. Punto hiperbólico	23
3.2. Mapa de la Tierra	24
3.3. «Mapa» de la superficie $\tau_{2,3}$	26
3.4. «Mapa» con distribución de la superficie $\tau_{2,3}$	26
3.5. Visualizaciones de las superficies S_i de $\tau_{2,3}$ en S_+^3	27
3.6. Visualizaciones de las superficies I_i de $\tau_{2,3}$ en S_-^3	28
3.7. «Mapa» completo de $\tau_{2,3}$	29
3.8. «Mapa» con la ubicación de las superficies fundamentales de $\tau_{2,3}$	29
3.9. Cinta de Möbius.	31
3.10. «Mapa» de la superficie $\tau_{2,1}$	34

3.11. «Mapa» de $\tau_{2,1}$ con ubicación del segmento $\overline{\mathbf{ab}}$	35
3.12. «Mapa» con distribución de la familia $\tau_{m,k}$ por hemisferios.	37
3.13. «Mapa» con distribución por regiones fundamentales (con mk par).	38
3.14. «Mapa» con el recorrido del segmento (con k par).	38
3.15. «Mapa» con el recorrido del segmento (con k impar).	39
3.16. «Mapa» con distribución por regiones fundamentales (con mk impar).	40
3.17. Visualizaciones de las regiones S_1 y S_2 en el «Mapa».	48
3.18. Visualización de la intersección de las regiones S_1 y S_2	49
3.19. Ubicación geodésicas en el polígono $\Gamma_{m,k}$	50
3.20. Visualizaciones de la superficie $\tau_{2,1}$	55

Resumen

En 1970, H. Bleine Lawson, en su artículo “*Complete minimal surfaces in S^3* ”, elabora un método de construcción de superficies mínimas en S^3 y clasifica dentro de su construcción las familias $\{\xi_{m,k}\}$ y $\{\tau_{m,k}\}$ con $m, k \in \mathbb{N}$. Las superficies de la primera familia resultan ser encajadas, mínimas, orientables y compactas de cualquier género en S^3 y las de la segunda familia son inmersas, mínimas y algebraicas en S^3 . Para este trabajo, es de interés la familia $\{\tau_{m,k}\}$, donde las superficies $\tau_{m,k}$ tienen característica de Euler cero y género uno, motivo por el cuál se da el título de “Toros mínimos en S^3 ”. Lawson presenta para estas superficies un teorema de caracterización, el principal objetivo de este trabajo es demostrar y explicar tales características, entre las cuales se encuentran la orientabilidad y la algebricidad.

Introducción

Históricamente las superficies mínimas surgieron bajo el problema de encontrar superficies en $\mathbb{R}^3$ de área mínima con una frontera prescrita. Una de las primeras soluciones parciales fue presentada por J. L. Lagrange en 1762, quien determinó que si la superficie es la gráfica de una función suave f , ésta debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial, la cuál es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Unos años más tarde Meusnier dio una interpretación geométrica a la ecuación de Euler-Lagrange, mostrando que ésta indicaba la anulación de una cantidad geométrica asociada a la forma en que se curvaba la superficie, cantidad que denominó curvatura media. A partir de este momento se llamaron superficies mínimas a aquellas superficies cuya curvatura media es cero en cualquier punto, sin importar que en algunos casos estas superficies no representan un mínimo para el funcional de área.

Este problema, también conocido como problema de Plateau (1849), ha desafiado a los matemáticos por el contraste entre la simplicidad de su declaración y la dificultad de su solución. Por más de trescientos años, algunos de los mejores matemáticos han investigado y aportado al estudio de variedades mínimas, lo que nos muestra que estamos ante un tema de larga tradición que sigue mostrando nuevos resultados y desafíos manteniéndose dentro de las primeras líneas de investigación de la geometría diferencial.

Entre esos matemáticos encontramos a H. Lawson, quien desarrolló en su artículo *Complete Minimal Surface in S^3* (1970) [1], un método de construcción de superficies mínimas en la esfera tres dimensional y creó varias familias de superficies mínimas completas en S^3 , estableciendo una clasificación de éstas. El objetivo de este trabajo es estudiar y mostrar las propiedades de una de estas familias de superficies, denotadas superficies $\tau_{m,k}$ (con $m, k \in \mathbb{N}$), las cuales resultan tener característica de Euler cero y por tanto género uno, motivo por el cual el trabajo lleva por título “*Toros mínimos en S^3* ”.

Para lograr el objetivo de este trabajo, se presentarán 3 capítulos. El primero contine definiciones y conceptos básicos de geometría diferencial sobre hipervariedades en $\mathbb{R}^n$, para luego enfocarlos en hipervariedades mínimas en S^n . El segundo tratará el método de construcción desarrollado por Lawson, con algunos ejemplos y modelos de estas superficies. El tercero presenta un estudio detallado de las superficies $\tau_{m,k}$, por ejemplo se caracterizarán las superficies orientables, se determinará su género, se muestra que aunque las superficies son algebraicas no todas se encuentran encajadas en S^3 , salvo $\tau_{1,1}$, entre otras propiedades.

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo se presentarán definiciones, teoremas y ejemplos importantes con el fin de desarrollar los capítulos siguientes. Éste se encuentra dividido en tres secciones, la primera enfocada en Hipervariedades en $\mathbb{R}^n$, la segunda en Hipervariedades mínimas en S^n y la tercera en Hipervariedades mínimas algebraicas en S^3 . El contenido de este capítulo fue tomado principalmente de [2, 3, 4].

1.1. Hipervariedades en $\mathbb{R}^n$

Para poder hablar de hipervariedades en $\mathbb{R}^n$, iniciemos por saber que es una variedad, la cuál intuitivamente se entiende como un conjunto que localmente es similar a $\mathbb{R}^n$. A continuación se presentan las definiciones correspondientes:

Definición 1.1.1. *Una variedad diferenciable de dimensión n , es un conjunto no vacío M y una familia de funciones inyectivas $\psi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ definidas sobre conjuntos abiertos U_α de $\mathbb{R}^n$ tal que:*

1. $M = \bigcup_\alpha \psi_\alpha(U_\alpha)$.
2. Para cada α, β con $\psi_\alpha(U_\alpha) \cap \psi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, los conjuntos $\psi_\alpha^{-1}(W)$ y $\psi_\beta^{-1}(W)$ son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y la función $\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha$ es diferenciable.

El par (U_α, ψ_α) con $p \in \psi_\alpha(U_\alpha)$ es llamada una parametrización de M en p .

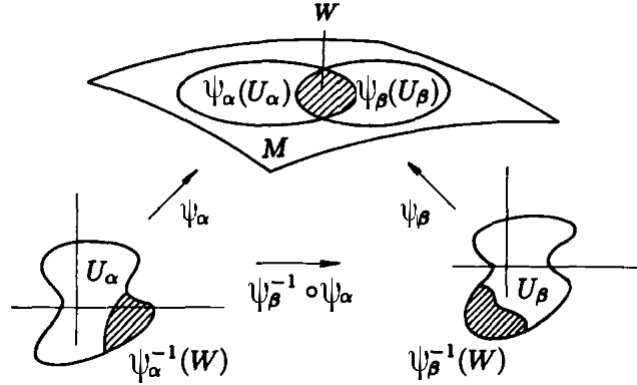


Figura 1.1: Representación de la condición 2, en la definición de variedad.

Ejemplo 1.1.1. El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$, es un ejemplo trivial de una variedad diferenciable n -dimensional, con la estructura diferenciable dada por la identidad.

Definición 1.1.2. Diremos que una variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ es una hipervariiedad de $\mathbb{R}^n$ si la dimensión de M es $n - 1$, y diremos que M tiene codimensión 1.

Observación. En el caso que una variedad tenga dimensión dos, ésta será llamada superficie.

Ejemplo 1.1.2. Siendo $S^2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ se puede dar una parametrización de esta de la siguiente manera. Sea $N = (0, 0, 1)$ el polo norte y $S = (0, 0, -1)$ el polo sur, y sean $\pi_1 : S^2 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\pi_2 : S^2 \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos aplicaciones, donde π_1 toma a un punto $p \in S^2 \setminus N$ y lo envía en la intersección del plano xy con la recta que pasa por p y N , que corresponde al punto p' como se muestra en la Figura 1.2. La proyección estereográfica π_2 es análoga a π_1 , pero esta se realiza considerando el polo sur S .

Es fácil verificar que $\pi_1(x, y, z) = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$, $\pi_2(x, y, z) = (\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})$ y que son homeomorfismos, conocidos como proyección estereográfica.

Es claro que las parametrizaciones $(\mathbb{R}^2, \pi_1^{-1})$ y $(\mathbb{R}^2, \pi_2^{-1})$ cubren a S^2 . De otro lado siendo

$$\pi_2^{-1}(u, v) = \frac{1}{u^2 + v^2 + 1}(2u, 2v, 1 - u^2 - v^2)$$

diferenciable en todo punto, entonces $(\pi_1^{-1})^{-1} \circ \pi_2^{-1}(u, v) = (u, v)$ es una función diferenciable (Definición 1.1.1). En conclusión, $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ es una hipervariedad de $\mathbb{R}^3$, o como mencionamos antes, es una superficie. De manera análoga se demuestra que $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ es una hipervariedad.

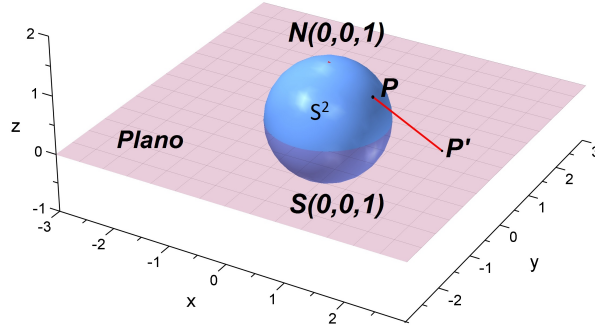


Figura 1.2: Proyección estereográfica de la esfera.

Este ejemplo se puede generalizar si consideramos conjuntos de nivel de una función real. En el caso de la esfera, esta superficie es el conjunto de nivel 1 de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, por supuesto se requieren condiciones sobre este conjunto y la función f para satisfacer la Definición 1.1.1, pues tomando la misma función de la esfera, el conjunto de nivel cero no es una superficie.

Definición 1.1.3. Sea $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ definida sobre un conjunto abierto V y $a \in \mathbb{R}$. Diremos que a es un valor regular de f , si para todo $q \in V$ tal que $f(q) = a$ se cumple que $\|\nabla f(q)\| \neq 0$.

En [3] se demuestra que la preimagen de un valor regular no trivial, es decir, cuando $f^{-1}(a) \neq \emptyset$, es una hipervariedad de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.3. Sea $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, un cálculo directo muestra que 1 es un valor regular y así $f^{-1}(1)$ es una hipervariiedad de $\mathbb{R}^n$. Claramente $f^{-1}(1) = S^{n-1}$.

A continuación se extenderá la idea de vector tangente a las variedades diferenciables, en principio si se piensa en una superficie regular en $\mathbb{R}^3$, se entiende el vector tangente en un punto p de la superficie como el vector velocidad en $\mathbb{R}^3$ de una curva sobre la superficie que pasa por p . Pero pensar en un vector velocidad en una variedad no es posible, dado que no contamos con apoyo del espacio ambiente, se tiene que buscar una propiedad característica del vector tangente que sustituya la idea de velocidad.

Si consideramos una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $\alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = v \in \mathbb{R}^n$. Ahora sea f una función diferenciable definida en una vecindad de p . Se puede restringir f a la curva α y expresar la derivada direccional con respecto al vector $v \in \mathbb{R}^n$ como:

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{t=0} \frac{dx_i}{dt}\bigg|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f.$$

Donde se nota que la derivada direccional con respecto a v es un operador de funciones reales diferenciables que dependen únicamente de v . Es decir, se tiene una propiedad característica y se va emplear para definir vectores tangentes en variedades, lo que se presenta en la siguiente definición.

Definición 1.1.4. Sea M una variedad diferenciable. Una función diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es llamada una curva diferenciable en M . Suponga que $\alpha(0) = p \in M$, y sea D el conjunto de funciones sobre M que son diferenciables en p . El vector tangente a la curva α en $t = 0$ es una función $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\bigg|_{t=0}, f \in D.$$

El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se notarán por $T_p M$.

Observación. Es posible dotar de las operaciones suma y producto por escalar al conjunto $T_p M$ para que éste sea un espacio vectorial de dimensión n , lo que permite inducir un producto interno.

A partir de este momento consideraremos variedades $M \subseteq \mathbb{R}^n$ y en este caso, $T_p M$ se identificará con un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $M \subseteq \mathbb{R}^n$ se encuentra parametrizada por $(\psi_\alpha, U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m$ y $p = \psi_\alpha(q)$, entonces se puede demostrar que $T_p M = \text{gen} \left\{ \frac{\partial \psi_\alpha(q)}{\partial u_i} \right\}_{i=1}^m$.

Definición 1.1.5. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una hipervariiedad, se define la aplicación de Gauss, como una función diferenciable $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para todo $p \in M$ se tiene $\langle \eta(p), \eta(p) \rangle = 1$ y $\langle v, \eta(p) \rangle = 0$ para todo $v \in T_p M$.

Observación. Para hipervariiedades que son preimagen de valores regulares no triviales se tiene que la aplicación de Gauss se puede definir globalmente y de manera diferenciable como $\eta(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$.

Definición 1.1.6. Sean $M \subset \mathbb{R}^n$ una hipervariiedad, $p \in M$ y η la aplicación de Gauss. Definimos el operador de forma en p , como la aplicación $A(p) : T_p M \rightarrow T_p M$, definida por $A(p)(v) = -d\eta_p(v)$ para todo $v \in T_p M$.

El operador de forma $A(p)$ es una aplicación lineal simétrica [2,3], es decir, para todo $v, w \in T_p M$ se tiene que $\langle A(p)(v), w \rangle = \langle A(p)(w), v \rangle$, de lo cual se concluye que sus valores propios son todos reales.

Definición 1.1.7. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una hipervariiedad, $p \in M$ y $A(p)$ el operador de forma. Definimos las curvaturas principales de M en p como los $n-1$ valores propios del operador de forma, que denotaremos por $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ y la curvatura media de M en p como el promedio de las curvaturas principales, es decir, $H(p) = \frac{1}{n-1} (\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1})$.

Definición 1.1.8. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una hipervariiedad, diremos que M es mínima si la curvatura media es cero en todos sus puntos.

Observación. Note que M es mínima si y solo si para todo $p \in M$ la traza del operador de forma $A(p)$ es cero.

Ejemplo 1.1.4. Un ejemplo clásico de superficies mínimas es la Helicoide (Figura 1.3.), la cuál se encuentra parametrizada por $X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ con $0 < u < 2\pi$ y $-\infty < v < \infty$.

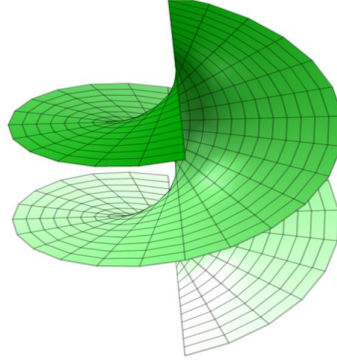


Figura 1.3: Helicoide.

A continuación, de acuerdo a la Definición 1.1.8 se va a comprobar que la curvatura media de la Helicoide es idénticamente cero.

En principio se calculan X_u y X_v , donde $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$ y $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$, así:

$$X_u = (-v \sen u, v \cos u, 1) \quad y \quad X_v = (\cos u, \sen u, 0)$$

luego se puede obtener la aplicación de Gauss asociada a la parametrización, como sigue:

$$\eta(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}(-\sen u, \cos u, -v)$$

y finalmente dado que $A(p)(v) = -d\eta_p(v)$ para todo $v \in T_p M$ y denotado $d\eta_p(X_u) = \eta_u$ y $d\eta_p(X_v) = \eta_v$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \eta_u &= \frac{1}{\sqrt{v^2 + 1}}(-\cos u, -\sen u, 0), \\ \eta_v &= \frac{1}{(v^2 + 1)^{3/2}}(v \sen u, -v \cos u, -1.) \end{aligned}$$

Donde se logra:

$$\begin{pmatrix} \eta_u \\ \eta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(v^2 + 1)^{-1/2} \\ -(v^2 + 1)^{-3/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz asociada a A_p respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & (v^2 + 1)^{-1/2} \\ (v^2 + 1)^{-3/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, sus los valores propios corresponden a $\lambda_1 = (v^2 + 1)^{-1}$ y $\lambda_2 = -(v^2 + 1)^{-1}$, donde efectivamente $H(p) = 0$. Concluyendo así que la Helicoide es una superficie mínima.

El siguiente teorema es una generalización de la ecuación de Euler-Lagrange (presentada en la introducción) y muestra una caracterización de las preimágenes de valores regulares que son mínimas en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.1. *Sea $M = \{x \in V : f(x) = 0\}$ donde $f : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de clase C^∞ definida sobre un conjunto abierto V , con $\|\nabla f(x)\| \neq 0$ para todo $x \in M$. M es mínima si y sólo si $\text{Expr}(f)(x) := \|\nabla f(x)\|^2 \triangle f(x) - \frac{1}{2} \langle \nabla \|\nabla f(x)\|^2, \nabla f(x) \rangle = 0$ para todo $x \in M$.*

La demostración de este resultado se encuentra en [4, 5, 6].

Ejemplo 1.1.5. *Todo hiperplano es una superficie mínima. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano, entonces existe un vector $v \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$, tal que se puede definir $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = 0\}$. Ahora tomando la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle x, v \rangle$, donde $M = f^{-1}(0)$ se tiene que $\nabla f(x) = v$, por lo que $\|\nabla f(p)\| \neq 0$, pero $\triangle f(x) = 0$, entonces $\triangle f(x) \|\nabla f(p)\|^2 = 0$, y además $\nabla \|\nabla f(x)\|^2 = \nabla \|v\|^2 = 0$, luego se obtiene que $\|\nabla f(x)\|^2 \triangle f(x) - \frac{1}{2} \langle \nabla \|\nabla f(x)\|^2, \nabla f(x) \rangle = 0$ para todo $x \in M$.*

1.2. Hipervariedades Mínimas en S^n

Para el desarrollo de este trabajo, se necesita del estudio de superficies inmersas en S^3 , por lo que, a continuación se daran algunas definiciones importantes enfocadas en variedades $M \subset S^n$.

Definición 1.2.1. Sea $M \subset S^n$ una variedad de dimensión $n - 1$, se define la aplicación de Gauss, como una función diferenciable $\eta : M \rightarrow S^n$ tal que para todo $p \in M$ se tiene $\langle \eta(p), \eta(p) \rangle = 1$, $\langle \eta(p), p \rangle = 0$ y $\langle v, \eta(p) \rangle = 0$ para todo $v \in T_p M$.

Nótese que la definición garantiza que para todo $p \in M$ se tiene la siguiente descomposición del espacio tangente $T_p S^n = T_p M \oplus \text{gen}\{\eta(p)\}$ (ver [4]). De otro lado, en el caso que M consista de los puntos de norma uno de las raíces de una función f homogénea, para la cual cero es un valor regular, es decir $M = f^{-1}(0) \cap S^n$, entonces la aplicación de Gauss se puede definir globalmente y de manera diferenciable como $\eta(p) = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$ puesto que $\|\nabla f(p)\| \neq 0$, y $\langle \nabla f(x), x \rangle = \partial(f)f(x) = 0$, donde $\partial(f)$ es el grado del polinomio f .

Definición 1.2.2. Sean $M \subset S^n$ una variedad de dimensión $n - 1$, $p \in M$ y η la aplicación de Gauss definida sobre M . Se define el operador de forma en p , como la aplicación $A(p) : T_p M \rightarrow T_{\eta(p)} S^n$, definida por $A(p)(v) = -d\eta_p(v)$ para todo $v \in T_p M$.

Observación. Nótese que si α es una curva diferenciable inmersa en M tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$ y dado que $\langle \eta(\alpha(t)), \alpha(t) \rangle = 0$, la cual al derivarse se obtiene $\langle \frac{d\eta(\alpha(t))}{dt} |_{t=0}, \alpha(0) \rangle + \langle \eta(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle = 0$ y se concluye que $\langle -A_p(v), p \rangle + \langle \eta(p), v \rangle = 0$. Por la definición 1.2.1 se tiene que $\langle \eta(p), v \rangle = 0$ por tanto $\langle -A_p(v), p \rangle = 0$ para todo $v \in T_p M$, ésto garantiza que $A_p(T_p M) \subseteq T_p S^n = (\text{gen}\{p\})^\perp$ y de manera análoga por definición se determina que $A_p(T_p M) \subseteq T_{\eta(p)} S^n = (\text{gen}\{\eta(p)\})^\perp$. En conclusión $A_p(T_p M) = (\text{gen}\{\eta(p)\} \oplus \text{gen}\{p\})^\perp = T_p M$.

Al igual como se define la minimalidad en hipervariedades de $\mathbb{R}^n$ se da la analogía para las hipervariedades mínimas en S^n .

Definición 1.2.3. Sea $M \subset S^n$ una variedad de dimensión $n - 1$, diremos que M es mínima en S^n si la curvatura media es cero en todos sus puntos.

Dada M una variedad compacta $(n - 1)$ dimensional, tal que $M \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, sabemos que M es una hipervariiedad en S^n , ya que su codimensión con S^n es 1 y cómo ya se mostró antes $T_p S^n = T_p M \oplus \text{gen}\{\eta(p)\}$. Ahora, a esta hipervariiedad M se le asocia una hipervariiedad n

dimensional $CM \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que llevará por nombre de cono asociado a M , definido por el conjunto $CM = \{tx \in \mathbb{R}^n | x \in M, t > 0\}$. No es difícil demostrar que CM es una hipervariiedad de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2.1. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1 \text{ y } z = \frac{1}{2}\}$ una variedad 1- dimensional, con $M \subset S^2$, tenemos que el cono asociado a M es el conjunto $CM = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \neq 0, z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$, el cual es una superficie de $\mathbb{R}^3$.

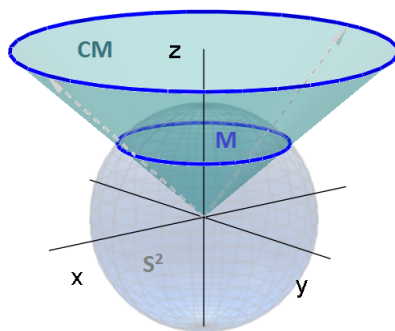


Figura 1.4: Interpretación geométrica del cono asociado a una variedad.

La definición de este cono asociado CM , es de interés ya que relaciona la minimalidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ con la minimalidad en S^n .

Teorema 1.2.1. $M^{n-1} \subset S^n$ es una hipervariiedad mínima en S^n , si y sólo si, CM es una hipervariiedad mínima en $\mathbb{R}^{n+1}$.

La prueba se encuentra en [4, 5].

1.3. Hipervariiedades mínimas algebraicas en S^n

En esta sección se definirá lo que es una variedad algebraica y al final de la sección se dan ejemplos de variedades algebraicas que a su vez son hipervariiedades mínimas de $\mathbb{R}^{n+1}$. En concordancia con el Teorema 1.2.1 estas corresponden con hipervariiedades mínimas en S^n que por supuesto

son algebraicas, es decir, se tienen superficies que son mínimas y algebraicas simultaneamente en S^n y por esto el título de la sección.

Definición 1.3.1. Sea $M \subset S^n$ una variedad $(n-1)$ -dimensional. Diremos que M es algebraica si y sólo si $M = f^{-1}(0) \cap S^n$ es el valor regular cero de un polinomio f homogéneo.

Ejemplo 1.3.1. Un ejemplo sencillo son los ecuadores, los cuales se definen como $S^{n-1}(v) = \{x \in S^n : \langle x, v \rangle = 0\}$, con $v \in S^n$. En este caso la aplicación de Gauss se puede definir como $\eta(x) = v$ para todo $x \in S^{n-1}(v)$, entonces $d\eta_x = 0$, dado que $\eta(x)$ es constante, pero lo anterior implica que el operador de forma es idénticamente cero, luego las curvaturas principales son cero en todos los puntos de la variedad, por tanto mínimos. Por otro lado si se considera el polinomio homogéneo $p(x) = \langle x, v \rangle$, con $S^{n-1}(v) = p^{-1}(0) \cap S^n$, lo que indica que los ecuadores son hipervariedades algebraicas de grado uno.

Ejemplo 1.3.2. Otro ejemplo de una superficie mínima y algebraica es el Toro de Clifford que esta determinado por el polinomio homogéneo $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3 - x_1x_4$ y se define como $T := \{x \in S^3 : x_2x_3 - x_1x_4 = 0\}$.

Una prueba de su minimalidad se da haciendo un cálculo directo para obtener $\text{Expr}(f) = -2(x_1x_2 - x_3x_4)^2$ y dado que f es homogéneo y $CT = f^{-1}(0)/\{0\}$, el Teorema 1.1.1 garantiza que CT es mínimo y por el Teorema 1.2.1 se concluye que $T = f^{-1}(0) \cap S^3$ es una superficie mínima algebraica en S^3 .

En la Figura 1.5, se muestra una visualización de medio Toro de Clifford, aplicando proyección estereográfica desde $(0, 0, 0, -1)$ a $T \cap S_+^3$, donde $S^3 = S_+^3 \cup S_-^3$, siendo S_+^3 el hemisferio norte y S_-^3 el hemisferio sur respectivamente.

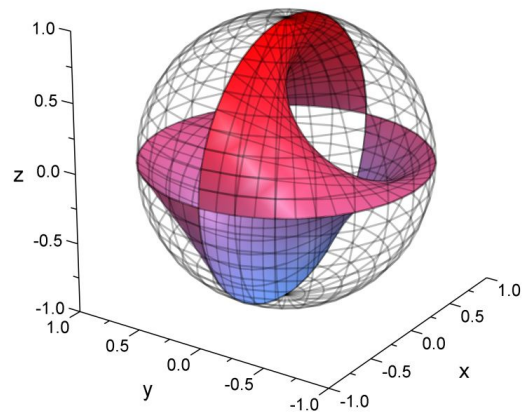


Figura 1.5: Toro de Clifford.

Capítulo 2

Ejemplos de Lawson

H. Lawson en su artículo *Complete Minimal Surface in S^3* [1] presenta una interesante construcción de superficies mínimas en S^3 . Este método parte de una superficie mínima con frontera (solución al problema de Plateau en S^3 de dicha frontera), que luego es reflejada a través de segmentos de geodésicas en S^3 que hacen parte de su frontera. Con este método de construcción, Lawson define dos familias de superficies, la familia $\xi_{m,k}$ y la familia $\tau_{m,k}$, las cuales se estudiarán en el presente capítulo.

2.1. Reflexión geodésica en S^3

Para empezar, se tiene que las geodésicas en S^3 son circunferencias que se obtienen al intersectar subespacios vectoriales de dimensión dos en $\mathbb{R}^4$ con la esfera tres dimensional. Explícitamente una geodésica γ que pasa por $p \in S^3$ en $t = 0$ con velocidad $0 \neq v \in T_p S^3$, se puede parametrizar por :

$$\gamma(t) = \frac{v}{|v|} \operatorname{sen}(t|v|) + p \cos(t|v|).$$

Observación. Dada una geodésica $\gamma \subset S^3$, existen vectores $p, v \in S^3$ tal que $\langle p, v \rangle = 0$ y $\gamma \subset \operatorname{gen}\{p, v\}$, es decir, γ es una curva plana que se encuentra en un único plano determinado por los vectores p y v . Por tanto, se puede ver a $\mathbb{R}^4$ como la suma directa, entre el plano que

contiene a la geodésica y su componente ortogonal, que corresponde a $\text{gen}\{p, v\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle x, p \rangle = \langle x, v \rangle = 0\}$. Esta descomposición de $\mathbb{R}^4$ garantiza que para $x \in \mathbb{R}^4$ existen u_1 y u_2 únicos tal que $u_1 \in \text{gen}\{p, v\}$ y $u_2 \in \text{gen}\{p, v\}^\perp$ y $x = u_1 + u_2$.

Definición 2.1.1. Sea γ una geodésica en S^3 , se define por *reflexión geodésica* a lo largo de γ a la función $r_\gamma : S^3 \rightarrow S^3$ definida por $r_\gamma(x) := u_1 - u_2$; donde $x = u_1 + u_2$ y u_1, u_2 son las componentes tangencial y normal de x respecto al único plano donde se encuentra γ ($u_1 \in \text{gen}\{p, v\}$ y $u_2 \in \text{gen}\{p, v\}^\perp$).

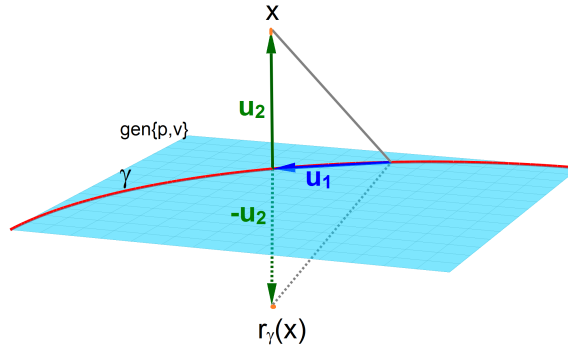


Figura 2.1: Interpretación geométrica de una reflexión geodésica.

De la definición anterior se puede deducir que:

$$r_\gamma(x) = 2u_1 - x = 2(\langle x, p \rangle p + \langle x, v \rangle v) - x.$$

Observación. La reflexión geodésica es una isometría, dado que conserva distancias y ángulos, es decir, cumple que $\langle r_\gamma(x), r_\gamma(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

A parte de ser una isometría, la reflexión geodésica r_γ presenta dos características fundamentales, que se detallan en la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1. Sean γ_1, γ_2 geodésicas en S^3 , entonces $r_{\gamma_1}(\gamma_2) = \gamma_3$ es una geodésica y $r_{\gamma_3} = r_{\gamma_1} \circ r_{\gamma_2} \circ r_{\gamma_1}$.

Es fácil observar que γ_3 es una geodésica, dado que r_{γ_1} es una isometría, y la segunda parte se obtiene por un cálculo directo (el lector se puede remitir a [4,5]).

2.2. Construcción de superficies mínimas en S^3 .

Con la reflexión geodésica y sus características es posible entender la construcción de las superficies definidas por Lawson, la cual en [1] se desarrolla a partir de un resultado que se presenta a continuación.

Teorema 2.2.1. *Sea M una superficie mínima de clase C^2 y frontera ∂M . Si ∂M contiene un arco geodésico γ , entonces M puede ser extendida como una superficie analítica, a lo largo de cada componente no trivial de $\partial M \cap \gamma$ por reflexión geodésica.*

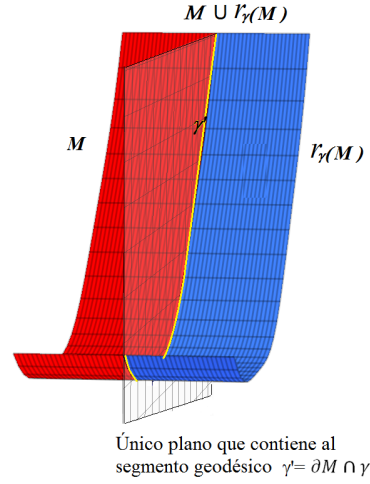


Figura 2.2: Representación de una extensión de la superficie mínima.

A pesar de la importancia del teorema anterior no se presentará la demostración, debido que su prueba requiere de otros preliminares que no son de interés para el desarrollo de este trabajo.

Este teorema garantiza, en el caso que $\gamma \subset S^3$ y $\gamma' = \gamma \cap \partial M$ sea un segmento de la geodésica γ , que la unión $M \cup r_{\gamma'}(M)$ es una superficie analítica mínima.

Definición 2.2.1. Sean $v_0, v_1, \dots, v_m = v_0$ puntos en S^3 , definimos el polígono geodésico Γ como un polígono cuyos lados γ_i , que unen los vértices v_i con v_{i+1} para $i = 0, 1, \dots, m-1$, son segmentos de geodésicas.

Siendo Γ un polígono geodésico de S^3 de vértices v_i y lados γ_i , se considerarán aquellos polígonos tales que el ángulo entre γ_i y γ_{i+1} en el vértice v_i es de la forma $\frac{\pi}{k_i+1}$ donde k_i es un entero positivo.

Ahora, definiendo $\mathfrak{M}_\Gamma$ como la solución al problema de Plateau para la curva cerrada Γ , ésta se extiende por reflexión geodésica sobre cada lado v_i . Cada imagen de $\mathfrak{M}_\Gamma$, puede ser reflejada nuevamente por sus arcos de la frontera. Este proceso permite construir por medio de reflexiones sucesivas de la superficie $\mathfrak{M}_\Gamma$ una superficie M_Γ . Formalmente, si consideramos la Proposición 2.1.1 y el grupo G_Γ generado por la reflexiones r_{γ_k} , $k = 1, \dots, m$, entonces podemos escribir:

$$M_\Gamma = \bigcup_{g \in G_\Gamma} g(\mathfrak{M}_\Gamma).$$

En [1] H. Lawson prueba que estas superficies son mínimas y están inmersas en S^3 .

2.3. Las superficies $\xi_{m,k}$ y $\tau_{m,k}$.

Una vez definido el método de construcción de la sección anterior, se analizarán ejemplos concretos de polígonos Γ y las superficies que se construyen a partir de estos polígonos. Específicamente se detallará en la construcción de las familias $\{\xi_{m,k}\}$ y $\{\tau_{m,k}\}$, siendo esta última el interés principal del desarrollo de esta trabajo.

En principio estas familias se construyen fijando m y k enteros no negativos y escogiendo puntos P_1, P_2, Q_1 y Q_2 tales que $P_1, P_2 \in C_1$ con $C_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_1 = x_2 = 0\}$ y $Q_1, Q_2 \in C_2$ con $C_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_3 = x_4 = 0\}$, tal que la distancia en S^3 entre P_1, P_2 sea $\frac{\pi}{k+1}$ y la distancia en S^3 entre Q_1, Q_2 sea $\frac{\pi}{m+1}$.

Cada una de estas familias se construyen partiendo de polígonos geodésicos distintos como se explicará con más detalle en las siguientes secciones.

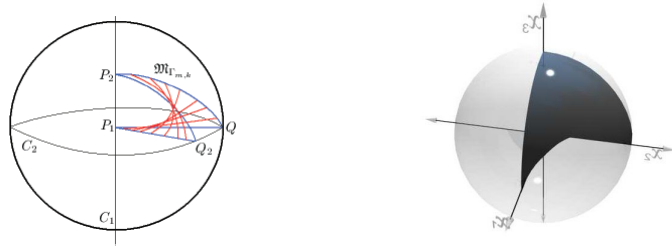
2.3.1. Familia $\{\xi_{m,k}\}$

La familia $\{\xi_{m,k}\}$, se construye con el polígono geodésico $P_1Q_1P_2Q_2$, que se denotará por $\Gamma_{m,k}$, siendo $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$ la superficie en S^3 solución al problema de Plateau asociada al polígono geodésico, también conocida como superficie fundamental, a la cual al aplicar el método expuesto anteriormente se obtiene la superficie $\xi_{m,k}$, que efectivamente es mínima en S^3 .

Además de ser estas superficies mínimas, también se puede mostrar que son superficies orientables compactas de género mk y se encuentran encajadas en S^3 [1, 4].

En [6, 4, 5] se muestran resultados del análisis algebraico de estas superficies, esto es, cuales superficies de esta familia se pueden modelar como el valor regular de un polinomio homogéneo; entre estos resultados se encuentran: Ninguna superficie $\xi_{m,k}$ es algebraica de grados 1, 2, 3 y 4, salvo el toro de Clifford $(\xi_{1,1})$ que es de grado 2 y la superficie $\xi_{2,2}$ no es algebraica de grado 5.

Siendo que estas superficies se encuentran encajadas en $S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, no es posible visualizar graficas de estas. Sin embargo, es posible obtener gráficas usando la proyección estereográfica de S^3 en $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ desde los puntos e_4 y $-e_4$. Se puede observar que bajo estas proyecciones que los puntos cuya cuarta componente son cero no son alterados y e_4 y $-e_4$ son enviados al origen respectivamente por cada una de las proyecciones. Bajo esta identificación se tienen las gráficas de la Figura 2.3 para $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$.



Superficie fundamental $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$. Superficie fundamental $\mathfrak{M}_{\Gamma_{1,1}}$ en S^3 .

Figura 2.3: Gráficos de la superficie $\xi_{1,1} \cap S^3_+$

Dada la simetría de estas superficies respecto al plano $x_4 = 0$, el ecuador $S^3(e_4)$ divide cada superficie en mitades isométricas, por ende basta con observar y analizar la mitad que se encuentra en el hemisferio superior $S^3(e_4)$, es decir, basta con realizar la proyección estereográfica desde el punto $-e_4$.

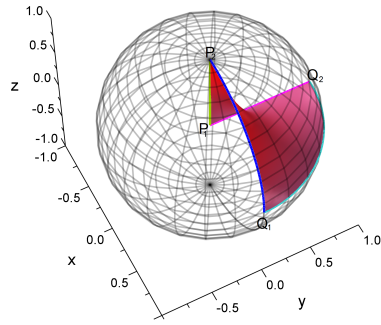
2.3.2. Familia $\{\tau_{m,k}\}$

Para la construcción de esta familia de superficies se define el polígono geodésico $P_1P_2Q_1Q_2$ que se denota por $\Gamma_{m,k}$ y aplicando de nuevo el método de construcción, denotamos a las superficies $M_{\Gamma_{m,k}}$ como $\tau_{m,k}$.

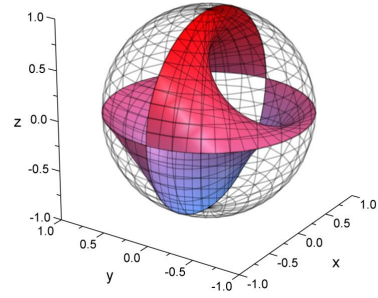
Esta familia cuenta con la gran ventaja de poder ser descritas explícitamente por la inmersión $\psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ dada por:

$$\psi_{m,k}(x, y) = (\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y)$$

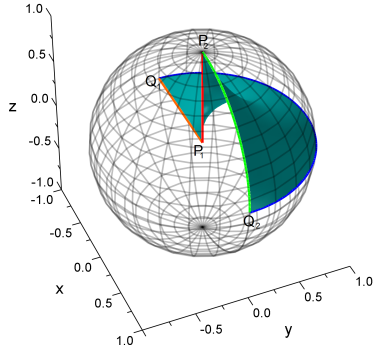
Esta parametrización ayuda a tener una imagen de estas, por lo menos de la región fundamental, usando la proyección estereográfica de S^3 en $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ desde el punto $-e^4$, al igual como se planteo para la familia $\{\xi_{m,k}\}$ logrando los siguientes gráficos para $\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}$:



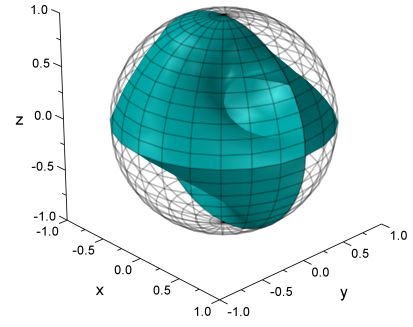
Superficie fundamental $\mathfrak{M}_{\Gamma_{1,1}}$.



Superficie $\tau_{1,1}$.



Superficie fundamental $\mathfrak{M}_{\Gamma_{2,1}}$.



Superficie $\tau_{2,1}$.

Figura 2.4: Superficies en S^3_+ .

La familia $\tau_{m,k}$ es una familia de superficies mínimas, inmersas y algebraicas de grado $m+k$, de la cuál la única superficie encajada es el toro de Clifford que corresponde a la superficie $\tau_{1,1}$. Estas y otras características como la orientabilidad y la algebraicidad se demostrarán con mas detalle en el siguiente capítulo, siendo este el objetivo del presente trabajo.

Capítulo 3

Sobre las superficies $\tau_{m,k}$

En este capítulo se desarrollará un amplio estudio de las superficies $\tau_{m,k}$, donde se expondrán y demostrarán varias de sus propiedades con el objetivo de lograr una caracterización de las mismas. Para tal objetivo, el capítulo se encontrará dividido en cinco secciones. En la primera sección se mostrará su característica más importante, su minimalidad. La segunda sección contendrá una representación que se hará de las superficies que llamaremos «mapa». La tercera sección tratará un análisis sobre la orientabilidad de cada una de estas superficies. La cuarta mostrará que cada punto de las superficies $\tau_{m,k}$ corresponde a un cero de un polinomio homogéneo de grado $m + k$. Finalmente, la quinta sección mostrará otros resultados entre los que encontraremos que estas superficies tienen característica de Euler cero y género uno.

3.1. Minimalidad de las superficies $\tau_{m,k}$

De acuerdo a la definición de superficie mínima que se dió en el capítulo uno, tenemos que una superficie es mínima si su curvatura media es nula. Por lo que a continuación se presentarán los cálculos para verificar tal hecho.

En principio, tenemos que la curvatura media de las superficies $\tau_{m,k}$ en un punto p es igual al promedio de los valores propios del operador de forma $A(p)$, entonces, tal como se hizo para

la helicoides, para las superficies $\tau_{m,k}$ se considera la parametrización $\psi_{m,k}(x, y)$ definida para $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ y $(m, k) = 1$ como:

$$\psi_{m,k}(x, y) = (\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y)$$

Para calcular el operador de forma $A(p)(v) = -d\eta(v)$ para todo $v \in T_pM$, se requiere definir para cada punto $p \in \tau_{m,k} \subseteq S^3$ un vector $\eta(p) \in \mathbb{R}^4$ tal que $\langle \eta(p), v \rangle = 0$ para todo $v \in T_pM$, $\langle \eta(p), p \rangle = 0$ y $\langle \eta(p), \eta(p) \rangle = 1$ (Definición 1.2.1.).

Si consideramos $\{\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x}, \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y}\}$ la base de T_pM inducida por la parametrización $\psi_{m,k}$, entonces en resumen, se desea determinar en forma diferenciable un vector $\eta(p)$ unitario tal que:

$$\langle \eta(p), \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \rangle = \langle \eta(p), \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \rangle = \langle \eta(p), p \rangle = 0.$$

Teniendo en cuenta que cada uno de estos vectores pertenecen a $\mathbb{R}^4$, podemos usar el producto cruz generalizado para determinar $\eta(p)$. A continuación definiremos el producto cruz en $\mathbb{R}^n$ (Ver [8]).

Definición 3.1.1. *Dados $n - 1$ vectores $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, el producto cruz de estos se define como:*

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1} = \begin{vmatrix} e \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \dots & a_{(n-1)n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} |AD_i| e_i$$

donde $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $A = (a_{ij})_{(n-1) \times (n)}$ y $D_i = (I_n^1 \dots I_n^{i-1} I_n^{i+1} \dots I_n^n)$ es una matriz de tamaño $n \times (n-1)$, aquí I_n^j , representa la j -ésima columna de la matriz idéntica.

Proposición 3.1.1. *El vector $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_{n-1}$ es ortogonal a cada uno de los vectores A_i .*

La prueba de este resultado se puede consultar en [8].

De acuerdo a la proposición anterior podemos determinar $\eta(p) = \frac{\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \times p}{\|\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \times p\|}.$

Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} &= (-m \sin mx \cos y, m \cos mx \cos y, -k \sin kx \sin y, k \cos kx \sin y), \\ \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} &= (-\cos mx \sin y, -\sin mx \sin y, \cos kx \cos y, \sin kx \cos y).\end{aligned}$$

Luego, la aplicación de Gauss se puede definir como:

$$\begin{aligned}\eta(p) &= \frac{\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \times p}{\left\| \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \times p \right\|} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \times \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \times p \right\|} \begin{vmatrix} e \\ \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y} \\ p \end{vmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{2}k(\cos(y+mx) - \cos(y-mx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_1 + \frac{\sqrt{2}k(\sin(y+mx) + \sin(y-mx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_2 + \\ &\quad \frac{\sqrt{2}m(\sin(y+kx) - \sin(y-kx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_3 + \frac{-\sqrt{2}m(\cos(y+kx) + \cos(y-kx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_4.\end{aligned}$$

Una vez definida la aplicación de Gauss, se puede calcular el operador de forma $A(p)(v) = -d\eta_p(v)$ para todo $v \in T_pM$. Dado que $d\eta(p)$ es lineal, basta con calcular la imagen de los elementos de la base inducida por $\psi_{m,k}$, es decir, $d\eta(p)(\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x}) = \eta_x$ y $d\eta(p)(\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y}) = \eta_y$.

$$\begin{aligned}\eta_x &= \frac{-\sqrt{2}km(\sin(y+mx) + \sin(y-mx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_1 + \frac{\sqrt{2}km(\cos(y+mx) - \cos(y-mx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_2 + \\ &\quad \frac{\sqrt{2}km(\cos(y+kx) + \cos(y-kx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_3 + \frac{\sqrt{2}km(\sin(y+kx) - \sin(y-kx))}{2\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}}e_4. \\ \eta_y &= \frac{-\sqrt{2}km^2(\sin(y+mx) - \sin(y-mx))}{(k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y))^{3/2}}e_1 + \frac{\sqrt{2}km^2(\cos(y+mx) + \cos(y-mx))}{(k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y))^{3/2}}e_2 + \\ &\quad \frac{\sqrt{2}k^2m(\cos(y+kx) - \cos(y-kx))}{(k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y))^{3/2}}e_3 + \frac{2\sqrt{2}k^2m \cos kx \sin y}{(k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y))^{3/2}}e_4.\end{aligned}$$

Donde se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\sqrt{2}km}{\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}} \\ \frac{-2\sqrt{2}km}{(k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y))^{3/2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_{m,k}}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi_{m,k}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Luego la matriz asociada a $A(p)$ respecto a la base $\left\{ \frac{\partial\psi_{m,k}}{\partial x}, \frac{\partial\psi_{m,k}}{\partial y} \right\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-2\sqrt{2}km}{\sqrt{k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y)}} \\ \frac{-2\sqrt{2}km}{(k^2+m^2-k^2\cos(2y)+m^2\cos(2y))^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, las curvaturas principales de $\tau_{m,k}$ en $p = \psi_{m,k}(x, y)$ son,

$$\lambda_1 = \frac{-2km}{k^2 + m^2 - k^2 \cos(2y) + m^2 \cos(2y)}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{2km}{k^2 + m^2 - k^2 \cos(2y) + m^2 \cos(2y)},$$

donde efectivamente $H(p) = 0$.

Concluyendo que las superficies $\tau_{m,k}$ son mínimas.

De lo anterior, la curvatura de Gauss en cada punto $p = \psi_{m,k}(x, y)$ es el producto de las curvaturas principales, así:

$$K(p) = \frac{-4k^2m^2}{[k^2 + m^2 - k^2 \cos(2y) + m^2 \cos(2y)]^2}$$

Sí analizamos el caso para el cuál $m = k = 1$, es decir, el toro de Clifford, se tiene que la curvatura de Gauss es la siguiente:

$$K(p) = \frac{-4}{4} = -1.$$

Al ser ésta una constante negativa, se dice que, todos los puntos del toro de Clifford son puntos hiperbólicos o puntos silla, esto quiere decir, que la superficie cruza el plano tangente en cada uno de sus puntos. Esto se debe a que el valor de las curvaturas principales tienen signos opuestos, entonces siempre habrá un trozo del toro a cada lado del plano tangente en cada punto p , como se puede observar en la siguiente imagen.

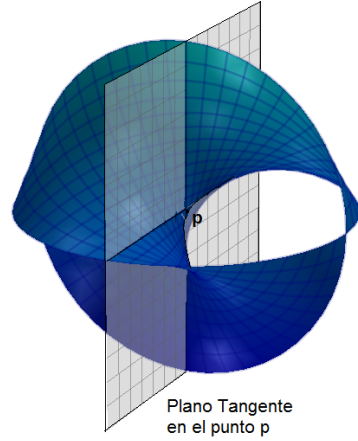


Figura 3.1: Punto hiperbólico

Por tanto, si una superficie es mínima, entonces tendrá curvatura de Gauss negativa en todos sus puntos.

3.2. Teselación de las superficies $\tau_{m,k}$

Para continuar con el estudio de las superficie $\tau_{m,k}$, se ha dividido el plano $\mathbb{R}^2$ en regiones, tal que sus imagenes por la función $\psi_{m,k}$ forman una teselación de $\tau_{m,k}$. Antes de mostrar esta teselación, se explicará la forma como en éste trabajo se han realizado las visualizaciones gráficas de las superficies $\tau_{m,k}$.

Dado que el espacio ambiente de las superficies $\tau_{m,k}$ es $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, no es posible obtener una visualización directa de estas superficies; así que la teselación nos permitirá tener un modelo plano que nos indica “que forma” tienen las superficies.

En principio sabemos que las superficies $\tau_{m,k}$ cuentan con la parametrización $\psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^3$ y ésta con ayuda de la proyección estereográfica, logra una visualización de las superficies. Recordemos que dependiendo desde que punto se aplique la proyección estereográfica, se obtendrá una visualización de la parte que está en el hemisferio norte y otra en el hemisferio sur, denotados estos como S^3_+ (proyectando desde $-e_4$) y S^3_- (proyectando desde e_4).

Observando la parametrización $\psi_{m,k}$ es claro que $\psi_{m,k}(x, y) \in S^3_+$ cuando $\sin kx \sin y > 0$ y $\psi_{m,k}(x, y) \in S^3_-$ cuando $\sin kx \sin y < 0$. Aquellos puntos (x, y) para los cuales $\sin kx \sin y = 0$ son enviados por la parametrización al ecuador $S^3(e_4) = \{x \in S^3 : \langle x, e_4 \rangle = 0\}$. Así, una forma de observar la superficie es conocer las regiones (o conjuntos) de $\mathbb{R}^2$ cuyas imágenes pertenecen a S^3_+ , S^3_- o $S^3(e_4)$. Construyendo un «mapa» de cada superficie $\tau_{m,k}$.

Un ejemplo similar se obtiene al tratar de tener un mapa plano de la tierra, como lo muestra la siguiente imagen:



Figura 3.2: Mapa de la Tierra

¿Cómo tener un «mapa» de $\tau_{m,k}$? Para este trabajo se considera el «mapa» como una teselación del plano xy con $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ (dominio de $\psi_{m,k}$) identificando en que hemisferio se encuentra la imagen de cada parte de la teselación, esto se logra encontrando para que intervalos,

tanto para x como para y , el producto $\text{sen } kx \text{ sen } y$ es positivo, negativo ó cero.

Es fácil identificar que para valores de $y \in [0, \pi]$, $\text{sen } y \geq 0$ y que para $y \in [\pi, 2\pi]$, $\text{sen } y \leq 0$. Ahora para identificar los valores de x , se puede notar que cuando $x = \frac{r\pi}{k}$ con $r \in \mathbb{N}_0$, $\text{sen } kx = 0$, donde se logra ver que, si $x \in [\frac{2r\pi}{k}, \frac{(2r+1)\pi}{k}]$, $\text{sen } kx \geq 0$ y si $x \in [\frac{(2r+1)\pi}{k}, \frac{(2r+2)\pi}{k}]$, $\text{sen } kx \leq 0$. Por lo tanto, los casos para los cuáles se presentan las gráficas en S_+^3 y en S_-^3 se encuentran en la siguiente tabla.

	(x, y)
S_+^3	$[\frac{2r\pi}{k}, \frac{(2r+1)\pi}{k}] \times [0, \pi]$ $[\frac{(2r+1)\pi}{k}, \frac{(2r+2)\pi}{k}] \times [\pi, 2\pi]$
S_-^3	$[\frac{(2r+1)\pi}{k}, \frac{(2r+2)\pi}{k}] \times [0, \pi]$ $[\frac{2r\pi}{k}, \frac{(2r+1)\pi}{k}] \times [\pi, 2\pi]$

Con el fin de esbozar lo que se ha descrito, se presentará el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1. *Construcción del «mapa» para la superficie $\tau_{2,3}$. Esta superficie cuenta con la siguiente parametrización:*

$$\psi_{2,3}(x, y) = (\cos 2x \cos y, \text{sen } 2x \cos y, \cos 3x \text{ sen } y, \text{sen } 3x \text{ sen } y).$$

De acuerdo a lo expresado anteriormente, sabemos que la parte de la superficie que estará en S_+^3 es la imagen de los puntos (x, y) con $x \in [0, \pi/3] \cup [2\pi/3, \pi] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]$ y $y \in [0, \pi]$, y $\psi_{2,3}(x, y) \in S_-^3$ cuando $x \in [\pi/3, 2\pi/3] \cup [\pi, 4\pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi]$ y $y \in [\pi, 2\pi]$.

Por lo que se logra el «mapa» de la Figura 3.3, donde se aprecia que las partes de color gris corresponden a partes del dominio tal que su imagen está en S_-^3 y las de blanco en S_+^3 .

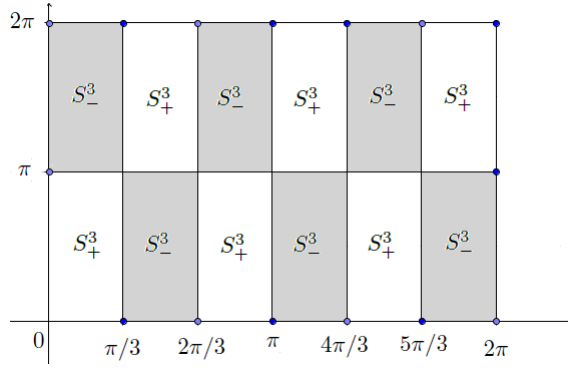


Figura 3.3: «Mapa» de la superficie $\tau_{2,3}$.

Ahora vamos a realizar las visualizaciones de cada región del «mapa», pero primero vamos a dar un nombre a cada región, así:

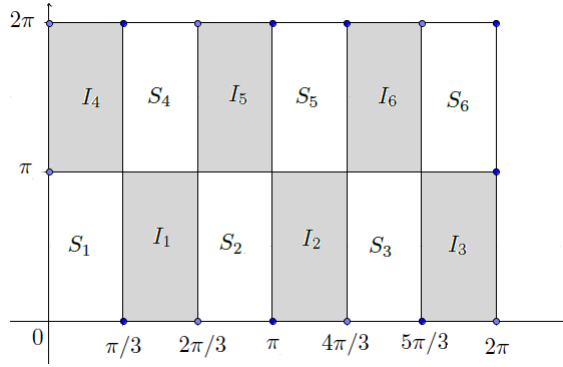


Figura 3.4: «Mapa» con distribución de la superficie $\tau_{2,3}$.

Siendo S_i para las regiones tal que su imagen esta en S_+^3 e I_i para las regiones tal que su imagen esta en S_-^3 con $i = 1, 2, 3, 4$.

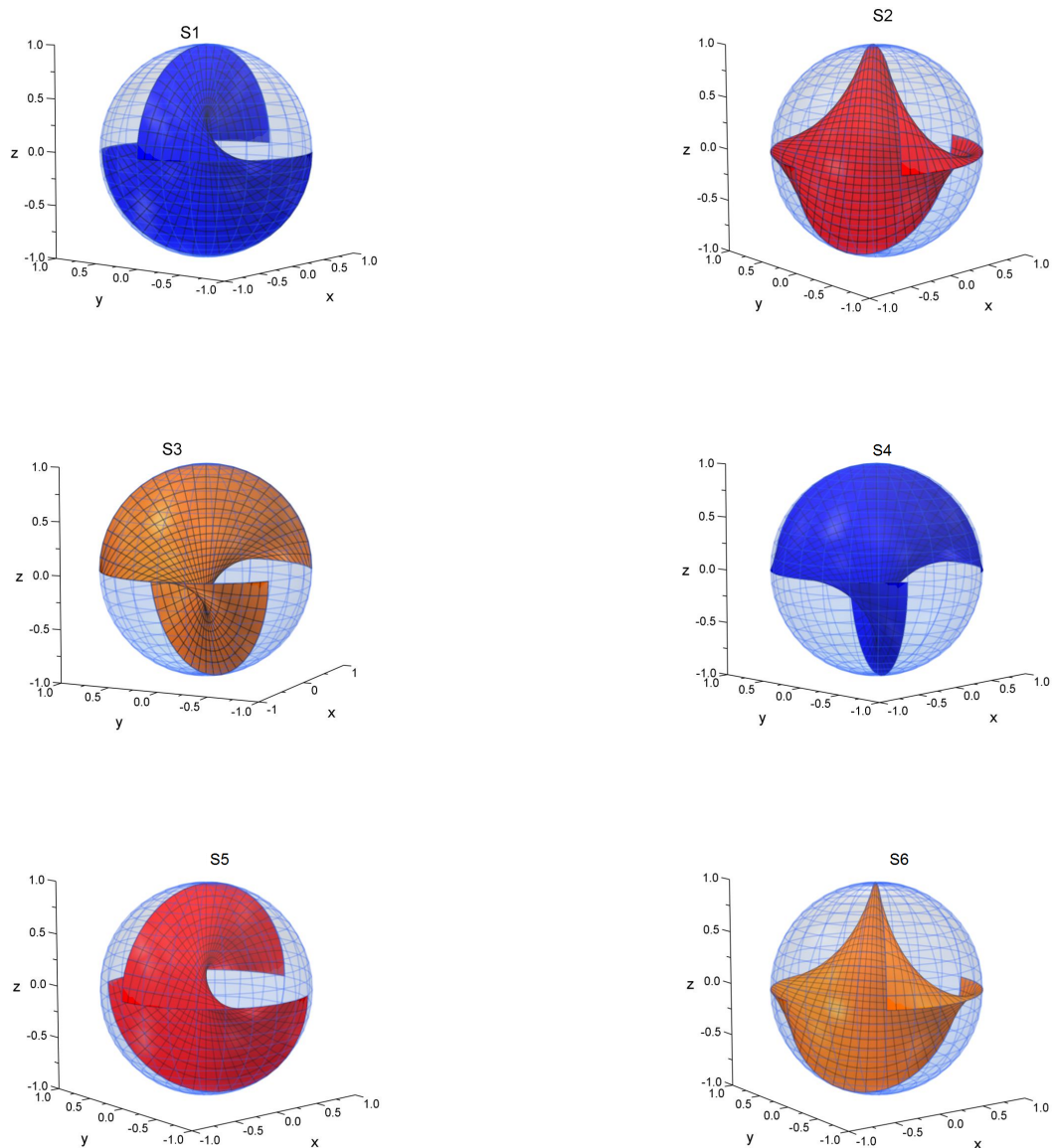


Figura 3.5: Visualizaciones de las superficies S_i de $\tau_{2,3}$ en S^3_+ .

De las visualizaciones anteriores podemos notar que la parte de la superficie S_1 es igual a la superficie S_5 , la S_2 es igual a la S_6 y finalmente la S_3 es igual a S_4 . Un cálculo corrobora esta observación. Por ahora veamos lo que pasa con la visualización en el otro hemisferio.

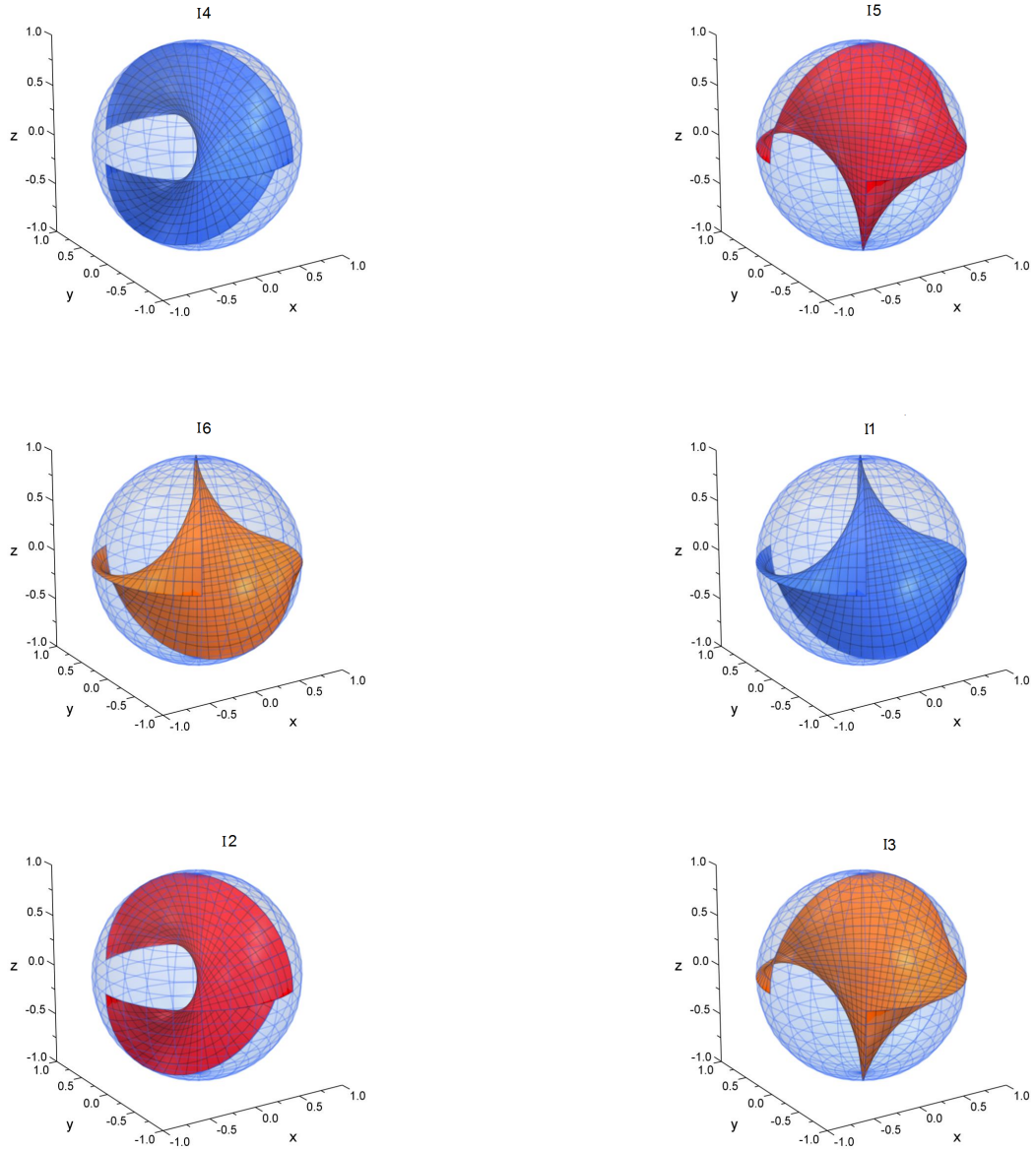


Figura 3.6: Visualizaciones de las superficies I_i de $\tau_{2,3}$ en S^3_- .

Al igual que en el hemisferio superior, las partes de la superficie se repiten, cada una dos veces, así I_1 es igual a I_6 , I_2 es igual a I_4 y I_3 es igual a I_5 .

Las visualizaciones de la superficie en los dos hemisferios, nos permite ver en el «mapa» la

siguiente distribución, donde ubicaremos las partes iguales con el mismo color, como se muestra en la Figura 3.7. Así; si p y q se identifican en $\tau_{2,3}$ (tienen la misma imagen) entonces la curva ν en la Figura 3.7 es una curva cerrada en $\tau_{2,3}$.

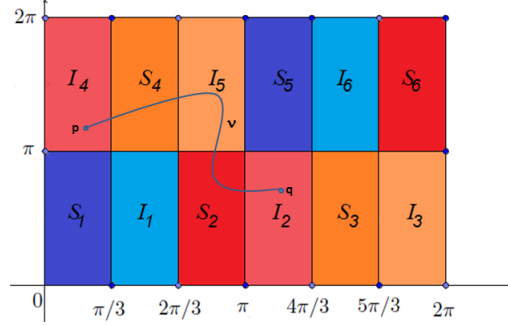


Figura 3.7: «Mapa» completo de $\tau_{2,3}$.

Además, en el «mapa» también es posible representar la superficie fundamental, la cuál de acuerdo al método de construcción expuesto en el capítulo anterior, es reflejada por cada geodésica, hasta completar la superficie. Entonces en el «mapa» se podran ver rectángulos formados por $[2r\pi/k, (4r+1)\pi/2k] \times [t\pi/2, (t+1)\pi/2]$, $[(4r+1)\pi/2k, (2r+1)\pi/k] \times [t\pi/2, (t+1)\pi/2]$, $[(2r+1)\pi/k, (4r+3)\pi/2k] \times [t\pi/2, (t+1)\pi/2]$, $[(4r+3)\pi/2k, (2r+2)\pi/k] \times [t\pi/2, (t+1)\pi/2]$ para $t = 0, 1, 2, 3$ y $r = 0, 1, 2$, que representarán las reflexiones de la superficie fundamental, donde los segmentos geodésicos seran los bordes de los rectángulos (Figura 3.8).

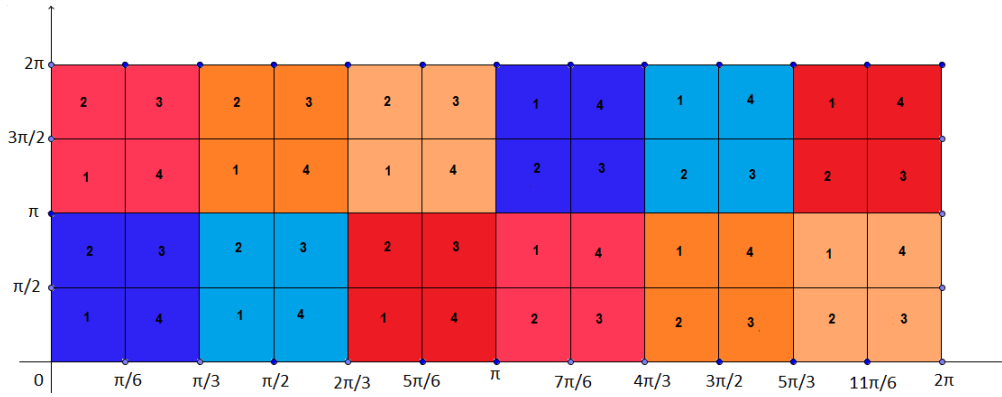


Figura 3.8: «Mapa» con la ubicación de las superficies fundamentales de $\tau_{2,3}$.

3.3. Orientabilidad de las superficies $\tau_{m,k}$

Las superficies se pueden clasificar entre orientables y no orientables, entre las superficies orientables se encuentran la esfera y el toro y en las no orientables se encuentran la cinta de Möbius y la botella de Klein. Pero, que quiere decir que una superficie sea, o no orientable. Intuitivamente se puede decir, que las superficies no orientables, son aquellas a las cuales, se les puede identificar un camino en la superficie, donde un viajero al transportarse de regreso a su punto de partida, llegué en sentido invertido, es decir, como al verse en un espejo, la mano derecha pasa ser la izquierda y viceversa. Hecho que se evidencia claramente en la cinta de Möbius. Contrario a lo que sucede con las superficies orientables, en estas no se les puede encontrar algún camino donde suceda lo anterior. Como sucede con la esfera, si se ubica un viajero en su superficie, cualquier recorrido que éste haga para llegar al punto de partida, no le afectará, logrando su posición inicial sin ninguna variación.

La idea intuitiva anterior permite entrever a grandes rasgos la idea de orientabilidad, pero formalmente, se tiene la siguiente definición para superficies orientables en $\mathbb{R}^3$ [2].

Definición 3.3.1. *Una superficie regular S se dice orientable, si es posible cubrirse con una familia de vecindades coordenadas, de tal manera, que si un punto $p \in S$ pertenece a dos de las vecindades de estas familias, entonces el cambio de coordenadas tendrá Jacobiano positivo en p . La elección de tal familia es llamada orientación de S , y S , en este caso se llama orientada. Si tal cambio no es posible, la superficie se llamará no orientable.*

De la definición, dado que depende de las derivadas parciales que determinan el Jacobiano, que a vez con su producto vectorial definen el plano tangente de la superficie S en todos sus puntos, entonces no sorprende un resultado como el siguiente.

Proposición 3.3.1. *Una superficie regular $S \subset \mathbb{R}^3$ es orientable si y sólo si existe un campo diferenciable de vectores unitarios normales $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$.*

La prueba se encuentra en [2]. A continuación, se dará el ejemplo de no orientabilidad con la cinta de Möbius, detallandola formalmente.

Ejemplo 3.3.1. Cinta de Möbius.

La cinta de Möbius es una variedad de dos dimensiones, es decir, una superficie que se puede construir fácilmente con un listón o cinta de papel: basta con tomar la cinta mencionada y unir sus dos extremos, teniendo la precaución de girar uno de ellos un ángulo de 180 grados. Esta cinta tiene un solo borde y un solo lado o cara.

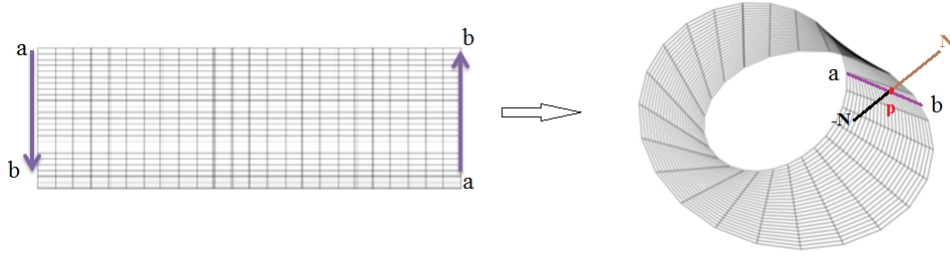


Figura 3.9: Cinta de Möbius.

Matemáticamente esta superficie puede ser obtenida, al considerar el círculo S^1 dado por $x^2 + y^2 = 4$ y el segmento abierto $\mathbf{ab}$ en el plano yz por $y = 2, |z| < 1$. Se mueve el centro c de $\mathbf{ab}$ a lo largo de S^1 y se gira $\mathbf{ab}$ sobre c en el plano cz de tal manera que cuando c pase a un ángulo u , $\mathbf{ab}$ ha sido rotado un ángulo $u/2$. Cuando c complete una vuelta alrededor del círculo, $\mathbf{ab}$ retorna a su posición inicial, pero este finaliza con los puntos invertidos. Desde el punto de vista de la diferenciabilidad, esto es como si se estuvieran identificado los lados opuestos (verticales) de un rectángulo dándole un giro al rectángulo de tal manera que se identifiquen cada punto del segmento $\mathbf{ab}$ con su punto simétrico. Esto geométricamente evidencia que la cinta de Möbius M es una superficie regular no orientable. En efecto, si M fuera orientable, existiría un campo diferenciable $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vectores normales unitarios. Tomando estos vectores a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 4$, se vera que al realizar el recorrido del vector N retornará a su posición original como $-N$, que es una contradicción.

Ahora se dará una prueba analítica de lo mencionado anteriormente.

Un sistema de coordenadas $X := U \rightarrow M$ para la cinta de Möbius es dado por

$$X(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, v \cos \frac{u}{2} \right)$$

donde $0 < u < 2\pi$ y $-1 < v < 1$. La vecindad coordenada correspondiente omite los puntos del intervalo abierto $u = 0$. Entonces tomando el origen de los u 's en el eje x , se obtiene la siguiente parametrización $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$, dado por

$$x = \left\{ 2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right\} \cos \bar{u},$$

$$y = - \left\{ 2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right\} \sin \bar{u},$$

$$z = \bar{v} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right),$$

cuya vecindad coordenada omite el intervalo $u = \pi/2$. Estas dos vecindades coordenadas cubren la cinta de Möbius y se pueden usar para mostrar que esta es una superficie regular.

Obesérvese que la intersección de las vecindades coordenadas no es conexa, y consiste de dos componentes conexas:

$$W_1 = \left\{ X(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \right\},$$

$$W_2 = \left\{ X(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

El cambio de coordenadas esta dado por:

$$\text{En } W_1 \quad \begin{cases} \bar{u} &= u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} &= v, \end{cases}$$

$$\text{En } W_2 \quad \begin{cases} \bar{u} &= u + \frac{3\pi}{2} \\ \bar{v} &= -v. \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que:

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0 \text{ en } W_1$$

y

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0 \text{ en } W_2.$$

Para demostrar que la cinta de Möbius es no orientable, se supone que es posible definir un campo diferenciable de vectores normales unitarios $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Intercambiando u y v , si es necesario, podemos suponer que

$$N(p) = \frac{\overline{X}_u \times \overline{X}_v}{|\overline{X}_u \times \overline{X}_v|}$$

para cada p en la vecindad coordenada de $X(u, v)$. Análogamente, se puede asumir que

$$N(p) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

para todos los puntos de la vecindad coordenada de $\overline{X}(\overline{u}, \overline{v})$. Sin embargo el jacobiano del cambio de coordenadas debe ser -1 en W_1 o W_2 , dependiendo sobre cual se aplicó el cambio. Si p es un punto en la intersección de las componentes, entonces $N(p) = -N(p)$, que es una contradicción. Es decir, si se considera un vector N perpendicular a la cinta en cualquier punto p , éste cambiará de orientación conforme recorre la cinta a lo largo de su línea central, llegando a convertirse en $-N$ cuando regresa al mismo punto p . Esto significa que es imposible darle a la cinta de Möbius una orientación. Por ello, se dice de ella que es una superficie no-orientable.

El ejemplo es de gran interés, dado que una superficie es no orientable, si contiene una banda, que es topológicamente igual a una Cinta de Möbius, esta afirmación permite mostrar que algunas superficies son no orientables.

Corolario 3.3.1. *Si una superficie regular S contiene un conjunto abierto difeomorfo a una cinta de Möbius, entonces S es no orientable.*

Este resultado es de gran ayuda, dado que permitirá de forma geométrica construir una demostración de los casos no orientables de la familia $\tau_{m,k}$.

En el artículo *Complete minimal surface in S^3* , [1] el Teorema 3, Sección 7, establece que las superficies $\tau_{m,k}$ son no orientables si y sólo si $2 \mid mk$. A continuación, se presentará una prueba

de este resultado, analizando los casos cuando mk es par o impar. Logrando así, una caracterización de las superficies $\tau_{m,k}$ orientables y no orientables.

Inicialmente, se demostrará que las superficies $\tau_{m,k}$ con mk par, son no orientables. Para ésto, se empleará la cinta de Möbius, y el corolario 3.3.1. Específicamente se construirá un encaje de una cinta de Möbius para las superficies $\tau_{m,k}$ con mk par. Para la construcción del encaje se usará el «mapa» de la sección 3.2, ya que ofrece una versión plana (teselación) de las superficies.

Para empezar, consideremos un caso particular, la superficie $\tau_{2,1}$ que satisface con $2 \mid mk$ siendo $m = 2$ y $k = 1$, con el objetivo de poder entender el encaje, para luego generalizar la construcción.

Ejemplo 3.3.2. $\tau_{2,1}$ es una superficie no orientable. Esta superficie cuenta con la siguiente parametrización:

$$\psi_{2,1}(x, y) = (\cos 2x \cos y, \sin 2x \cos y, \cos x \sin y, \sin x \sin y).$$

Como se comentó antes, se empleará el «mapa» de esta superficie, la cuál, se presenta en la Figura 3.10.

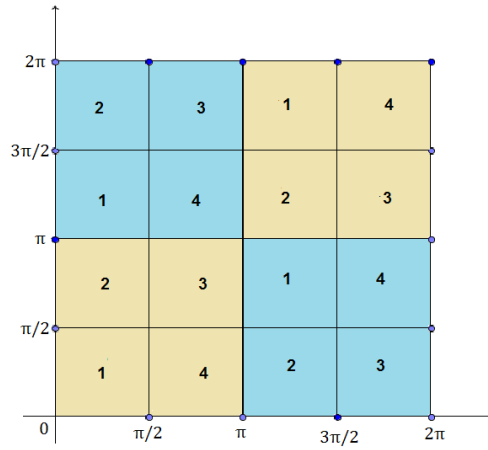


Figura 3.10: «Mapa» de la superficie $\tau_{2,1}$.

En este «mapa» las partes amarillas se identifican con la imagen de la función $\psi_{2,1}$, al igual que las partes azules, éstas serán divididas por regiones fundamentales, las cuales serán enumeradas del 1 al 4 y como los rectángulos del mismo color se identifican, en el «mapa» se puede notar que los rectángulos 3 amarillo y 4 azul comparten un lado y se repite. Al lado de la derecha se considerará como el segmento $\overline{ab}$ con $a = (\pi/2, \pi)$ y $b = (\pi, \pi)$ tal como se muestra en la Figura 3.11, el cuál transportaremos sobre el «mapa», hasta llegar a su igual de la parte derecha, que se denotará por $\overline{a'b'}$ con $a' = (3\pi/2, \pi)$ y $b' = (2\pi, \pi)$. La forma como el segmento $\overline{ab}$ se transportará por el «mapa», para llegar al segmento $\overline{a'b'}$, es por medio de transformaciones isométricas, tales como traslaciones y rotaciones. Para este caso, la primera transformación es una rotación con centro en el punto b con un ángulo de $\theta = \pi/2$, desde ésta ubicación, la segunda transformación es una traslación por el eje x , de π a $3\pi/2$ y la última transformación es una rotación, desde el punto $a' = (\pi, 3\pi/2)$ con un ángulo de $\theta = \pi/2$.

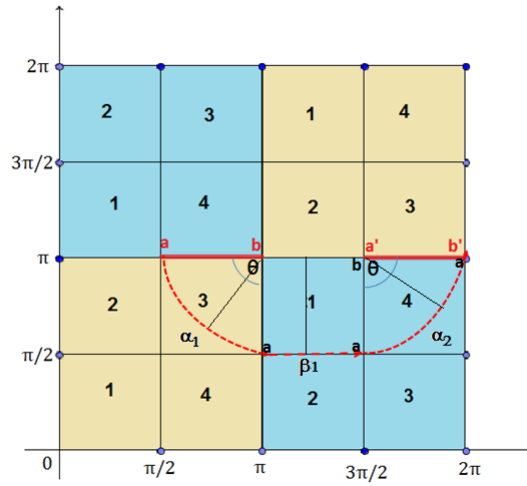


Figura 3.11: «Mapa» de $\tau_{2,1}$ con ubicación del segmento $\overline{ab}$.

Específicamente las transformaciones se pueden escribir de la siguiente manera:

Rotación 1 $\alpha_1(t, a) = (t \cos a + \pi, t \sin a + \pi)$, para $t = 0 \dots \pi/2$ y $a = \pi \dots 3\pi/2$.

Traslación 1 $\beta_1(t, a) = (t, a)$, para $t = \pi/2 \dots \pi$ y $a = \pi \dots 3\pi/2$.

Rotación 2 $\alpha_2(t, a) = (t \cos a + 3\pi/2, t \sin a + \pi)$, para $t = 0 \dots \pi/2$ y $a = 3\pi/2 \dots 2\pi$.

Las cuales en $\mathbb{R}^2$ producen los movimientos que se muestran en la Figura 3.11, donde se obtiene que el punto $\mathbf{a}$ se transforma en el punto $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{b}$ en el punto $\mathbf{a}'$. Es importante destacar que, siendo el «mapa» una representación de la superficie $\tau_{2,1}$, muestra que el segmento $\overline{\mathbf{ab}}$ se identifica con el segmento $\overline{\mathbf{a'b'}}$, de tal forma que $\mathbf{a} \cong \mathbf{a}'$ y $\mathbf{b} \cong \mathbf{b}'$. Este hecho se verifica utilizando la parametrización de la superficie $\tau_{2,1}$ donde $\psi_{2,1}(\mathbf{a}) = \psi_{2,1}(\mathbf{a}') = (1, 0, 0, 0)$, $\psi_{2,1}(\mathbf{b}) = \psi_{2,1}(\mathbf{b}') = (-1, 0, 0, 0)$ y considerando la parametrización de los segmentos $\overline{\mathbf{ab}} = x(t_1) = (t_1, \pi)$ con $t_1 \in [\pi/2, \pi]$ y $\overline{\mathbf{a'b'}} = y(t_2) = (t_2, \pi)$ con $t_2 \in [3\pi/2, 2\pi]$ cumple:

$$\psi_{2,1}(x(t_1)) = (\cos 2t_1 \cos \pi, \sin 2t_1 \cos \pi, \cos t_1 \sin \pi, \sin t_1 \sin \pi) = (-\cos 2t_1, -\sin 2t_1, 0, 0),$$

$$\psi_{2,1}(y(t_2)) = (\cos 2t_2 \cos \pi, \sin 2t_2 \cos \pi, \cos t_2 \sin \pi, \sin t_2 \sin \pi) = (-\cos 2t_2, -\sin 2t_2, 0, 0).$$

Por tanto se verifica que $\psi_{2,1}(x(t_1)) = \psi_{2,1}(y(t_2))$ para todo $t_1 \in [\pi/2, \pi]$ y $t_2 \in [3\pi/2, 2\pi]$.

Al realizar el movimiento del segmento $\overline{\mathbf{ab}}$ hasta $\overline{\mathbf{a'b'}}$, por transformaciones isométricas, se observa que el segmento inicial llega en sentido invertido, por lo que se nota que, si al considerar la superficie $\tau_{2,1}$ y el segmento en el mapa, que corresponde a un segmento geodésico en la superficie y al transportarlo por la misma, hasta llegar a su ubicación inicial, llegará en sentido invertido en otras palabras se ha encajado una cinta de Möbius en $\tau_{2,1}$, por tanto, se ha logrado encajar una superficie no orientable, mostrando así que la superficie $\tau_{2,1}$ es no orientable.

Entendiendo con ayuda del ejemplo como se realiza el encaje, ahora se buscará una generalización de éste para mostrar que las superficies $\tau_{m,k}$ que cumplen con $2 \mid mk$ son no orientables.

Pero antes, recordemos que en la construcción del «mapa» las divisiones entre los hemisferios superior e inferior están dadas por los segmentos que en la gráfica de la superficie se identifican con los ecuadores, estos a su vez están determinados cuando la cuarta componente de la parametrización $\psi_{m,k}$ se anula, es decir, cuando $\sin kx \sin y = 0$, cuya igualdad se cumple para los valores de $x \in \{0, \frac{t\pi}{k}, t \in \mathbb{Z}^+\}$ o $y \in \{0, \pi, 2\pi\}$, y por lo visto en la tabla de la sección 3.2, se identifican en el «mapa». La distribución de la superficie por su ubicación en cada hemisferio (S:superior, I:inferior) se indica en la siguiente gráfica.

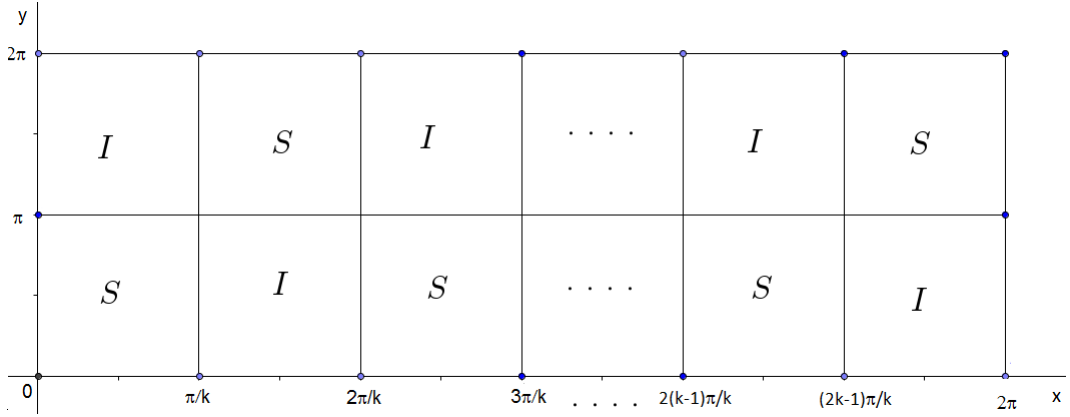


Figura 3.12: «Mapa» con distribución de la familia $\tau_{m,k}$ por hemisferios.

Por lo anterior se nota que la distribución en el «mapa» por hemisferios esta dependiendo únicamente del valor k , es decir, este valor indicará en el «mapa» el número de partes que habrán para cada hemisferio. Si se recuerda la construcción del «mapa» (Sección 3.2), éstas también se repiten exactamente solo una vez, lo que indica que en total se presentan $2k$ partes de superficie por cada hemisferio. Además, las repeticiones se presentan en el «mapa» a partir de π , como se puede evidenciar en el «mapa» de la superficie $\tau_{2,1}$ (Figura 3.10), donde se presentan 2 partes para el hemisferio superior y otras 2 para el hemisferio inferior y en el «mapa» de la superficie $\tau_{3,2}$ (Figura 3.8) donde hay tres partes para cada hemisferio en la primera parte del mapa y se repiten en la otra mitad, con un total de 6 parte para cada hemisferio.

Observar que el valor k afecta la forma del «mapa», ofreciendo el total de partes que se ubicarán en cada hemisferio, veamos ahora que sucede en cada parte. Para eso, cada parte se dividirá por regiones fundamentales. Lo que se hará ahora es tomar las partes de la primera mitad y en su división por regiones fundamentales enumerarlas a cada una y ver si en la repetición se presenta alguna variación en la enumeración. A continuación se da una muestra del «mapa» cuando el valor mk es par.

Donde notoriamente se observa que las partes que se repiten presentan una variación en la enumeración, lo que geométricamente se puede interpretar como una inversión en la orientación,

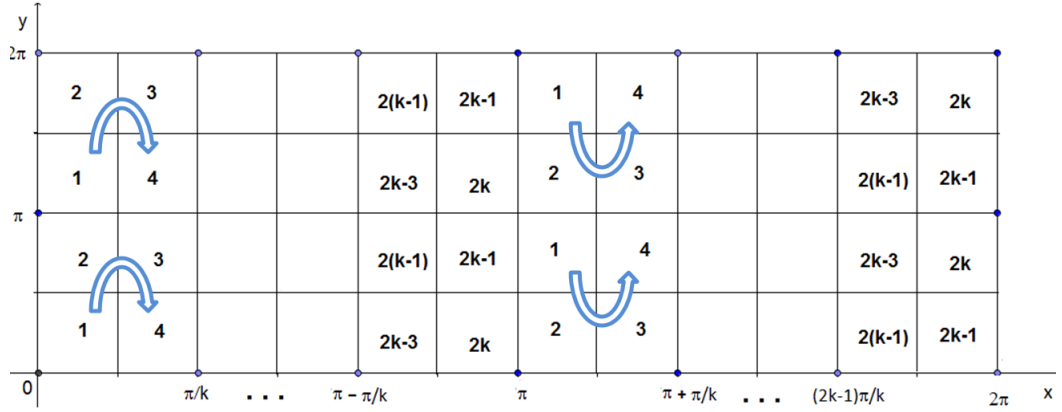


Figura 3.13: «Mapa» con distribución por regiones fundamentales (con mk par).

evidenciado que estas superficies serán no orientables. Contando con ésta característica en los «mapas» de la familia $\tau_{m,k}$ que cumplen con mk par y el ejemplo del encaje para la superficie $\tau_{2,1}$; se puede tomar el segmento inicial $\overline{ab}$ que estará ubicado en $y = \pi$ y $x \in [\pi - \pi/2k, \pi]$ y el cuál será transportado por el «mapa» hasta llegar a su igual, identificado como $\overline{a'b'}$. La ubicación del segmento final, depende del valor de k . Si el valor de k es par, se tiene que el segmento $\overline{a'b'}$ estará ubicado en $y = 2\pi$ y $x = [(4k - 1)\pi/2k, 2\pi]$ y si el valor es impar se ubicará en $y = \pi$ y $x = [(4k - 1)\pi/2k, 2\pi]$. (Ver las figuras 3.14 y 3.15 respectivamente).

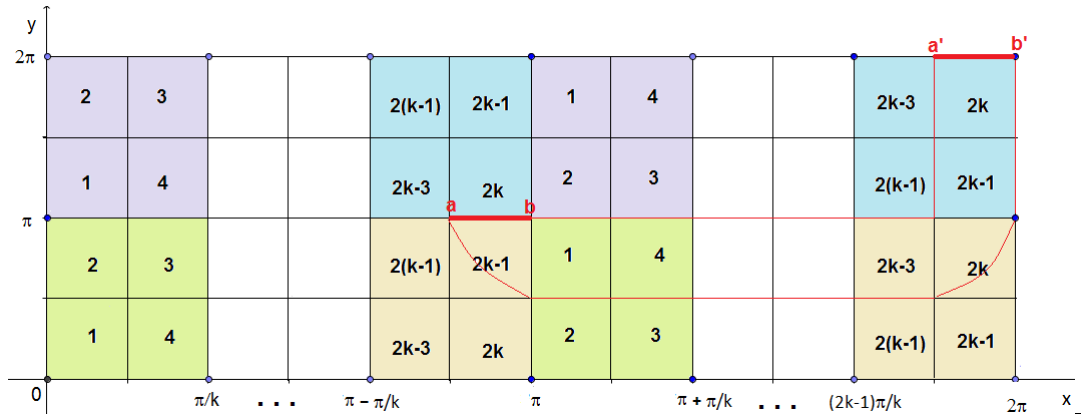


Figura 3.14: «Mapa» con el recorrido del segmento (con k par).

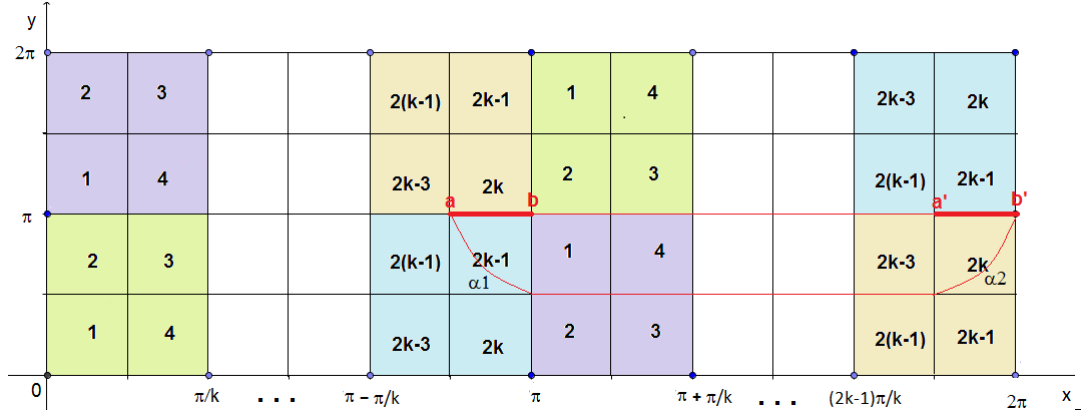


Figura 3.15: «Mapa» con el recorrido del segmento (con k impar).

Estas transformaciones se definen como:

Rotación $\alpha_i(t, a) = (Kt \cos(a) + z, Kt \sin(a) + w)$ con $a \in [\theta_1, \theta_2]$, $t \in [0, L_1]$ siendo (z, w) el centro de rotación, $K = \frac{L_2}{L_1}$, donde $L_1 = \frac{\pi}{2k}$ y $L_2 = \frac{\pi}{2}$.

Traslación $\beta_i(t, a) = (t, a)$ con $a \in [\pi, \frac{(4k-1)\pi}{2k}]$ y $t \in [0, L_2]$.

Las cuáles permitirán realizar el encaje de la cinta de Möbius a las superficies $\tau_{m,k}$ con mk par, tal como se hizo para la superficie $\tau_{2,1}$, donde finalmente se prueba que la familia $\tau_{m,k}$ con mk par, es no orientable.

Teorema 3.3.1. *La familia de superficies $\tau_{m,k}$ es no orientable, si mk es par.*

De otro lado, si se analiza el «mapa» para el caso mk impar, se nota, que sucede todo lo contrario, donde al repetirse las partes, no se presentan cambios en el orden de enumeración, tal como se muestra en la figura 3.16. Lo que permitiría intuir que no se presentan cambios en la orientación, es decir, que éstas superficies son orientables.

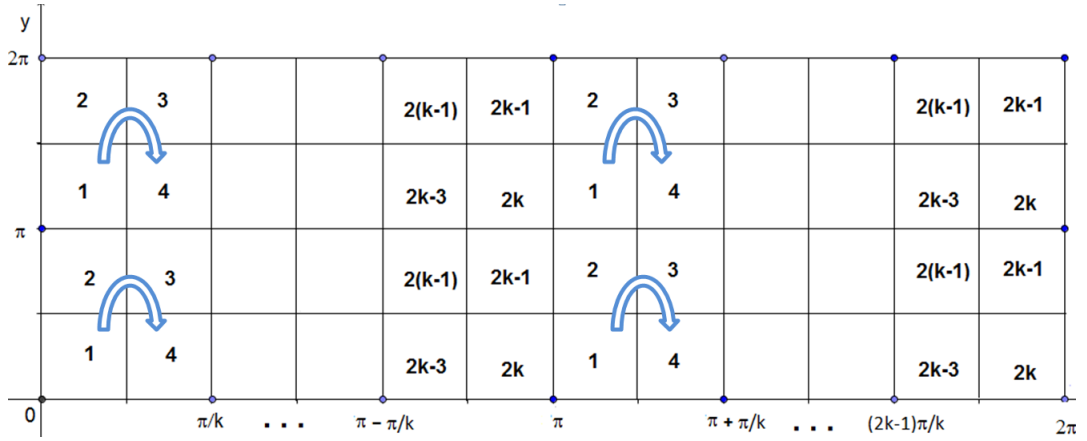


Figura 3.16: «Mapa» con distribución por regiones fundamentales (con mk impar).

Para probar tal hecho, se usará la acción discontinua de un grupo, este concepto se define a continuación:

Definición 3.3.2. Un grupo G actúa sobre una variedad diferenciable M si existe una aplicación $\varphi : G \times M \rightarrow M$ tal que,

1. Para cada $g \in G$, la aplicación $\varphi_g : M \rightarrow M$ dada por $\varphi_g(p) = \varphi(g, p)$, $p \in M$, es un difeomorfismo y $\varphi_e = \text{identidad}$, siendo e el elemento neutro de G .
2. Si $g_1, g_2 \in G$ entonces $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$.

Además, se dice que la acción es discontinua, si cada $p \in M$ tiene una vecindad $U \subset M$ tal que $U \cap \varphi_g(U) = \emptyset$ para todo $g \neq e$.

Toda acción φ sobre M define de manera natural la siguiente relación de equivalencia sobre M :

$$p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow p_2 = \varphi_g(p_1), \quad g \in G.$$

Denotamos al espacio cociente de M por ésta relación de equivalencia como M/G . Llamaremos a $\pi : M \rightarrow M/G$ a la proyección canónica de M en su cociente, donde $\pi(p)$ es la clase de equivalencia de p .

La definición anterior se empleará con el fin de poder utilizar el siguiente resultado ([2], pág 33).

Teorema 3.3.2. *Una variedad M/G es orientable si y sólo si, existe una orientación en M que se preserva por todos los difeomorfismos de G .*

Considerese el grupo $G = ([0, 2\pi), +)$ donde la suma se considera módulo 2π y las aplicaciones $\varphi_t : \tau_{m,k} \rightarrow \tau_{m,k}$, con mk impar, definidas por $\varphi_t(p) = \varphi_t(z, w) = (e^{imt}z, e^{ikt}w)$, donde $p \in \tau_{m,k}$ se descompone como $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^4$. Estas aplicaciones definen una acción discontinua del grupo, como se puede verificar a continuación.

1. $\varphi_0(p) = \varphi_0(z, w) = (e^{im0}z, e^{ik0}w) = (z, w) = p$.
2. $\varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(p)) = \varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(z, w)) = \varphi_{t_1}(e^{imt_2}z, e^{ikt_2}w) = (e^{imt_1}e^{imt_2}z, e^{ikt_1}e^{ikt_2}w)$
 $= (e^{im(t_1+t_2)}z, e^{ik(t_1+t_2)}w) = \varphi_{t_1+t_2}(z, w) = \varphi_{t_1+t_2}(p)$.
3. Dado que φ_t resulta ser una traslación de las coordenadas de p en el «mapa» y en definitiva en la superficie, se tiene que, existe una vecindad U de p tal que $\varphi_t(U) \cap U = \emptyset$.

Para justificar la afirmación anterior, nótese que: si $p = \psi_{m,k}(x, y)$ y $p = (z, w)$, entonces $z = \cos mx \cos y + i \sin mx \cos y$ y $w = \cos kx \sin y + i \sin kx \sin y$. Así:

$$\begin{aligned} \varphi_t(p) &= \varphi_t(\psi_{m,k}(x, y)) = (e^{imt}(\cos mx \cos y + i \sin mx \cos y), e^{ikt}(\cos kx \sin y + i \sin kx \sin y)) \\ &= (e^{imt}(\cos mx + i \sin mx) \cos y, e^{ikt}(\cos kx + i \sin kx) \sin y) \\ &= (e^{im(x+t)} \cos y, e^{ik(x+t)} \sin y) \\ &= (\cos(x+t) \cos y + i \sin(x+t) \cos y, \cos(x+t) \sin y + i \sin(x+t) \sin y) \\ &= \psi_{m,k}(x+t, y). \end{aligned}$$

Definición 3.3.3. *Para $p \in M$, la órbita de p se define como el conjunto $\mathcal{O}(p) = \{\varphi_t(p), t \in G\}$.*

Siguiendo la sugerencia dada por Lawson para ésta prueba en [1], consideremos la curva $\psi_{m,k}(0, y) = (\cos y, 0, \sin y, 0)$. Ahora, sea $p = \psi_{m,k}(0, y)$ con y fijo, la órbita de p , estará determinada por:

$$\mathcal{O}(p) = \{\varphi_t(p) : t \in [0, \pi)\} = \{\psi_{m,k}(t, y) : t \in [0, 2\pi)\}$$

La cuál cumplirá con lo siguiente, para mk impar:

- $\mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y)) = \mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y + \pi))$. Veamos:

$$\begin{aligned}
\varphi_\pi(\psi_{m,k}(0, y)) &= \psi_{m,k}(\pi, y) \\
&= (e^{im\pi} \cos y, e^{ik\pi} \sin y) \\
&= (-\cos y, -\sin y) \\
&= (\cos(y + \pi), \sin(y + \pi)) \\
&= \psi_{m,k}(0, y + \pi)
\end{aligned}$$

Es decir $\psi_{m,k}(0, y) \sim \psi_{m,k}(0, y + \pi)$, por ende sus orbitas son iguales.

- $\mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, 0)) = \mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, \pi))$, tomando $y = 0$ en el item anterior.

- si $y_1, y_2 \in [0, \pi)$ y $\mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y_1)) = \mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y_2))$, entonces $y_1 = y_2$.

Tenemos que $\mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y_1)) = \mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y_2))$ si y sólo si, existe un $t \in [0, 2\pi)$ tal que $\varphi_t(\psi_{m,k}(0, y_1)) = \psi_{m,k}(0, y_2)$. Tomando $\varphi_t(\psi_{m,k}(0, y_1)) = \psi_{m,k}(0, y_2)$ se tiene que $(e^{imt} \cos y_1, e^{ikt} \sin y_1) = (\cos y_2, \sin y_2)$, donde se logran las siguientes igualdades:

$$\cos mt \cos y_1 = \cos y_2 \quad (3.1)$$

$$\sin mt \cos y_1 = 0 \quad (3.2)$$

$$\cos kt \sin y_1 = \sin y_2 \quad (3.3)$$

$$\sin kt \sin y_1 = 0 \quad (3.4)$$

Considerando la igualdad (3.2), se tienen dos casos.

Caso 1. $\sin mt = 0$

Así $\cos mt = 1$ ó $\cos mt = -1$.

- Si $\cos mt = 1$, en la ecuación (3.1) se tiene que $\cos y_1 = \cos y_2$ y esto implica que $y_1 = y_2$, puesto que la función coseno es inyectiva en $[0, \pi)$.
- Si $\cos mt = -1$, en la ecuación (3.1) se tiene que $-\cos y_1 = \cos y_2$, cuya igualdad se cumple si $y_1 = \pi - y_2$, ésto en la ecuación (3.4), resulta $\sin kt \sin(\pi - y_2) = 0$ que es lo mismo a tener $\sin kt \sin y_2 = 0$, lo que nos obliga a tomar dos subcasos.

Subcaso 1. $\sin kt = 0$. Igualmente se tiene que $\cos kt = 1$ ó $\cos kt = -1$.

- Si $\cos kt = 1$, entonces $kt = 2\pi r$ (para algún $r \in \mathbb{Z}$), pero dado que estamos bajo el supuesto de que $\cos mt = -1$, entonces, $mt = (2l+1)\pi$ (para algún $l \in \mathbb{Z}$). Luego $t = \frac{2\pi r}{k} = \frac{(2l+1)\pi}{m}$, lo que implica que $2rm = (2l+1)k$, contradiciendo el hecho de que k es impar.
- Si $\cos kt = -1$, en la ecuación (3.3) se obtiene $-\sin y_1 = \sin y_2$, esto implica que $y_1 = y_2 = 0$, dado que la función seno positiva en $(0, \pi)$.

Subcaso 2. $\sin y_2 = 0$, así $y_2 = 0$ y $y_1 = \pi - 0$ (módulo π), es decir, $y_1 = y_2 = 0$.

Caso 2. $\cos y_1 = 0$.

Así $y_1 = \frac{\pi}{2}$, en la ecuación (3.1) se obtiene $\cos y_2 = 0$, ésto es $y_2 = \frac{\pi}{2}$, en conclusión $y_1 = y_2$.

Las propiedades anteriores muestran que:

$$\tau_{m,k}/G = \{\mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y)) : y \in [0, \pi)\}.$$

Nótese que la curva $\alpha : [0, \pi] \rightarrow \tau_{m,k}/G$ definida por $\alpha(y) = \mathcal{O}(\psi_{m,k}(0, y))$, es una curva continua, cerrada (que parametriza a $\tau_{m,k}/G$) sin autointersecciones. Todo ésto garantiza el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3. Sean $m, k \in \mathbb{N}$, primos relativos y $(G, +) = ([0, 2\pi), +)$ el grupo aditivo de los reales con suma módulo 2π . Si m, k son impares, entonces $\tau_{m,k}/G \approx S^1$.

Corolario 3.3.2. Si m, k son primos relativos impares, entonces $\tau_{m,k}$ es orientable.

Demostración. Por el teorema 3.3.2 y el teorema 3.3.3.

3.4. Algebricidad de las superficies $\tau_{m,k}$

Para poder hablar de algebricidad de las superficies $\tau_{m,k}$, recordemos del capítulo preliminares que una variedad $M \subset S^n$ es algebraica si y sólo si es valor regular cero de un polinomio homogéneo f , es decir $M = f^{-1}(0) \cap S^n$. Luego, para poder comprobar la algebricidad de las

superficies $\tau_{m,k}$, se debe encontrar un polinomio homogéneo f tal que $\tau_{m,k} = f^{-1}(0) \cap S^3$. Al igual que en el capítulo anterior, se considerará la parametrización $\psi_{m,k}$ de las superficies $\tau_{m,k}$.

Sean $z = \cos mx \cos y + i(\sin mx \cos y)$ y $w = \cos kx \sin y + i(\sin kx \sin y)$, como en la sección anterior, se puede notar que $z = e^{imx} \cos y$ y $w = e^{ikx} \sin y$. Se sigue entonces que $z^k = e^{ikmx} (\cos y)^k$ y $\bar{w}^m = e^{-ikxm} (\sin y)^m$ donde se obtiene $z^k \bar{w}^m = (\cos y)^k e^{ikmx} (\sin y)^m e^{-ikxm} = (\cos y)^k (\sin y)^m e^0 \in \mathbb{R}$, es decir $\text{Im}(z^k \bar{w}^m) = 0$. De lo anterior podemos deducir que, siendo $\psi_{m,k}(x, y) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ donde cada x_i representa cada componente de la parametrización, si consideramos $z = x_1 + ix_2$ y $w = x_3 + ix_4$, entonces $z^k \bar{w}^m = p(x_1, x_2, x_3, x_4) + if(x_1, x_2, x_3, x_4)$ donde $\text{Im}(z^k \bar{w}^m) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ es un polinomio homogéneo y cada vez que $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_{m,k}$ se tiene que $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$.

Ejemplo 3.4.1. Tomando $m = k = 1$, es decir, la superficie $\tau_{1,1}$ y considerando $z = x_1 + ix_2$ y $w = x_3 + ix_4$, el cálculo del polinomio $\text{Im}(z\bar{w})$ es el siguiente:

$$z\bar{w} = (x_1 + ix_2)(x_3 - ix_4) = x_1x_3 + x_2x_4 + i(x_2x_3 - x_1x_4), \text{ luego } \text{Im}(z\bar{w}) = x_2x_3 - x_1x_4.$$

Así los puntos en $\tau_{1,1}$ satisfacen $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1x_4 + x_2x_3 = 0$. Es decir $\tau_{1,1} = f^{-1}(0) \cap S^3$, que corresponde al toro de Clifford (Figura 1.5).

El Toro de Clifford es un ejemplo importante de estas superficies, dado que presenta una característica única sobre el resto de las superficies $\tau_{m,k}$ y es que no presenta autointersecciones, pero este hecho se confirmará en la próxima sección. A continuación, otro ejemplo de la algebricidad de las superficies $\tau_{m,k}$.

Ejemplo 3.4.2. Para este ejemplo vamos a considerar $m = 2$, $k = 1$, es decir, la superficie $\tau_{2,1}$. Considerando $z = x_1 + ix_2$ y $w = x_3 + ix_4$ y calculando el polinomio $\text{Im}(z^1 \bar{w}^2)$ se tiene:

$$z\bar{w}^2 = (x_1 + ix_2)(x_3 - ix_4)^2 = (x_1 + ix_2)(x_3^2 - 2ix_3x_4 - x_4^2) = (x_3^2x_1 - x_4^2x_1 + 2x_2x_3x_4) + i(-2x_1x_3x_4 + x_2x_3^2 - x_4^2x_2), \text{ luego } \text{Im}(z\bar{w}^2) = -2x_1x_3x_4 + x_2x_3^2 - x_4^2x_2. \text{ Así los puntos en } \tau_{2,1} \text{ satisfacen } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1x_3x_4 + x_2x_3^2 - x_4^2x_2 = 0. \text{ Es decir } \tau_{2,1} = f^{-1}(0) \cap S^3.$$

3.5. Otros resultados sobre las superficies $\tau_{m,k}$

3.5.1. Característica de Euler

La característica de Euler, es un invariante topológico que se calcula empleando una triangulación de las superficies, pero ésta a la vez es independiente de la triangulación y cuya fórmula también se puede emplear para descomposiciones en polígonos arbitrarios. La fórmula está dada de la siguiente manera:

$$\chi = C - A + V, \quad (3.5)$$

donde C es el número de caras, A el número de aristas y V el número de vértices, los cuáles se obtienen por un conteo simple, partiendo del polígono del cual se realizó la descomposición.

Para nuestro caso, el cálculo de la característica de Euler, se realiza partiendo del «mapa», que es una teselación por polígonos regulares de las superficies $\tau_{m,k}$ donde con facilidad se identifican caras, vértices y aristas, que permiten emplear la Fórmula 3.5.

Tomando el «mapa» de la superficie $\tau_{2,1}$, Figura 3.10, el cálculo de la característica de Euler es el siguiente: sólo hay dos regiones, una de azul y otra de amarillo, se tiene entonces que en total hay 8 caras, 4 para las azules y 4 para las amarillas, además cada rectángulo tiene 4 aristas, de ocho que son en total, se determinan 32 aristas, pero cada arista se ha contado dos veces, obteniendo así 16 aristas. Finalmente cada rectángulo tiene 4 vértices, luego en total se tienen 32, pero cada vértice se comparte con cuatro rectángulos, por lo que se obtienen 8 vértices. De la Fórmula 3.5 se tiene el siguiente cálculo:

$$\chi(\tau_{1,2}) = C - A + V = 8 - 16 + 8 = 0.$$

De lo anterior, se puede deducir que en general, en cualquier «mapa», para cada rectángulo, el número de aristas y vértices son los mismos, y la manera en que se repiten las aristas y se comparten los vértices no varía, por lo que de cualquier «mapa» que se tenga de una superficie $\tau_{m,k}$, ocurrirá lo mismo. Pero, lo que si diferenciará cada «mapa» de las superficies, es el número

de caras (rectángulos), como se puede verificar en el «mapa» de la superficie $\tau_{2,3}$, Figura 3.7, que tiene 24 caras. Entonces se puede dar una forma general, para calcular las aristas y los vértices, teniendo el número de caras.

Entonces, sea n el número de caras o rectángulos, donde cada rectángulo tiene 4 aristas, por lo que se obtiene $4n$ aristas, pero este conteo se repite dos veces cada una de ellas, así que el número de aristas es igual a $\frac{4n}{2} = 2n$, por otro lado, cada rectángulo tiene 4 vértices, luego en total son $4n$ vértices, pero cada vértice se comparte con cuatro rectángulos, así $\frac{4n}{4} = n$ es el total de vértices. Donde se concluye que las superficies $\tau_{m,k}$ con n caras, tendrán $2n$ aristas y n vértices, luego $\chi(\tau_{m,k}) = n - 2n + n = 0$, es decir, estas superficies tienen característica de Euler igual a cero.

De otro lado, la fórmula $\chi = 2 - 2g$ donde g es el género de la superficie, también válida para calcular la característica de Euler, se obtiene que $g = 1$, dado que $\chi(\tau_{m,k}) = 2 - 2g = 0$. Por tanto las superficies $\tau_{m,k}$ orientables tiene género igual a uno, dando sentido al título del trabajo, Toros Mínimos en S^3 .

3.5.2. Toro de Clifford

Como se mencionó en la sección anterior el toro de Clifford $\tau_{1,1}$ es un ejemplo bastante importante de esta familia, dado que es la única superficie que no admite autointersecciones, es decir que la parametrización $\psi_{m,k}(x, y)$ con $(x, y) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ y $m = k = 1$ es inyectiva. Veamos:

$$\psi_{1,1}(x, y) = (\cos x \cos y, \sin x \cos y, \cos x \sin y, \sin x \sin y).$$

Supongamos $\psi_{1,1}(x, y) = \psi_{1,1}(x', y')$, lo que implica las siguientes igualdades:

$$\cos x \cos y = \cos x' \cos y',$$

$$\sin x \cos y = \sin x' \cos y',$$

$$\cos x \sin y = \cos x' \sin y',$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x' \operatorname{sen} y'.$$

Sumando las dos primeras y las dos últimas igualdades, se obtiene:

$$(\cos x + \operatorname{sen} x) \cos y = (\cos x' + \operatorname{sen} x') \cos y',$$

$$(\cos x + \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} y = (\cos x' + \operatorname{sen} x') \operatorname{sen} y'.$$

luego dividiendo la segunda sobre la primera igualdad y restringiendo los valores de y, y' tales que, no se anule la función coseno, se tiene:

$$\tan y = \tan y', \text{ con } y \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$$

Donde la igualdad se presenta, cuando $y = y'$ o $y' = y + \pi$.

Estudiando cada caso se tiene:

Caso 1 Si $y = y'$, se da que $\psi_{1,1}(x, y) = \psi_{1,1}(x', y)$, donde resultan las siguientes igualdades:

$$\cos x = \cos x',$$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x'.$$

Supongamos que $x \neq x'$. Entonces la igualdad anterior de los cosenos se cumple para $x' = 2\pi - x$, por lo que al reemplazar éste valor a la igualdad $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x'$, se tiene que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen} x$, obteniendo así que $\operatorname{sen} x = 0$, y por tanto $x = 0$ o $x = \pi$ y en consecuencia $x' = 0$ o $x = 2\pi$. Ahora si se reemplazan estos valores para las igualdades dadas al inicio de la sección, se encuentra que para la tercera igualdad al reemplazarla por los valores $x = \pi$ y $x' = 0$, la igualdad no se cumple, lo que es una contradicción. En conclusión si $y = y'$ entonces $x = x'$.

Caso 2 Si $y' = y + \pi$, tal como se hizo para el primer caso, se tiene lo siguiente:

$$\cos x \cos y = \cos x' \cos(y + \pi),$$

$$\operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen} x' \cos(y + \pi),$$

$$\cos x \operatorname{sen} y = \cos x' \operatorname{sen}(y + \pi),$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x' \operatorname{sen}(y + \pi).$$

donde $\psi_{1,1}(x, y) = -\psi_{1,1}(x', y)$, es decir, se tienen las siguientes dos igualdades:

$$\cos x = -\cos x',$$

$$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x'.$$

la primera se cumple cuando $x' = \pi - x$, si se reemplaza éste valor en la segunda igualdad, se obtiene que $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$ y por tanto $\operatorname{sen} x = 0$, igualdad que se cumple para $x = 0$ o $x = \pi$ y en consecuencia se obtiene que $x' = 0$ o $x' = \pi$. Aplicando el mismo proceso del caso anterior, se llega a una contradicción.

Finalmente se logra mostrar que la función $\psi_{1,1}$ es inyectiva y por tanto $\tau_{1,1}$ no admite autointersecciones.

Teorema 3.5.1. *Si $mk \neq 1$ entonces $\tau_{m,k}$ admite autointersecciones.*

Demostración.

Suponiendo que $k \geq 2$ se tiene que $S_1 = \psi_{m,k}([0, \frac{\pi}{k}] \times [0, \pi])$ y $S_2 = \psi_{m,k}([\frac{\pi}{k}, \frac{2\pi}{k}] \times [\pi, 2\pi])$ son regiones diferentes en $\tau_{m,k}$ ambas en S_+^3 (Ver figura 3.17).

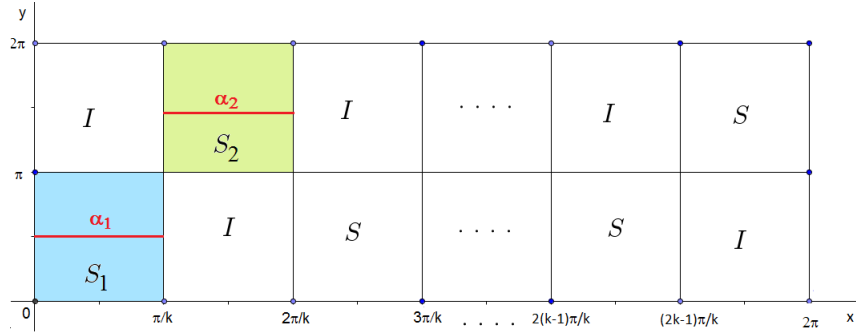


Figura 3.17: Visualizaciones de las regiones S_1 y S_2 en el «Mapa».

Si consideramos las curvas:

$$\alpha_1(t) = (t, \frac{\pi}{2}), t \in [0, \frac{\pi}{k}]$$

y

$$\alpha_2(t) = (t, \frac{\pi}{2}), t \in [\frac{2\pi}{k}, \frac{3\pi}{k}],$$

entonces se tiene que sus imágenes son media circunferencia de $C_2 = \{(0, 0, x_3, x_4) : x_3^2 + x_4^2 = 1\}$, ambas en S_+^3 . Es decir, que S_1 y S_2 se cortan en media circunferencia.

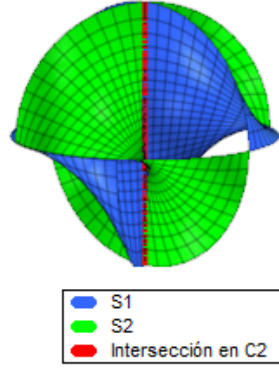


Figura 3.18: Visualización de la intersección de las regiones S_1 y S_2 .

En definitiva se concluye que las superficies $\tau_{m,k}$ admiten autointersecciones para $k \geq 2$ y $m \geq 1$, siendo $\tau_{1,1}$ la única superficie que no admite autointersecciones.

3.5.3. Grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$

En la sección 2.2, se explicó la construcción de superficies mínimas en S^3 . Para nuestro caso, la familia $\tau_{m,k}$, la cual se puede describir considerando el grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$, generado por las reflexiones geodésicas r_{γ_i} , $i = 1, 2, 3, 4$. de la siguiente manera:

$$\tau_{m,k} = M_{\Gamma_{m,k}} = \bigcup_{g \in G_{\Gamma}} g(\mathfrak{M}_{\Gamma_{m,k}}).$$

El objetivo de la presente sección es presentar explícitamente el grupo $G_{\Gamma_{m,k}}$ para describir la superficie $\tau_{m,k}$.

En principio, para poder exponer el grupo debemos conocer las reflexiones geodésicas, recordemos que las superficies $\tau_{m,k}$ se construyen a partir del polígono geodésico $\Gamma_{m,k} = P_1P_2Q_1Q_2$ (2.3.2), donde $P_1 = e_4$, $P_2 = \sin \beta e_3 + \cos \beta e_4$, $Q_1 = e_2$ y $Q_2 = \sin \theta e_1 + \cos \theta e_2$ con $\beta = \frac{\pi}{m+1}$ y $\theta = \frac{\pi}{k+1}$, cuyos lados son los segmentos geodésicos γ_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Para calcular las reflexiones geodésicas es suficiente conocer una base ortonormal que genera el plano donde se encuentra cada geodésica. No es difícil verificar que $\gamma_1 \subset \text{gen}\{e_3, e_4\}$, $\gamma_2 \subset \text{gen}\{P_2, Q_1\}$, $\gamma_3 \subset \text{gen}\{e_1, e_2\}$ y $\gamma_4 \subset \text{gen}\{Q_2, P_1\}$, (Figura 3.19).

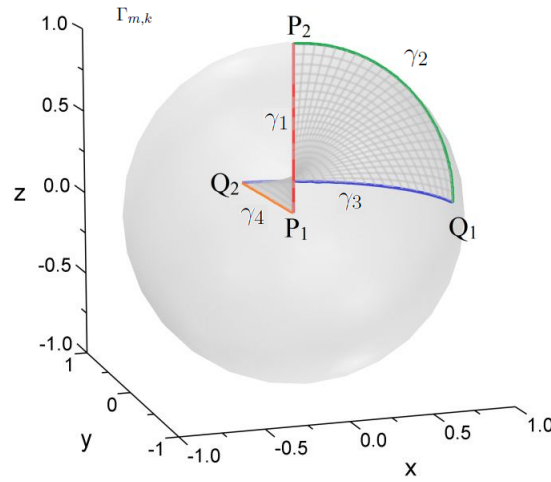


Figura 3.19: Ubicación geodésicas en el polígono $\Gamma_{m,k}$.

En la sección 2.1 se determinó que las reflexiones geodésicas se pueden calcular como sigue. Siendo $x \in \mathbb{R}^4$, las reflexiones geodésicas por cada γ_i son:

$$\begin{aligned} r_{\gamma_1}(x) &= 2(\langle x, e_4 \rangle e_4 + \langle x, e_3 \rangle e_3) - x \\ &= (-x_1, -x_2, x_3, x_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\gamma_2}(x) &= 2(\langle x, P_2 \rangle P_2 + \langle x, Q_1 \rangle Q_1) - x \\ &= (2(\langle x, \sin \beta e_3 + \cos \beta e_4 \rangle (\sin \beta e_3 + \cos \beta e_4) + \langle x, e_2 \rangle e_2) - x \\ &= (-x_1, x_2, -x_3 \cos 2\beta + x_4 \sin 2\beta, x_3 \sin 2\beta + x_4 \cos 2\beta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{\gamma_3}(x) &= 2(\langle x, e_2 \rangle e_2 + \langle x, e_1 \rangle e_1) - x \\
&= (x_1, x_2, -x_3, -x_4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_{\gamma_4}(x) &= 2(\langle x, Q_2 \rangle Q_2 + \langle x, P_1 \rangle P_1) - x \\
&= (2(\langle x, \sin \theta e_1 + \cos \theta e_2 \rangle (\sin \theta e_1 + \cos \theta e_2) + \langle x, e_4 \rangle e_4) - x \\
&= (-x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta, x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta, -x_3, x_4).
\end{aligned}$$

Es decir, tenemos que las reflexiones que generan el grupo, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
r_{\gamma_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, & r_{\gamma_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \cos 2\beta + x_4 \sin 2\beta \\ x_3 \sin 2\beta + x_4 \cos 2\beta \end{pmatrix}, \\
r_{\gamma_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}, & r_{\gamma_4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Las cuales se pueden reescribir de la siguiente manera, usando matrices de orden 2×2 .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & -\sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

donde se nota que

$$AB = \begin{pmatrix} -\cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} \text{ y } AC = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Si consideramos la notación de [4], donde $(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ para X, Y matrices cuadradas, se obtiene:

$$\begin{aligned}
r_{\gamma_1}(x) &= (-I, I)(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
r_{\gamma_2}(x) &= (A, AB)(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos 2\beta & \sin 2\beta \\ 0 & 0 & \sin 2\beta & \cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \cos 2\beta + x_4 \sin 2\beta \\ x_3 \sin 2\beta + x_4 \cos 2\beta \end{pmatrix} \\
r_{\gamma_3}(x) &= (I, -I)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} \\
r_{\gamma_4}(x) &= (AC, A)(x) = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \cos 2\theta + x_2 \sin 2\theta \\ x_1 \sin 2\theta + x_2 \cos 2\theta \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Siendo que el grupo se genera por la reflexiones, sabemos que $G_{\Gamma_{m,k}} = \text{gen}\{r_{\gamma_1}, r_{\gamma_2}, r_{\gamma_3}, r_{\gamma_4}\}$, y de acuerdo a lo anterior, es lo mismo que tener $G_{\Gamma_{m,k}} = \text{gen}\{(-I, I), (A, AB), (AC, A), (I, -I)\}$. Donde $A^2 = I$, $B^{k+1} = I$, $C^{m+1} = I$ y las reglas de conmutación corresponden a $AB = B^{-1}A$ y $AC = C^{-1}A$.

A continuación se presentará un ejemplo, donde se expone el cálculo del grupo y algunas propiedades.

Ejemplo 3.5.1. Considerando la superficies $\tau_{m,k}$ con $m = k = 1$, se tiene que $\theta = \beta = \frac{\pi}{2}$,

por lo que los puntos que definen el polígono geodésico quedan determinados de la siguiente manera: $P_1 = e_4$, $P_2 = e_3$, $Q_1 = e_2$, $Q_2 = e_1$. Al ser $\gamma_1 \subset \text{gen}\{e_3, e_4\}$, $\gamma_2 \subset \text{gen}\{e_3, e_2\}$, $\gamma_3 \subset \text{gen}\{e_1, e_2\}$ y $\gamma_4 \subset \text{gen}\{e_1, e_4\}$ se tiene que las reflexiones geodésicas cumplen la siguiente forma:

$$r_{\gamma_1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (-I, I)(x), \quad r_{\gamma_2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} = (A, -A)(x),$$

$$r_{\gamma_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix} = (I, -I)(x), \quad r_{\gamma_4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (-A, A)(x).$$

Donde respectivamente, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obteniendo así, que el grupo $G_{\Gamma_{1,1}} = \text{gen}\{(I, I), (-I, I), (I, -I), (A, -A), (-A, A)\}$, donde A cumple con la regla $A^2 = I$. Se tiene también que, si $(X, Y) \in G_{\Gamma_{1,1}}$ entonces $(-X, Y) \in G_{\Gamma_{1,1}}$, $(X, -Y) \in G_{\Gamma_{1,1}}$ y $(-X, -Y) \in G_{\Gamma_{1,1}}$.

Lo que se quiere ahora es determinar el orden del grupo. Siendo éste generado por un número finito de elementos, donde cada elemento, aportará tres elementos más al mismo grupo, es decir, si se toma el elemento $(A, -A) \in G_{\Gamma_{1,1}}$, también estarán $(-A, -A)$, (A, A) y $(-A, A)$. Por tanto el grupo será $G_{\Gamma_{1,1}} = \text{gen}\{(I, I), (-I, I), (I, -I), (-I, -I), (A, -A), (-A, A), (-A, -A), (A, A)\}$, el cuál tiene 8 elementos, logrando así determinar que el orden del grupo $G_{\Gamma_{1,1}}$ es 8.

Apéndice 1

Este espacio se aprovechará para dar una recopilación de varios de los códigos desarrollados, con el programa MuPAD, para la realización de las gráficas de la familia $\tau_{m,k}$ y de algunos otros cálculos que se muestran en el presente trabajo.

Visualizaciones Familia $\tau_{m,k}$

Para poder dar una representación gráfica de la familia $\tau_{m,k}$, se emplea la parametrización dada por Lawson en [1] y las proyecciones estereográficas, las cuales permitirán tener visualizaciones en $\mathbb{R}^3$. La rutina que permite tales visualizaciones es la siguiente:

Visualización de la superficie $\tau_{2,1}$, con proyección estereográfica desde el polo sur $-e_4$

```
m:=2:
k:=1:
x:=cos(m*u)*cos(v)/(1+sin(v)*sin(k*u)):
y:=sin(m*u)*cos(v)/(1+sin(v)*sin(k*u)):
z:=cos(k*u)*sin(v)/(1+sin(v)*sin(k*u)):
S:= plot::Surface([x, y, z], u =0 .. PI, v = 0 .. PI, FillColorType = Flat):
plot(S,ViewingBox = [-1..1,-1..1,-1..1]):
```

Visualización de la superficie $\tau_{2,1}$, con proyección estereográfica desde el polo norte e_4

```
m:=2:
k:=1:
```

```

x:=cos(m*u)*cos(v)/(1-sin(v)*sin(k*u)):
y:=sin(m*u)*cos(v)/(1+sin(v)*sin(k*u)):
z:=cos(k*u)*sin(v)/(1-sin(v)*sin(k*u)):
I:= plot::Surface([x, y, z], u =PI .. 2*PI, v = 0 .. PI, FillColorType = Flat):
plot(I,ViewingBox = [-1..1,-1..1,-1..1]):

```

Así se obtenienen las siguientes gráficas:

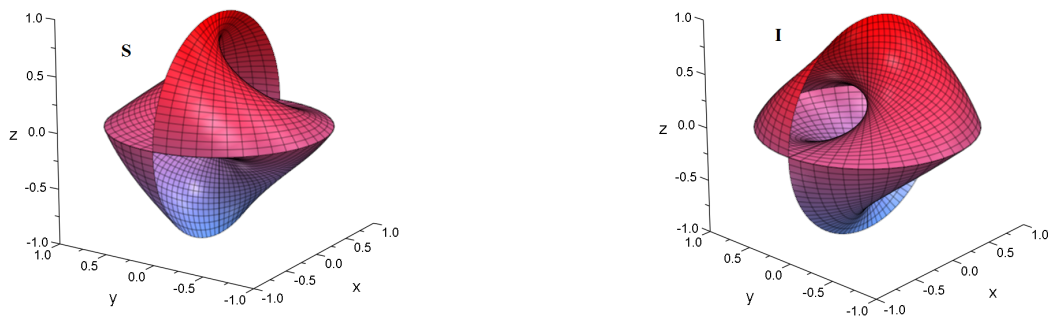


Figura 3.20: Visualizaciones de la superficie $\tau_{2,1}$.

Así, como se muestra la rutina para $m = 2$ y $k = 1$, esta misma funciona para todos los valores de m y k tales que $(m, k) = 1$, logrando así producir una galería completa para la familia $\tau_{m,k}$. Además específicamente del trabajo, se logran visualizaciones, cómo las que se muestran en la Figura 1.5 y las Figuras 3.5 y 3.6.

Cálculo del vector normal

Otra forma en la que se empleo el programa MuPAD, fue para agilizar los cálculos desarrollados en la sección 3.1, para demostrar la minimalidad. A continuación las rutinas empleadas.

1. Cálculo de los vectores $\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x}$ y $\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y}$.

delete x, y:

```

V:=linalg::jacobian([cos(m*x)*cos(y),sin(m*x)*cos(y),cos(k*x)*sin(y),
                    sin(k*x)*sin(y)], [x, y]):
v1:=linalg::delCol(V, 2):
v2:=linalg::delCol(V, 1):
MatQ := Dom::Matrix(Dom::Real):
linalg::basis([v1, v2])

```

2. Tal como se mostró en la Sección 3.1, para el cálculo del normal se necesitan los vectores

$\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial x}$ y $\frac{\partial \psi_{m,k}}{\partial y}$ y un punto $p \in \tau_{m,k}$.

```

V1:=linalg::transpose(v1);
V2:=linalg::transpose(v2);
p:=matrix(1,4,[cos(m*x)*cos(y),sin(m*x)*cos(y),cos(k*x)*sin(y),
               sin(k*x)*sin(y)]);

```

3. De acuerdo con la definición 3.1.1, se tiene la siguiente rutina.

```

A := matrix([[V1[1, 1],V1[1, 2], V1[1, 3], V1[1, 4] ],
             [V2[1, 1],V2[1, 2], V2[1, 3], V2[1, 4] ],
             [p[1, 1],p[1, 2], p[1, 3], p[1, 4] ]]);

```

```

A1:= linalg::delCol(A, 1):
A2:= linalg::delCol(A, 2):
A3:= linalg::delCol(A, 3):
A4:= linalg::delCol(A, 4):

```

```

b1:= linalg::det(A1);
b2:=linalg::det(A2);
b3:=linalg::det(A3);
b4:=linalg::det(A4);

```

```

a1:= simplify(linalg::det(A1));
a2:=simplify(linalg::det(A2));
a3:=simplify(linalg::det(A3));
a4:=simplify(linalg::det(A4));

```

4. Para obtener el vector normal.

```

N:=sqrt((a1^2)+(a2^2)+(a3^2)+(a4^2)):
B := matrix([[ (1/N)*a1, -(1/N)*a2, (1/N)*a3, -(1/N)*a4]])

```

5. Permitirá una vista simplificada del vector normal componente a componente.

```

simplify(B[1,1]);
simplify(B[1,2]);
simplify(B[1,3]);
simplify(B[1,4]);

```

Bibliografía

- [1] Lawson H. *Complete minimal surface in S^3* . Annals of mathematics; Volumen 92, Número 3, Pág 334-374, 1970.
- [2] Do Carmo, M. *Riemannian Geometry*. Birkhauser, 1992.
- [3] Do Carmo, M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [4] Mesa H. *Superficies mínimas algebraicas de grado cuatro en S^3* . Tesis de Maestria, Universidad del Valle, 2006.
- [5] Castrillón A. *La conjetura de Lawson*. Tesis de Pregrado, Universidad del Valle, 2008.
- [6] Perdomo. O *Mínimal hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$ as regular values of a function*. Revista Integración, Volumen 22, Número 1-2, Pág 1-6.
- [7] Perdomo. O, Mesa H. *Hypervariedades mínimas algebraicas en S^n* . Revista Unión Matemática Argentina, Volumen 47, Número 2, Pág 67-75.
- [8] Marmolejo. M. *Producto cruz en $\mathbb{R}^n$: La identidad general de Lagrange*. Enseñanza Universitaria, Volumen 3, Número 2, Pág 109-116.