

Complejos simpliciales Cohen-Macaulay

Fernando Andrés Benavides
Universidad de Nariño

Mario Estrada Valdés
Universidad de Antioquia

Recibido Jul. 10, 2008

Aceptado May. 11, 2010

Abstract

In this paper we study the grafted simplicial complex, introduced by Sara Faridi, as higher-dimensional graphs. We obtain combinatorial properties of interest of this class of complexes, which allow us to demonstrate that the property of a simplicial complex being Cohen-Macaulay is related to certain subcomplexes of it. As a consequence we obtain an alternative proof of Faridi's theorem: every grafted facet complex is Cohen-Macaulay.

Keywords: Facet complex, complex grafted, Cohen-Macaulay

MSC(2000): Primary 13C14. Secondary 05C65

Resumen

En este artículo estudiamos los complejos simpliciales de suspensión introducidos por Sara Faridi, vistos como hipergrafos. Se obtienen propiedades combinatorias de interés de esta clase de complejos, que permiten demostrar, que la propiedad de un complejo simplicial de ser Cohen-Macaulay está estrechamente relacionada con ciertos subcomplejos del mismo. En consecuencia se demuestra por otra vía el teorema de Faridi: Todo complejo facet de suspensión es Cohen-Macaulay.

Palabras y frases claves: Complejo facet, complejo de suspensión, Cohen-Macaulay

1 Introducción

Un clutter o hipergrafo simple sobre un conjunto de vértices $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, es una familia de subconjuntos de V , llamados aristas, ninguno de los cuales está incluido en otro. Un ejemplo básico de clutter es un grafo. Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]$, el anillo de polinomios sobre un campo k en n variables e I un ideal de R generado por un conjunto finito $x^{v_1}, \dots, x^{v_q}$ de monomios libres de cuadrados que forman un conjunto minimal de generadores. Al ideal I se le asocia un clutter $\mathcal{C}$ tomando el conjunto de indeterminadas V como el conjunto de los vértices y a $S_1, \dots, S_q$ como el conjunto de aristas donde $S_i = \text{supp}(x^{v_i})$, es el soporte de x^{v_i} , i.e. es el conjunto de las variables que ocurren en x^{v_i} . Por esta razón I se denomina el ideal de aristas (edge ideal) de $\mathcal{C}$, y se denota $I = I(\mathcal{C})$. Los ideales de aristas de los clutters se llaman también ideales de facets del complejo simplicial $\langle S_1, \dots, S_q \rangle$, generado por $S_1, \dots, S_q$. A $I = I(\mathcal{C})$ se le hace corresponder también un complejo simplicial, vía la correspondencia de Stanley-Reisner, que se denota por $\Delta_{\mathcal{C}}$. Recordemos que F es una facet de $\Delta_{\mathcal{C}}$ si y sólo si V/F es un cubrimiento minimal de $\mathcal{C}$. Se dice que el clutter $\mathcal{C}$ es shellable si $\Delta_{\mathcal{C}}$ es shellable. Tal como en el caso de los grafos, se dice que el clutter $\mathcal{C}$ es Cohen-Macaulay si el anillo $R/I(\mathcal{C})$ es Cohen-Macaulay. En [2] se demuestra que todo grafo de suspensión es $\mathcal{C}$ - M y Faridi, después de definir los complejos facet de suspensión prueba, en [4],

Teorema 1. *Todo complejo facet de suspensión es Cohen-Macaulay.*

En este artículo se demuestra el resultado de Faridi mencionado anteriormente, empleando las técnicas de Villarreal, desarrolladas en [2], que permiten decidir si un grafo es $C-M$ a partir de que algunos de sus subgrafos lo sean. Este trabajo se divide en dos partes, en la primera conformada por las secciones 3 y 4, se hace uso del lema 6.8 de [1]: Un clutter $\mathcal{C}$ es de suspensión si y sólo si cada una de sus hojas es reducible, para demostrar:

Proposición 1. *Para toda hoja $F \in \mathcal{C}$, existe un vértice $z \in F$ tal que $\mathcal{C} \setminus \{z\}$ es un complejo de suspensión.*

Finalmente, en la sección 4, se introducen construcciones similares a las de Villarreal, desarrolladas en [2], del modo siguiente. Para cada hoja $F \in \mathcal{C}$, sea z_1 el vértice que existe por la proposición 1. y sean $\{z_2, \dots, z_t\}$ los vértices adyacentes a z_1 , y que tienen la misma propiedad que z_1 , pertenecientes a las hojas $F_2, \dots, F_t$ entonces si $\mathcal{C}_G = \mathcal{C} \setminus \{z_1\}$ y $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_G \setminus \{z_2, \dots, z_t\}$, el teorema principal establece:

Teorema 2. *Si $\mathcal{C}_F$ y $\mathcal{C}_G$ son complejos Cohen-Macaulay entonces $\mathcal{C}$ es Cohen-Macaulay.*

De este modo, el resultado de Faridi de nuestro interés resulta directamente por inducción sobre el número de hojas de $\mathcal{C}$.

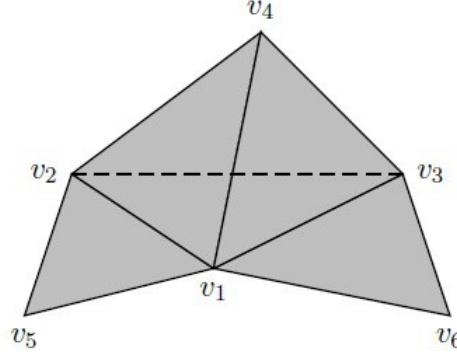
Para la segunda parte del artículo el papel central lo juega el Teorema 2.16 de [5], que enuncia: Sea $\mathcal{C}$ un clutter con un pareo perfecto de tipo König $\{e_1, \dots, e_g\}$. Si para cada par de aristas f_1 y f_2 de $\mathcal{C}$, y para cada arista del pareo perfecto e_i se tiene que f_1 intersecado con e_i está contenido en f_2 intersecado con e_i , o recíprocamente, entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es puramente shellable. Como todo clutter de suspensión posee pareo perfecto de tipo König, en que los e_i son precisamente sus hojas F_i , $i \in \{1, \dots, g\}$ y por la Proposición 2. en que cada hoja de tal tipo del clutter es reducible, lo que equivale a la propiedad final del teorema, la conclusión es inmediata.

2 Preliminares

Incluimos aquí los conceptos y propiedades principales que emplearemos en las pruebas de los resultados principales, y que en general son similares a los conocidos para grafos.

Definición 1. *Un complejo simplicial sobre un conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una colección Δ de subconjuntos de V , con las siguientes propiedades:*

- (i) $\{v_i\} \in \Delta$ para todo i
- (ii) Si $G \subseteq F$ y $F \in \Delta$ entonces $G \in \Delta$.

Figura 1: Representación geométrica del complejo facet $\mathcal{C}_1$.

Los elementos maximales de Δ , bajo la inclusión, se llaman *facets* de Δ .

Dado que solamente estamos interesados en las facets de un complejo simplicial, es conveniente que trabajemos con la siguiente definición

Definición 2. Un complejo facet o clutter sobre un conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de V tal que para todo $F, G \in \mathcal{C}$, $F \subseteq G$ implica que $F = G$. Cada elemento de $\mathcal{C}$ se llama una facet de $\mathcal{C}$.

Denotamos al complejo facet $\mathcal{C}$ con facets $F_1, \dots, F_q$ por

$$\mathcal{C} = \langle F_1, \dots, F_q \rangle.$$

En la figura 1, se representa el complejo facet $\mathcal{C}_1 = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ donde $F_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $F_2 = \{v_1, v_2, v_5\}$ y $F_3 = \{v_1, v_3, v_6\}$.

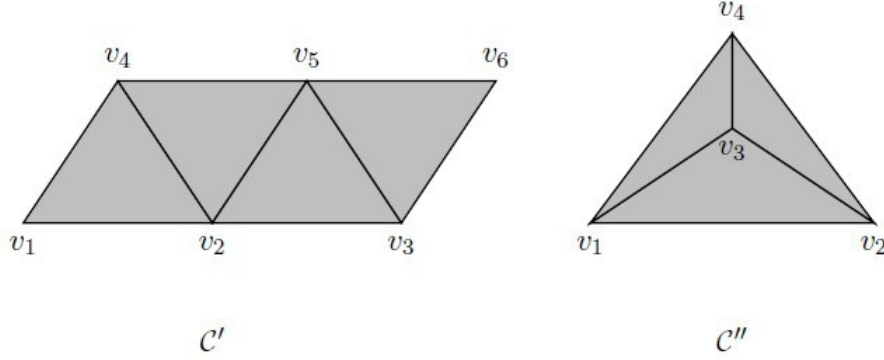
En este artículo solamente se consideran complejos facet conexos, es decir aquellos en los cuales para cada par de facets F y G existe una sucesión de facets $F_1, \dots, F_n$ tales que $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$, $F_1 = F$ y $F_n = G$. Cuando trabajamos con varios complejos facet es conveniente denotar por $V(\mathcal{C})$ al conjunto de vértices del complejo facet $\mathcal{C}$.

Definición 3. Un subcomplejo de un complejo facet $\mathcal{C}$ es un complejo facet cuyo conjunto facet es un subconjunto del conjunto facet de $\mathcal{C}$.

Definición 4. Sea $\mathcal{C}$ un complejo facet con conjunto de vértices V y conjunto facet $\{F_1, \dots, F_r\}$. Un cubrimiento por vértices para $\mathcal{C}$ es un subconjunto C de V , con la propiedad que $F_i \cap C \neq \emptyset$ para todo i . Además si no existe subconjunto propio de C con esta propiedad, C se llama un cubrimiento minimal por vértices para $\mathcal{C}$.

Definición 5. El número de cobertura por vértices de $\mathcal{C}$, denotado por $\alpha(\mathcal{C})$, es el mínimo cardinal de cualquier cubrimiento por vértices, es decir:

$$\alpha(\mathcal{C}) = \min\{|C| : C \text{ es un cubrimiento por vértices para } \Delta\}$$

Figura 2: Complejos facet $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$.

Observación 1. Supongamos que $\mathcal{C}$ es un complejo facet sobre el conjunto de vértices $V(\mathcal{C}) = \{x_1, \dots, x_n\}$ y consideremos el ideal asociado a $\mathcal{C}$, $I(\mathcal{C})$, entonces el siguiente resultado debido a Faridi, en [4], evidencia la relación existente entre los complejos facet y su ideal asociado: $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ es un primo minimal de $I(\mathcal{C})$ si y solo si $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ forma un cubrimiento minimal para $\mathcal{C}$. De lo anterior se deduce la siguiente relación

$$ht(I(\mathcal{C})) = \alpha(\mathcal{C}).$$

Por ejemplo en la figura 2 se tienen dos complejos, donde cualquier cubrimiento minimal por vértices para $\mathcal{C}'$ tiene cardinal 2, mientras que para el complejo facet $\mathcal{C}''$ se tiene que $C_1 = \{v_3\}$ y $C_2 = \{v_1, v_2\}$ son cubrimientos minimales por vértices para $\mathcal{C}''$. De ahí que $ht(I(\mathcal{C}')) = 2$ y $ht(I(\mathcal{C}'')) = 1$.

Definición 6. Un complejo facet $\mathcal{C}$ es unmixed si todos los cubrimientos minimales por vértices para $\mathcal{C}$ tienen la misma cardinalidad.

Definición 7. Sea $v \in V(\mathcal{C})$ entonces se define el grado de v , que se denota por $deg(v)$, como el cardinal de todas las facets $F \in \mathcal{C}$ tales que $v \in F$, esto es

$$deg(v) = |\{F \in \mathcal{C} \mid v \in F\}|$$

Definición 8. Sean $v, w \in V(\mathcal{C})$, se dice que v y w son vértices adyacentes si existe una facet F de $\mathcal{C}$ tal que $v, w \in F$. En tal caso diremos que F es una facet adyacente a v y w .

Definición 9. Sea $\mathcal{C}$ un complejo facet y v un vértice de $\mathcal{C}$, el subcomplejo de $\mathcal{C}$ obtenido al remover el vértice v de $\mathcal{C}$, denotado por $\mathcal{C} \setminus \{v\}$, es el complejo facet compuesto por todas las facets F de $\mathcal{C}$ tales que $v \notin F$.

Definición 10. Sea $\mathcal{C}$ un complejo facet. Una facet F de $\mathcal{C}$ se llama una hoja si F es la única facet de $\mathcal{C}$, o existe una facet G de $\mathcal{C} \setminus \langle F \rangle$ tal que

$$F \cap F' \subseteq F \cap G$$

para toda $F' \in \mathcal{C} \setminus \langle F \rangle$. El conjunto de todas las facets G con esta propiedad, denotado por $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}(F)$, se llama el conjunto universal de F en $\mathcal{C}$. Si $G \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}(F)$ y $F \cap G \neq \emptyset$, entonces G se llama una rama de F .

Definición 11. Un vértice de un complejo facet $\mathcal{C}$ es libre si pertenece a solamente una facet de $\mathcal{C}$.

Es claro, a partir de la definición, que toda hoja contiene un vértice libre.

Definición 12. Un complejo facet $\mathcal{C}$ es una suspensión de un complejo facet $\mathcal{C}' = \langle G_1, \dots, G_s \rangle$ con las facets $F_1, \dots, F_r$ si

$$\mathcal{C} = \langle F_1, \dots, F_r \rangle \cup \langle G_1, \dots, G_s \rangle$$

con las siguientes propiedades:

- (i) $V(\mathcal{C}') \subseteq V(F_1) \cup \dots \cup V(F_r)$
- (ii) $F_1, \dots, F_r$ son todas las hojas de $\mathcal{C}$
- (iii) $\{G_1, \dots, G_s\} \cap \{F_1, \dots, F_r\} = \emptyset$
- (iv) Para $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$
- (v) Si G_i es una rama de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{C} \setminus \langle G_i \rangle$ es igualmente de suspensión.

Observemos que si $\mathcal{C}$ es un complejo facet el cual consiste de solamente una facet o de varias facet disjuntas por pares, entonces $\mathcal{C}$ es necesariamente de suspensión, el cual puede ser considerado como la suspensión del complejo facet $\mathcal{C} = \emptyset$. Por otro lado es claro, a partir de la definición de suspensión, que la unión de dos o más complejos facet de suspensión es de suspensión. En la figura 3 se muestran tres suspensiones diferentes de un complejo $\mathcal{G}$ conformado por las facets G_1 y G_2 .

Definición 13. Una facet F de un complejo $\mathcal{C}$ se llama reducible, si para todo G y G' en $\mathcal{C}$ se tiene que,

$$G \cap F \subseteq G' \cap F \text{ o } G' \cap F \subseteq G \cap F$$

Es claro, a partir de la definición anterior, que si F es una facet reducible entonces F es una hoja.

Proposición 2. Un complejo facet $\mathcal{C}$ es de suspensión si y solo si (compare con Faridi, [1])

- i) Para cada vértice $v \in \mathcal{C}$, existe una única hoja F tal que $v \in F$.
- ii) Todas las hojas de $\mathcal{C}$ son reducibles.

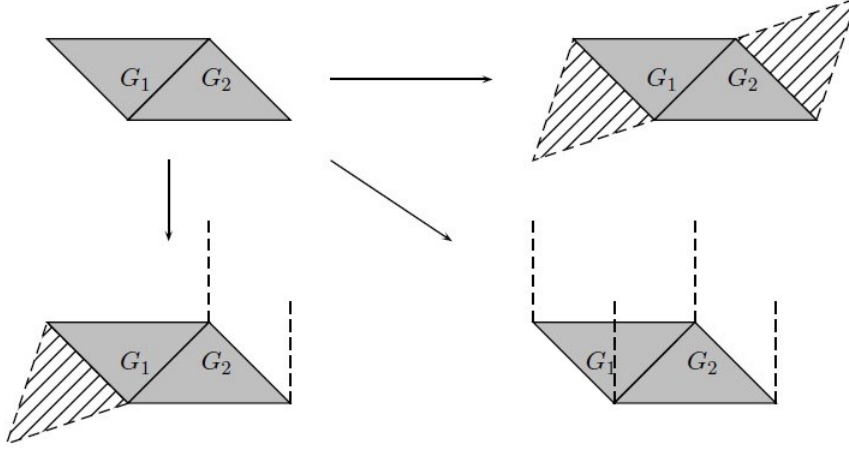


Figura 3: Diferentes suspensiones del complejo $\mathcal{G} = \langle G_1, G_2 \rangle$

Si $\mathfrak{F}_i$ denota el conjunto de facets adyacentes al vértice v_i , entonces es fácil probar el siguiente lema.

Lema 2. *Si $F = \{v_1, \dots, v_r\}$ es una hoja reducible de $\mathcal{C}$ entonces para todo $1 \leq i < j \leq r$ se tiene:*

$$\mathfrak{F}_i \subseteq \mathfrak{F}_j \text{ o } \mathfrak{F}_j \subseteq \mathfrak{F}_i$$

Teorema 3. *Sea $\mathcal{C} = \langle G_1, \dots, G_s \rangle \cup \langle F_1, \dots, F_r \rangle$ una suspensión del complejo $\mathcal{C}' = \langle G_1, \dots, G_s \rangle$ con las facets $F_1, \dots, F_r$. Entonces $\mathcal{C}$ es unmixed con $\alpha(\mathcal{C}) = r$.*

Definición 14. *Un clutter $\mathcal{C}$ tiene la propiedad König si el máximo número de sus aristas disjuntas dos a dos es igual al número de cobertura $\alpha(\mathcal{C})$.*

Definición 15. *Un pareo perfecto de tipo König en un clutter $\mathcal{C}$ es una colección de aristas disjuntas $\{e_1, \dots, e_g\}$, donde $g = ht(I(\mathcal{C}))$ y cuya unión es el conjunto de vértices V .*

Se observa que cada clutter unmixed con la propiedad de König y sin vértices aislados tiene un pareo perfecto de tipo König. En el ejemplo 2.2 de [5] se da un ejemplo, cuando $\mathcal{C}$ no es unmixed, en que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad König, pero no posee pareo perfecto tipo König.

Definición 16. *Un complejo facet $\mathcal{C}$ es shellable si su conjunto de facets puede ordenarse $F_1, \dots, F_s$ de forma tal que para todo $1 \leq i < j \leq s$, existe un vértice $v \in F_j \setminus F_i$ y un número $l \in \{1, \dots, j-1\}$ tal que $F_j \setminus F_l = \{v\}$. La secuencia $F_1, \dots, F_s$ se llama shelling de $\mathcal{C}$.*

Es conocido que shellabilidad implica $C-M$, por tanto el teorema que incluimos en la sección 5: Cada complejo facet de suspensión es shellable, implica el teorema de Faridi.

3 Algunas propiedades de interés y construcción de complejos de suspensión

En esta sección se presentan resultados que en la proxima sección posibilitan la demostración del teorema central de Faridi para los complejos de suspensión, siguiendo técnicas similares a las de Villarreal ([2]). En adelante $\mathcal{C}$ representará un complejo facet de suspensión.

Proposición 3. *Para toda hoja $F \in \mathcal{C}$, existe un vértice $z \in F$ tal que $\mathcal{C} \setminus \{z\}$ es un complejo de suspensión.*

Demostración. Sean F_1 una hoja de $\mathcal{C}$, la cual es reducible por la proposición 2. y $z_1, \dots, z_k$ los vértices de F_1 tales que

$$\deg(z_i) \geq 2 \text{ para } i = 1, \dots, k$$

Luego se tienen los siguientes casos

- ✓ Si $k = 1$, sean $\{F_1, G_1, \dots, G_p\}$ las facets adyacentes a z_1 de ahí que

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \setminus \{z_1\} &= \mathcal{C} \setminus \langle F_1, G_1, \dots, G_p \rangle \\ &= \langle F_2, \dots, F_r \rangle \cup \langle G_{p+1}, \dots, G_s \rangle \end{aligned}$$

Dado que $F_2, \dots, F_r$ siguen siendo las únicas hojas del complejo $\mathcal{C} \setminus \{z_1\}$, las cuales además son reducibles, por la proposición 2. basta con mostrar

$$G_{p+1} \cup \dots \cup G_s \subseteq F_2 \cup \dots \cup F_r$$

Supongamos que existe $z' \in G_{p+1} \cup \dots \cup G_s$ tal que $z' \in F_1$, entonces $z' = z_1$ lo cual contradice el hecho que $\{F_1, G_1, \dots, G_p\}$ son las facets adyacentes a z_1 . Por tanto $\mathcal{C} \setminus \{z_1\}$ es un complejo facet de suspensión.

- ✓ Si $k > 1$, supongamos sin perdida de generalidad

$$\deg(z_1) \geq \deg(z_i) \text{ para todo } i = 1, \dots, k$$

Mostremos que $\mathcal{C} \setminus \{z_1\}$ es de suspensión. Supongamos $\{F_1, G_1, \dots, G_p\}$ son las facets adyacentes a z_1 , entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \setminus \{z_1\} &= \mathcal{C} \setminus \langle F_1, G_1, \dots, G_p \rangle \\ &= \langle F_2, \dots, F_r \rangle \cup \langle G_{p+1}, \dots, G_s \rangle \end{aligned}$$

Dado que $F_2, \dots, F_r$ siguen siendo las únicas hojas del complejo $\mathcal{C} \setminus \{z_1\}$, las cuales además son reducibles, por la proposición 2. basta con mostrar

$$G_{p+1} \cup \dots \cup G_s \subseteq F_2 \cup \dots \cup F_r$$

Supongamos que existe $z' \in G_{p+1} \cup \dots \cup G_s$ tal que $z' \in F_1$ luego podemos suponer sin perdida de generalidad que $z' \in G_{p+1}$, además $z' = z_i$ para algún $i = 2, \dots, k$. Ahora dado que $\deg(z_1) \geq \deg(z')$, por el lema 2. G_{p+1} es una facet adyacente a z_1 , llegando así a una contradicción. Por tanto $\mathcal{C} \setminus \{z_1\}$ es un complejo facet de suspensión.

□

Observación 2. Sea z_i un vértice de la hoja F_i , que existe por la proposición 3. para el cual $\mathcal{C} \setminus \{z_i\}$ es un complejo facet de suspensión. Dado que z_i es un vértice de grado mayor de la hoja F_i , se tiene entonces por el lema 2. que el conjunto $\{z_1, \dots, z_r\}$ es un cubrimiento minimal por vértices para $\mathcal{C}$.

Lema 3. Si existe $G' \in \mathcal{C}$ tal que

$$F_i \cap G' \neq \emptyset \text{ y } F_j \cap G' \neq \emptyset$$

entonces z_i y z_j son vértices adyacentes.

Demostración. Supongamos que existe $G' \in \mathcal{C}$ tal que

$$F_i \cap G' \neq \emptyset \text{ y } F_j \cap G' \neq \emptyset$$

Dado que z_i y z_j son los vértices de mayor grado de las hojas F_i y F_j respectivamente se tiene entonces, por el lema 2. que $z_i, z_j \in G'$. Por tanto z_i y z_j son vértices adyacentes. □

4 Demostración del teorema de Faridi

Sea $\mathcal{C} = \langle F_1, \dots, F_r \rangle \cup \langle G_1, \dots, G_s \rangle$ un complejo facet de suspensión. Por la proposición 3. para la hoja F_1 existe un vértice z_1 tal que $\mathcal{C} \setminus \{z_1\}$ es un complejo facet de suspensión. Supongamos que $F_1, G_1, \dots, G_m$ son todas las facets adyacentes a z_1 y sean $F'_1 = \frac{F_1}{z_1}$, $G'_i = \frac{G_i}{z_1}$ para $i = 1, \dots, m$. Supongamos además que $V(\mathcal{C}) = \{x_1, \dots, x_n, z_1, x\}$, donde x es un vértice libre de F_1 , y sean $x, x_1, \dots, x_k$ los vértices adyacentes a z_1 en $\mathcal{C}$ entonces, dado que $\mathcal{C}$ es conexo, existe $2 \leq t \leq r$ tal que

$$(i) \quad \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_t$$

$$(ii) \quad \text{Para todo } j = 1, \dots, t \text{ existe } i = 1, \dots, k \text{ tal que } x_i \in F_j.$$

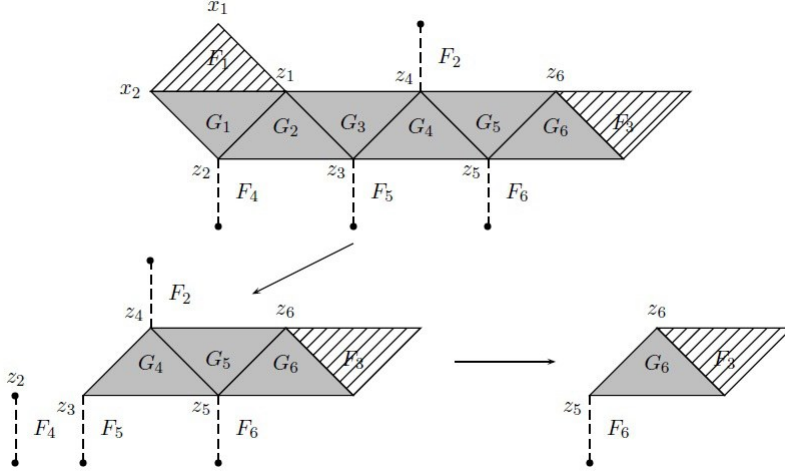
Luego, es claro por el lema 3. z_1 y z_j son vértices adyacentes para todo $j = 1, \dots, t$. Por tanto

$$z_2, \dots, z_t \in \{x_1, \dots, x_k\}$$

Denotemos por $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_F$ los complejos facet dados por:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_G &= \mathcal{C} \setminus \{z_1\} \\ \mathcal{C}_F &= \mathcal{C}_G \setminus \{z_2, \dots, z_t\} \end{aligned}$$

Por ejemplo en la figura 4 se muestra la construcción de los complejos facet $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_F$ a partir del complejo facet $\mathcal{C}$. Si J , I y L denotan los ideales facet de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_F$ respectivamente, se tiene entonces la siguiente relación

Figura 4: Complejos $\mathcal{C}_G$ y $\mathcal{C}_F$.

$$(I, z_2, \dots, z_t) = (L, z_2, \dots, z_t)$$

En efecto, por construcción $(L, z_2, \dots, z_t) \subseteq (I, z_2, \dots, z_t)$. Ahora si $M \in I$ es tal que $z_i \nmid M$ para todo $i = 2, \dots, t$ entonces por construcción $M \in L$.

Por otro lado, a partir de la construcción del ideal facet I y del teorema 3. obtenemos $ht(I) = r - 1$.

Teorema 4. Si $\mathcal{C}_F$ y $\mathcal{C}_G$ son complejos Cohen-Macaulay entonces $\mathcal{C}$ es Cohen-Macaulay.

Demostración. Sea $R = k[x_1, \dots, x_n, z_1]$ Consideremos la siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow R/(I, F'_1, G'_1, \dots, G'_m) \xrightarrow{z_1} R/J \xrightarrow{\psi} R/(I, z_1) \longrightarrow 0.$$

Mostremos que la anterior secuencia es exacta.

- ✓ Dado que $z_1 \cdot (I, F'_1, G'_1, \dots, G'_m) \subseteq J$ la multiplicación por z_1 es un monomorfismo.
- ✓ Veamos que $Ker(\psi) = Im(z_1)$. Sea $\bar{f} \in R/(I, F'_1, G'_1, \dots, G'_m)$ luego $z_1 \bar{f} = 0$ en el anillo $R/(I, z_1)$, de ahí $Im(z_1) \subseteq Ker(\psi)$. Ahora sea $\bar{f} \in Ker(\psi)$, con lo cual se obtiene $f \in (I, z_1)$. Entonces basta considerar el caso que $f \in (z_1)$ es decir $f = gz_1$ para algún $g \in R$, lo cual implica $f \in Im(z_1)$ por tanto $Ker(\psi) \subseteq Im(z_1)$.
- ✓ Como $J \subseteq (I, z_1)$ se tiene que ψ es un epimorfismo.

Por otro lado, como $\mathcal{C}_G$ es un complejo Cohen-Macaulay se obtiene,

$$\begin{aligned} \text{depth}(R/(I, z_1)) &= \text{depth}(k[x_1, \dots, x_n]/I) \\ &= \dim(k[x_1, \dots, x_n]/I) \\ &= \dim(k[x_1, \dots, x_n]) - \text{ht}(I) = n - r + 1. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \dim(R/J) &= \dim(k[x_1, \dots, x_n, z_1]/J) \\ &= \dim(k[x_1, \dots, x_n, z_1]) - \text{ht}(J) = n + 1 - r. \end{aligned}$$

Por tanto $\text{depth}(R/(I, z_1)) = \dim(R/J) \geq \text{depth}(R/J)$. Consideremos los siguientes casos.

- (i) Supongamos que $\text{depth}(R/(I, z_1)) > \text{depth}(R/J)$, entonces por el lema de la profundidad se tiene,

$$\text{depth}(R/(I, F'_1, G'_1, \dots, G'_m)) = \text{depth}(R/J).$$

Puesto que $z_2, \dots, z_t$ forman parte de un cubrimiento minimal por vértices para $\mathcal{C}_G$, se obtiene $\text{ht}(I, x, z_2, \dots, z_t) = \text{ht}(I) + 1 = r$ y como $\mathcal{C}_F$ es Cohen-Macaulay se llega a,

$$\begin{aligned} \text{depth}(R/(I, x, z_2, \dots, z_t)) &= \text{depth}(R/(L, x, z_2, \dots, z_t)) \\ &= \dim(R/(L, x, z_2, \dots, z_t)) \\ &= \dim(R/(I, x, z_2, \dots, z_t)) \\ &= n + 1 - r. \end{aligned}$$

Por otro lado, $(I, F'_1, G'_1, \dots, G'_m) \subset (I, x, z_2, \dots, z_t)$ implica

$$\text{depth}(R/(I, F'_1, G'_1, \dots, G'_m)) = \text{depth}(R/J) \geq \text{depth}(R/(I, x, z_2, \dots, z_t)).$$

Llegando así a una contradicción.

- (ii) Supongamos que $\text{depth}(R/(I, z_1)) = \text{depth}(R/J)$. Entonces

$$\text{depth}(R/J) = \dim(R/J)$$

Por tanto $\mathcal{C}$ es un complejo facet Cohen-Macaulay. □

Corolario 5. *Todo complejo de suspensión es Cohen-Macaulay.*

Demostración. Utilicemos inducción sobre el número r de hojas de $\mathcal{C}$. Si $r = 1$, entonces $\mathcal{C}$ está compuesto por únicamente una sola facet y por tanto es Cohen-Macaulay. Supongamos que $r > 1$. Por la proposición 3. para la hoja F_1 existe un vértices z_1 tal que $\mathcal{C}_G = \mathcal{C} \setminus \{z_1\}$ $\mathcal{C}_F = \mathcal{C}_G \setminus \{z_2, \dots, z_t\}$ son de suspensión. Luego por la hipótesis de inducción y por el teorema 4. $\mathcal{C}$ es un complejo facet Cohen-Macaulay. □

5 Shellabilidad de un complejo de suspensión

Teorema 6. *Todo complejo facet de suspensión es shellable.*

La demostración se basa, sencillamente, en el teorema 2.16 del artículo de Morey, Reyes y Villarreal ([5]), el cual incluimos a continuación.

Teorema 7. *Sea $\mathcal{C}$ un clutter con un pareo perfecto $e_1, \dots, e_g$ de tipo König. Si para dos aristas cualesquiera f_1 y f_2 de $\mathcal{C}$ y para cualquier arista e_i del pareo perfecto se tiene que, $f_1 \cap e_i \subset f_2 \cap e_i$ o $f_2 \cap e_i \subset f_1 \cap e_i$ entonces $\Delta_{\mathcal{C}}$ es shellable.*

Es claro que un clutter de suspensión posee un pareo perfecto de tipo König, y que la última condición del teorema anterior significa que cada hoja es reducible, lo cual se cumple por la proposición 2. de donde se deriva trivialmente el teorema 4. y su corolario 5.

6 Agradecimientos

Este artículo fue el fruto del trabajo de investigación durante la tesis de maestría del autor Fernando Andrés Benavides bajo la dirección del Doctor Mario Estrada Valdes. Es por medio de este artículo que el primer autor le desea expresar todo su agradecimiento, a un valioso ser humano caracterizado por su sabiduría y gran sentido del humor quien desafortunadamente ya no nos acompaña.

Referencias

- [1] Caboara, M., Faridi, S., and Selinger. Simplicial cycles and the computation of simplicial trees. J. Symb. Comput. 42, 1-2 (Jan. 2007), 74-88.
- [2] R. H. Villarreal, Cohen-Macaulay graphs, Manuscripta Math. 66 (1990), no. 3, 277–293. MR1031197 (91b:13031)
- [3] R. H. Villarreal, Monomial algebras, Dekker, New York, 2001. MR1800904 (2002c:13001)
- [4] S. Faridi, Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals, J. Combin. Theory Ser. A 109 (2005), no. 2, 299–329. MR2121028 (2005j:13021)
- [5] S. Morey, E. Reyes and R. Villarreal, Cohen-Macaulay, Shellable and unmixed clutters with a perfect matching of König type, Preprint. math.AC/07083111.

Dirección de los autores

Fernando Andrés Benavides — Departamento de Matemáticas, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto-Colombia

e-mail: fandresbenavides@gmail.com

Mario Estrada Valdés — Departamento de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Medellín-Colombia