

**DISÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA ESTRUCTURA MECÁNICA DE UN
EXOSQUELETO PARA LA REHABILITACIÓN DE LA
ARTICULACIÓN DE RODILLA**

OMAR ANDRÉS SERNA GARCÍA



**FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2009**

**DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE LA ESTRUCTURA MECÁNICA DE UN
EXOESQUELETO PARA LA REHABILITACIÓN DE LA
ARTICULACIÓN DE RODILLA**

**Presentado por:
OMAR ANDRÉS SERNA GARCÍA**

**Para optar al título de:
Ingeniero Mecánico**

**Director:
Ing. Esteban Emilio Rosero M.Sc.**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO DE CALI
2009**

Nota de aceptación:

Firma del jurado

Firma del jurado

Santiago de Cali, Septiembre de 2009.

A mis papás, José Omar y Marta, a mis hermanos
Juan Pablo y Laura, a mi sobrina Isabel,
a mi novia Marcela, a toda mi Familia
y amigos, los quiero mucho.

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis el M.sc. Esteban Emilio Rosero del Grupo de Investigación en Control Industrial GICI por la oportunidad de trabajar en el grupo, por la confianza y por el apoyo que me dio durante el desarrollo del proyecto.

Al señor Jhon Jaime Varela dueño de Ortopédica Americana Ltda., quien me asesoró y me brindó su experiencia en el diseño y la construcción de la órtesis.

A mi compañero y amigo de toda la vida, Leonardo Alexis Grisales con quienes disfruté y compartí toda mi carrera, y quien me ayudo y me dio la mano en muchas situaciones.

A los profesores de la escuela de salud quienes me ayudaron a definir los diferentes tipos de terapia para quienes iba a servir el exoesqueleto.

A todo el grupo de investigación, con quienes compartí, disfrute y aprendí cosas nuevas durante el desarrollo del proyecto.

A la Universidad del Valle donde pude formarme como ingeniero

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCIÓN.....	1
1. EL EXOESQUELETO Y SUS ACTIVIDADES TERAPEUTICAS....	1
1.1 EL EXOESQUELETO.....	1
1.2 ESTRENAMIENTO EN EL FORTALECIMIENTO MUSCULAR..	3
1.2.1 Ejercicios de cadena cinética abierta.....	3
1.2.2 Ejercicios de cadena cinética cerrada.....	4
1.3 PACIENTES CANDIDATOS AL USO DEL EXOESQUELETO.	6
2 SELECCIÓN DE LOS ACTUADORES PARA ARTICULACIÓN DE RODILLA Y CADERA.....	8
2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO.....	8
2.2 CARACTERÍSTICAS DE LA CARGA.....	10
2.3 CÁLCULO DE LA POTENCIA EN LOS ACTUADORES.....	16
2.4 REQUERIMIENTOS DE LA CARGA.....	18
2.5 SELECCIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS ACTUADORES.....	19
2.6 CARACTERÍSTICAS EL ACTUADOR SELECCIONADO.....	22
3. DISEÑO Y VALIDACIÓN ANALÍTICA DE LA ESTRUCTURA MECÁNICA.....	24
3.1 DESCRIPCIÓN GEOMETRICA DE LA ESTRUCTURA.....	26
3.2 DESCRIPCIÓN DE CADA UNO DE LOS COMPONENTES DE LA ESTRUCTURA.....	26
3.2.1 Acoples.....	27
3.2.2 Barra telescópica.....	27
3.2.3 Articulaciones de tobillo.....	28

3.2.4	Soporte de pie.....	28
3.2.5	Plantilla.....	28
3.2.6	Soporte de muslo.....	29
3.3	SELECCIÓN DEL MATERIAL.....	29
3.4	CÁLCULO Y EVALUACIÓN ANALÍTICA DE LA ESTRUCTURA.....	30
3.4.1	Cálculo del estado de carga del segmento superior.....	31
3.4.2	Cálculo del soporte del muslo.....	33
3.4.3	Calculo de barras superior ajustable.....	34
3.4.4	Calculo de esfuerzos en los acoples.....	38
3.4.5	Calculo de barras telescópicas inferior.....	46
3.4.6	Selección de la articulación de tobillo.....	48
3.4.7	Análisis de rigidez.....	49
3.4.8	Calculo de la soldadura en la barra telescópica superior.....	51
3.4.9	Calculo de la soldadura en la barra telescópica inferior.....	53
3.4.10	Cálculo y evaluación de pernos usados en la estructura.....	55
3.5	CONSTRUCCIÓN DE LA ÓRTESIS PARA LA REHABILITACIÓN DE LA ARTICULACIÓN DE RODILLA...	58
4.	DISEÑO DE ÓRTESIS PARA MIEMBROS INFERIORES.....	61
4.1	DESCRIPCIÓN DE CADA UNO DE LOS COMPONENTES.....	61
4.1.1	Soporte torso.....	62
4.1.2	Soporte cadera.....	62
4.1.3	Barra-superior cadera.....	63
4.2	CÁLCULO Y EVALUACIÓN ANALÍTICA DE LA ÓRTESIS PARA MIEMBROS INFERIORES	64
4.2.1	Cálculo de acople superior e inferior.....	64
4.2.2	Cálculo de soporte torso.....	65
4.2.3	Cálculo de barra-superior cadera.....	66

5. CONCLUSIONES.....	68
RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	70
6. BIBLIOGRAFIA.....	71

ANEXOS

A Modelos de la marcha humana.....	76
B Evaluación de los motores.....	95
C Catalogo actuador Harmonic Drive.....	104
D Planos de la órtesis para la rehabilitación de la articulación de rodilla.....	130
E Planos de la órtesis para la rehabilitación de miembros inferiores.....	141

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Potencias máximas de cada una de las articulaciones en movimientos comunes de la vida cotidiana.....	17
Tabla 2. Ángulo, par, potencia y velocidad de cada una de las articulaciones motorizadas.....	18
Tabla 3. Resumen sobre la selección de los actuadores.....	21
Tabla 4. Ficha técnica del motor Harmonic Drive CHA-20A-100-H-M512P-B-S.....	22
Tabla 5. Datos antropométricos de los segmentos a partir de la altura y la masa total del paciente.....	24
Tabla 6. Rangos de movilidad de la articulación de rodilla y de cadera.....	25
Tabla 7. Propiedades del acero seleccionado para el diseño.....	30
Tabla 8. Ángulos en los que se encuentran los segmentos de la pierna en el 48% del ciclo de descenso.....	31
Tabla 9. Fuerzas que actúan sobre el segmento superior.....	32
Tabla 10. Fuerzas y momentos que actúan sobre la barra superior ajustable.....	35
Tabla 11. Coeficientes para el cálculo de tensiones tangenciales máximas de torsión en barras rectangulares [12].....	36
Tabla 12. Estado de esfuerzos de la barra superior ajustable en la sección de empotramiento.....	36
Tabla 13. Factores de corrección del límite de resistencia a la fatiga.....	37
Tabla 14. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.....	38
Tabla 15. Fuerzas y momentos presentes en el acople superior.....	39
Tabla 16. Esfuerzos del acople superior en el extremo empotrado.....	40
Tabla 17. Factores de corrección para análisis a fatiga del acople superior.....	40

Tabla 18. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.....	41
Tabla 19. Fuerzas generadas en el segmento inferior de la estructura.....	42
Tabla 20. Esfuerzos del acople superior en el extremo empotrado.....	43
Tabla 21. Factores de corrección para análisis a fatiga del acople superior.....	44
Tabla 22. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.....	44
Tabla 23. Estado de esfuerzos de la barra superior ajustable en la sección de empotramiento.....	45
Tabla 24. Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga.....	46
Tabla 25. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.....	46
Tabla 26. Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga.....	47
Tabla 27. Propiedades del electrodo E60.....	51
Tabla 28. Propiedades del patrón de soldadura considerándola como una línea..	52
Tabla 29. Fuerzas presentes en la soldadura.....	52
Tabla 30. Propiedades del patrón de soldadura considerándola como una línea..	54
Tabla 31. Fuerzas presentes en la soldadura.....	54
Tabla 32. Propiedades de los pernos seleccionados.....	55
Tabla 33. Fuerzas que actúan en los pernos del segmento superior.....	64
Tabla 34. Fuerzas que actúan en los pernos del segmento superior.....	64
Tabla 35. Estado de esfuerzos del soporte de torso en la sección de empotramiento.....	64
Tabla 36. Factores de corrección del límite de resistencia a la fatiga.	
Tabla 37. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.	
Tabla 38. Fuerzas y momentos presentes en la barra-superior cadera.....	65

Tabla 39. Estado de esfuerzos de la barra-superior cadera en la sección de empotramiento.....	66
Tabla 40. Factores de corrección del límite de resistencia a la fatiga.....	66
Tabla 41. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.....	67

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Exoesqueleto.....	1
Figura 2. Ejercicio de péndulo simple.....	3
Figura 3. Ejercicio de péndulo amortiguado.....	4
Figura 4. Coordenadas generalizadas y constantes del modelo del bípedo	
Figura 5. Diagrama de cuerpo libre.	
Figura 6. Coordenadas generalizadas y momentos en fase de soporte simple y doble.	
Figura 7. Torques generados en las articulaciones de rodilla y cadera en el plano sagital durante la marcha.....	9
Figura 8. Torques desarrollados en rodilla en el plano sagital durante un ciclo de marcha en las diferentes actividades.....	10
Figura 9. Torques desarrollados cadera en el plano sagital durante un ciclo de marcha en las diferentes actividades.....	11
Figura 10. a) Coordenadas y constantes de bípedo al levantarse de una silla b) y fuerzas externas.....	12
Figura 11. Torque generado en la articulación de rodilla al levantarse de una silla.	
Figura 12. Torque generado en la articulación de rodilla al levantarse de una silla.....	13
Figura 13. Torque-Velocidad angular desarrollado en rodilla en el plano sagital durante las diferentes actividades.....	15
Figura 14. Torque-Velocidad angular desarrollado en cadera en el plano sagital durante las diferentes actividades.	15
Figura 15. Potencia absoluta en rodilla en las diferentes actividades del diario vivir.....	16
Figura 16. Potencia absoluta en la cadera en las diferentes actividades del diario vivir.....	17
Figura 17. Motor Harmonic Drive CHA-20A-100-H-M512P-B-S.....	22
Figura 18. Elementos que componen el exoesqueleto.....	26

Figura 19. Acople superior e inferior con el mecanismo de tope.....	27
Figura 20. Conjunto de barra telescópica.....	27
Figura 21. Articulación de tobillo.....	28
Figura 22. Soporte pie.....	28
Figura 23. Plantilla.....	28
Figura 24. Soporte de muslo.....	29
Figura 25. Ubicación de los segmentos de la pierna en el 48 % del ciclo de descenso de escaleras.....	31
Figura 26. Diagrama de cuerpo libre del segmento superior de la estructura.....	32
Figura 27. Geometría y dimensiones del soporte del muslo.....	33
Figura 28. Estado de carga que actúa sobre la barra superior ajustable.....	34
Figura 29. Ensamble del Motor CHA20-100 con acople superior e inferior.....	39
Figura 30. Diagrama de cuerpo libre para los dos acoples.....	40
Figura 31. Estado de carga de la sección tomada del acople superior.....	41
Figura 32. Diagrama de cuerpo libre para el segmento inferior.....	43
Figura 33. Estado de carga de la sección tomada del acople inferior.....	45
Figura 34. Estado de carga que actúa sobre la barra telescópica inferior.....	47
Figura 35. Articulación estándar Becker Orthopedic.....	49
Figura 36. Columna articulada en los extremos con carga axial excéntrica.....	50
Figura 37. Cordón de soldadura para la unión entre el soporte de muslo y la barra telescópica (segmento inferior).....	51
Figura 38. Cordón de soldadura para la barra telescópica inferior.....	52
Figura 39. Configuración de penos para unir el acople superior con la barra superior ajustable.....	53
Figura 40. Acople inferior para articulación de rodilla.....	58

Figura 41. Acople superior para articulación de rodilla.....	59
Figura 42. Ensamble acople superior e inferior.....	59
Figura 43. Barra telescópica ajustable superior.....	60
Figura 44. Articulación de tobillo.....	60
Figura 45. Descripción de órtesis para rehabilitación de miembros inferiores....	61
Figura 46. Soporte torso.....	62
Figura 47. Soporte cadera.....	62
Figura 48. Barra superior cadera.....	63
Figura 49. Acoples superior e inferior cadera.....	63
Figura 50. Estado de carga soporte torso.....	65
Figura 51. Estado de carga de barra-superior cadera y dimensiones de sección transversal.....	67

RESUMEN

El este proyecto se presenta el diseño y la construcción de un exoesqueleto para la rehabilitación de la articulación de rodilla, con el cual se espera ofrecer asistencia durante el movimiento de flexión–extensión, ó proveer apoyo de fuerza para ejecutar ciertos movimientos, y de esta manera, mejorar la movilidad de la articulación. También se realiza la selección de los actuadores, definiendo los requerimientos y evaluando las posibilidades comerciales que pueden ser usadas para esta aplicación. Adicional a lo anterior se plantea el diseño y la validación de una estructura para miembros inferiores que incluye las cuatro articulaciones y el torso, la cual servirá para el desarrollo del sistema de control de un bípedo en la fase de equilibrio.

PALABRAS CLAVE: Exoesqueleto, Ortesis activa, rehabilitación, lesión de miembros inferiores, bípedo.

INTRODUCCIÓN

En la sociedad actual, la prevalencia de enfermedades neurológicas tales como accidentes cerebro vasculares, lesiones medulares y daños cerebrales traumáticos está aumentando muy rápidamente. La vida es cada vez más estresante y los nuevos hábitos de vida son factores que están contribuyendo al envejecimiento de la población. Por otra parte, gracias a las reformas introducidas en los protocolos de asistencia inmediata y a las nuevas técnicas de la medicina moderna, la tasa de supervivientes en los accidentes mencionados también está aumentando muy rápidamente.

Las enfermedades neuromuscular causan, dependiendo del grado de afectación, una discapacidad motora. Esta discapacidad adquirida puede conducir a graves problemas en la marcha, incluso haciendo imposible caminar. El seguimiento de un programa de rehabilitación es crucial para recobrar parte de la movilidad perdida. La motivación e intensidad implementados en estos programas son aspectos muy importantes a tener en cuenta en esos programas de rehabilitación.

Hoy en día, la rehabilitación de la marcha y de las extremidades inferiores se basa en fisioterapia manual y ejercicios musculares específicos. El uso de terapia mediante robots o estructuras robotizadas conocidas también como exoesqueletos mejora los procedimientos de rehabilitación actuales, permitiendo así una rehabilitación de mayor calidad y aumentando también la motivación del paciente, quien se sentirá más independiente de la disponibilidad de fisioterapeutas o de terapeutas ocupacionales, mejorando repetitividad y motivación. Además, permite comenzar la rehabilitación con movimientos específicos.

El presente trabajo de grado parte de la vinculación al proyecto “Diseño y construcción de un exoesqueleto para rehabilitación asistida de pacientes con lesiones de rodilla”, el cual se trabajó en un grupo interdisciplinario conformado por estudiantes de pregrado de ingeniería mecánica, electrónica y fisioterapia; estudiantes de postgrado y docentes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad

del Valle [20]. La propuesta inicial consistió en el diseño de un prototipo con las especificaciones necesarias que permitan brindar herramientas al tratamiento de las alteraciones que comprometen la movilidad de la articulación de la rodilla.

El exoesqueleto no tiene como objetivo pacientes de una patología concreta, si no pacientes que como consecuencia de diferentes patologías tienen una discapacidad motora con problemas de coordinación muscular y dificultad para realizar algunos movimientos básicos de la vida cotidiana. El desarrollo mecánico incluye tanto el desarrollo estructural del exoesqueleto como la selección de los actuadores que lo van a mover. Como hipótesis inicial, se ha estimado una asistencia del 100% en términos de *par torsor* durante la marcha.

Objetivo del trabajo

El objetivo de este trabajo es Diseñar y construir una órtesis para miembros inferiores que pueda ser ajustable a la antropometría de cada individuo como parte de un exoesqueleto, esté será usado con fines terapéuticos para la rehabilitación de la articulación de rodilla.

A continuación se presentan los objetivos específicos que se alcanzarían con el desarrollo de la proyecto de grado:

- Selección de los actuadores para las articulaciones de rodilla y cadera, con los cual se podrá definir la geometría de la órtesis y determinar el estado de carga en cada articulación.
- Diseño y validación de la órtesis para la articulación de rodilla.
- Construcción de la órtesis para la articulación de rodilla.
- Adicionalmente se plantea el diseño y la validación de una estructura para miembros inferiores que incluye las cuatro articulaciones y el torso, la cual servirá para el desarrollo del sistema de control de un bípedo en la fase de equilibrio.

El presente trabajo se encuentra dividido en cinco capítulos que abarcan las etapas en las cuales se desarrolló el proyecto.

El primero capítulo está dirigido a identificar las actividades terapéuticas que pueden ser aplicadas con la implementación del exoesqueleto.

El segundo capítulo describe la metodología usada para la selección de los actuadores. En él se definen los requerimientos para la selección y se evalúan todas las posibilidades comerciales que pueden ser usadas para esta aplicación.

El tercer capítulo presenta el diseño de la estructura mecánica para la articulación de rodilla. Para esto se define la geometría de la estructura a partir del estado de carga (torque aportado por el actuador) para dimensionar cada pieza. Además, se hace una validación de forma analítica. Finalmente se describen algunos aspectos referentes a la construcción del dispositivo.

El cuarto capítulo describe el diseño de la estructura de un exoesqueleto para la rehabilitación de miembros inferiores (cuatro articulaciones) teniendo en cuenta los resultados del capítulo tres.

El quinto capítulo presenta las conclusiones y recomendaciones del estudio desarrollado.

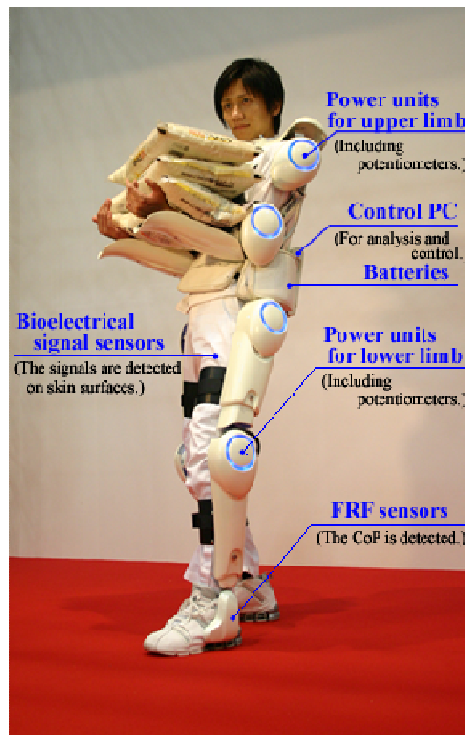
1 EL EXOESQUELETO Y SUS ACTIVIDADES TERAPEUTICAS

1.1 EL EXOESQUELETO

Los exoesqueletos son estructuras externas con articulaciones y acoples montadas sobre el cuerpo humano, las cuales deben ser inteligentes y flexibles para ejecutar una tarea originada por el operador. Se diseñan para que el humano tenga el control de los movimientos mientras que la fuerza y la resistencia son aportadas por la máquina [2].

Los componentes de un exoesqueleto, como se muestra en la figura 1, son: unidades de potencia, sensores bioeléctricos, actuadores en las articulaciones, baterías con alta capacidad de almacenamiento y transmisiones mecánicas de alta eficiencia.

Figura 1. Exoesqueleto.



Tomado de <http://www.cyberdyne.jp/english/>

En la actualidad los exoesqueletos pueden ser empleados para aumentar la potencia humana o para ayudar en la rehabilitación médica, mediante simulación virtual o interacción háptica.

Un mismo exoesqueleto con una variedad de algoritmos puede ser usado en cuatro modos de operación diferente [17]:

- **En fisioterapia:** el paciente que usa un exoesqueleto realiza tareas basadas en terapia ocupacional o física de un modo pasivo o activo.
- **Como un dispositivo asistido:** El operador tiene la sensación de pequeñas cargas mientras interactúa con objetos del medio ambiente, la mayor parte de la carga es aportada por el exoesqueleto.
- **Como un dispositivo Háptico:** La persona físicamente interacciona con objetos virtuales mientras las fuerzas generadas a través de las interacciones son realimentadas al usuario a través del exoesqueleto transmitiendo forma, rigidez, textura y otras características de los objetos virtuales.
- **Como dispositivo maestro:** En este caso el ambiente virtual es reemplazado por una estructura real en el que el operador controla un sistema robotico en modo de tele-operación (maestro/esclavo). El exoesqueleto le indica al usuario las fuerzas generadas en el robot cuando interactúa con el ambiente.

En este caso el dispositivo a diseñar y construir será empleado en aplicaciones de rehabilitación de la articulación de rodilla.

En la construcción de un exoesqueleto el primer paso es identificar las actividades terapéuticas en las cuales este dispositivo puede ser aplicado. Por consiguiente, a continuación se detallan dichas actividades identificadas a partir de estudios que han abordado este tema [2, 17].

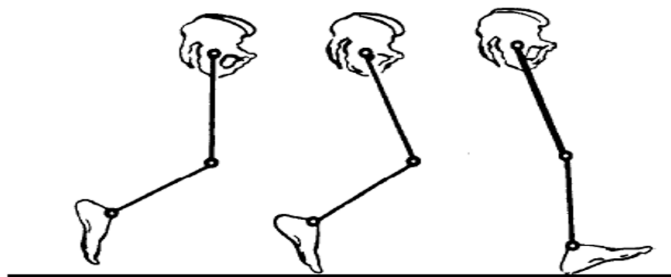
1.2 ENTRENAMIENTO EN PROGRAMAS DE FORTALECIMIENTO MUSCULAR

Una condición básica para ganar y/o mantener fuerza muscular es la respuesta del músculo al estímulo de carga o peso, es decir, que el músculo cuente con un mínimo de contracción en sus fibras (vestigios). En pacientes con esta condición el exoesqueleto puede ser ajustado para oponerse al movimiento activo-asistido. Estos ejercicios pueden hacerse en cadena cinética abierta o cerrada.

1.2.1 Ejercicios de Cadena cinética abierta. Implican movimientos donde el extremo del miembro no queda fijo sino que se mueve libremente. Entre este tipo de ejercicios se encuentran:

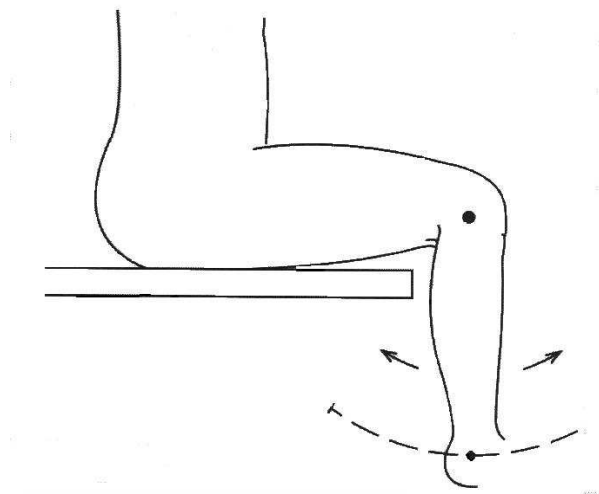
Ejercicios de Péndulo simple. El exoesqueleto de rodilla asiste la producción del movimiento pendular inicialmente desde el prebalanceo impulsando la pierna hacia delante y llevando la rodilla hacia la extensión, de esta manera, el cambio de posición de las fuerzas de reacción sobre el piso que se ubicaban posterior a la rodilla y la cadera se adelantarán en la fase de balanceo moviendo el cuerpo en esta misma dirección (ver figura 2).

Figura 2. Ejercicio de péndulo simple.



Ejercicios de Péndulo amortiguado. El exoesqueleto se programaría para favorecer la ejecución motora de péndulo amortiguado iniciando el movimiento, ya sea en dirección de la extensión o de la flexión, proporcionando la cantidad de movimiento necesaria para movilizar la pierna entre 80 y 90 grados de flexión de rodilla, (ver figura 3).

Figura 3. Ejercicio de péndulo amortiguado.



1.2.2 Ejercicios de Cadena cinética cerrada. Implican movimientos donde el extremo de un miembro se encuentran fijo o estables. En neurorehabilitación por medio del exoesqueleto se puede realizar la facilitación de tareas motoras, como:

La transición de sedente a bípedo. En este caso el dispositivo permitiría controlar el movimiento y el bloqueo de la rodilla necesario en cada fase de la actividad. Ayudaría en el desplazamiento, soporte de peso y alineación de la articulación de rodilla, esto le daría al terapeuta la posibilidad de concentrarse más en los mecanismos de facilitación a nivel de cadera y reducir carga de trabajo.

Reeducación de marcha. El exoesqueleto aportaría la carga necesaria en la articulación para esta actividad, lo que facilitaría el aprovechamiento de los estereotipos dinámicos que se crean en las diferentes fases de la reeducación de la

marcha. Esto permitiría una mejor recuperación y un mejor adiestramiento de la marcha.

Descargas de peso. El exoesqueleto tendría la función de sostener y cargar el peso de la pierna durante las actividades en bipedestación de tal modo que permitiría una ligera flexión y bloqueo en un ángulo delimitado para dar estabilidad.

Reeducación muscular. El exoesqueleto es una herramienta que asiste al terapeuta sosteniendo el peso de los segmentos y movilizándolos sin o con la gravedad.

- **Movimientos pasivos:** El exoesqueleto se programará para que realice rangos completos de movimiento de flexión y extensión de rodilla.
- **Activos-asistidos:** En caso de que la persona pueda iniciar el movimiento, el exoesqueleto completará los ángulos de movimiento restante. Esta función se puede graduar a medida que el paciente gane movilidad articular. En los casos de que exista algún bloqueo en la articulación, se programará el dispositivo para que solo llegue hasta estos topes, de forma que no produzca una lesión ulterior.
- **Activos:** Cuando la persona puede activar algunos movimientos, el exoesqueleto se destinará al control de su ejecución para mantener adecuada posición articular y evitar compensaciones.

Control Postural (estático y dinámico). En cuanto a la Postura en general, las posiciones más altas del centro de masa del cuerpo humano se relacionan con movimientos hacia la extensión de los segmentos, como por ejemplo la transición de estar sentado y pasar a estar de pie. El exoesqueleto aportará el torque necesario para llevar a la persona a la postura deseada en contra de la gravedad. En el caso estático el dispositivo será capaz de bloquear la articulación de la rodilla para mantener una postura definida.

Ejercicios de lubricación articular y manejo de presión. El exoesqueleto será programado para que controle los rangos de movimiento en ejercicios moderados de baja velocidad (posiciones intermedias), de modo que faciliten la producción y distribución del líquido sinovial. Este fluido disminuye hasta en diez veces la tasa de desgaste de la articulación, lo que favorece el mantenimiento de la articulación de rodilla por medio de ejercicios pasivos [11].

Entrenamiento en programas de flexibilidad y estímulos de estiramiento. Por medio del exoesqueleto se pueden realizar estiramientos con velocidad constante ó variable, de manera que las aferencias transmitan el impulso y la información de tensión muscular constante, permita que el mecanismo protector presente para las contracciones musculares fisiológicas y de tono muscular normal mantenga la integridad del tejido mientras los segmentos se mueven o se mantienen en determinada posición de estiramiento. De esta forma las reacciones estáticas del huso neuromuscular producen elongación muscular controlada evitando la aparición de retracciones, lesiones o desencadenar espasticidad.

Entrenamiento en programas de propiocepción. Con el uso del exoesqueleto pueden programarse ejercicios con movimientos fraccionados que ayuden al paciente a obtener información sensorial sobre los cambios de posición articular, estos ejercicios permitirán la sincronización de movimientos entre segmentos y el desplazamiento lineal.

Acondicionamiento físico en general. El hecho de que el dispositivo permita asumir cambios de posición, contribuye a los cambios en el sistema cardiorrespiratorio que le permiten al paciente mejorar su condición física y su capacidad aeróbica.

1.3 PACIENTES CANDIDATOS AL USO DEL EXOESQUELETO

Es necesario realizar una evaluación detallada del paciente para determinar si es o no un posible usuario del exoesqueleto. De acuerdo a los resultados de los análisis de las actividades realizadas para los casos de referencia podemos deducir que:

En pacientes que presenten problemas a nivel del sistema nervioso central como parálisis incompleta, flaccidez ó quienes conserven rango de movilidad articular normales, el uso del exoesqueleto facilitará la realización de las actividades terapéuticas, debido a que estas condiciones permitirán una mejor adaptación y colocación del dispositivo al inicio de la terapia. Por otro lado, pacientes que presenten espasticidad moderada o severa deberán ser tratados con técnicas que regulen tono muscular previamente a la utilización del dispositivo para evitar lesiones.

El paciente debe mantener estabilidad en posición bípeda, tener un control adecuado de tronco, fuerza muscular funcional en contra de la gravedad y estabilidad de cadera suficiente para maniobrar el dispositivo.

Los pacientes con trauma raquímedular o alguna alteración neurológica en el movimiento pueden beneficiarse del exoesqueleto siempre y cuando tengan:

Compromiso motor nivel L1, con músculos flexores de cadera en funcionamiento parcial sin contracturas en flexión. Para este caso, el exoesqueleto asistirá el movimiento y estabilidad de la pierna y permitirá el fortalecimiento de cadera.

Compromiso motor nivel L2, con músculos flexores de cadera, con fuerza suficiente en aductores y cuádriceps en funcionamiento parcial sin contracturas de cadera en flexión o aducción. En este caso, el exoesqueleto brindará asistencia para completar movimiento flexo-extensor en rodilla, dará estabilidad y mantendrá la fuerza muscular existente.

Compromiso motor nivel L3, con funcionamiento de aductores y cuádriceps. Se puede usar el exoesqueleto haya o no contractura en aducción y flexión de cadera, brindando soporte en el movimiento de flexión de rodilla principalmente y el control de la extensión.

Compromiso motor nivel L4, con funcionamiento de los músculos extensores de cadera parcialmente, abductores parciales, isquio-tibiales parciales y dorsiflexores

parciales. Es posible que existan deformidades como recurvatum de rodilla, pie calcáneo y valgo. Si la deformidad funcional restringe la mecánica del miembro inferior, no se aconseja el uso del exoesqueleto.

2 SELECCIÓN DE LOS ACTUADORES PARA ARTICULACIÓN DE RODILLA Y CADERA

2.1 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO

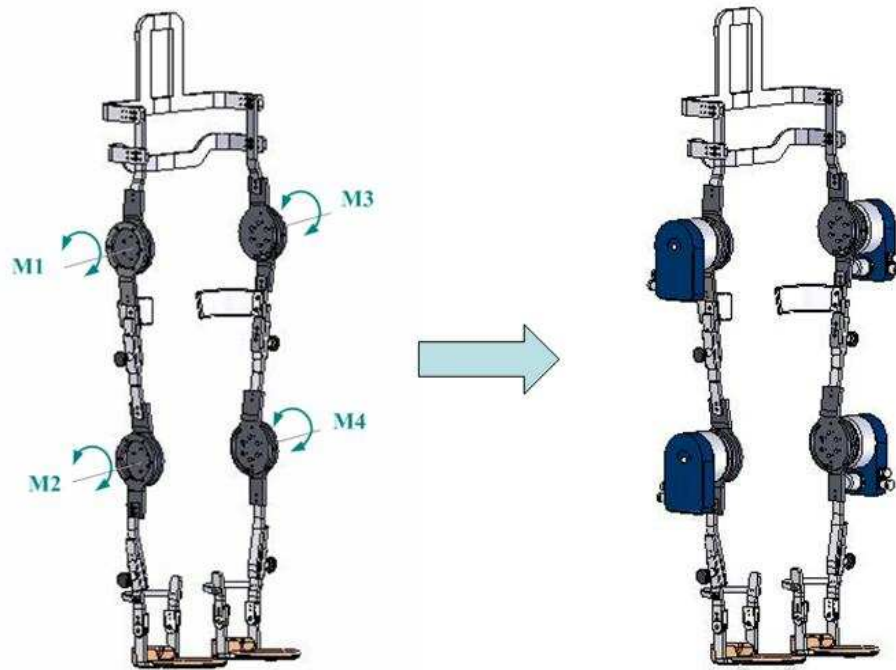
En el proceso de selección de los actuadores lo primero que se hizo fue definir los requerimientos del sistema, esto se puede hacer de varias formas, dentro de las cuales se encuentran; plantear un modelo matemático para construir las curvas y definir los requerimientos ó analizar diferentes estudios de investigación donde se hayan determinado estos parámetros.

En este trabajo los requerimientos del sistema se definieron a partir del artículo “Stair ascent and decent at diffrent inclinations” [13], el cual presenta las curvas de potencia, torque y ángulo para la marcha ascenso y descenso de escaleras en condiciones máximas, normales y mínimas. Para la investigación se tuvieron en cuenta 10 hombres sanos con una estatura similar de 1.79 ± 0.05 m y un peso de 82.2 ± 8.5 kg, el rango de edad entre los participantes era de 24 a 33 años.

Para definir los requerimientos al levantarse de una silla, lo que se hizo fue plantear un modelo a partir de la cinética inversa, en el cual se obtuvo una curva de torque vs tiempo la cual nos permitió tener los valores máximos de torque necesarios en la articulación para realizar esta actividad.

La estructura del exoesqueleto estará formada por 5 segmentos, que consisten en un torso y dos piernas idénticas, cada una con dos segmentos articulados. Esta estructura será actuada por 4 moto-reductores rotatorios ubicados en las articulaciones de cadera y rodilla, los cuales aportarán los momentos necesarios para realizar el movimiento (ver figura 7).

Figura 7. Torques generados en las articulaciones de rodilla y cadera en el plano sagital durante la marcha.



M1, M2, M3, M4: Torque aportado por los actuadores

Para determinar las articulaciones y el número de grados de libertad de los que va a disponer este exoesqueleto, se tuvieron en cuenta los torques presentes en cada una de las articulaciones en los movimientos más comunes de la vida cotidiana: caminar, levantarse de una silla, subir y bajar escaleras [13]. También se debe saber que hay tres planos diferentes en los que un robot bípedo ó un sujeto humano puede ser observado, por efectos de simplificación el movimiento bípedo es normalmente estudiado en el plano sagital, la razón es anular los grados de libertad extra en las articulaciones para minimizar el número de actuadores necesarios durante la rehabilitación.

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LA CARGA

Como lo explica la literatura [3] los pares más exigentes durante movimientos de la vida cotidiana están en el plano sagital. Por ello, los grados de libertad que se van a actuar son dos: extensión-flexión de la cadera, extensión-flexión de la rodilla, es decir, rotación en el plano sagital a nivel de rodilla y cadera.

Las figuras 8 y 9 muestran los diferentes patrones de carga (condiciones normales, máximas y mínimas) en cadera y rodilla en el plano sagital durante las actividades de marcha, subir y bajar escaleras. Estos datos han sido obtenidos de experimentos normalizados [13]. Aunque los diferentes patrones de carga muestren resultados de pacientes concretos y los datos antropométricos difieran entre diferentes países, nos puede dar una aproximación bastante buena para obtener una estimación biomecánica de los pares que van a ser soportados por el exoesqueleto en las tres actividades.

Figura 8. Torques desarrollados en rodilla en el plano sagital durante un ciclo de marcha en las diferentes actividades.

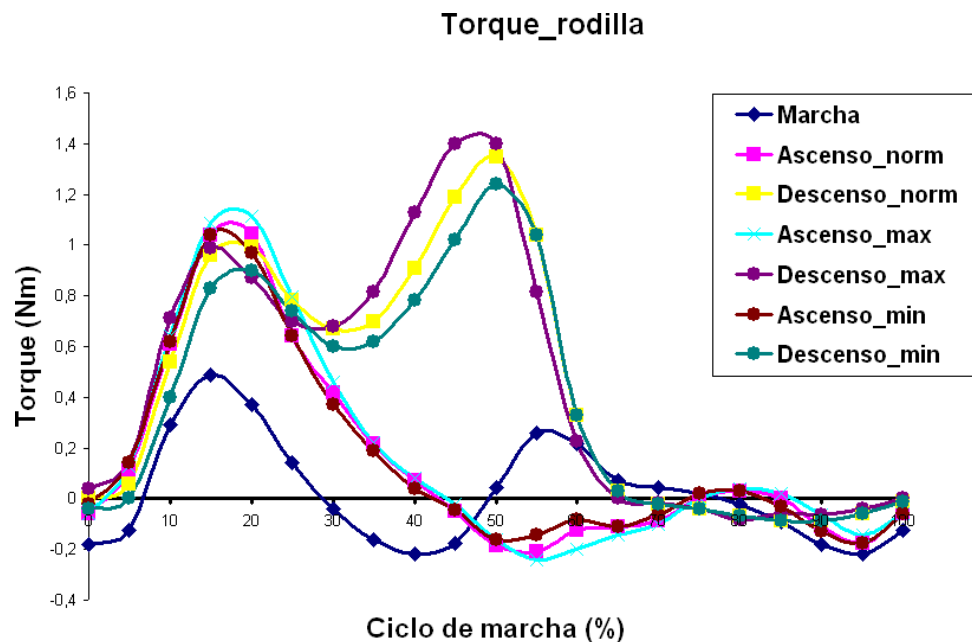
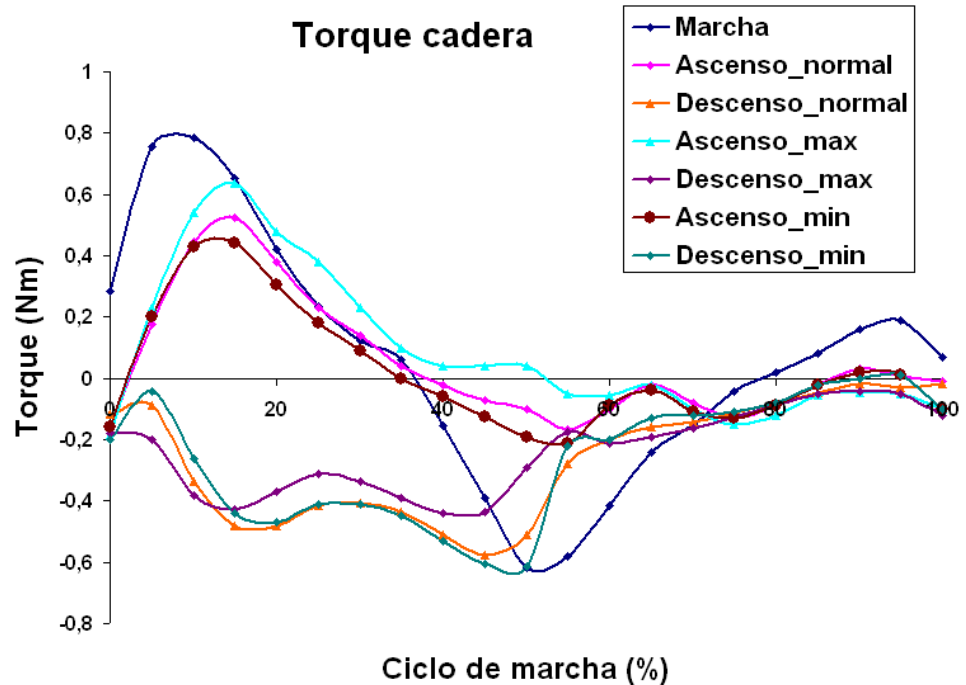


Figura 9. Torques desarrollados cadera en el plano sagital durante un ciclo de marcha en las diferentes actividades.

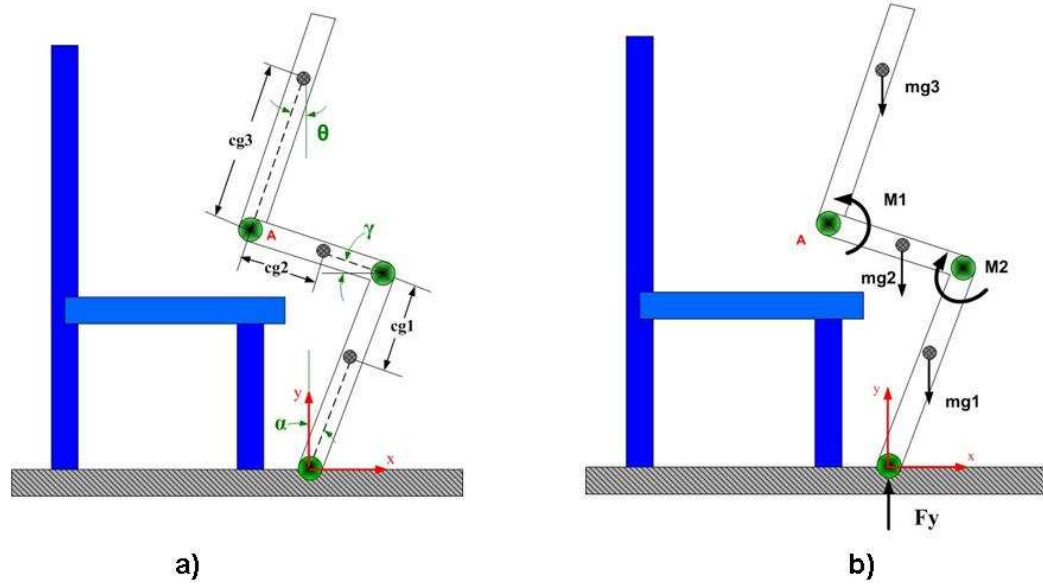


Análisis al levantarse de una silla Para determinar el torque para levantarse de una silla, se va a realizar un análisis cinético, en el cual se van a tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Una persona con 1.8 m de estatura y 981 N de peso (100 Kg.)
- Las medidas serán tomadas del diagrama antropométrico del cuerpo humano [4]
- El modelo no tiene en cuenta el torque aportado por el tobillo para realizar esta actividad.
- El momento de inercia generado por los segmentos superiores será concentrado en el centro de gravedad del torso.
- La aceleración angular para esta actividad se encuentra, según la literatura, normalizada entre 0.2 - 0.8 rad/seg² [18].
- La máxima velocidad angular al levantarse de una silla se encuentra entre 60 - 70 rad/seg, y se da en la etapa final de la actividad, es decir, cuando se tiene un ángulo δ entre 40 y 70 ° con la horizontal.

La figura 10 nos muestra el diagrama de cuerpo libre, el cual se tiene un ángulo inicial entre el pie y la vertical de 30°.

Figura 10. a) Coordenadas y constantes de bípedo al levantarse de una silla **b)** y fuerzas externas.



De acuerdo con los diagramas de la figura 10 se plantea la sumatoria de momentos respecto al punto A, con lo cual se van a obtener las siguientes ecuaciones:

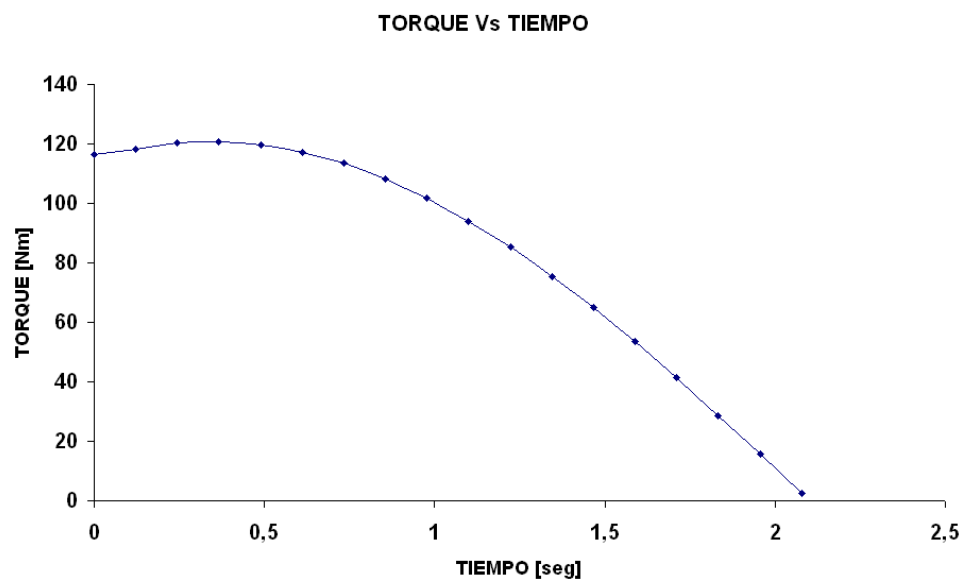
$$M_1 = I_1 \alpha_1 + mg_3 cg_3 \sin \theta$$

$$M_2 = M_1 - (l_2 \cos(\gamma) - l_3 \sin(\delta)) F_y + I_2 \alpha_2 + mg_2 cg_2 \cos(\gamma) + (l_2 - cg_1 \sin(\delta)) mg_1$$

Donde M_1 y M_2 son los momentos en las articulaciones de cadera y rodilla, I_1 , I_2 e I_3 son las inercias para cada uno de los segmentos, mg_1 , mg_2 y mg_3 es el peso ejercido por la masa de cada uno de los segmentos y α_1 y α_2 son las aceleraciones angulares de la tibia y el fémur.

Si se reemplaza sobre estas ecuaciones cada uno de los valores, teniendo en cuenta las consideraciones hechas en un comienzo, se podrá estimar el valor del torque M_2 en la rodilla, el cual varia en el tiempo empezando desde la postura en reposo (sentado) hasta llegar a la postura de erguido, como se muestra en la figura 11.

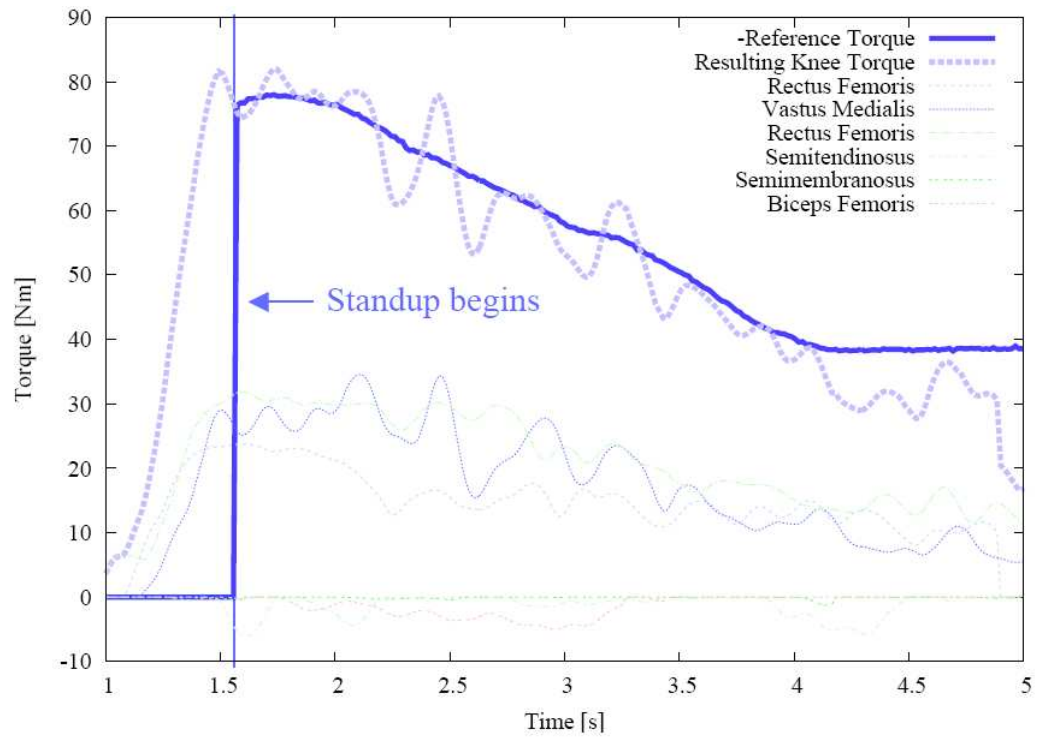
Figura 11. Torque generado en la articulación de rodilla al levantarse de una silla.



En la figura 11 se puede ver que el torque máximo se presenta al inicio de la actividad y tiene un valor de 120 Nm aproximadamente. Con este valor y teniendo en cuenta que la velocidad en esta fase de la postura esta entre 40 y 50 °/seg podemos estimar que la potencia de la rodilla es de 105 W aproximadamente [18].

Si comparamos estos resultados con los obtenidos en la tesis doctoral de Christian Fleischer [19], figura 44, para el cual se tuvo en cuenta una persona de 1.7 m de estatura con 83 kg de masa que se levanta de una silla con velocidad y aceleración normalizada, podemos afirmar que el comportamiento de la curva es similar.

Figura 12. Torque generado en la articulación de rodilla al levantarse de una silla [19].



A continuación se presenta las curvas de torque vs velocidad angular, figura 13 y 14, para las dos articulaciones. En ellas se puede observar como los actuadores requeridos deben operar de forma continua, con carga y velocidad variables y en los 4 cuadrantes. Esto último nos indica que el actuador a seleccionar deberá ser capaz de recibir y entregar energía

Figura 13. Torque-Velocidad angular desarrollado en rodilla en el plano sagital durante las diferentes actividades.

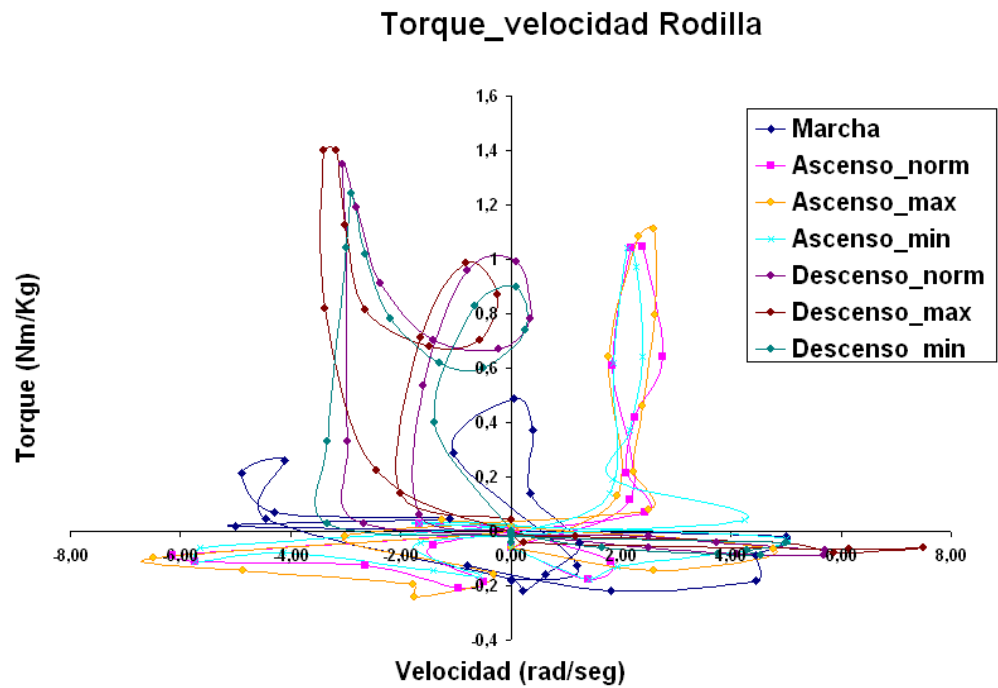
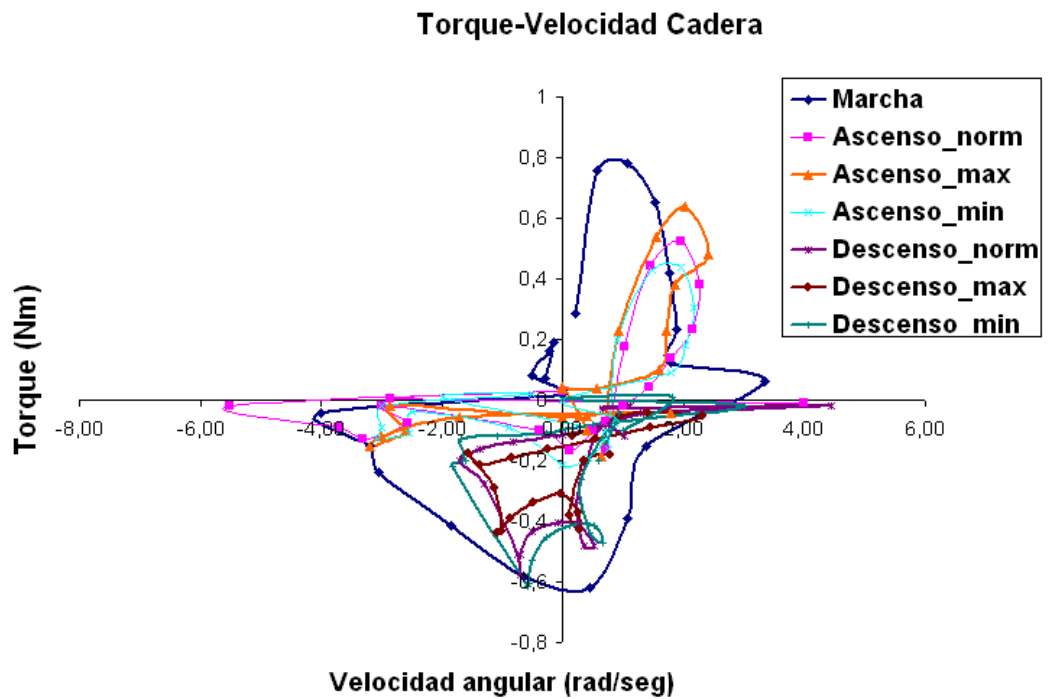


Figura 14. Torque-Velocidad angular desarrollado en cadera en el plano sagital durante las diferentes actividades.



2.3 CÁLCULO DE POTENCIA DE LOS MOTORES.

Los valores de la potencia se calcularon considerando un paciente estándar de 75 kg con un exoesqueleto de un peso estimado de 30kg, siendo el exoesqueleto capaz de aportar el 100 % del *par torsor* requerido en cada articulación.

A continuación se presentan las figuras 15 y 16 en la que se representa las curvas de potencia absoluta para las diferentes actividades del diario vivir [13]. En ellas se puede observar que la potencia máxima es diferente para cada articulación y toma un valor máximo dependiendo de la actividad. También se puede observar que esta potencia máxima se da en diferentes instantes del ciclo, dependiendo de la actividad.

Figura 15. Potencia absoluta en rodilla en las diferentes actividades del diario vivir.

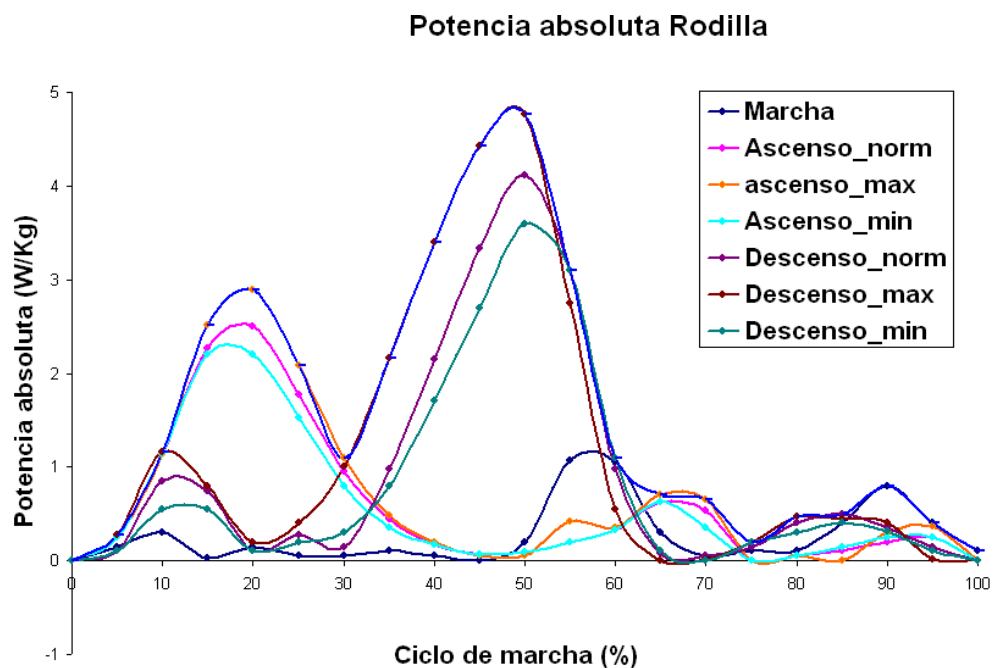
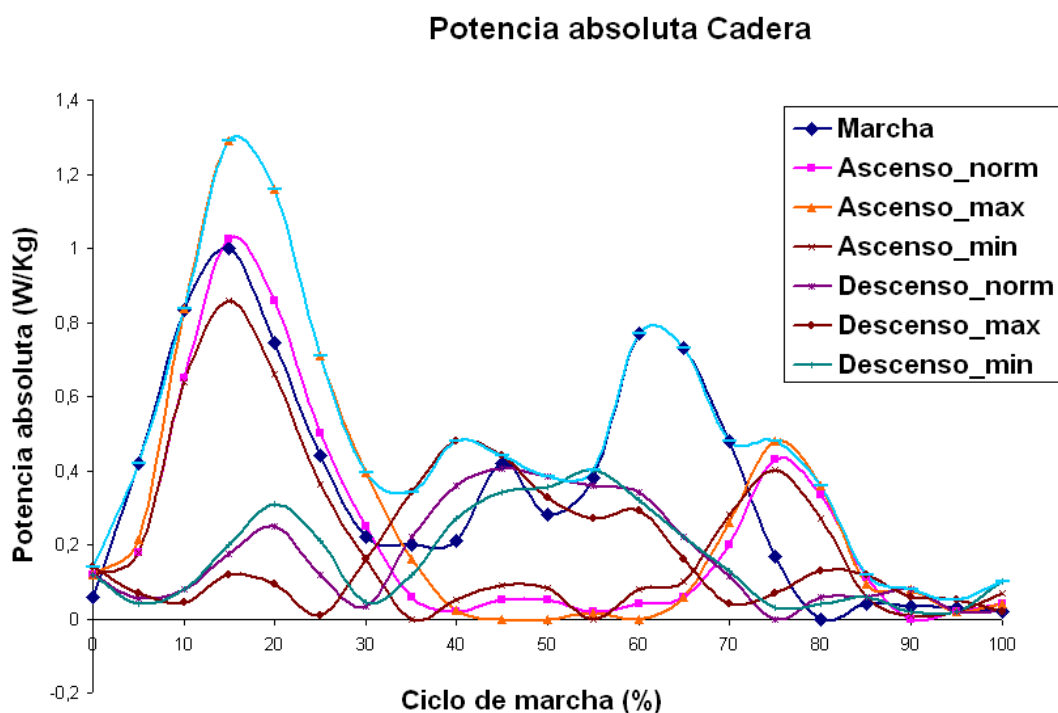


Figura 16. Potencia absoluta en cadera en las diferentes actividades del diario vivir.



En la tabla 1 se puede ver la potencia máxima de cada una de las articulaciones.

Tabla 1. Potencias máximas de cada una de las articulaciones en movimientos comunes de la vida cotidiana.

Articulación	Marcha (W)	Subir escaleras (W)	Bajar escaleras (W)	Levantarse de una silla (W)	Potencia max. (W)
Rodilla	120	300	500	105	500
Cadera	100	130	85	36	130

Para calcular la potencia de actuadores con velocidad y carga variable se requiere hallar la potencia máxima absoluta, esta potencia se define teniendo en cuenta los valores máximos que se presentan en las tres actividades del diario vivir. En otras palabras se trata de construir una curva de potencia con los valores máximos de las actividades.

A partir de la ecuación 1 se calcula la potencia equivalente. Con lo cual tendremos una potencia equivalente para la rodilla de 2.16 W/kg y para la cadera de 0.6 W/kg. Con estos datos podemos estimar que la potencia requerida en el actuador para la articulación de rodilla en una persona con 100kg de masa será de 216 W.

$$P_{eq} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n P_i^2 t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}} \quad (1)$$

Donde P_i son los valores de potencias máxima absoluta y t es el porcentaje del ciclo correspondiente a cada valor de potencia.

2.4 REQUERIMIENTOS DE LA CARGA

Los actuadores serán seleccionados para aportar la carga necesaria en la marcha, subir y bajar escaleras. En estas dos ultimas actividades los estudios se realizaron teniendo en cuenta una pendiente de inclinación mínima de 21°, normal de 35° y máxima de 42° [13].

Las especificaciones de cada una de las articulaciones motorizadas se muestran en la Tabla 2, y han sido seleccionadas para que sean las óptimas en cada caso [13].

Tabla 2. Ángulo, par, potencia y velocidad de cada una de las articulaciones motorizadas.

ARTICULACION	ANGULO	TORQUE [N:m/kg]	VELOCIDAD [rad/seg]	POTENCIA [W/kg]	POTENCIA EQUIVALENTE [W/kg]
rodilla	Flexión- extensión 0°<θ<130°	-0.3 ≤ T ≤ 1.4	-6.8 ≤ w ≤ 7.5	-5 ≤ P ≤ 3	0.6
cadera	Flexión- extensión -12°<θ<115°	-0.7 ≤ T ≤ 0.8	-5.6 ≤ w ≤ 4.5 -6 ≤ w ≤ 5	-0.5 ≤ P ≤ 1.4	2.16

Don B. Chaffin, Occupational Biomechanics, John Wiley & Sons, Inc- Tercera edicion-1999

2.5 SELECCIÓN Y EVALUACIÓN DE LOS ACTUADORES

El volumen, peso y la estética de los actuadores, además de los requerimientos son parámetros que se han tenido en cuenta en el proceso de selección. Los tres posibles tipos de actuadores que podríamos utilizar para esta aplicación son: cilindros hidráulicos, músculos neumáticos artificiales y motores eléctricos (lineales y rotatorios).

La manera más simple de utilizar cilindros hidráulicos es disponiendo dichos cilindros de manera transversal al eje del actuador. Dado que el paciente tiene que poder sentarse, los cilindros se deben poner en alguna otra disposición, con el aumento de peso y restricción que ello implica. Para la alimentación de este tipo de actuadores se necesita un tanque hidráulico (3 kg de peso), un sistema de bombeo (1 kg de peso) y una fuente de alimentación eléctrica autónoma (baterías). El sistema necesita un circuito de presión a 100-150 bares, por lo que la seguridad quedaría parcialmente mermada. Debido a las especificaciones de las articulaciones (Tabla 2), el diámetro externo de los cilindros superaría los 30 mm y como estos cilindros únicamente funcionan a compresión, serían necesarios dos cilindros para cada articulación con su propia microválvula y un sensor de posición longitudinal adicional para cada articulación. Sumando todos los elementos necesarios el peso estimado mínimo del sistema de actuación basado en cilindros hidráulicos es de 20 kg. Esta alternativa se ha descartado, principalmente por el problema de ser un sistema demasiado pesado.

La segunda opción tenida en cuenta ha sido utilizar músculos artificiales con control neumático debido a su ligereza, flexibilidad y capacidad de fuerza. El tamaño estimado del músculo para obtener las fuerzas necesarias es de unos 40mm de diámetro con un peso de 800g para cada uno, por lo que el peso asciende a 1600g por cada articulación actuada. A diferencia de los cilindros, son actuadores de un funcionamiento más simple, la desventaja principal de utilizar este tipo de actuador radica en los elementos adicionales que se necesitan para hacerlos actuar

correctamente, entre estos se encuadra el compresor que aporta aire a presión al sistema y pesa entre 3 y 4 kilogramos, con lo que el sistema ya no cumpliría las exigencias de ligereza y estética.

La tercera opción es utilizar motores eléctricos, dentro de los cuales están los rotatorios y los lineales. Estos últimos son descartados debido a las limitaciones que se tienen en cuanto a velocidad. Por lo tanto la mejor opción es la de motores rotatorios, opción que simplifica el diseño y mejora el aspecto estético de la solución final y que tiene como ventaja adicional el volumen y peso del sistema, obviando el peso de las baterías. Además esta solución no limita de ningún modo los recorridos de las articulaciones.

Luego de realizar una revisión de los actuadores eléctricos rotatorios ofrecidos en el mercado, se encontró solo con una gama de servo-reductores que cumplieran con los parámetros establecidos, con la particularidad de que utilizaban reductores planetarios tipo *harmonic drive*.

Para la selección y evaluación de los actuadores en la articulación de rodilla y cadera se tuvieron en cuenta los parámetros obtenidos en la tabla 3. Estos fueron los datos de entrada para la preselección. Posterior a esto, se construyeron las curvas de desempeño y se ubicaron los valores continuos y máximos de torque y velocidad en las diferentes actividades. Estos valores fueron calculados a partir de las siguientes ecuaciones:

$$T_{cont} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n T_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}} \quad V_{cont} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n V_i t_i}{\sum_{i=1}^n t_i}} \quad (2,3)$$

Donde V y T son los valores de torque y velocidad que se tienen en cada una de las fases del ciclo para las 3 actividades y t es el tiempo correspondiente a cada una de estas fases.

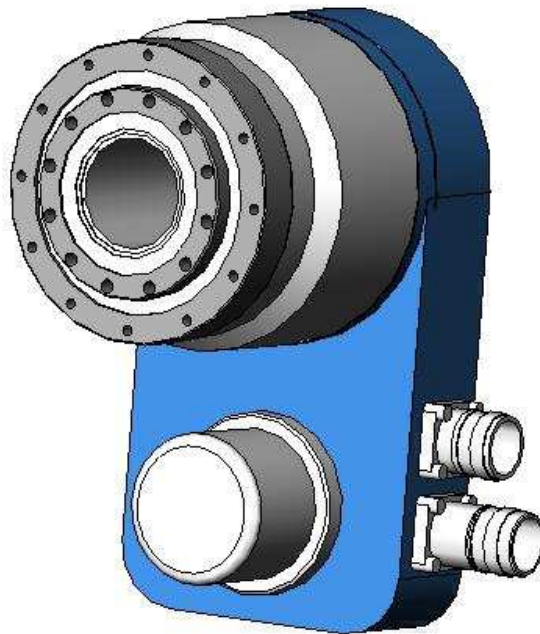
A continuación se presenta la evaluación de los actuadores en cada una de las articulaciones, en el anexo B esta la evaluación en detalle.

REFERENCIA DEL MOTOR			Rodilla				Cadera				Peso del actuador	
			Subir escaleras	Bajar escaleras	Marcha	Levantarse de una silla	Subir escaleras	Bajar escaleras	Marcha	Levantarse de una silla	Con freno [kg]	Sin freno [kg]
FHA-17C-100	Condiciones máximas	Torque	x	x	√	x	√	x	x	√	3.4	2.9
		Vel. angular	x	x	√	√	√	√	√	√		
	Condiciones continuas	Torque	√	x	√	x	√	√	√	√		
		Vel. angular	√	x	√	√	√	√	√	√		
FHA-17C-160	Condiciones máximas	Torque	x	x	√	x	√	√	x	√	3.4	2.9
		Vel. angular	x	x	x	√	√	x	x	√		
	Condiciones continuas	Torque	√	√	√	x	√	√	√	√		
		Vel. angular	√	x	√	√	√	√	√	√		
FHA-25C-50	Condiciones máximas	Torque	√	√	√	√	√	√	√	√	5	4.5
		Vel. angular	√	√	√	√	√	√	√	√		
	Condiciones continuas	Torque	√	√	√	√	√	√	√	√		
		Vel. angular	√	√	√	√	√	√	√	√		
CHA-20C-100	Condiciones máximas	Torque	√	√	√	√	√	√	√	√	3.9	3.2
		Vel. angular	x	x	√	√	√	√	√	√		
	Condiciones continuas	Torque	√	√	√	√	√	√	√	√		
		Vel. angular	√	x	√	√	√	√	√	√		

Tabla 3. Resumen sobre la selección de los actuadores.

Finalmente se llega a que el actuador seleccionado para rodilla y cadera es el CHA-20A-100-H-M512P-B-S, el cual se muestra en la figura 25. Como se puede ver en las tablas 9 y 10, tiene limitantes de velocidad para varias actividades pero cumple con los requerimientos de torque.

Figura 17. Motor Harmonic Drive CHA-20A-100-H-M512P-B-S.



2.6 CARACTERÍSTICAS DEL ACTUADOR SELECCIONADO

La ficha técnica que presenta el fabricante de este motor se presenta en la tabla 3.

Tabla 4. Ficha técnica del motor Harmonic Drive CHA-20A-100-H-M512P-B-S [21].

Motor CHA-20A-100	
Reducción	100
Máximo torque de salida	82 Nm
Máxima velocidad de salida	60 rpm
Torque constante a la salida	33.4

Voltaje constante	23 Vrms
Voltaje de freno	24 VDC
Dimensiones	300x300x150 mm
Peso con freno	3.2 Kg
Peso sin freno	3.9 Kg

El actuador seleccionado tiene el eje hueco y trae un freno que solo puede ser accionado sobre el eje cuando el motor esta libre, es decir, cuando no esta consumiendo potencia. Los conectores están ubicados radialmente, de tal forma que no haya interferencia entre los cables de alimentación y la estructura.

Para este actuador se seleccionó un encoder absoluto de múltiples giros usado para posicionar el motor. Este sistema de medida esta basado en un encoder incremental óptico con una rueda adicional para la detección de la posición absoluta. Este sistema esta ubicado en paralelo al actuador y es conectado al eje del motor por medio de una correa dentada.

3 DISEÑO Y VALIDACIÓN DE LA ÓRTESIS PARA LA ARTICULACIÓN DE RODILLA

El desarrollo de la órtesis se basa en un análisis biomecánico de la antropometría humana y de la marcha. Dado que necesariamente el exoesqueleto tiene que ajustarse al cuerpo humano, éste debe tener las medidas antropométricas muy concretas y además ajustarse al mayor número de personas posible durante las actividades de rehabilitación a las que vaya a ser sometido. Dependiendo del sexo, peso y edad del paciente la antropometría puede cambiar considerablemente, por consiguiente el diseño del exoesqueleto se ha pensado para abarcar personas con una estatura que va desde 1.60 hasta 1.80 m.

Estudios recientes de la antropometría humana presentan datos con los cuales podemos determinar los parámetros de cada segmento del cuerpo a partir de las medidas generales de cada persona [3]. En la tabla 12 se presentan estos parámetros en función de la estatura y el peso.

Tabla 5. Datos antropométricos de los segmentos a partir de la altura y la masa total del paciente.

Segmento	Masa _{seg} [% peso del cuerpo]	Long _{seg} [% estatura del paciente]	Long _{seg} en pacientes de 1.6-1.8 m [m]	Ubicación del centro de masa.
Cabeza y cuello	8.4	6.4	0.115-0.102	40% desde la cadera al vértice de la cabeza
Torso	50	28.8	0.518-0.461	
Brazo	5.1	44	0.792-0.704	
Muslo	10	24.5	0.441-0.392	41 % desde la rodilla a la cadera
Pierna	4.3	24.6	0.443-0.394	43 % desde la rodilla al tobillo
Pie	1.4	3.9	0.07-0.062	42.9 % desde el tobillo a la planta del pie

Don B. Chaffin, Occupational Biomechanics, John Wiley & Sons, Inc- Tercera edicion-1999.

De los datos de la tabla 12 se establece el rango en el cual se tendrá que ajustar el exoesqueleto para el segmento de fémur (0.392-0.441 m) y tibia (0.394-0.443 m).

El exoesqueleto debe ser capaz de moverse libremente en los rangos de todas las articulaciones durante la marcha, los movimientos de sentarse y levantarse, subir y bajar escaleras, pero siempre sin alcanzar las zonas prohibidas, es decir, los ángulos que están por fuera del intervalo que podrían causar graves daños al paciente. El recorrido que deben hacer las articulaciones de rodilla y cadera en las diferentes actividades del diario vivir según estudios [3] se presenta en la tabla 13.

Tabla 6. Rangos de movilidad de la articulación de rodilla y de cadera

Rango de movilidad de las articulaciones de miembros inferiores	
Cadera	-12/115 °
Rodilla	0/130 °

La convención de la medida de los ángulos se ha hecho definiendo como cero la posición de erguido, siendo valores positivos los de la dorsiflexión, la flexión de la rodilla y la flexión de la cadera, mientras que los valores negativos son la extensión de la rodilla y la extensión de la cadera.

Es importante asegurar que la rodilla no exceda el ángulo cero donde la articulación puede luxar. Es por esto que se ha pensado en el diseño de un tope mecánico que restrinja el recorrido en el rango de movilidad permitido para cada articulación. El tope consistirá en una ranura que va a servir de guía y un seguidor que se moverá dentro de la guía.

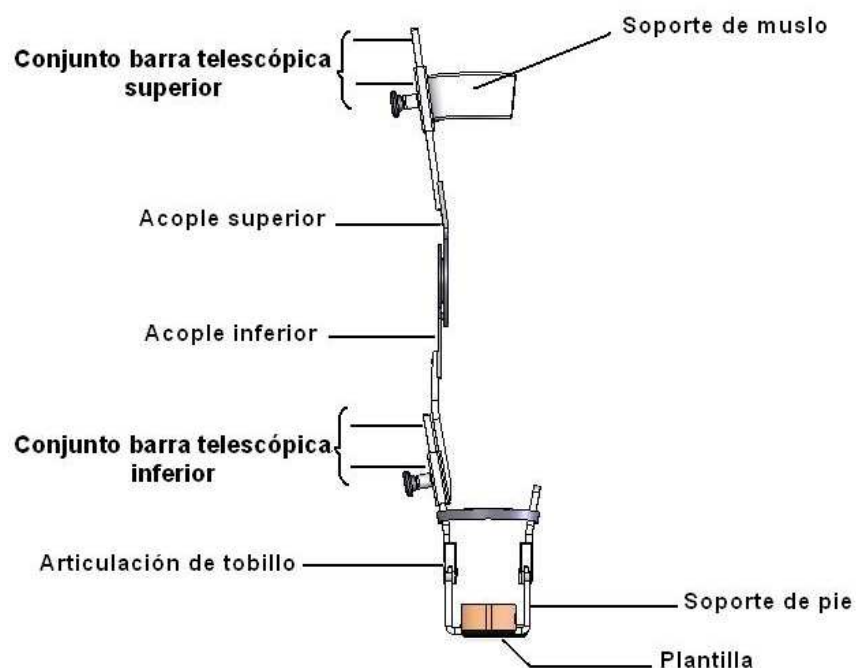
3.1 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE LA ESTRUCTURA

Inicialmente se pensó en una estructura doble con el motor acoplado a uno de sus lados, pero por simplicidad y buscando que el dispositivo fuese lo menos aparatoso posible se escogió una estructura simple, es decir, una estructura externa a la pierna en donde va a ser acoplada el motor y por medio de la cual se van a transferir las cargas. Esta estructura va a estar formada por dos segmentos, uno irá paralelo a la tibia y el otro paralelo al fémur. Cada uno de estos segmentos lleva ensamblado soportes sobre los cuales descansan las extremidades del paciente y ayudan a distribuir la carga sobre una buena superficie para dar comodidad y confort.

3.2 DESCRIPCIÓN DE CADA UNO DE LOS COMPONENTES DE LA ESTRUCTURA

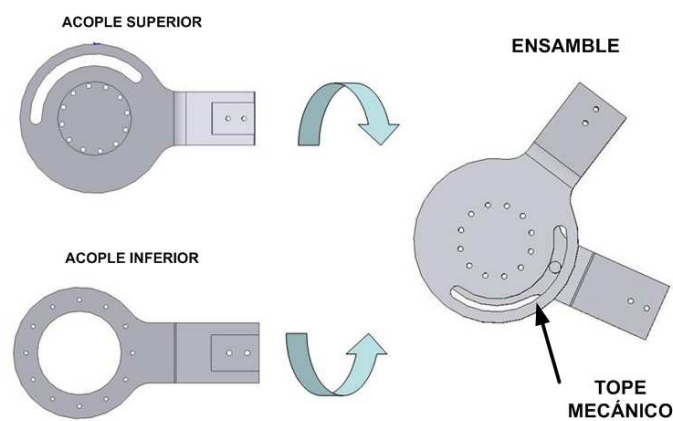
La estructura estará compuesta por dos acoples, dos barras con mecanismos telescópicos que las harán ajustables al fémur y a la tibia, dos articulaciones de tobillo, un soportes de pie, una plantilla y un soportes de muslo (ver figura 26).

Figura 18. Elementos que componen el exoesqueleto.



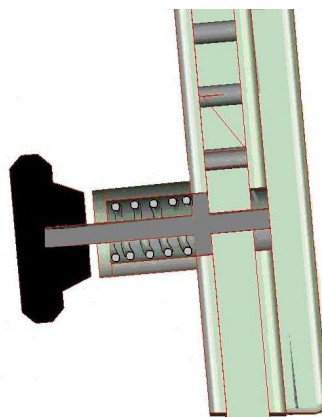
3.2.1 Acoples. Son los elementos que me permitirán transmitir la carga desde el motor hacia las otras piezas de la estructura. En el diseño de estos elementos se consideró un tope mecánico que me garantizará que el dispositivo no exceda los rangos permitidos por la articulación. En la figura 27 se muestran cada uno de estos elementos y el ensamble.

Figura 19. Acople superior e inferior con el mecanismo de tope.



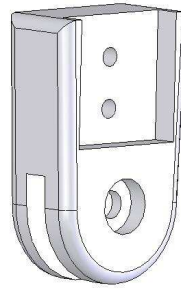
3.2.2 Barra telescópica. Son las que van a permitir que el dispositivo se ajuste de acuerdo con la antropometría de cada paciente. Esta compuesta por una barra con agujeros que permanece fija y un tubo cuadrado que se moverá de manera relativa con un mecanismo de mariposa de ajuste que permitirá posicionar las medidas muy fácilmente (ver figura 28).

Figura 20. Conjunto de barra telescópica.



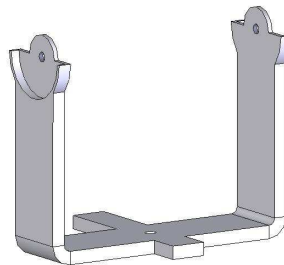
3.2.3 Articulaciones de tobillo. Son las encargadas de permitir y controlar la rotación natural del tobillo en el plano sagital, están provistas de un mecanismo que permite ajustar el rango y la rigidez con la que se desea la flexión del tobillo.

Figura 21. Articulación de tobillo.



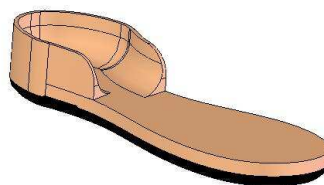
3.2.4 Soporte de pie. Es el encargado del movimiento del pie. Será de gran importancia en los pacientes con pie caído debido a que evitará que se arrastre el pie.

Figura 22. Soporte de pie.



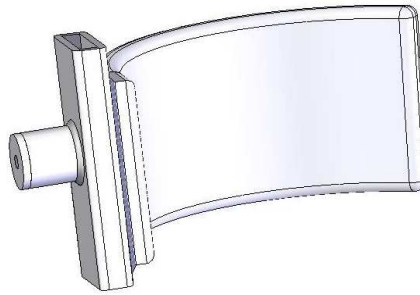
3.2.5 Plantilla. Será la interfaz entre el pie y el suelo. Estará provista de una suela antideslizante.

Figura 23. Plantilla.



3.2.6 Soporte de muslo. Es el encargado de recibir y transmitir la carga desde el fémur a la tibia por medio de la estructura.

Figura 24. Soporte de muslo.



3.3 SELECCIÓN DEL MATERIAL

Dentro de los materiales más usados para la construcción de órtesis se encuentran: el duraluminio, la fibra de carbono y el acero. Estos materiales poseen propiedades que los hacen ideales para este tipo de aplicaciones, en especial los dos primeros.

La fibra de carbono es descartada debido al elevado costo y a que en nuestro país no esta muy desarrollada la técnica para construir piezas con geometrías difíciles.

Por otro lado el duraluminio 2024 a pesar de ser un metal de baja densidad y con muy buenas resistencia, presenta varios inconvenientes a la hora de definir los elementos de unión. Por un lado no es viable escoger pernos en acero debido a que estos terminarían desgastando las roscas. Por otro lado no es fácil de soldar debido a que las propiedades del material varían en la zona termicamente afectada incluso después de realizado un tratamiento térmico.

Entonces la mejor opción para la construcción de la órtesis por ser comercial, de bajo costo respecto a los anteriores y por sus características es el acero 1045 estriado en frío, el cual tiene las siguientes propiedades:

Tabla 7. Propiedades del acero seleccionado para el diseño

Propiedades del acero AISI 1045 estriado en frío	
Modulo de elasticidad ©	207 Gpa
Modulo de elasticidad en cortante (G)	79.3 Gpa
Relación de poisson (γ)	0.292
Densidad (ρ)	7850 kg/m ³
Esfuerzo de fluencia (S_y)	530 Mpa
Esfuerzo ultimo (S_{ut})	630 Mpa

3.4 CÁLCULO Y EVALUACIÓN ANALÍTICA DE LA ÓRTESIS

A continuación se presenta el diseño y la evaluación analítica de la estructura. Debido a que este dispositivo estará sometido a cargas dinámicas, se va a definir la posición de la estructura en la cual se presentan las mayores cargas. Luego, teniendo en cuenta las consideraciones propias de cada pieza, se va definir el estado de carga para cada elemento.

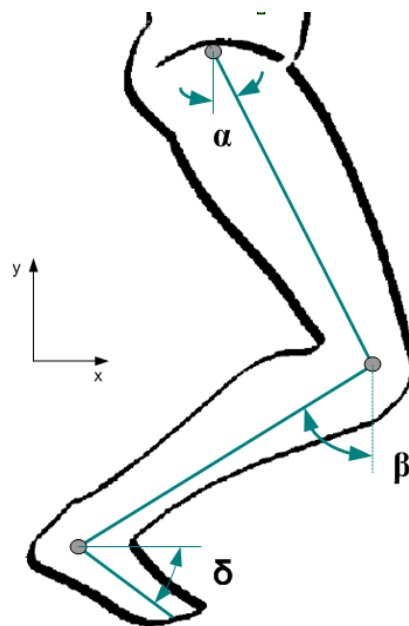
De acuerdo con el análisis hecho en el capítulo anterior para la selección de actuadores, los torques máximos (tabla 2) se presentan en el descenso de escaleras en la fase del 48 % del ciclo. Por lo tanto, si suponemos una persona con un peso de 100 kg, los torques que deberán ser aportados por el motor serán de 140 N.m, estos torques van a ser transmitidos al cuerpo del paciente por medio de la estructura mecánica. Los ángulos en los que se encontrarían cada uno de los segmentos de la pierna en la fase del 48% del ciclo de descenso de escaleras se muestra en la tabla 15.

Tabla 8. Ángulos en los que se encuentran los segmentos de la pierna en el 48% del ciclo de descenso.

Ángulos de cada uno de los segmentos de la pierna	
Angulo de la cadera respecto a la vertical (α)	33°
Angulo de la rodilla respecto a la vertical (β)	70°
Angulo del tobillo respecto a la horizontal (δ)	17°

En la figura 32 se presenta la pierna con la posición correspondiente al 48 % del ciclo de descenso de escaleras.

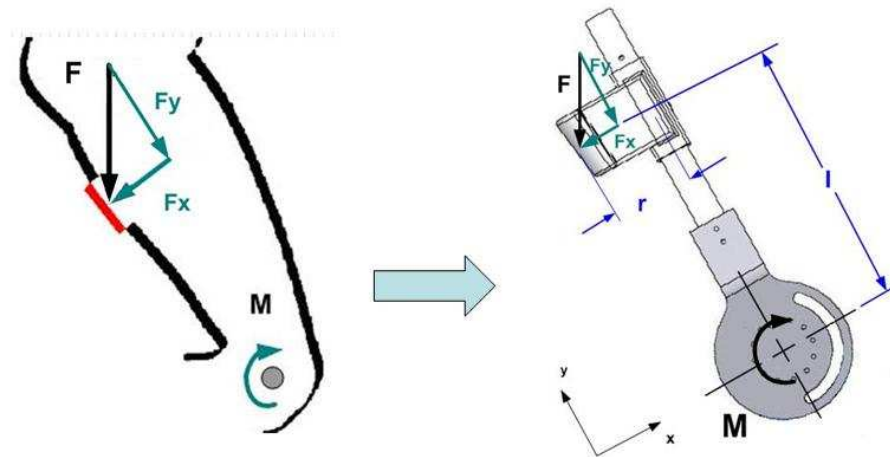
Figura 25. Ubicación de los segmentos de la pierna en el 48 % del ciclo de descenso de escaleras



3.4.1 Cálculo del estado de carga del segmento superior. Partiendo de los torques aportados por el actuador podemos determinar las cargas que van ser transferidas a la estructura y por tanto determinar el estado de carga al que va a estar sometido cada uno de los componentes de ésta. Para el análisis de la estructura, vamos a considerar las cargas como repetidas y en fase.

En la figura 33 se muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento superior de la estructura.

Figura 26. Diagrama de cuerpo libre del segmento superior de la estructura.



La magnitud de cada una de las variables se presenta a continuación (ver tabla 16).

Tabla 9. Fuerzas que actúan sobre el segmento superior.

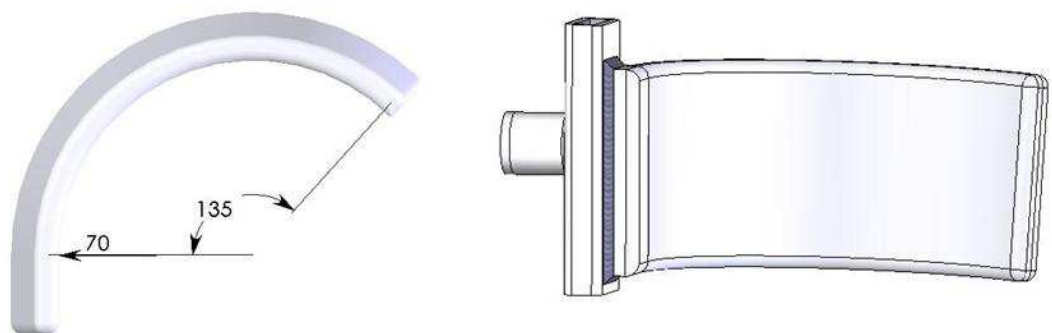
Fuerzas que actúan sobre el segmento superior	
Distancia en el eje y entre el centro de rotación y el punto de aplicación de la carga (l)	0.34 m
Distancia en el eje x entre el centro de rotación y el punto de aplicación de la carga (r)	0.08m
Fuerza resultante (F)	761.7 N
Componente de la fuerza en x (F_x)	414.8 N
Componente de la fuerza en y (F_y)	638.8 N

3.4.2 Cálculo del Soporte del muslo. Para que los elementos ortopédicos del exoesqueleto que ajusta sobre el muslo pueda abarcar el máximo número de personas, la parte rígida del soporte debe abarcar solo 135 grados del muslo y debe tener la forma de una sección de un cono hueco como se muestra en la figura 34.

Las consideraciones que se van a tener en cuenta para definir la carga que actúa sobre el soporte son las siguientes:

- La carga estará uniformemente distribuida sobre la superficie que esta en contacto con la parte posterior del muslo.
- Se van a tener en cuenta las cargas que se muestran en la figura 33.
- Las fuerzas que actúan sobre el soporte se van a calcular a partir del torque máximo aportado por el actuador.
- En los cálculos se va a suponer que las cargas actúan sobre el punto medio del soporte del muslo.
- El soporte tendrá un espesor de 10 mm .

Figura 27. Geometría y dimensiones del soporte del muslo.

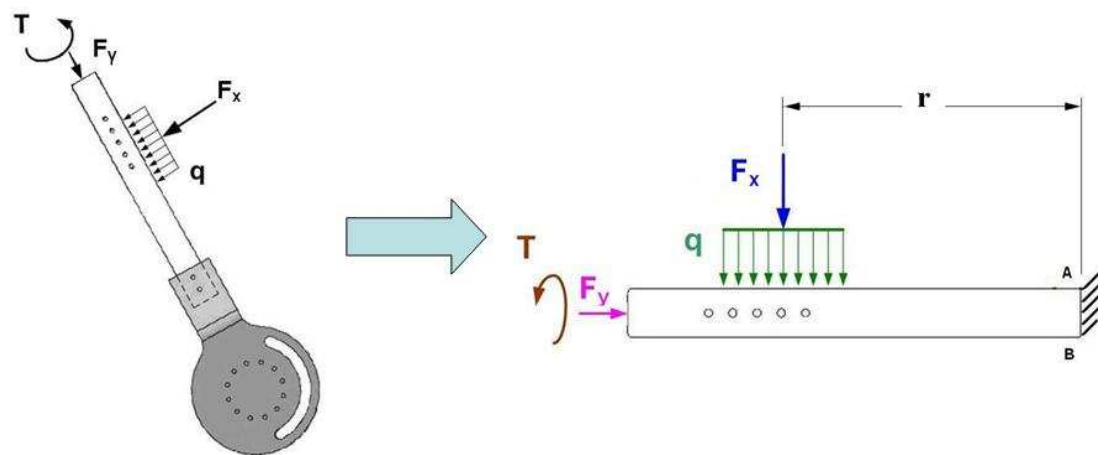


3.4.3 Cálculo de barras superior ajustable. Este elemento es el que permite mover el soporte del muslo a lo largo del fémur para poder ajustar la parte superior de la estructura de acuerdo con la antropometría del paciente. Por lo tanto tiene 3 agujeros espaciados cada 15 mm que harán posible el ajuste del soporte del muslo en 3 posiciones.

La evaluación de este elemento se va a realizar teniendo en cuenta la posición crítica de ajuste, es decir, la máxima longitud a la que puede ser ajustado el segmento superior de la estructura. El máximo ajuste se puede realizar cuando se ha recorrido 0.19 m de la barra superior ajustable.

Para definir las medidas de la sección transversal de este elemento, se empotró la parte que esta unida con el acople superior, como se muestra en la figura 34. El estado de carga es definido al transferir las fuerzas del soporte del muslo a la barra superior ajustable.

Figura 28. Estado de carga que actúa sobre la barra superior ajustable.



Donde T es el torque, F_y es la carga de compresión y q es la carga distribuida a flexión ejercida por la barra telescópica (también se puede tomar como una carga puntual F_x , la cual actúa a una distancia de 0.23 m. de la sección empotrada).

La magnitud de las fuerzas y momentos que actúan sobre esta barra se consideran en fase y se muestran en la tabla 17.

Tabla 10. Fuerzas y momentos que actúan sobre la barra superior ajustable.

Fuerzas y momentos que actúan sobre la barra superior ajustable.	
Par torsor (T)	33.2 N m
Carga a compresión (Fy)	639.7N
Momento flector debido a Carga distribuida q (M)	95.5 N m

Luego de haber definido el estado de carga se calculan los esfuerzos máximos para dimensionar la sección transversal de la pieza.

Las dimensiones de la sección transversal de esta barra van a ser de 30x6 mm. Con este parámetro definido y a partir de las ecuaciones (4)-(7) se calculan los esfuerzos de flexión, compresión y torsión en el punto B como se muestra en la tabla 12.

$$\sigma_f = \frac{M}{S} \quad (4)$$

$$con \quad S = \frac{I}{c}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3V}{2A} \quad (5)$$

$$\sigma_c = \frac{F}{A} \quad (6)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\gamma T}{\alpha ab^2} \quad (7)$$

Los coeficientes α y γ para el cálculo del esfuerzo de torsión en la sección normal de barras rectangulares se muestran en la tabla 18.

Tabla 11. Coeficientes para el cálculo de tensiones tangenciales máximas de torsión en barras rectangulares.

a/b	1	1.5	1.75	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.258	0.267	0.282	0.299	0.307	0.313	0.333
β	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263	0.281	0.299	0.307	0.313	0.333
γ	1.00	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753	0.745	0.743	0.742	0.742	0.742

Popov E., *Introducción a la Mecánica de Sólidos*, Limusa. 1973.

Luego se calculan los esfuerzos principales mediante el círculo de Mohr, y a partir de la expresión (8) se calcula el esfuerzo de Von Mises basado en hipótesis de la máxima energía de deformación [15].

$$\tau_{vm} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \quad (8)$$

Los factores teóricos de concentración de esfuerzo K_t tanto para flexión como para compresión son 2 y 2.5 respectivamente [15].

Tabla 12. Estado de esfuerzos de la barra superior ajustable en la sección de empotramiento.

Esfuerzos en la barra superior ajustable en la sección del empotramiento	
Esfuerzo normal de flexión (σ_f)	106.2 Mpa
Esfuerzo de compresión (σ_c)	3.6 Mpa
Esfuerzo torsor (τ_{xy})	86.8 Mpa
Esfuerzo de Von Mises (σ_{VM})	146.8Mpa

Con estos valores definidos y usando la ecuación (9) podemos calcular el factor de seguridad para cargas estática, con lo cual tendríamos un factor de seguridad de 1.95.

$$\eta = \frac{S_y}{\sigma_{VM}} \quad (9)$$

Ahora vamos a realizar un chequeo a fatiga por que la estructura estará sometida a fuerzas fluctuantes repetidas no senosoidales y a bajo ciclaje, donde los esfuerzos máximos se presentan en la tabla 12 y los esfuerzos mínimos se tomaran como 0 por tener cargas repetidas en fase, es decir, el esfuerzo medio será igual al alterno.

Por lo tanto se van a definir los factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga, tabla 20 [15].

Tabla 13. Factores de corrección del límite de resistencia a la fatiga

Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga	
Límite de resistencia a la fatiga	318.78 Mpa
Factor de superficie (maquinado o laminado en frío)	0.806
Factor de tamaño	0.935
Factor de carga	1

A partir de los factores de la tabla 20 se calcula el límite de resistencia a la fatiga modificada, el cual tiene un valor de 240.23 Mpa.

Con estos valores definidos y usando las ecuaciones 10 y 11 se calculan los esfuerzos alternantes efectivos de Von Mises para cargas multiaxiales y el factor de seguridad a partir de la teoría de falla de la energía de distorsión elíptica, como se presenta en la tabla 21.

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 - \sigma_{xa} \sigma_{ya} + 3\tau_{xya}^2} \quad (10)$$

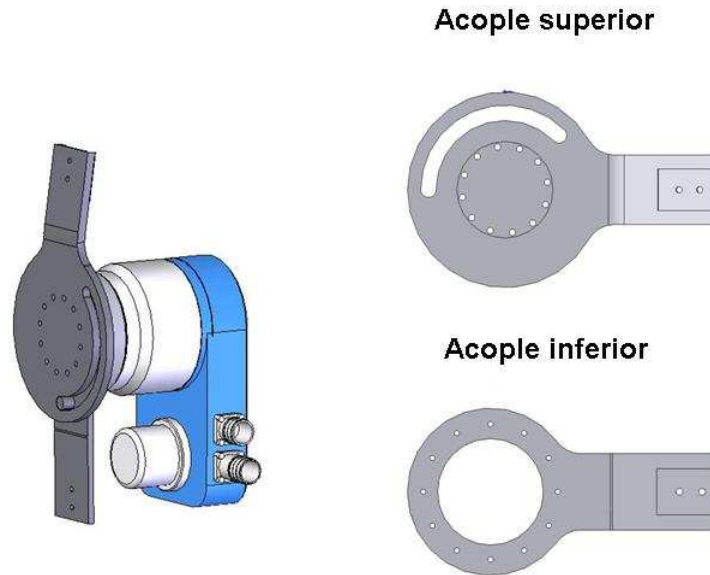
$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{S_y}\right)^2}} \quad (11)$$

Tabla 14. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.

Amplitud de Von Mises y de resistencia	
Componente de esfuerzo σ_{xa}	110.6 Mpa
Componente de esfuerzo τ_{xya}	43.39 Mpa
Componente de amplitud de Von Mises (σ_a)	133.72 Mpa
Factor de seguridad contra falla por fatiga.	1.64

3.4.4 Cálculo de esfuerzos en los acoples. La transmisión de carga del actuador a la estructura se realizara por medio de acoples, los cuales serán dimensionados de tal forma que garanticen resistencia y rigidez suficiente para transmitir la carga de forma adecuada sin que ocurra ningún tipo de deformación. La forma y dimensiones de estos acoples esta determinada por la geometría del actuador, el cual fue escogido y se comentan sus características en el capítulo anterior. En la siguiente figura se muestra una imagen del actuador, junto con la geometría de los elementos que acoplaran a este.

Figura 29. Ensamble del Motor CHA20-100 con acople superior e inferior.

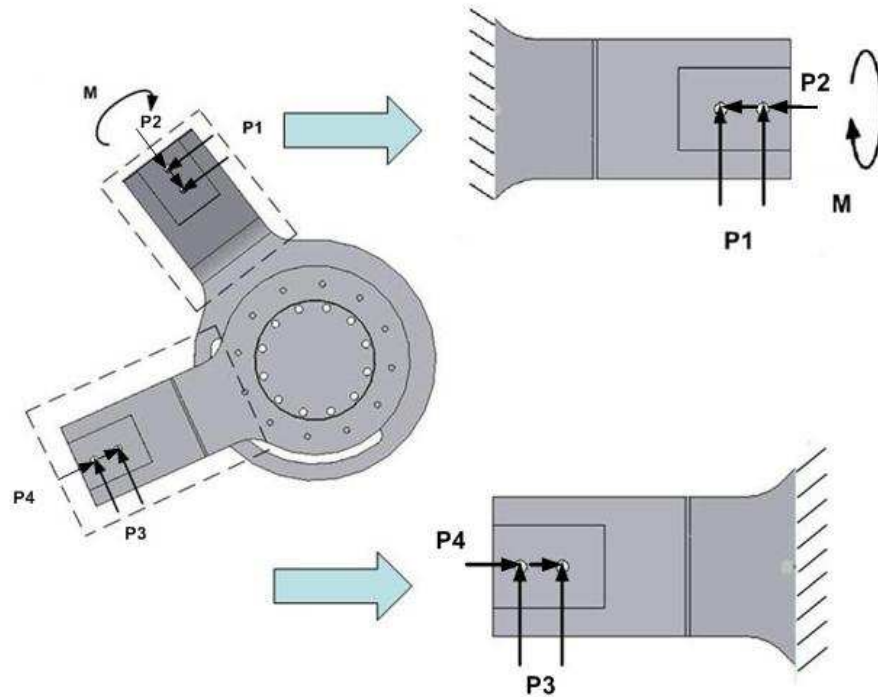


Como se puede ver la figura 35, los acoples (inferior y superior) tienen la forma apropiada para que se pueda articular sin que haya intersecciones. En el diseño de estos elementos también se pensó en un tope mecánico, para lo cual se diseñó una ranura o guía en el acople superior que servirá para limitar el rango de rotación en la articulación. También se adiciono una pequeña barra que hará las veces de seguidor, y que ira soldada al acople inferior.

Para unir cada acople al motor se usan 12 pernos, M3 y M4 para el acople superior e inferior.

La figura 36 muestra las fuerzas y el momento que son transmitidos desde el soporte del muslo hasta llegar a este elemento. Los acoples cuentan con una ranura para que encaje la barra y pueda ser atornillada, con esto se busca reducir la fuerza cortante que actúa en los pernos.

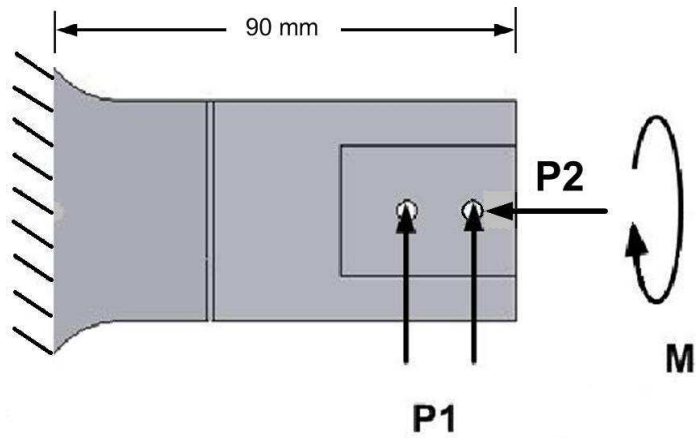
Figura 30. Diagrama de cuerpo libre para los dos acoples.



Debido a que es muy difícil realizar una evaluación analítica de esta pieza y a que una aproximación por el método de elementos finitos no es aconsejable por la cantidad de agujeros concentradores de esfuerzos, se va a tomar solo una sección como se muestra en la figura 36. Esto permitirá considerarla como una viga en voladizo sometida a esfuerzos de flexión, torsión y compresión.

Calculo del acople superior. Para definir las fuerzas y momentos que actúan en esta pieza se van a transmitir las cargas desde el soporte del muslo pasando por la barra superior ajustable hasta llegar al acople superior, por lo tanto el estado de carga estará definido como se muestra en la figura 26.

Figura 31. Estado de carga de la sección tomada del acople superior



El momento flector debido a la fuerza F_x se calcula teniendo en cuenta una distancia de 0.28m, desde el punto de aplicación de la carga hasta la sección empotrada del acople superior. La magnitud de las fuerzas y momentos se presentan en la tabla 22.

Tabla 15. Fuerzas y momentos presentes en el acople superior.

Fuerzas y momentos que actúan sobre el acople superior.	
Par torsor (M)	33.2N m
Fuerza de compresión (P2)	639.7N
Momento flector debido (P1)	95.5 N m

Las dimensiones de la sección transversal son 7x50 mm, por lo tanto el área transversal es de 350 mm².

Mediante las ecuaciones (4-7) y teniendo en cuenta los datos de la tabla 3.17, se calculan los esfuerzos de flexión, compresión y torsión en el extremo empotrado del acople debido a que en esta zona se encuentran los esfuerzos máximos. Los coeficientes α y γ para el cálculo del esfuerzo de torsiones se obtienen de la tabla 11.

De lo anterior se calculan los esfuerzos principales mediante el círculo de Mohor, y a partir de la expresión (8) se calcula el esfuerzo de Von Mises basado en la hipótesis de la máxima energía de deformación (ver tabla 23).

Tabla 14. Esfuerzos del acople superior en el extremo empotrado

Esfuerzos del acople superior en el extremo empotrado.	
Esfuerzo normal de flexión (σ_f)	32.8 Mpa
Esfuerzo de compresión (σ_c)	1.82 Mpa
Esfuerzo torsor (τ_{xy})	32.34 Mpa
Esfuerzo de Von Mises(σ_{VM})	64.1 Mpa

Con los esfuerzos de la tabla anterior podemos calcular el factor de seguridad para cargas estáticas a partir de la ecuación (8) el cual toma un valor de 8.26.

A continuación se van a determinar los factores de corrección para el cálculo del límite de resistencia a la fatiga.

Tabla 17. Factores de corrección para análisis a fatiga del acople superior.

Factores que modifican el limite de resistencia a la fatiga	
Limite de resistencia a la fatiga	318.78 Mpa
Factor de superficie (maquinado o laminado en frío)	0.806
Factor de tamaño	0.944
Factor de carga	1

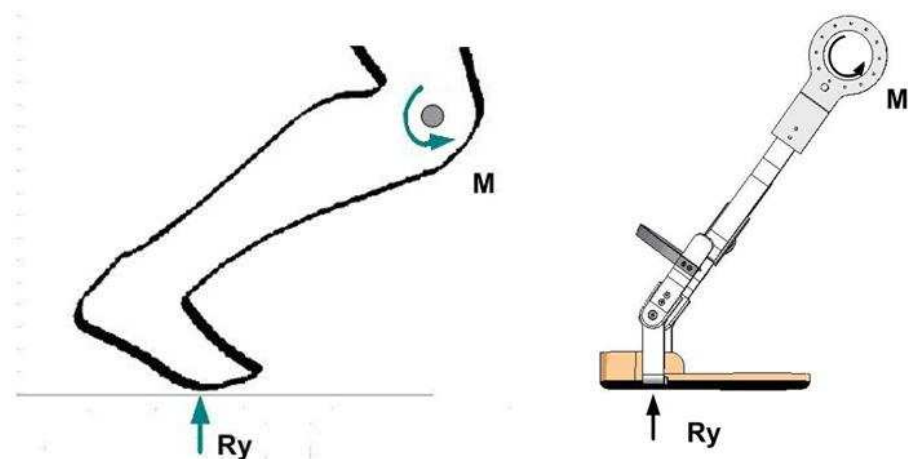
A partir de los datos mostrados en la tabla 24 se calcula el limite de resistencia a la fatiga modificada, el cual tiene un valor de 242.77 Mpa. Luego se calcula la componente de amplitud de resistencia y con ella el factor de seguridad (ver tabla 25).

Tabla 18. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.

Amplitud de Von Mises y de resistencia	
Componente de esfuerzo σ_{xa}	17.29 Mpa
Componente de esfuerzo τ_{xya}	16.39 Mpa
Componente de amplitud de Von Mises (σ_a)	33.24 Mpa
Factor de seguridad contra falla por fatiga.	6.63

Calculo del acople inferior. De forma similar se va a realizar un análisis para determinara y chequeará las dimensiones del acople inferior. Por lo tanto para definir el estado de carga al que estará sometida esta pieza se va a calcular la reacción a partir el torque aportado por el actuador, figura 38.

Figura 32. Diagrama de cuerpo libre para el segmento inferior.



Las consideraciones tenidas en cuenta para determinar el estado de carga en el segmento inferior de la estructura se presentan a continuación.

- No se tendrá en cuenta la flexión de la planta.
- Se tomara la posición de la barra telescópica en la cual se tenga la mayor distancia entre el eje de rotación del motor y el eje de rotación de la articulación de tobillo (0.443 m).
- Se mantendrá la posición del 48% en el ciclo de descenso de escaleras como se ilustra en la figura 3.4.

Con las consideraciones anteriores se obtiene el valor de la reacción R_y y con ello la componente de compresión y flexión para el segmento inferior de la estructura, tabla 22.

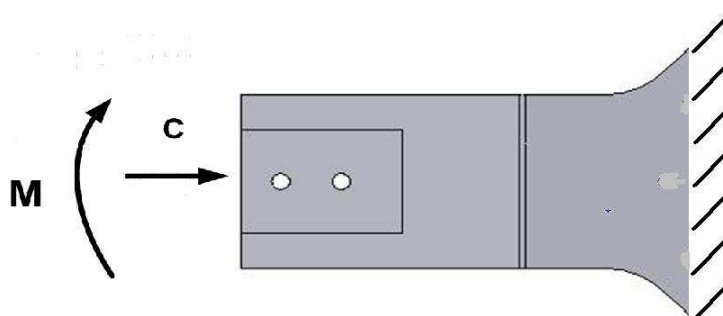
Tabla 19. Fuerzas generadas en el segmento inferior de la estructura.

Fuerzas y momentos que actúan sobre el acople inferior..	
Reacción R_y	336.31 N
Fuerza de compresión (P4)	115.02 N
Fuerza de flexión	316.02 N

A partir del diagrama de cuerpo libre (figura 28) y teniendo en cuenta el máximo ajuste que se puede obtener del segmento inferior se determina el estado de carga al que va a estar sometido el acople inferior (ver tabla 18).

El momento flector debido a la fuerza de flexión se calcula teniendo en cuenta una distancia de 0.292 m, desde el eje de rotación de la articulación de tobillo a la sección empotrada del acople inferior.

Figura 33. Estado de carga de la sección tomada del acople inferior



Las dimensiones de la sección transversal son 5x50 mm, por lo tanto el área transversal es de 250 mm².

Mediante las ecuaciones (4-7) y teniendo en cuenta los datos de la tabla 26, se van a calcular los esfuerzos de flexión y compresión en el extremo empotrado del acople debido a que en esta zona se encuentran los esfuerzos máximos, tabla 27.

Luego se calculan los esfuerzos principales mediante el círculo de Mohor, y a partir de la expresión (8) se calcula el esfuerzo de Von Mises basado en hipótesis de la máxima energía de deformación (ver tabla 27).

Tabla 20. Esfuerzos del acople superior en el extremo empotrado.

Esfuerzos del acople superior en el extremo empotrado.	
Esfuerzo normal de flexión (σ_f)	44.42 Mpa
Esfuerzo de compresión (σ_c)	0.46 Mpa
Esfuerzo de Von Mises(σ_{VM})	44.87 Mpa

Calculamos el factor de seguridad para cargas estáticas a partir de la ecuación (9) con lo cual se tiene un valor de 11.81.

Luego siguiendo con la metodología, se determinan los factores de corrección para el cálculo del límite de resistencia a la fatiga.

Tabla 21. Factores de corrección para análisis a fatiga del acople superior.

Factores que modifican el limite de resistencia a la fatiga	
Limite de resistencia a la fatiga	318.78 Mpa
Factor de superficie (maquinado o laminado en frío)	0.806
Factor de tamaño	0.944
Factor de carga	1

A partir de los datos obtenidos en la tabla 28 se calcula el limite de resistencia a la fatiga modificada, el cual tiene un valor de 242.77 Mpa. Luego se calcula la componente de amplitud de resistencia y con ella el factor de seguridad (ver tabla 29).

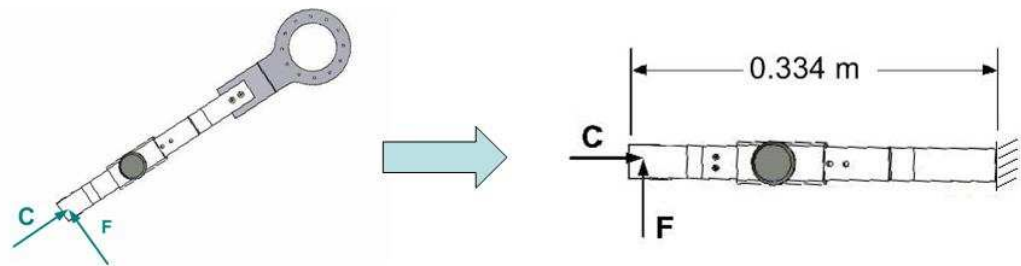
Tabla 22. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.

Amplitud de Von Mises y de resistencia	
Componente de esfuerzo σ_{xa}	22.44 Mpa
Componente de amplitud de Von Mises (σ_a)	22.44 Mpa
Factor de seguridad contra falla por fatiga.	9.8

3.4.5 Calculo de barras telescópicas inferior. La evaluación de este conjunto de elementos se va a realizar de forma similar al hecho en la barra telescópica superior. Este conjunto de piezas es el que permite mover el soporte del muslo a lo largo de la tibia para poder ajustar la parte inferior de la estructura de acuerdo con la antropometría del paciente. Por lo tanto tiene 5 agujeros espaciados cada 15 mm que harán posible el ajuste del soporte del muslo en 5 posiciones.

Esta pieza estará construida con barras de 30x6 mm, como en el caso de la barra superior. Por lo tanto vamos a chequear esta pieza definiendo el estado de carga al cual estará sometido.

Figura 34. Estado de carga que actúa sobre la barra telescópica inferior.



Si tomamos el conjunto de barra telescópica inferior como un cuerpo rígido para chequear la sección transversal, vamos a tener entonces que C es la carga de compresión y F es la carga a flexión. La magnitud de las fuerzas que actúan sobre este elemento se presenta en la tabla 26.

A partir de las ecuaciones (4-8) se determinan los esfuerzos de flexión, compresión y de Von Mises en la zona del empotramiento que son mostrados en la tabla 30.

Tabla 23. Estado de esfuerzos de la barra superior ajustable en la sección de empotramiento.

Esfuerzos en la barra superior ajustable en la sección del empotramiento	
Esfuerzo normal de flexión (σ_f)	117.3 Mpa
Esfuerzo de compresión (σ_c)	0.64 Mpa
Esfuerzo de Von Mises(σ_{VM})	237.4 Mpa

Con estos valores definidos y usando la ecuación (9) podemos calcular el factor de seguridad para cargas estática, con lo cual tendríamos un factor de seguridad de 2.3.

Ahora se van a determinar los factores de corrección para determinar el factor de seguridad contra la falla por fatiga.

Tabla 24. Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga

Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga	
Límite de resistencia a la fatiga	318.78 Mpa
Factor de superficie (maquinado o laminado en frío)	0.806
Factor de tamaño	0.935
Factor de carga	1

Por lo tanto el límite de resistencia a la fatiga modificada va a tener un valor de 240.23 Mpa. Luego se calcula la componente de amplitud de resistencia y con ello el factor de seguridad (ver tabla 32).

Tabla 25. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.

Amplitud de Von Mises y de resistencia	
Componente de esfuerzo σ_{xa}	118.08 Mpa
Componente de amplitud de Von Mises (σ_a)	118.08 Mpa
Factor de seguridad contra falla por fatiga.	1.85

3.4.6 Selección de la articulación de tobillo. El exoesqueleto se diseñó con doble articulación en el tobillo para garantizar mayor rigidez a la parte estructural sobre la cual descansa el pie. Las articulaciones de tobillo seleccionadas son de acción estándar de la empresa Becker Orthopedic, figura 30. Además son de bajo

peso aunque son fabricadas en acero inoxidable. Están diseñadas para soportar una persona con un peso máximo de 100 kg.

El rango en el cual puede ser ajustado el movimiento en la articulación de tobillo, se realiza mediante la variación en la rigidez de un resorte.

Figura 35. Articulación estándar Becker Orthopedic.

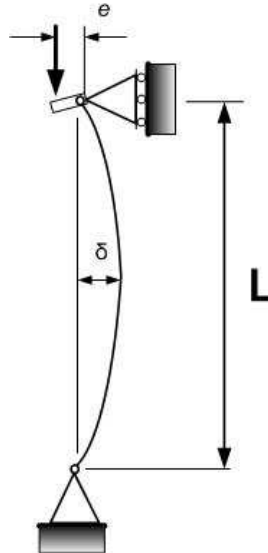


3.4.7 Análisis de rigidez. Para este análisis se va a considerar el área de menor sección transversal de las piezas que componen la estructura. Lo anterior es lógico debido a que las otras piezas actuaran como rigidizadores.

Para efectos de simplicidad tomaremos una barra vertical articulada en los extremos sometida a cargas axiales excéntricas.

El estado de carga se calculara cuando una persona esta de pie y apoya el peso del cuerpo en la estructura.

Figura 36. Columna articulada en los extremos con carga axial excéntrica.



Si suponemos una persona con 100 kg de peso, la fuerza y el momento que se van a generar en la estructura son las siguientes:

Tabla 26. Factores que modifican el límite de resistencia a la fatiga

Momento y fuerza presentes para análisis de pandeo	
Momento (M)	30.76 N m
Fuerza de compresión (P)	920 N

Teniendo en cuenta que las dimensiones de la sección transversal de la barra es de 6 x 30 mm y L es de 0.954 m, podemos calcular a partir de la ecuación 12 la carga crítica.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (12)$$

$$P_{cr} = 1210 \text{ N}$$

Y con esto tenemos un esfuerzo crítico de 6.73 Mpa, que es menor que el esfuerzo de fluencia, lo que no indica que la estructura no se va a pandear.

3.4.8 Cálculo de la soldadura en la barra telescópica superior. El diseño de esta unión se va a realizar con una soldadura de filete y va a ser tratada como una línea. El electrodo seleccionado para realizar esta unión es el E60 y cuenta con siguientes propiedades:

Tabla 27. Propiedades del electrodo E60.

Propiedades mínimas el metal de aporte E60	
Resistencia a la tensión	427 Mpa
Límite elástico	345 Mpa
Elongación	17-25 %

El patrón de soldadura que se va a utilizar se muestra en la figura 43. Las propiedades para este patrón de soldadura se calculan a partir de las ecuaciones 13-14 y se presentan en la tabla 35.

$$S_w = b.d \quad (13)$$

$$J_w = \frac{b^3 + 3bd^2}{6} \quad (14)$$

Figura 37. Cordón de soldadura para la unión entre el soporte de muslo y la barra telescópica (segmento inferior).

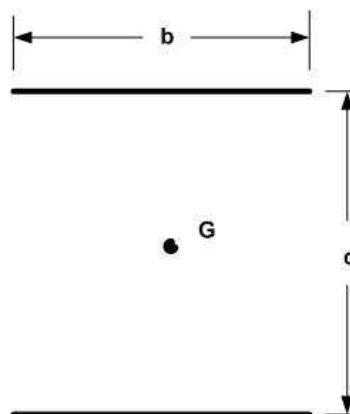


Tabla 28. Propiedades del patrón de soldadura considerándola como una línea.

Propiedades patrón de soldadura segmento superior	
Longitud de soldadura (b)	0.07 m
Distancia entre tramos (d)	0.03 m
Área de la garganta (A_w)	0.14 m
Modulo de sección (S_w)	0.0021 m ²
Momento polar de inercia (J_w)	8.86E-5 m ³

A partir del estado de carga definido en la tabla 16 y usando las ecuaciones 4-7 se calculan el valor de las fuerzas en la soldadura (ver tabla 36).

Tabla 29. Fuerzas presentes en la soldadura.

Fuerzas en la soldadura	
Fuerza de flexión (F_f)	150489 N/m
Fuerza de cizalladura (F_c)	2257.3 N/m
Fuerza de cizalladura debido a la carga de compresión (F'_c)	821.6 N/m
Fuerza resultante (F_t)	150508.21 N/m

Como la carga es variable el diseño se hace para condiciones de fatiga.

Tomando una vida de 100.000 ciclos y asumiendo que la carga es completamente reversible ($K = -1$) podemos usar la expresión 15 para calcular el tamaño de los lados de la soldadura [14].

$$F_t = \frac{8800w}{1 - \frac{k}{2}} \quad (15)$$

El valor de cada lado de la soldadura de filete es de 3.72E-3 m, si este dato se compara con el recomendado por el AISI-AWS se concluye que es menor, lo que nos indica que se debe escoger el valor recomendado que es de 6.64 mm.

3.4.9 Cálculo de la soldadura en la barra telescópica inferior. El cálculo de esta soldadura se va a realizar de forma similar al de la parte superior, con la variante del estado de carga y el patrón de soldadura. El estado de carga con el cual se va a diseñar este cordón de soldadura se presenta en la tabla 25. El patrón de soldadura que se va a utilizar se muestra en la figura 44. Las propiedades para este patrón de soldadura se calculan a partir de las ecuaciones 16-17 y se presentan en la tabla 30.

$$S_w = \frac{b^2 (2d + b)}{3(d + b)} \quad (16)$$

$$J_w = \frac{(d + 2b)^3}{12} - \frac{b^2 (d + b)^2}{(d + 2b)} \quad (17)$$

Figura 38. Cordón de soldadura para la barra telescópica inferior.

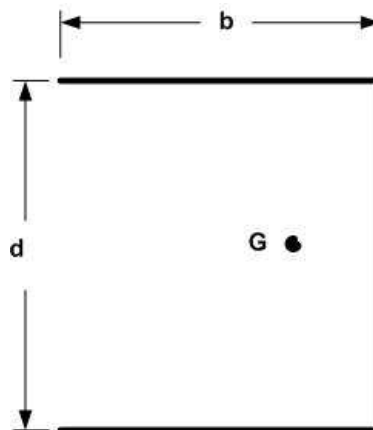


Tabla 30. Propiedades del patrón de soldadura considerándola como una línea.

Propiedades patrón de soldadura segmento superior	
Longitud de soldadura (b)	0.07 m
Distancia entre tramos (d)	0.03 m
Área de la garganta (A_w)	0.13 m
Modulo de sección (S_w)	0.0017 m^2
Momento polar de inercia (J_w)	$1.14\text{E-}4 \text{ m}^3$

Las fuerzas en la soldadura son calculadas usando las ecuaciones 4-7 y sus valores se muestran en la tabla 38.

Tabla 31. Fuerzas presentes en la soldadura.

Fuerzas en la soldadura	
Fuerza de flexión (F_f)	244035.3 N/m
Fuerza de cizalladura (F_c)	3191.2 N/m
Fuerza de cizalladura debido a la carga de compresión (F'_c)	2072.5 N/m
Fuerza resultante (F_r)	244064.9 N/m

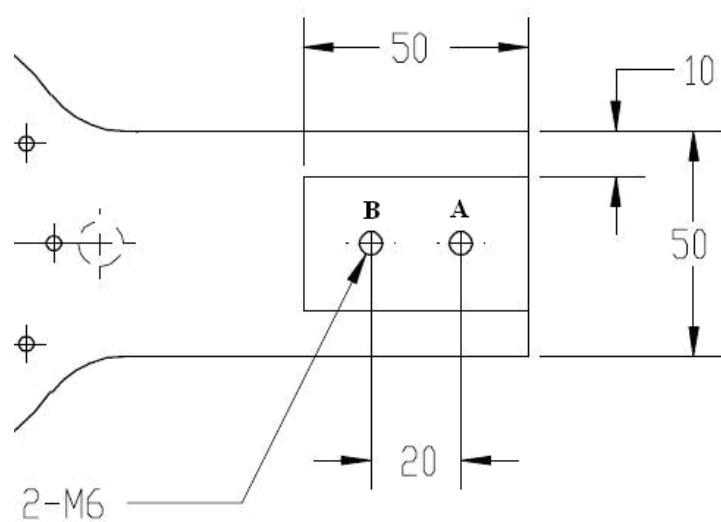
Como la carga es variable el diseño se hace para condiciones de fatiga. Tomando una vida de 2'000.000 de ciclos y asumiendo que la carga es completamente reversible ($K= -1$) podemos usar la expresión 15 para calcular el tamaño de los lados de la soldadura [14].

Luego w va a tener un valor de $6.034\text{E-}3 \text{ m}$, el cual esta por debajo del recomendado por el AISI-AWS. Lo que nos indica que se debe escoger el valor recomendado que es de 6.67 mm.

3.4.10 Cálculo y evaluación de pernos usados en la estructura. Para la unión entre los acoples y las barras telescópicas se van a usar dos pernos M6 SAE grado 8 en la configuración que se muestra en la figura 34.

Evaluación de pernos que unen los elementos de segmento superior.

Figura 39. Configuración de pernos para unir el acople superior con la barra superior ajustable.



El centro de movimiento del grupo de pernos estará ubicado entre A y B, los puntos A y B indican la posición de los pernos.

Si se determina la carga máxima en cada perno, se tendrá que el perno A es crítico debido a que soporta la mayor parte de la carga.

Las propiedades de los pernos se muestran en la tabla 39.

Tabla 32. Propiedades de los pernos seleccionados.

Propiedades de los pernos M6 SAE grado 8	
Resistencia de prueba mínima	827.31 Mpa
Resistencia mínima de tensión	1034.21 Mpa
Resistencia mínima de fluencia	896.31 Mpa

Las fuerzas primarias y secundarias son calculadas a partir de las siguientes ecuaciones:

$$F' = \frac{V}{n} \quad (18)$$

$$F'' = \frac{Mr}{2r^2} \quad (19)$$

Donde V es la fuerza cortante, n es el número de pernos, M el momento flector y r es la distancia que hay del centroide al punto medio de cada perno.

Tabla 33. Fuerzas que actúan en los pernos del segmento superior.

Fuerzas primarias y secundarias que actúan sobre el perno A	
F_1	207.03 N
F'_1	5696 N
F_2	134.71 N
R (fuerza resultante)	5706 N

Con las fuerza máximas procedemos a calcular el esfuerzo máximo a partir de la ecuación 6.

Luego a partir del esfuerzo de fluencia del perno y usando la ecuación 9 se obtiene un factor de seguridad de 4.4 a carga estatica.

El acople superior es mas delgado que la barra superior ajustable, entonces el esfuerzo de aplastamiento se debe a la presión sobre el alma del acople superior. El área del soporte es $A = t d = 7 \times 3 = 21 \text{ mm}^2$. Así, el esfuerzo de aplastamiento tendrá un valor de 271.7 Mpa, el cual esta por debajo del esfuerzo de fluencia del material.

Evaluación para pernos que unen elementos de segmento inferior.

De manera análoga al caso anterior se van a chequear los pernos usados para unir los elementos del segmento inferior.

La configuración y disposición de los pernos es la misma que en el caso anterior, la única variante el estado de carga al que están sometidos los pernos, el cual se presenta en la tabla 41.

Tabla 34. Fuerzas que actúan en los pernos del segmento superior.

Fuerzas primarias y secundarias que actúan sobre el perno A	
F_1	158.01 N
F_1	8427.2 N
F_2	57.51 N
R (fuerza resultante)	8429 N

Con este resultado se calcula el esfuerzo máximo y con ello podemos calcular el factor de seguridad, el cual tiene un valor de 3.

De igual forma que en el caso anterior, el acople inferior es mas delgado que la barra telescópica inferior, entonces el esfuerzo de aplastamiento se debe a la presión sobre el alma del acople inferior. El área del soporte es $A = t d = 5 \times 3 = 15 \text{ mm}^2$. Así, el esfuerzo de aplastamiento tendrá un valor de 561.7 Mpa, el cual esta por debajo del esfuerzo de fluencia del material.

3.5 CONSTRUCCIÓN DE LA ÓRTESIS PARA LA REHABILITACIÓN DE LA ARTICULACIÓN DE RODILLA

Después de buscar y cotizar en las diferentes ortopédicas de la ciudad para realizar la construcción de la órtesis, se escogió la empresa Ortopédica Americana Ltda., por su recorrido y además por que el dueño, el señor John Jaime Varela ya ha trabajado en algunos proyectos de investigación relacionado con la rehabilitación.

La construcción de la órtesis para la articulación de rodilla tiene un costo de 4'703.045, que incluye; el maquinado, ensamble de la parte estructural y la fabricación de los elementos ortésicos. La primera de estas tareas se esta realizando en Industrias Payan, mientras que las otras dos corren por cuenta de la ortopédica.

En estos momentos la construcción de la órtesis esta en un 50%, es decir, que se encuentra en la fase de maquinado de la piezas.

A continuación se presentan fotos de las piezas ya finalizadas, dentro de las cuales se encuentran; acoples superior e inferior (figura 46, 47 y 48), barra telescópica ajustable superior (figura 49) y articulación de tobillo (figura 50).

Figura 40. Acople inferior para articulación de rodilla.

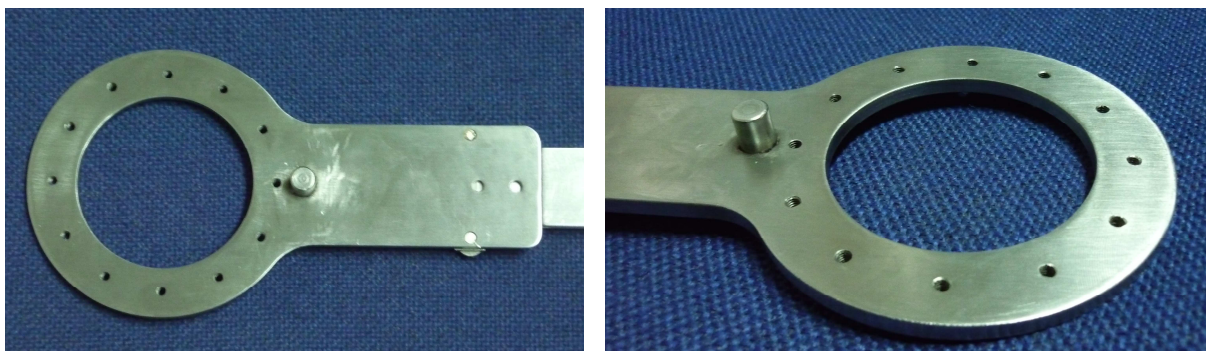


Figura 41. Acople superior para la articulación de rodilla.



Figura 42. Ensamble acoples superior e inferior.



Figura 43. Barra telescópica ajustable superior.



Figura 44. Articulación de tobillo.



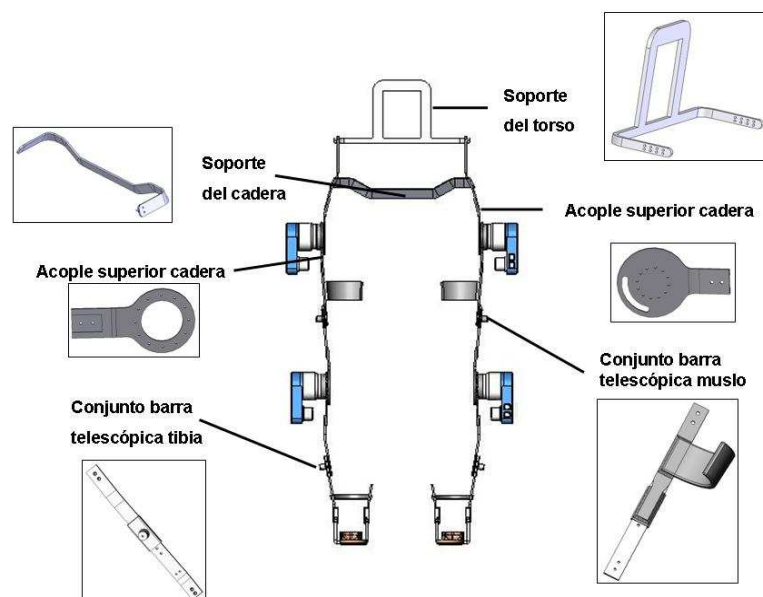
4 DISEÑO DE ÓRTESIS PARA MIEMBROS INFERIORES

En el capítulo anterior se diseñó y evaluó una órtesis para la articulación de rodilla a partir de un análisis biomecánico. Siguiendo con esa metodología y teniendo en cuenta el diseño anterior, se van a adicionar y a rediseñar algunas piezas para finalmente poder obtener un exoesqueleto completo en donde se tendrán en cuenta las 4 articulaciones. Este exoesqueleto servirá para el desarrollo del sistema de control de un bípedo en la fase de equilibrio.

En la figura 51 se pueden ver los elementos adicionales junto con la estructura que se diseñó en el capítulo anterior. La única pieza que se rediseñó fue la parte superior de la barra telescópica del fémur, esta pieza se prolongó de tal manera que pudiera ser unida al acople inferior de la cadera.

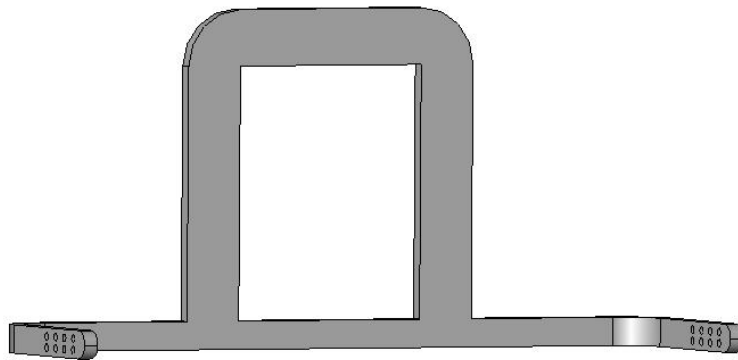
A continuación se presenta la figura en donde se puede observar la estructura ensamblada y la descripción de cada una de sus partes.

Figura 45. Descripción de órtesis para rehabilitación de miembros inferiores.



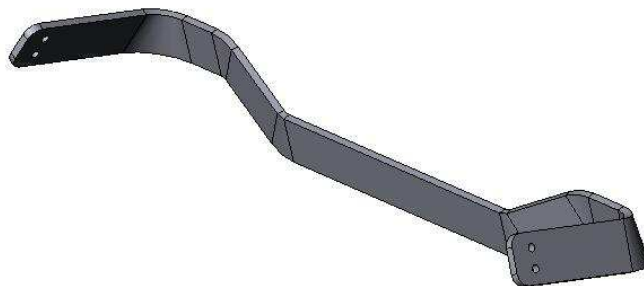
Soporte torso. Será el encargado de mantener el torso y los miembros superiores en posición vertical garantizando estabilidad y brindándole soporte al paciente. Sobre esta pieza irá montada la fuente de potencia, que para nuestro caso serán baterías de alta duración, Figura 52.

Figura 46. Soporte torso.



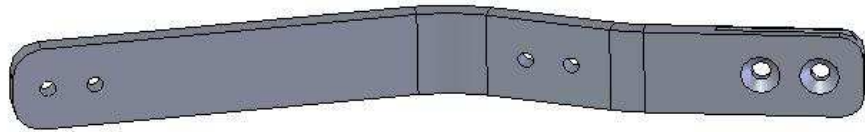
Soporte de cadera. Esta pieza tendrá la función de servir de apoyo a la cadera para que se pueda mantener en una posición ideal, debido a que muchos de los pacientes con discapacidad en los miembros inferiores presentan debilidad muscular para mantener la posición de erguido, se hace necesario pensar en una pieza que ayude a corregir esta falencia, figura 53.

Figura 47. Soporte cadera.



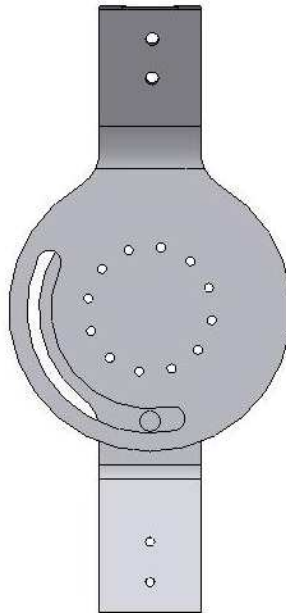
Barra-superior cadera. Esta pieza será la encargada de transmitir la carga desde el actuador hasta la parte superior de la estructura, la forma e inclinación estará definida de acuerdo a la antropometría del paciente, figura 54.

Figura 48. Barra superior cadera.



Acople superior e inferior cadera. Estos elementos cumplirán la misma función que los acoples de la rodilla, la única diferencia esta en el rango máximo permitido que debe articular, figura 55.

Figura 49. Acoples superior e inferior cadera.



4.1 CÁLCULO Y EVALUACIÓN ANALÍTICA DE LA ÓRTESIS DE MIEMBROS INFERIORES.

De manera análoga al de la órtesis para la articulación de rodilla y teniendo en cuenta las justificaciones dadas para la selección del material, se va a elegir el acero 1045 estriado en frío para el diseño y la construcción del exoesqueleto para miembros inferiores, tabla 14.

Muchas de las piezas de esta estructura son iguales a las diseñadas y validadas en el capítulo anterior, por lo tanto solo se va a presentar el diseño y la evaluación de las piezas adicionales.

Para la definición del estado de carga al cual van a estar sometidas cada una de las piezas de la ortesis, se va a tener en cuenta una persona de 70 kg que lleva en sus espaldas baterías con un peso de 10 kg, con lo cual se va a tener un peso total para de 80 kg.

Como se presenta la tabla 2 y la figura 9, el máximo torque en la articulación de cadera se presenta en el 10% del ciclo de ascenso de escaleras, por lo tanto, el torque máximo en esta articulación para un paciente con un peso total (persona-baterías) de 80 kg va a ser de 64 Nm.

Calculo de acople superior e inferior.

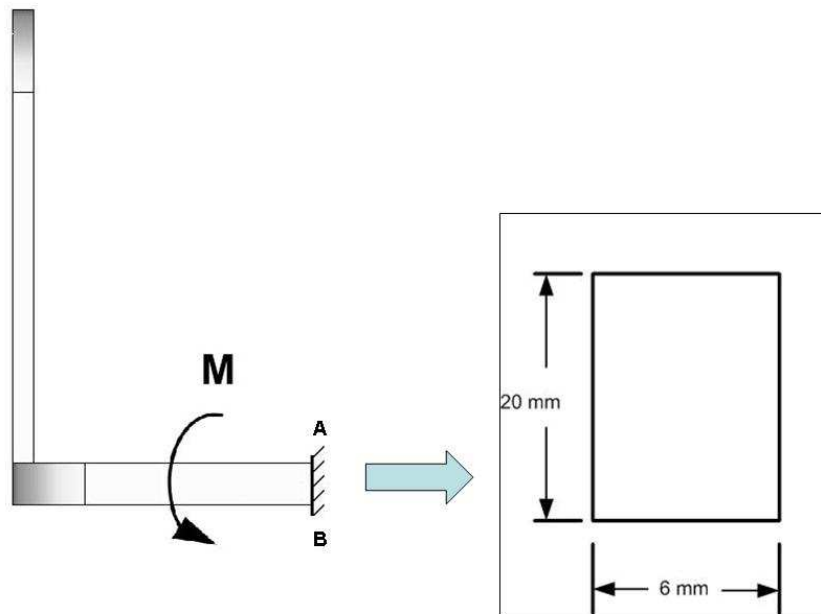
Como se mencionó en el capítulo anterior, las dimensiones de los acoples están determinadas por la geometría de los motores, esto quiere decir que los acoples para cadera y rodilla tendrán la misma geometría y dimensiones. Luego, Si tenemos en cuenta que los torques máximos en la rodilla son mayores que en la cadera se deduce que no es necesaria la evaluación de estos elementos bajo un estado de carga menor.

Cálculo de soporte torso.

Para definir el estado de carga al que va a estar sometido el soporte del torso se van a tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- El estado de carga será determinado a partir de momento máximo aportado por el actuador en la fase del 10% del ciclo de descenso.
- La zona de máximo esfuerzo estará ubicada en la sección que une esta pieza con barra superior cadera, es por esto que esta sección será empotrada, ver figura 56.
- La sección transversal tendrá las medidas mostradas en la figura 56.

Figura 50. Estado de carga soporte torso.



El momento flector M tiene un valor de 64 N.m y fue determinado a partir del torque generado por el motor en la articulación de cadera.

A partir de las ecuaciones 4, 8 y 9 se calcula el esfuerzo de flexión, esfuerzo de Von Mises y el factor de seguridad para carga estática, ver tabla 42.

Tabla 35. Estado de esfuerzos del soporte de torso en la sección de empotramiento.

Esfuerzos en el soporte de torso en la sección del empotramiento	
Esfuerzo normal de flexión (σ_f)	64 Mpa
Esfuerzo de Von Mises(σ_{VM})	288 Mpa
F.S para carga estática	1.84 Mpa

Ahora se va a realizar la evaluación a fatiga teniendo en cuenta las mismas consideraciones del capítulo anterior.

Tabla 36. Factores de corrección del límite de resistencia a la fatiga.

Factores que modifican el limite de resistencia a la fatiga	
Limite de resistencia a la fatiga	318.78 Mpa
Factor de superficie (Maquinado ó laminado en frío)	0.806 Mpa
Factor de tamaño	0.982 Mpa

A partir de los factores de la tabla 43 se calcula el limite de resistencia a la fatiga modificada, el cual tiene un valor de 252.3 Mpa.

Con este valor definido y usando la ecuación 10 y 11 se calculan los esfuerzos alternantes efectivos y el factor de seguridad a partir de la teoría de falla de la energía de distorsión elíptica, como se presenta en la tabla 44.

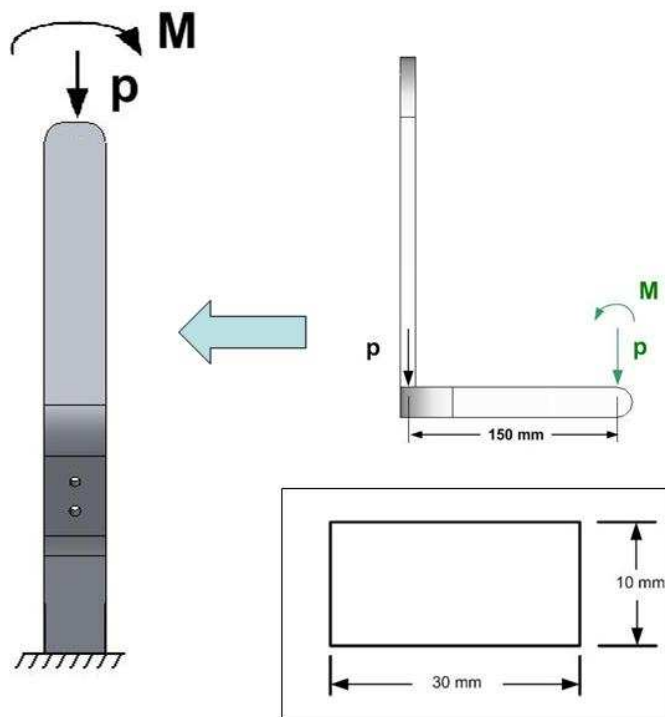
Tabla 37. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.

Amplitud de Von Mises y FS contra la falla por fatiga	
Componente de esfuerzo alternante σ_{xa}	144 Mpa
Componente de amplitud de Von Mises (σ_a)	144 Mpa
Factor de seguridad contra falla por fatiga.	1.58

Cálculo de barra-superior cadera

Los torque generados en los actuadores de la cadera van a ser transmitidos hasta esta pieza. Por consiguiente, para evaluar esta pieza se va a empotrar la parte que va unida al acople superior de la cadera y en el otro extremo se va a aplicar el estado de carga, figura 57.

Figura 51. Estado de carga de barra-superior cadera y dimensiones de sección transversal.



La magnitud de las fuerzas y momentos se presentan en la tabla 45.

Tabla 38. Fuerzas y momentos presentes en la barra-superior cadera.

Fuerzas y momentos que actúan sobre la barra-superior cadera	
Momento flector debido (M)	64 N m
Fuerza de compresión (p)	426.66 N

Mediante las ecuaciones 4,6 y 8 se calculan los esfuerzos en la sección del empotramiento y con ello y la ecuación 9 se determina el factor de seguridad para carga estática, tabla 46.

Tabla 39. Estado de esfuerzos de la barra-superior cadera en la sección de empotramiento.

Esfuerzos en la barra-superior cadera	
Esfuerzo normal de flexión (σ_f)	128 Mpa
Esfuerzo de compresión (σ_c)	3.6 Mpa
Esfuerzo de Von Mises(σ_{VM})	236.6 Mpa
F.S para carga estática	2.24 Mpa

A continuación se presentan los factores de corrección para el cálculo del límite de resistencia a la fatiga.

Tabla 40. Factores de corrección del límite de resistencia a la fatiga.

Esfuerzos en la barra superior ajustable en la sección del empotramiento	
Límite de resistencia a la fatiga	318.78 Mpa
Factor de superficie (Maquinado ó laminado en frío)	0.806 Mpa
Factor de tamaño	0.935 Mpa

A partir de los factores de la tabla 39 se calcula el límite de resistencia a la fatiga modificada, el cual tiene un valor de 240.23 Mpa. Luego se calcula la componente de amplitud de resistencia y con ello el factor de seguridad contra la falla por fatiga (ver tabla 40).

Tabla 41. Componentes de esfuerzos alternantes y componente de amplitud de Von Mises.

Amplitud de Von Mises de resistencia	
Componente de esfuerzo alternante σ_{xa}	117 Mpa
Componente de amplitud de Von Mises (σ_a)	117 Mpa
Factor de seguridad contra falla por fatiga.	1.87

5 CONCLUSIONES

- Este exoesqueleto busca mejorar la rehabilitación funcional en pacientes con una discapacidad motora y funcional similar, no para pacientes con una patología en concreto, por lo tanto este dispositivo puede ser útil para aplicarse tanto en la ejecución de movimientos en cadena cinética abierta como en cadena cinética cerrada, ya sea con apoyo uni o bipodal.
- Como se ha dicho, el exoesqueleto se ha diseñado para ayudar un 100% al paciente en diferentes actividades. Esta estimación inicial tiene que validarse con pruebas experimentales. Sin embargo, el criterio utilizado para la selección de los actuadores es muy confiable y ha sido usado en otras ocasiones para este tipo de aplicaciones.
- No se pudo encontrar comercialmente un actuador que cumpliera con todos los requerimientos establecidos para la selección, sin embargo, el motor a usar (CHA-20A-100-H-M512P-B-S) es capaz de suplir los torques generados en la articulación de cadera y rodilla en las actividades mas comunes del diario vivir.
- Los resultados del cálculo analítico del estado de esfuerzos de cada uno de los componentes del exoesqueleto bajo el efecto de la carga estática y dinámica revelan que ninguna pieza supera el límite de fluencia determinado por las propiedades mecánicas del material, lo cual demuestra que dichos componentes han sido bien calculados para soportar las cargas a las cuales va a estar sometido sin presentar problemas de resistencia ó falla.

- El diseño final de la órtesis para la articulación de rodilla tiene un peso aproximado de 9250 gr incluyendo el peso del actuador (3.9 kg) y sin tener en cuenta los elementos ortésicos, instrumentación y unidad de potencia. Este es un valor considerable para un dispositivo que va a ser usado para la rehabilitación, por lo tanto, se hace necesario investigar sobre materiales y actuadores más ligeros que permita ampliar la cantidad de actividades terapéuticas en las cuales pueda ser usado el dispositivo.
- En estos momentos, aún quedan partes del exoesqueleto que están siendo desarrollados. En el aspecto mecánico, es necesario validar experimentalmente el confort del exoesqueleto, la adaptabilidad del sistema y el efecto estético que produce en los pacientes.

5.1 RECOMENDACIONES

- La mayoría de los usuarios potenciales no son capaces de mantener el equilibrio, por lo que los circuitos en los que se realiza la rehabilitación, deberán ser cerrados y con sistemas de ayuda del equilibrio (barras paralelas, agarres, etc).
- El exoesqueleto para la rehabilitación de la articulación de rodilla implica tener que cargar con un peso adicional en la pierna, por consiguiente, los pacientes aptos para usar el dispositivo deberán comenzar con una etapa de acondicionamiento y fortalecimiento.
- Debido a que este dispositivo estará sometido a cargas variables, se hace necesario realizar un análisis dinámico de multicuerpos flexibles por el método de elementos finitos.

6 BIBLIOGRAFÍA

- [1] Blodgett O. W., Design of Weldments, the James F.Lincoln Arc Welding Foundation.
- [2] Campo. R.J, Definición de las variables y parámetros en el estudio de la ejecución motora de tareas discretas para el uso de un exoesqueleto de rodilla en actividades de rehabilitación física. Universidad del Valle. 2009. 156 p.
- [3] Dejan B. Popović, T. Sinkjær, “Control of Movement for the physically disabled”, Aalborg Univerity, 2003.
- [4] Don B. Chaffin, Occupational Biomechanics, John Wiley & Sins, Inc- Tercera edicion-1999
- [5] Gere James M, Mecánica de Materiales, Thomson Learning - Quinta Edición – 2002.
- [6] Greenwood, D. T. Classical Dynamics. (Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1977).
- [7] Hashem Ashrafiuon, Mehdi Nikkhah Wayne, PA (US). Exoskeletal device for rehabilitation. United States Patent, US 7,190,1441 B1, Mar. 13, 2007.
- [8] Moreno C.J, Brunetti J.F, Pons L.J. "Estudio de Variables Biomecánicas para Discriminación de Actividades con una Órtesis de Miembro Inferior". XXV Jornadas de Automática. Ciudad Real, 8-10 Septiembre. 2004. ISBN: 84-688-7460-4
- [9] Nicholas P. Chironis, Mechanims, Linkages, And mechanical Control, Mc Graw Hill

- [10] Olli Haavisto, Heikki Hyötyniemi. Simulation Tool of a Biped Walking Robot Model. Ms, Thesis. Helsinki University of Technology Control Engineering Laboratory. March 2004.
- [11] Perry J. and Rosen J. Upper-Limb powered exoskeleton design. IEEE/ASME transactions on mechatronics, Vol.12, No. 4, august 2007.
- [12] Popov E., Introducción a la Mecánica de Sólidos, Limusa. 1973.
- [13] Robert Riener Marco Rabuffetti , Carlo Frigo. Stair ascent and descent at different inclinations. Gait and Posture, Volume 15, Number 1, February 2002 , pp. 32-44(13)
- [14] Sanchez R. Jaime , Análisis experimental de esfuerzos, Universidad del valle. Departamento de mecánica de sólidos y materiales, 1983.
- [15] Shigley J. E., Mischke C. R. Diseño en Ingeniería Mecánica, Mc Graw Hill Sexta Edición. 2002.
- [16] Well, D. A. Lagrangian Dynamics with a treatment of Euler's Equations of motion. (McGraw.Hill, New York, 1967)
- [17] <https://ssl.adam.com>. Consultada el 7 de septiembre del 2009.
- [18] Biomechanics and Motor Control of Human movement. John Wiley & Sons, (Inc. 2005)
- [19] Christian Fleischer. Control Exoskeleton with EMG signal and a Biomechanical Body Model. PhD thesis. Technische Universität Berlin, 2007.

[20] Proyecto de investigación radicado en la Vicerrectoria de Investigación de la Universidad del Valle con el CI No. 2522. “Diseño y construcción de un exoesqueleto para rehabilitación asistida de pacientes con lesiones de rodilla”

[21]http://www.harmonicdrive.de/cms/upload/pdf/de/CHA_900120_07.pdf

A. MODELOS DE LA MARCHA HUMANA

Los dispositivos exoesqueleticos son generalmente considerados y modelados como robots bípedos con el fin de describir los movimientos y predecir las fuerzas que permiten el desplazamiento. Hay tres diferentes planos en los cuales un robot bípedo ó un sujeto humano puede ser observado, por efectos de simplificación el movimiento bípedo es normalmente estudiado en el plano sagital, la razón es anular los grados de libertad extra en las articulaciones para minimizar en número de actuadores necesarios durante la rehabilitación [4].

Formular las ecuaciones de movimiento puede hacerse de varias formas. La primera y más directa, pero posiblemente la menos eficiente, es aplicar las leyes dinámicas de Newton para cada segmento del modelo. El método es engorroso y no se presta para un programa general de simulación dinámica. El segundo método es utilizar la dinámica Lagrangiana. Las ecuaciones de lagrange requieren el concepto de desplazamiento virtual y emplea el sistema de energía y trabajo en función de las coordenadas generalizadas para obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen el movimiento. Otro método alternativo que también ha sido usado es el de trabajo virtual extendido usando el principio de D’Alambert. Cada método tiene sus ventajas y desventajas, sin embargo el método lagrangiano es caracterizado por su simplicidad [3].

6.1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO GENERAL PARA LLEGAR A LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

El modelo que se presenta a continuación tiene como objetivo definir el mínimo número de ecuaciones de movimiento en la marcha de un bípedo limitado al plano sagita. La figura 1.1 nos muestra la representación del cuerpo humano, el cual estará formado por 5 segmentos, que consisten en un torso y dos piernas idénticas, cada una conformada por dos segmentos que están conectados por medio de una articulación en la rodilla. Dos articulaciones coaxiales en la cadera conectan las piernas con el torso y cada articulación tiene un grado de libertad. La interacción entre el bípedo y el suelo es modelado usando fuerzas externas que actúan en cada una de las puntas de la pierna cuando esta toca el suelo. El sistema modelado no tiene en cuenta a los pies ni a las articulaciones de tobillo, esto nos indica que

no se genera par de torsión en el tobillo. Se asume suelo rígido y antideslizante. Para este caso no se considera la oscilación que se tiene en la cadera cuando se realiza la marcha, así como tampoco se tendrán en cuentas los movimientos en el plano transversal ni frontal [4].

El modelo cinemático puede moverse libremente en el plano x-y, y esta definido por un sistema de referencia global y uno local ubicado en el centro de gravedad del torso. Además el sistema es holonómico, es decir, que puede ser representado por un vector de coordenadas generalizadas igual al número de grados de libertad, donde este último estará definido por:

$$m = 3 \times n - \sum_1^j 3 - p_i \quad (1)$$

m = numero de grados libertad
n = numero de segmentos
j = numeto de articulaciones
p_i = grados de libertad por artclacion

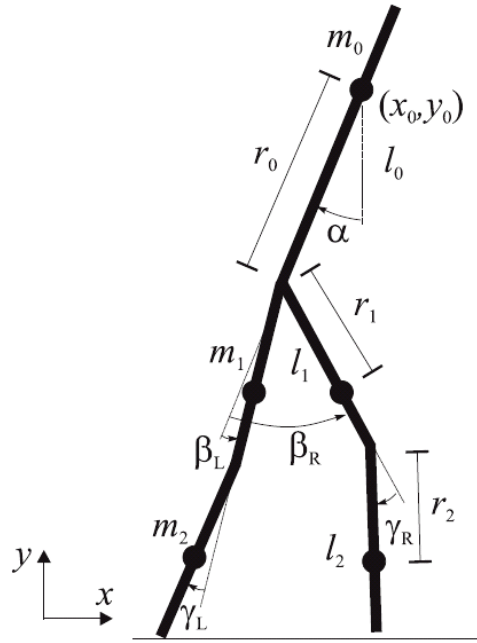
Si reemplazamos en la ecuación 1 los parámetros ya mencionados, vamos a tener que nuestro modelo tendrá 7 grados de libertad, lo que nos indica que vamos a tener que definir 7 coordenadas generalizadas.

A continuación se presenta el vector transpuesto de las coordenadas generalizadas.

$$q = [x_0, y_0, \alpha, \beta_L, \beta_R, \gamma_L, \gamma_R]^T$$

Las correspondientes coordenadas son definidas de acuerdo a la Fig. 4 con las cuales se define la posición de cada uno de lo segmentos del modelo.

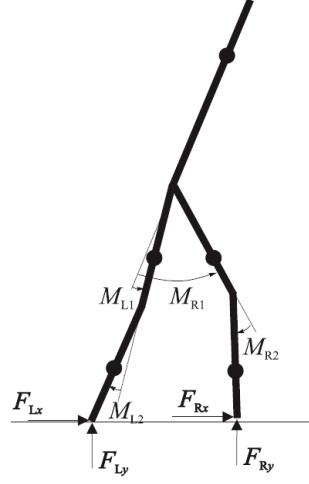
Figura 4. Coordenadas generalizadas y constantes del modelo del bípedo.



Las coordenadas X_0, Y_0 indican el origen del sistema de referencia local del modelo, el cual servirá para ubicar el centro de masa del torso. Los segmentos acoplados son denotados como (l_0, l_1, l_2) y las masa como (m_0, m_1, m_2) . El centro de masa cada segmento está localizados a una distancia (r_0, r_1, r_2) desde la correspondiente articulación [1].

El modelo se encuentra actuado con 4 momentos Fig. 5 que permitirán el movimiento de cada uno de los segmentos, dos de los cuales actúan entre el torso y los muslos y los otros dos en la articulación de rodilla, además la superficie de marcha se encuentra modelada por medio de fuerzas externas que afectan ambas puntas de las piernas.

Figura 5. Diagrama de cuerpo libre.



El paso siguiente es crear la lista de desplazamientos y velocidades y usar este resultado para obtener el sistema Lagrangiano y las fuerzas generalizadas que son necesarias para aplicar la ecuación de Lagrange. En nuestro caso definiremos la posición del centro de masa para cada uno de los segmentos en función de las coordenadas generalizadas.

Pierna izquierda.

$$\begin{aligned}x_{L1} &= x_0 - r_0 \sin \alpha - r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\y_{L1} &= y_0 - r_0 \cos \alpha - r_1 \cos(\alpha - \beta_L) \\x_{L2} &= x_0 - r_0 \sin \alpha - l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\y_{L2} &= y_0 - r_0 \cos \alpha - l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\x_{LG} &= x_0 - r_0 \sin \alpha - l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\y_{LG} &= y_0 - r_0 \cos \alpha - l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)\end{aligned}$$

Pierna derecha.

$$\begin{aligned}x_{R1} &= x_0 - r_0 \sin \alpha + r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\y_{R1} &= y_0 - r_0 \cos \alpha - r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \\x_{R2} &= x_0 - r_0 \sin \alpha + l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\y_{R2} &= y_0 - r_0 \cos \alpha - l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\x_{RG} &= x_0 - r_0 \sin \alpha + l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\y_{RG} &= y_0 - r_0 \cos \alpha - l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)\end{aligned}$$

Con las posiciones definidas para cada uno de los segmentos, podemos deducir la componente de la velocidad en cada una de las direcciones a partir de la ecuación 2.

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial q_j}{\partial t} \right) + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (2)$$

Pierna izquierda

$$\begin{aligned} \dot{x}_{L1} &= \dot{x}_0 - \dot{\alpha}.r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha}.r_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L.r_1 \cos(\alpha - \beta_L) \\ y_{L1} &= \dot{y}_0 + \dot{\alpha}.r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha}.r_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L.r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\ x_{L2} &= \dot{x}_0 - \dot{\alpha}.r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha}.l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L.l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha}.r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \\ &+ \dot{\beta}_L.r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\gamma}_L.r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\ y_{L2} &= \dot{y}_0 + \dot{\alpha}.r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha}.l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L.l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha}.r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \\ &- \dot{\beta}_L.r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\gamma}_L.r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\ x_{LG} &= \dot{x}_0 - \dot{\alpha}.r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha}.l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L.l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha}.l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \\ &+ \dot{\beta}_L.l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\gamma}_L.l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\ y_{LG} &= \dot{y}_0 + \dot{\alpha}.r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha}.l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L.l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha}.l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \\ &- \dot{\beta}_L.l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\gamma}_L.l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \end{aligned}$$

Pierna derecha.

$$\begin{aligned} x_{R1} &= \dot{x}_0 - \dot{\alpha}.r_0 \cos \alpha + \dot{\alpha}.r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R.r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \\ y_{R1} &= \dot{y}_0 + \dot{\alpha}.r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha}.r_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R.r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\ x_{R2} &= \dot{x}_0 - \dot{\alpha}.r_0 \cos \alpha + \dot{\alpha}.l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R.l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}.r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \\ &- \dot{\beta}_R.r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\gamma}_R.r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\ y_{R2} &= \dot{y}_0 + \dot{\alpha}.r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha}.l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R.l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha}.r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \\ &- \dot{\beta}_R.r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\gamma}_R.r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\ x_{RG} &= \dot{x}_0 - \dot{\alpha}.r_0 \cos \alpha + \dot{\alpha}.l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R.l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}.l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \\ &- \dot{\beta}_R.l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\gamma}_R.l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\ y_{RG} &= \dot{y}_0 + \dot{\alpha}.r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha}.l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R.l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha}.l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \\ &- \dot{\beta}_R.l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\gamma}_R.l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \end{aligned}$$

Ahora procedemos a determinar el vector fuerza F_q , en donde cada una de sus componentes actúa en el sistema.

$$F_q = [F_{x_0}, F_{y_0}, F_\alpha, F_{\beta_L}, F_{\beta_R}, F_{\gamma_L}, F_{\gamma_R}]^T$$

Las expresiones de las fuerzas generalizadas asociadas van a ser determinadas a partir de la ecuación 3. Estas fuerzas actúan en el sistema cuando las otras coordenadas generalizadas permanecen constantes y corresponden al trabajo virtual hecho por unidad de desplazamiento q_i .

$$Q_i = \sum_{j=1}^f F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, (i=1,2,\dots,7) \quad (3)$$

Q_i es la componente de la fuerza generalizada que hace trabajo cuando q_i varia y todas las otras coordenadas permanecen constantes. Estas fuerzas generalizadas tienen la particularidad de ser independientes.

$$\begin{aligned} F_{x_0} &= F_{L_x} + F_{R_x} \\ F_{y_0} &= -(m_0 + 2m_1 + 2m_2)g + F_{L_y} + F_{R_y} \\ F_\alpha &= -\left(\frac{\partial y_{L1}}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial y_{L2}}{\partial \alpha} m_2 + \frac{\partial y_{R1}}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial y_{R2}}{\partial \alpha} m_2\right)g + \frac{\partial y_{LG}}{\partial \alpha} F_{L_y} + \frac{\partial y_{RG}}{\partial \alpha} F_{R_y} + \frac{\partial x_{LG}}{\partial \alpha} F_{L_x} \\ &\quad + \frac{\partial x_{RG}}{\partial \alpha} F_{R_x} \\ F_{\beta_L} &= -\left(\frac{\partial y_{L1}}{\partial \beta_L} m_1 + \frac{\partial y_{L2}}{\partial \beta_L} m_2\right)g + \frac{\partial y_{LG}}{\partial \beta_L} F_{L_y} + \frac{\partial x_{LG}}{\partial \beta_L} F_{L_x} + M_{L1} \\ F_{\gamma_L} &= -\frac{\partial y_{L2}}{\partial \gamma_L} m_2 g + \frac{\partial y_{LG}}{\partial \gamma_L} F_{L_y} + \frac{\partial x_{LG}}{\partial \gamma_L} F_{L_x} + M_{L2} \\ F_{\beta_R} &= -\left(\frac{\partial y_{R1}}{\partial \beta_R} m_1 + \frac{\partial y_{R2}}{\partial \beta_R} m_2\right)g + \frac{\partial y_{RG}}{\partial \beta_R} F_{R_y} + \frac{\partial x_{RG}}{\partial \beta_R} F_{R_x} + M_{R1} \\ F_{\gamma_R} &= -\frac{\partial y_{R2}}{\partial \gamma_R} m_2 g + \frac{\partial y_{RG}}{\partial \gamma_R} F_{R_y} + \frac{\partial x_{RG}}{\partial \gamma_R} F_{R_x} + M_{R2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y_{L1}}{\partial \alpha} = \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} r_1 \sin(\alpha - \beta_L)$$

$$\frac{\partial y_{L2}}{\partial \alpha} = \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha} r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial y_{R1}}{\partial \alpha} = \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} r_1 \sin(\alpha - \beta_R)$$

$$\frac{\partial y_{R2}}{\partial \alpha} = \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha} r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial y_{LG}}{\partial \alpha} = \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial y_{RG}}{\partial \alpha} = \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial y_{L2}}{\partial \beta_L} = -\dot{\beta}_L l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial y_{LG}}{\partial \beta_L} = -\dot{\beta}_L l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial x_{LG}}{\partial \beta_L} = \dot{\beta}_L l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial y_{L2}}{\partial \gamma_L} = \dot{\gamma}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial y_{LG}}{\partial \gamma_L} = \dot{\gamma}_L l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial x_{LG}}{\partial \gamma_L} = -\dot{\gamma}_L l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$\frac{\partial y_{R1}}{\partial \beta_R} = 0$$

$$\frac{\partial y_{R2}}{\partial \beta_R} = -\dot{\beta}_R l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial y_{RG}}{\partial \beta_R} = -\dot{\beta}_R l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial x_{RG}}{\partial \beta_R} = -\dot{\beta}_R l_1 \cos(\alpha - \beta_R) + \dot{\beta}_R l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial y_{R2}}{\partial \gamma_R} = \dot{\gamma}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial y_{RG}}{\partial \gamma_R} = \dot{\gamma}_R l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$\frac{\partial x_{RG}}{\partial \gamma_R} = \dot{\gamma}_R l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

Ahora debemos calcular la función Lagrangiana, la cual esta definida por la siguiente expresión:

$$L = E_C - E_P \quad (4) \quad E_C = \text{Energia cinetica}$$

$$E_P = \text{Energia potencial}$$

Para este caso solo tendremos en cuenta la energía cinética rotacional y la energía cinética traslacional.

$$L = E_C = T_r + T_i = \frac{1}{2} m V^2 + I \omega^2$$

Si realizamos la sumatoria de cada una de las componentes

$$T_t = \frac{1}{2} \left[m_0 (\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + m_1 (\dot{x}_{L1}^2 + \dot{y}_{L1}^2 + \dot{x}_{R1}^2 + \dot{y}_{R1}^2) + m_2 (\dot{x}_{L2}^2 + \dot{y}_{L2}^2 + \dot{x}_{R2}^2 + \dot{y}_{R2}^2) \right]$$

$$T_r = \frac{1}{2} \left[J_0 \alpha^2 + J_1 (\alpha - \beta_L)^2 + J_2 (\alpha - \beta_L + \gamma_L)^2 + (\alpha - \beta_R + \gamma_R)^2 \right]$$

Donde J_0 , J_1 , J_2 son la inercia del torso, muslo y pierna respectivamente son definidas a partir de la ecuación 5.

$$J_i = m_i \cdot r_i \quad (5)$$

m_i = masa de cada segmento.

r_i = Distancia de la articulación al centro de masa

Si reemplazamos tendremos que:

$$T_t = \frac{1}{2} \left[m_0 \left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 \right) + m_1 \left(\begin{aligned} &\left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha} r_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L r_1 \cos(\alpha - \beta_L) \right)^2 + \\ &\left(\dot{y}_0 + \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} r_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \right)^2 + \\ &\left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha + \dot{\alpha} r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \right)^2 + \\ &\left(\dot{y}_0 + \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} r_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \right)^2 \end{aligned} \right) + \right. \\ \left. + m_2 \left(\begin{aligned} &\left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha} r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \right)^2 + \\ &\left(\dot{y}_0 + \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - \dot{\beta}_L l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha} r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \right)^2 + \\ &\left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha + \dot{\alpha} l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha} r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \right)^2 + \\ &\left(\dot{y}_0 + \dot{\alpha} r_0 \sin \alpha + \dot{\alpha} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha} r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \right)^2 \end{aligned} \right) \right]$$

$$T_r = \frac{1}{2} \left[r_0 m_0 \alpha^2 + r_1 m_1 (\alpha - \beta_L)^2 + r_2 m_2 (\alpha - \beta_L + \gamma_L)^2 + (\alpha - \beta_R + \gamma_R)^2 \right]$$

A partir de aquí podemos calcular la ecuación Lagrangiana, la cual esta determinada por la ecuación 6.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (6)$$

Para el caso de la primera componente $q_1=x_0$ tendremos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} = & m_0 \dot{x}_0 + m_1 \left(\left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha} r_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L r_1 \cos(\alpha - \beta_L) \right) + \left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha} r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R r_1 \cos(\alpha - \beta_R) \right) \right) + \\ & m_2 \left(\left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha - \dot{\alpha} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - \dot{\alpha} r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\beta}_L r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \dot{\gamma}_L r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \right) + \right. \\ & \left. \left(\dot{x}_0 - \dot{\alpha} r_0 \cos \alpha + \dot{\alpha} l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\beta}_R l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha} r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\beta}_R r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \dot{\gamma}_R r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} \right) = \begin{pmatrix} m_0 \ddot{x}_0 + m_1 \ddot{x}_0 - m_1 \ddot{\alpha} r_0 \cos \alpha + m_1 \dot{\alpha}^2 r_0 \sin \alpha - m_1 \ddot{\alpha} r_1 \cos(\alpha - \beta_L) + m_1 \dot{\alpha}^2 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) - m_1 \dot{\alpha} \dot{\beta}_L r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + m_1 \ddot{\beta}_L r_1 \cos(\alpha - \beta_L) - \\ - m_1 \dot{\alpha} \dot{\beta}_L r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + m_1 \dot{\beta}_L^2 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + m_1 \ddot{x}_0 - m_1 \ddot{\alpha} r_0 \cos \alpha + m_1 \dot{\alpha}^2 r_0 \sin \alpha - m_1 \ddot{\alpha} r_1 \cos(\alpha - \beta_R) + m_1 \dot{\alpha}^2 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \\ - m_1 \dot{\alpha} \dot{\beta}_R r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + m_1 \ddot{\beta}_R r_1 \cos(\alpha - \beta_R) - m_1 \dot{\alpha} \dot{\beta}_R r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + m_1 \dot{\beta}_R^2 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left(m_2 \ddot{x}_0 - m_2 \ddot{\alpha} r_0 \cos \alpha + m_2 \dot{\alpha}^2 r_0 \sin \alpha - m_2 \ddot{\alpha} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + m_2 \dot{\alpha}^2 l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_L l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + m_2 \ddot{\beta}_L l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - \right. \\
& - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_L l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + m_2 \dot{\beta}_L^2 l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + m_2 \ddot{\alpha} r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2 \dot{\alpha}^2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \\
& + m_2 \dot{\alpha} \dot{\gamma}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2 \ddot{\beta}_L r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2 \dot{\beta}_L^2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - \\
& m_2 \dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2 \ddot{\gamma}_L r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2 \dot{\alpha} \dot{\gamma}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2 \dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \\
& \left. m_2 \dot{\gamma}_L^2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \right) \\
& + \left(m_2 \ddot{x}_0 - m_2 \ddot{\alpha} r_0 \cos \alpha + m_2 \dot{\alpha}^2 r_0 \sin \alpha - m_2 \ddot{\alpha} l_1 \cos(\alpha - \beta_R) + m_2 \dot{\alpha}^2 l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_R l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + m_2 \ddot{\beta}_R l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - \right. \\
& - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_R l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + m_2 \dot{\beta}_R^2 l_1 \sin(\alpha - \beta_R) + m_2 \ddot{\alpha} r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + m_2 \dot{\alpha}^2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \\
& + m_2 \dot{\alpha} \dot{\gamma}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + m_2 \ddot{\beta}_R r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - m_2 \dot{\alpha} \dot{\beta}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + m_2 \dot{\beta}_R^2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - \\
& m_2 \dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - m_2 \ddot{\gamma}_R r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + m_2 \dot{\alpha} \dot{\gamma}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - m_2 \dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \\
& \left. m_2 \dot{\gamma}_R^2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \right)
\end{aligned}$$

También tenemos que:

$$Q_i = F_{x_0} = F_{L_x} + F_{R_x}$$

El conjunto de ecuaciones de Lagrange puede ser descrito de la siguiente manera, ecuación 7.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = T \quad (7)$$

Donde D es la matriz inercial, C es el vector de fuerzas centrípetas y de coriolis, G es el vector de efectos gravitacionales y T es el vector de momentos (torque externos generalizados) sobre cada segmento.

De esta manera los componentes de la matriz inercial quedaran de la siguiente forma:

$$D_{11} = m_0 + 2m_1 + 2m_2$$

$$D_{12} = 0$$

$$D_{13} = (-2m_1r_0 - 2m_2r_0)\cos(\alpha) + (-l_1m_2 - m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) - l_1m_2\cos(\alpha - \beta_R) - m_1r_1\cos(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{14} = (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$D_{15} = (l_1m_2 + m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{16} = -m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$D_{17} = -m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{21} = 0$$

$$D_{22} = m_0 + 2m_1 + 2m_2$$

$$D_{23} = (2m_1r_0 + 2m_2r_0)\sin(\alpha) + (l_1m_2 + m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) + l_1m_2\sin(\alpha - \beta_R) + m_1r_1\sin(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{24} = (-l_1m_2 - m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) - m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$D_{25} = (-l_1m_2 - m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{26} = m_2r_2\sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$D_{27} = m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{31} = (-2m_1r_0 - 2m_2r_0)\cos(\alpha) + (-l_1m_2 - m_1r_1)\cos(\alpha - \beta_L) - l_1m_2\cos(\alpha - \beta_R) - m_1r_1\cos(\alpha - \beta_R) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - m_2r_2\cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{32} = (2m_1r_0 + 2m_2r_0)\sin(\alpha) + (l_1m_2 + m_1r_1)\sin(\alpha - \beta_L) + l_1m_2\sin(\alpha - \beta_R) + m_1r_1\sin(\alpha - \beta_R) + m_2r_2\cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + m_2r_2\sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{33} = 2l_1^2m_2 + 2m_1r_0^2 + 2m_2r_0^2 + 2m_1r_1^2 + 2m_2r_2^2 + (2l_1m_2r_0 + 2m_1r_0r_1)\cos(\beta_L) + (2l_1m_2r_0 + 2m_1r_0r_1)\cos(\beta_R) + 2m_2r_0r_2\cos(\beta_L - \gamma_L) + 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_L) + 2m_2r_0r_2\cos(\beta_R - \gamma_R) + 2l_1m_2r_2\cos(\gamma_R)$$

$$\begin{aligned}
D_{34} &= -l_1^2 m_2 - m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2 + (-l_1 m_2 r_0 - m_1 r_0 r_1) \cos(\beta_L) - m_2 r_0 r_2 \cos(\beta_L - \gamma_L) - 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_L) \\
D_{35} &= -l_1^2 m_2 - m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2 + (-l_1 m_2 r_0 - m_1 r_0 r_1) \cos(\beta_R) - m_2 r_0 r_2 \cos(\beta_R - \gamma_R) - 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_R) \\
D_{36} &= m_2 r_2 (r_2 + r_0 \cos(\beta_L - \gamma_L) + l_1 \cos(\gamma_L)) \\
D_{37} &= m_2 r_2 (r_2 + r_0 \cos(\beta_R - \gamma_R) + l_1 \cos(\gamma_R)) \\
D_{41} &= (l_1 m_2 + m_1 r_1) \cos(\alpha - \beta_L) + m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
D_{42} &= (-l_1 m_2 - m_1 r_1) \sin(\alpha - \beta_L) - m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
D_{43} &= -l_1^2 m_2 - m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2 + (-l_1 m_2 r_0 - m_1 r_0 r_1) \cos(\beta_L) - m_2 r_0 r_2 \cos(\beta_L - \gamma_L) - 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_L) \\
D_{44} &= l_1^2 m_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_L) \\
D_{45} &= 0 \\
D_{46} &= m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_L)) \\
D_{47} &= 0 \\
D_{51} &= (l_1 m_2 + m_1 r_1) \cos(\alpha - \beta_R) + m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
D_{52} &= (-l_1 m_2 - m_1 r_1) \sin(\alpha - \beta_R) - m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
D_{53} &= -l_1^2 m_2 - m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2 + (-l_1 m_2 r_0 - m_1 r_0 r_1) \cos(\beta_R) - m_2 r_0 r_2 \cos(\beta_R - \gamma_R) - 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_R) \\
D_{54} &= 0 \\
D_{55} &= l_1^2 m_2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 2l_1 m_2 r_2 \cos(\gamma_R) \\
D_{56} &= 0 \\
D_{57} &= m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_R)) \\
D_{61} &= -m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
D_{62} &= m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
D_{63} &= m_2 r_2 (r_2 + r_0 \cos(\beta_L - \gamma_L) + l_1 \cos(\gamma_L)) \\
D_{64} &= m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_L))
\end{aligned}$$

$$D_{65} = 0$$

$$D_{66} = m_2 r_2^2$$

$$D_{67} = 0$$

$$D_{71} = -m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{72} = m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$D_{73} = m_2 r_2 (r_2 + r_0 \cos(\beta_R - \gamma_R) + l_1 \cos(\gamma_R))$$

$$D_{74} = 0$$

$$D_{75} = m_2 r_2 (-r_2 - l_1 \cos(\gamma_R))$$

$$D_{76} = 0$$

$$D_{77} = m_2 r_2^2$$

El vector de efectos gravitacionales estará dado en términos de q como:

$$G_1 = 0$$

$$G_2 = 2gm_2 + 2gm_1 + gm_0$$

$$G_3 = gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + gl_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) + gm_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + gl_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) + gm_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + 2gm_2 r_0 \sin(\alpha) + 2gm_1 r_0 \sin(\alpha)$$

$$G_4 = -gl_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) - gr_1 m_1 \sin(\alpha - \beta_L) - gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$G_5 = -gl_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) - gr_1 m_1 \sin(\alpha - \beta_R) - gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$G_6 = gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$G_7 = gm_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

Los elementos del vector de fuerzas centrípetas y de coriolis son derivados en términos de q y $\dot{q}$ como:

$$\begin{aligned}
C_1 = & 2\dot{\alpha}^2 m_1 r_0 \sin(\alpha) + \dot{\beta}_R^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) \\
& + \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) + \dot{\gamma}_R^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\beta}_L^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\beta}_L^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_R^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) \\
& + \dot{\alpha}^2 m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\beta}_L^2 l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_L) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 \sin(\alpha - \beta_R) \\
& - 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) \\
& - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_L) + 2\dot{\alpha}^2 m_2 r_0 \sin(\alpha) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_1 \sin(\alpha - \beta_R) + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - F_{Rx} - F_{Lx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & \dot{\beta}_L^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + \dot{\gamma}_R^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\beta}_R^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& + \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R) + \dot{\beta}_R^2 m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) + \dot{\alpha}^2 (2m_1 + 2m_2) r_0 \cos(\alpha) + \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) + \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) - \dot{\alpha}^2 m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 \cos(\alpha - \beta_R) - 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) \\
& + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_1 \cos(\alpha - \beta_R) + (\dot{\alpha}\dot{\beta}_L (-2m_1 l_2 - 2m_1 r_1) - \dot{\alpha}^2 (m_1 l_2 + m_1 r_1) \\
& - \dot{\beta}_L^2 (l_1 m_2 + m_1 r_1)) \cos(\alpha - \beta_L) - F_{Ry} - F_{Ly}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & -\dot{\gamma}_R^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + \dot{\gamma}_R^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) + \dot{\beta}_R^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) - \dot{\gamma}_L^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) + \dot{\gamma}_L^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) + \dot{\beta}_R^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) \\
& + \dot{\beta}_L^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) + \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_R) + \dot{\beta}_L^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) + \dot{\beta}_L^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) - 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) \\
& - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) \\
& + 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) + 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) - 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R)
\end{aligned}$$

$$C_4 = \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) + \dot{\alpha}^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_L) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) - 2\dot{\beta}_L \dot{\gamma}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) + \dot{\gamma}_L^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L)$$

$$C_5 = \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_0 \sin(\beta_L) + \dot{\alpha}^2 m_1 r_0 r_1 \sin(\beta_R) + \dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) + 2\dot{\alpha}\dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) - 2\dot{\beta}_R \dot{\gamma}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + \dot{\gamma}_R^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R)$$

$$C_6 = -\dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_L - \gamma_L) + \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_L l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L) + \dot{\beta}_L^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_L)$$

$$C_7 = -\dot{\alpha}^2 m_2 r_0 r_2 \sin(\beta_R - \gamma_R) + \dot{\alpha}^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) - 2\dot{\alpha}\dot{\beta}_R l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R) + \dot{\beta}_R^2 l_1 m_2 r_2 \sin(\gamma_R)$$

El vector de momentos (torque externos generalizados) sobre cada segmento estará dado por:

$$T_1 = 0$$

$$T_2 = 0$$

$$T_3 = F_{Ry} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + F_{Lx} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - F_{Rx} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) - F_{Lx} l_1 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + F_{Ly} r_0 \sin(\alpha) + F_{Ry} r_0 \sin(\alpha) + F_{Ly} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) + F_{Ly} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + F_{Ry} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - (F_{Lx} r_0 + F_{Rx} r_0) \cos(\alpha) - F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$T_4 = M_{L1} + F_{Lx} l_1 \cos(\alpha - \beta_L) + F_{Lx} l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) - F_{Ly} l_1 \sin(\alpha - \beta_L) - F_{Ly} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

$$T_5 = M_{R1} + F_{Lx} l_1 \cos(\alpha - \beta_R) - F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) - F_{Ry} l_1 \sin(\alpha - \beta_R) - F_{Ry} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

$$T_6 = M_{L2} - F_{Lx} l_2 \cos(\alpha - \beta_L + \gamma_L) + F_{Ly} l_2 \sin(\alpha - \beta_L + \gamma_L)$$

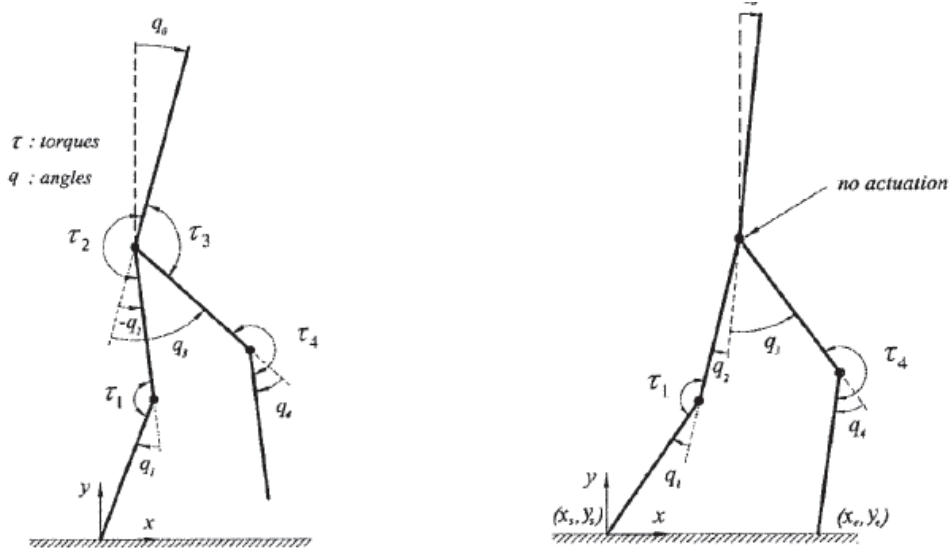
$$T_7 = M_{R2} - F_{Rx} l_2 \cos(\alpha - \beta_R + \gamma_R) + F_{Ry} l_2 \sin(\alpha - \beta_R + \gamma_R)$$

6.2 PLANTEAMIENTO DE OTROS MODELOS

6.2.1 Exoskeletal device for rehabilitaci3n

El modelo mostrado en figura 2.3 plantea las ecuaciones con 5 coordenadas generalizadas que describen el movimiento de la marcha de un b3pedo en el plano sagital. El modelo consta de 5 segmentos los cuales representan un torso y dos piernas articuladas en rodilla y cadera. El contacto del pie con el piso ha sido modelado como un punto de contacto (pivote), con un grado de libertad para cada pierna aunque la posici3n del pie es fijada durante cada fase [4].

Figura 6. Coordenadas generalizadas y momentos en fase de soporte simple y doble



En la fase de soporte doble se tienen 3 GDL y con ello tres coordenadas generalizadas independientes. Las ecuaciones de movimiento del b3pedo en esta fase pueden ser escritas como se presenta en la ecuaci3n 8.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = T \quad (8)$$

El b3pedo en fase de soporte simple tiene 5 GDL. As3 las cinco coordenadas generalizadas son independientes. Las ecuaciones de movimiento del b3pedo en esta fase pueden ser escritas como se presenta en la ecuaci3n 9.

$$D(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q}) + G(q) = T + J^T \lambda \quad (9)$$

Donde λ es el multiplicador de lagrange asociado a las restricciones cinemáticas.

Las ecuaciones del bípedo en las dos fases son similares excepto por la adición de las fuerzas de restricción en la fase de soporte doble y la diferencia en el mínimo numero requerido de actuadores activos

6.3 ANÁLISIS

6.3.1 Modelo de siete GDL. Es el modelo más general para representar el movimiento de un bípedo. Las ventajas de este modelo están en su dinámica es continua, esta constituida de ecuaciones diferenciales ordinarias y la fase de soporte doble es fácilmente definida. Sin embargo hay importantes inconvenientes. Primero, la superficie de marcha es usualmente bastante rígida, lo cual nos genera problemas de integración para la ecuación diferencial. Segundo, no se sabe como escoger parámetros razonables para un completo modelo de contacto. Por ultimo el modelo se convierte en alto orden y es extremadamente difícil de analizar.

6.3.2 Modelo de cinco GDL. Para este caso no hay fuerzas al final del paso. En fase de soporte simple se tienen 5 grados de libertad y las consideraciones facilitan el análisis. En fase de soporte doble se debe realizar una apropiada hipótesis de contacto, y a partir de un análisis similar al de fase simple se puede llegar a un modelo de tres grados de libertad (las dos restricciones adicionales en la otra pierna eliminan dos grados de libertad mas). En este caso el robot tiene un grado de subactuación (3 GDL y 4 actuadores) el cual puede ser considerado como una ventaja para el diseño del control.

REFERENCIAS

- [1] Olli Haavisto, Heikki Hyötyniemi. Simulation Tool of a Biped Walking Robot Model. Ms, Thesis. Helsinki University of Technology Control Engineering Laboratory. March 2004.
- [2] Well, D. A. Lagrangian Dynamics with a treatment of Euler's Equations of motion. (McGraw.Hill, New York, 1967)
- [3] Greenwood, D. T. Classical Dynamics. (Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1977).
- [4] Hashem Ashrafiuon, Mehdi Nikkhah Wayne, PA (US). Exoskeletal device for rehabilitation. United States Patent, US 7,190,144 B1, Mar. 13, 2007.

B. Evaluación de cada uno de los actuadores preseleccionados.

Motor Harmonic Drive FHA-17C-100

Figura 17. Curva Torque Vs Velocidad angular para la rodilla, motor FHA-17C-100.

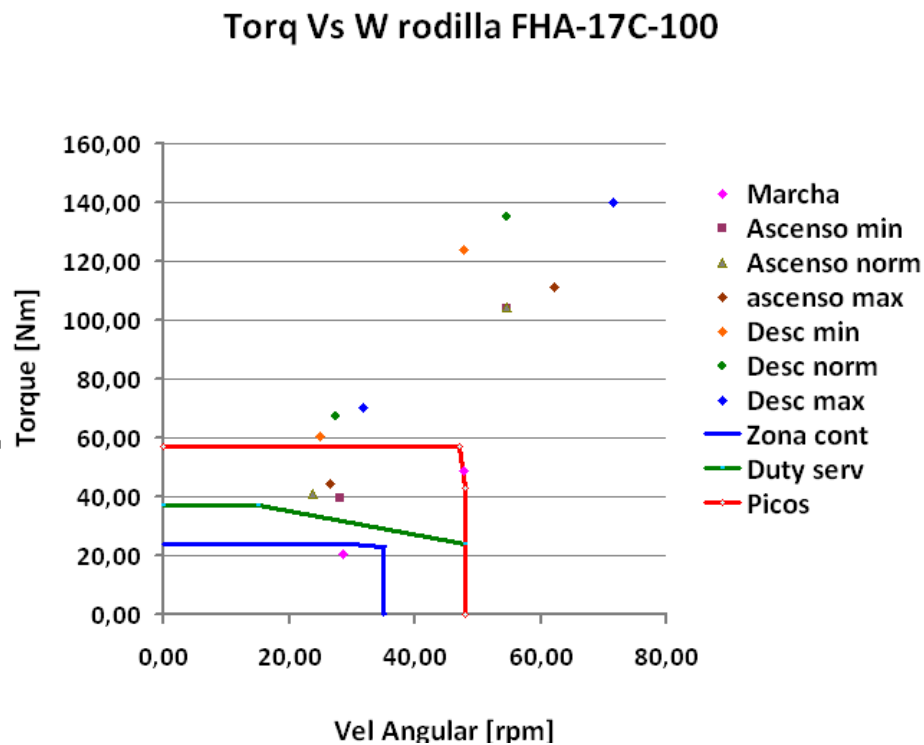


Figura 18. Curva Torque Vs Velocidad angular para la cadera, motor FHA-17C-100

Torq Vs W cadera FHA-17C-100

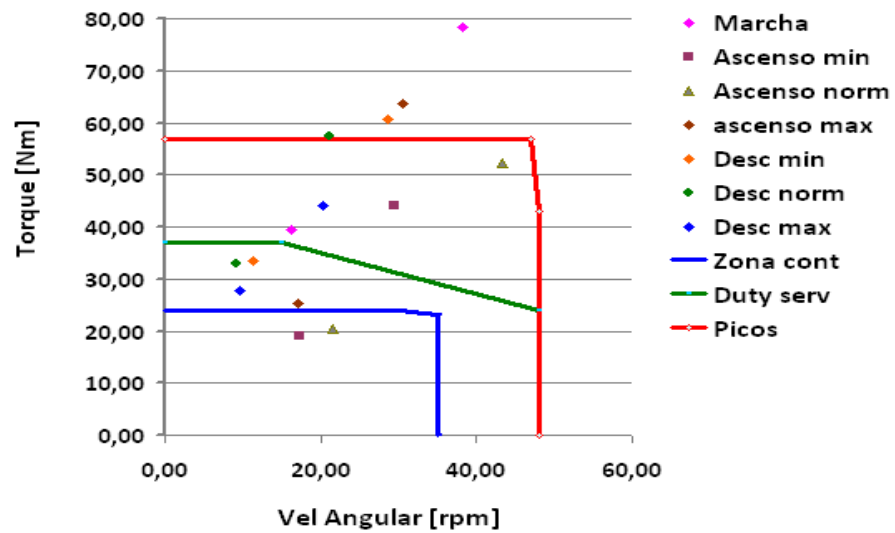


Tabla 3. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación continuas.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-17C-100		FHA-17C-100	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	√	√	√	√
BAJAR ESCALERAS	x	x	√	√
MARCHA	√	√	√	√
PESO MOTOR SIN FRENO [Kg]	2.9		2.9	
PESO MOTOR CON FRENO [Kg]	3.4		3.4	

Tabla 4. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación máximas.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-17C-100		FHA-17C-100	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	x	x	√	√
BAJAR ESCALERAS	x	x	x	√
MARCHA	√	√	x	√

Como se puede ver en las tablas 3 y 4 este actuador no cumple con varios de los requerimientos tanto en condiciones continuas como máximas para rodilla y cadera, por lo tanto, no aplica para el exoesqueleto.

Motor Harmonic Drive FHA-17C-160

Figura 19. Curva Torque Vs Velocidad angular para la rodilla, motor FHA-17C-160.

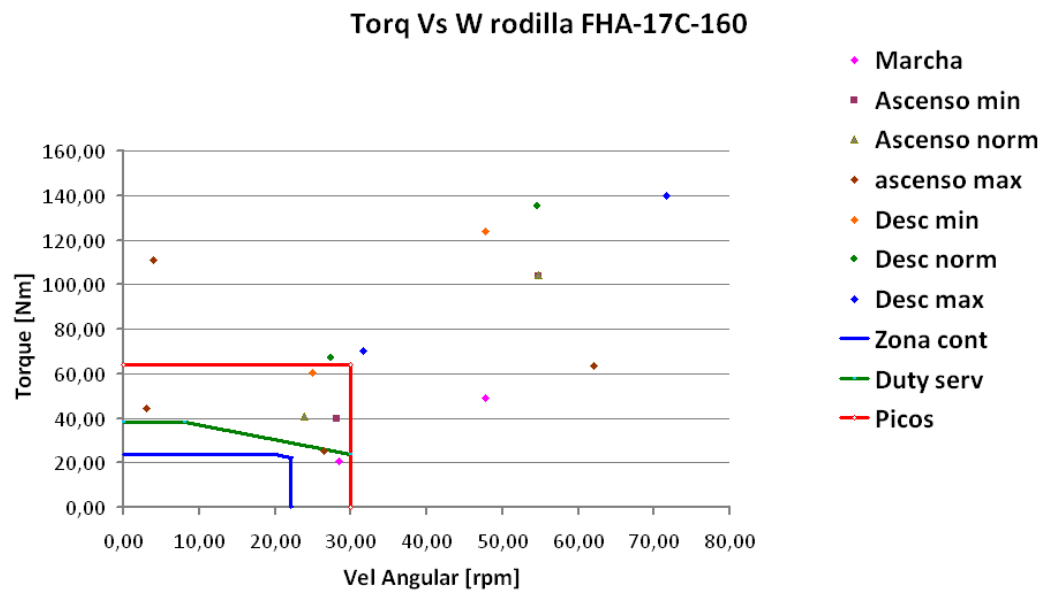


Figura 20. Curva Torque Vs Velocidad angular para la cadera, motor FHA-17C-160.

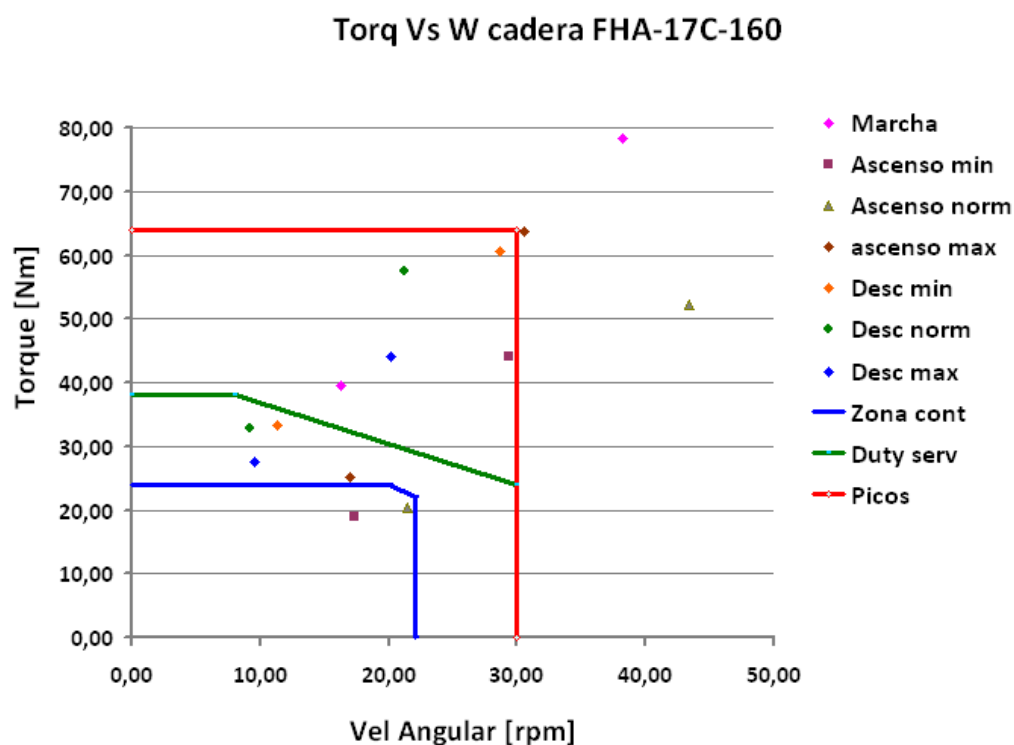


Tabla 5. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación continuas.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-17C-160		FHA-17C-160	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	√	√	√	√
BAJAR ESCALERAS	√	x	√	√
MARCHA	√	√	√	√
PESO MOTOR SIN FRENO [Kg]	2.9		2.9	
PESO MOTOR CON FRENO [Kg]	3.4		3.4	

Tabla 6. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación máxima.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-17C-160		FHA-17C-160	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	x	x	√	√
BAJAR ESCALERAS	x	x	√	x
MARCHA	√	x	x	x

A pesar que este actuador tiene mayor reducción, es decir mayor torque y menor velocidad angular, no cumple con los requerimientos establecidos en algunas actividades.

Motor Harmonic Drive FHA-25C-50

Figura 21. Curva Torque Vs Velocidad angular para la rodilla, motor FHA-25C-50.

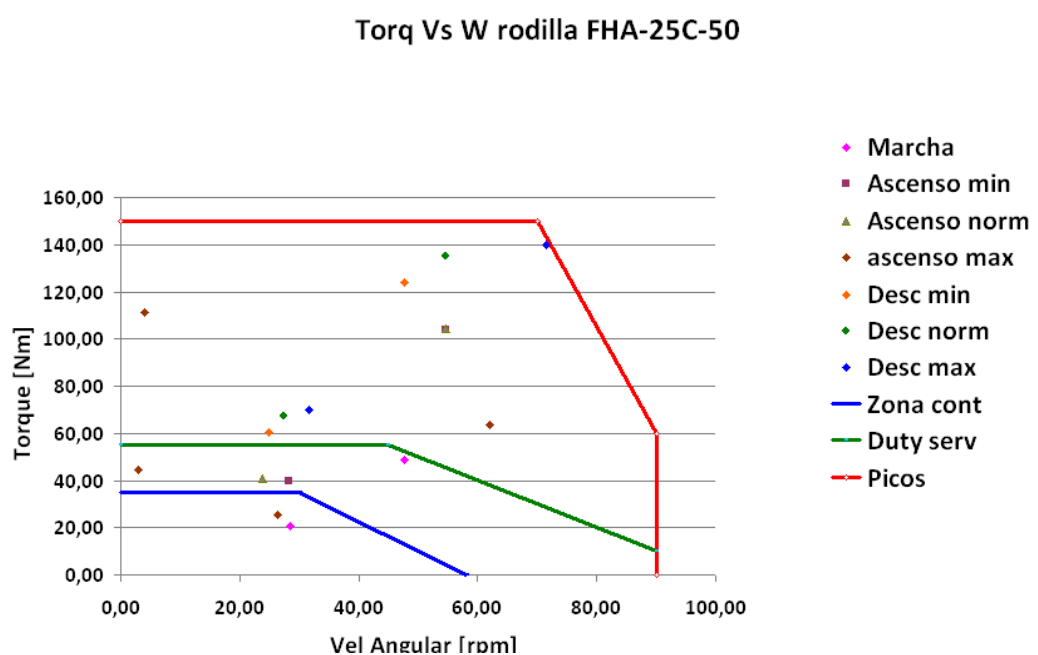


Figura 14. Curva Torque Vs Velocidad angular para la cadera, motor FHA-25C-50.

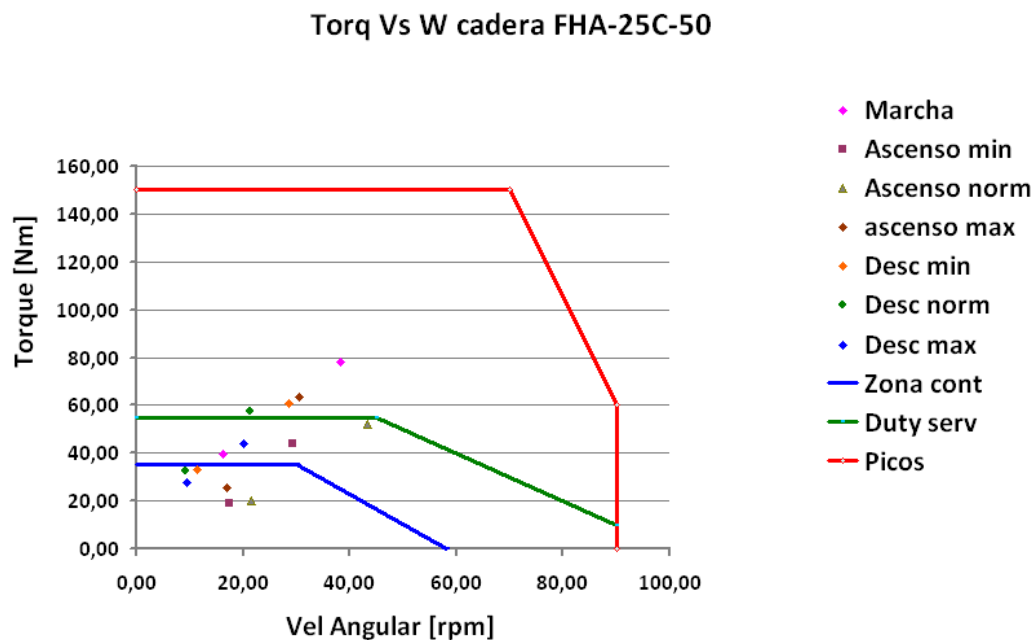


Tabla 7. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación continua.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-25C-50		FHA-25C-50	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	√	√	√	√
BAJAR ESCALERAS	√	√	√	√
MARCHA	√	√	√	√
PESO MOTOR SIN FRENO [Kg]	4.5		4.5	
PESO MOTOR CON FRENO [Kg]	5		5	

Tabla 8. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación máxima.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-25C-50		FHA-25C-50	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	√	√	√	√
BAJAR ESCALERAS	√	√	√	√
MARCHA	√	√	√	√

Este actuador cumple con los requerimientos para condiciones continuas y máximas, tiene un inconveniente y es su gran peso, lo que hace descartarlo para este tipo de aplicación.

Motor Harmonic Drive CHA-20A-100

Figura 23. Figura 14. Curva Torque Vs Velocidad angular para la rodilla, motor CHA-20A-100.

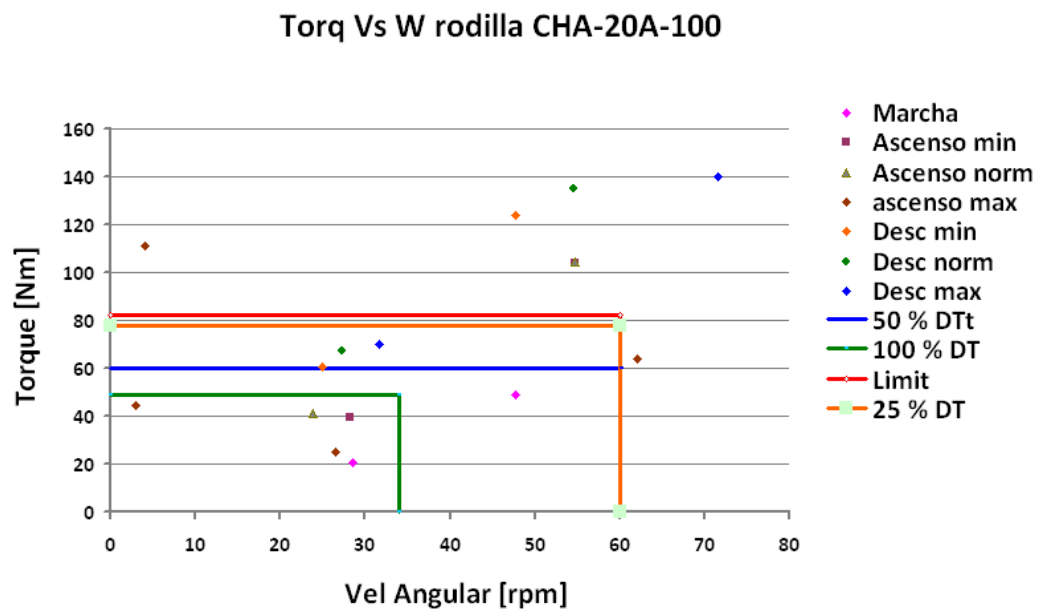


Figura 24. Curva Torque Vs Velocidad angular para la cadera, motor CHA-20A-100.

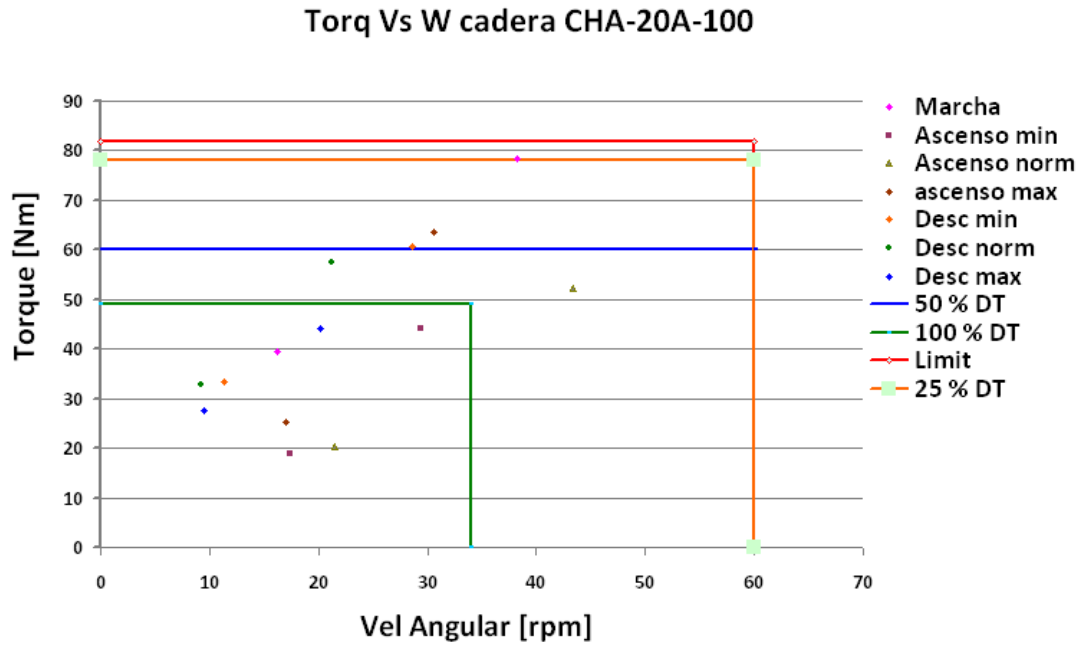


Tabla 9. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación continua.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-20C-100		FHA-20C-100	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	√	√	√	√
BAJAR ESCALERAS	√	x	√	√
MARCHA	√	√	√	√
PESO MOTOR SIN FRENO [Kg]	3.2		3.2	
PESO MOTOR CON FRENO [Kg]	3.9		3.9	

Tabla 10. Requerimientos que se cumplen para cadera y rodilla en condiciones de operación máxima.

ACTIVIDAD	Rodilla		Cadera	
	FHA-20C-100		FHA-20C-100	
	Torque	Velocidad angular	Torque	Velocidad angular
SUBIR ESCALERAS	√	x	√	√
BAJAR ESCALERAS	√	x	√	√
MARCHA	√	√	√	√

Este actuador no cumple con los requerimientos de velocidad para el ascenso y descenso de escaleras en condiciones máximas pero alcanza los torques requeridos para realizar todas las actividades del diario vivir. Por lo tanto, si tenemos en cuenta su reducido peso comparado con los demás actuadores, podríamos sacrificar algo de velocidad para obtener el beneficio de peso. Por otro lado, los requerimientos que se definieron para la selección de actuadores fueron hechos a partir de estudios realizados en personas saludables y según otros estudios realizados en personas con algún tipo de discapacidad, la velocidad angular para realizar terapia o cualquier otra actividad es reducida [2].