



Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Identidades Pitagóricas, Vinculadas a la
Implementación de GeoGebra en la Clase de Matemáticas

Marcial Danilo Posada Ruiz

Edgar de Jesús García Ramos

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

Junio 2019



Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de las Identidades Pitagóricas, Vinculadas a la
Implementación de GeoGebra en la Clase de Matemáticas

Marcial Danilo Posada Ruiz

Edgar de Jesús García Ramos

Director:

Dr. David Benítez Mojica

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Matemáticas y Física

Junio 2019



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y
PEDAGOGÍA
Subdirección Académica

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO
DE GRADO

Programa Académico lic. matemáticas y física

Fecha

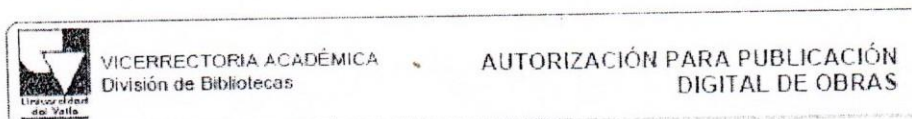
Código del programa: 3487

Resolución del programa: _____

Día	Mes	Año
10	06	2019

Título del Trabajo o Proyecto de Grado				
Procesos de enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas, vinculadas a la implementación de Geogebra en la clase de matemáticas.				
Se trata de:				
Proyecto ☐		Informe Final ☒		
Director				
David Benítez Mojica				
Nombre del Primer Evaluador				
Gilbert Cruz				
Nombre del Segundo Evaluador				
Jaime Castaño				
Estudiantes				
Nombres y Apellidos	Código	Plan	E-mail	Teléfonos de contacto
Marcial Posada	8426324	3487	marcial.posada@correounivalle.edu.co	313 269 2917
Edgar García Ramos	1413067	3487	garcia.edgar@correounivalle.edu.co	3135 14243 2
Evaluación				
Aprobado ☒	Meritorio ☐	Laureado ☐		
Aprobado con recomendaciones ☐	No Aprobado ☐	Incompleto ☐		
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de _____ (máximo un mes) ante:				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☐		Primer Evaluador ☐	Segundo Evaluador ☐	
En el caso de que el Informe Final se considere Incompleto (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de _____ semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: _____				
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).				
Firmas				
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Primer Evaluador	Segundo Evaluador		





PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

- a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.
- b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y conocen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.
- c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la *Licencia Creative Commons* con que se publica.
- d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.
- e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.



VICERRECTORIA ACADÉMICA
División de Bibliotecas

**AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN
DIGITAL DE OBRAS**

PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera:

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la *Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia* cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo ☒ No autorizo ☐

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente descríbala:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra:

Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de los Identidad
Pitagoricas, vinculadas a la implementación de
Geometría en la clase de matemáticas

Autores:

Nombre: Marcial Danilo Posada Ruiz

Firma: Marcial Posada R.
C.C. 1113 829 576

Nombre: Edgar de Jesús García Ramos

Firma: [Firma manuscrita]
C.C. 1113 632 917 / Bal

Nombre:

Firma: _____
C.C. _____

Fecha: 11-Junio-2019

Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

AGRADECIMIENTOS.

Inicialmente, infinitas gracias a Dios, por brindarnos sabiduría para concluir este trabajo.

Gracias al Dr. David Benítez Mojica, por su oportuno acompañamiento, su disposición y paciencia. Fue mucho lo que aprendimos de él, como tutor y más como amigo.

Gracias a nuestros padres por respaldarnos en este proceso, por darnos fuerzas para seguir adelante.

Gracias a Luisa María Prado Cardona, por el apoyo cuando nos sentimos frustrados, por su amor incondicional y su paciencia.

Al Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, por brindarnos la oportunidad de realizar nuestros estudios de pregrado, así como a los profesores de planta por su profesionalismo y dedicación en nuestra formación académica.

En memoria de Jhon Jairo García Villaquirán

Isaías 40:31

Pero los que tienen su esperanza puesta en el Señor renovarán sus fuerzas. Les crecerán alas como a las águilas; correrán sin fatigarse, caminarán sin cansarse.

INDICE DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	16
CAPÍTULO I	19
1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	19
1.1. Contextualización.....	19
1.2. Antecedentes	21
1.2.1. Investigación	21
1.2.2. Curriculares	25
1.2.2.1. Descripción General Currículo Colombiano.....	25
1.2.2.2. Ubicación Curricular del Objeto Matemático.	26
1.2.3. Resultados de las pruebas estandarizadas nacionales.	28
1.2.3.1. Descripción de las pruebas saber de 3°, 5° y 9°.....	28
1.2.3.2. Descripción del Examen Saber 11°.....	29
1.2.3.3. Descripción del colegio.....	31
1.2.3.3.1. Resultados Históricos (prueba 2016-II y 2017-II) del examen Saber 11°, Pertenecientes a la I.E La Milagrosa.	32
1.3. Justificación.....	37
1.3.1. Objetivo principal.	39
1.3.2. Objetivos secundarios.....	39
1.4. Preguntas Orientadoras.....	40
1.4.1. Pregunta central.	40
1.4.2. Preguntas auxiliares.	40
CAPÍTULO II	41
2. MARCO TEÓRICO	41
2.1. Introducción	41
2.2. El Objeto Matemático.....	41
2.2.1. Demostración de la identidad pitagórica $\text{Sen}2\theta + \text{Cos}2\theta = 1$	42
2.2.2. Demostración de la identidad pitagórica $1 + \text{Tan}2\theta = \text{Sec}2\theta$	44
2.3. Mediación Instrumental.....	47
2.4. Características de GeoGebra.	50
2.5. Uso de múltiples representaciones.....	51

CAPÍTULO III	53
3. METODOLOGÍA	53
3.1. Introducción	53
3.2. Los sujetos	53
3.3. Fase de Diseño	54
3.4. Fase de Validación	55
3.5. Recolección	55
3.6. Procesamiento	57
3.7. Análisis	57
CAPÍTULO IV	59
4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	59
4.1. Estudio diagnóstico	59
4.1.1. Descripción del diagnóstico	59
4.1.2. Objetivos del diagnóstico	59
4.1.3. Condiciones de aplicación del diagnóstico	60
4.1.4. Resultados del diagnóstico	60
4.1.4.1. Resultados cuantitativos del diagnóstico	60
4.1.4.2. Análisis cualitativo del diagnóstico	63
4.1.5. Comentarios finales de la prueba diagnóstico	77
4.2. Hoja de trabajo No. 1	78
4.2.1. Descripción de la hoja de Trabajo No. 1	78
4.2.2. Objetivos de la hoja de trabajo No. 1	78
4.2.3. Condiciones de aplicación de la hoja de trabajo No. 1	79
4.2.4. Resultados de la Hoja de trabajo No. 1	81
4.2.4.1. Resultados cuantitativos de la hoja de trabajo No. 1	81
4.2.4.2. Resultados cualitativos de la hoja de trabajo No. 1	83
4.2.4.3. Entrevista clínica	94
4.2.4.3.1. Entrevista estudiante No. 8	94
4.2.4.3.2. Entrevista estudiante No. 10	95
4.3. Hoja de trabajo No. 2	96
4.3.1. Descripción de la hoja de trabajo No. 2	96
4.3.2. Objetivos de la hoja de trabajo No. 2	97
4.3.3. Condiciones de aplicación de la hoja de trabajo No. 2	98
4.3.4. Resultados obtenidos de la hoja de trabajo No. 2	99

4.3.4.1.	Resultados cuantitativos de la hoja de trabajo No.2.....	99
4.3.4.2.	Análisis cualitativo de la hoja de trabajo No. 2.	100
4.3.4.3.	Entrevista clínica.....	107
4.3.4.3.1.	Entrevista a estudiante No. 8.	107
4.4.	Hoja de trabajo No. 3.	108
4.4.1.	Descripción de la Hoja De Trabajo No. 3.....	108
4.4.2.	Objetivos de la hoja de trabajo No. 3.....	109
4.4.3.	Condiciones de aplicación de la hoja de trabajo.....	109
4.4.4.	Resultados obtenidos de la hoja de trabajo No 3:	110
4.4.4.1.	Resultados cuantitativos de la hoja de trabajo No. 3.....	110
4.4.4.2.	Análisis cualitativo de la hoja de trabajo No. 3.	111
4.5.	Comentarios finales.	114
CAPITULO V		116
5.	CONCLUSIONES.....	116
5.1.	Respuesta a la pregunta central de la investigación.....	116
5.2.	Respuestas a las preguntas auxiliares de investigación.....	119
5.3.	Sugerencias.	123
5.3.1.	Para los profesores.	123
5.3.2.	Para la investigación	124
REFERENCIAS.....		126
ANEXOS		131

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. DBA y evidencias de los DBA, para grado décimo.....	26
Tabla 2. Clasificación por niveles de desempeño en matemáticas para las pruebas Saber de 3°, 5° y 9°, de acuerdo a los puntajes obtenidos, en el área de matemáticas.	29
Tabla 3. Resultados generales; promedio del puntaje global y desviación estándar de las pruebas 2016-II y 2017-II.	32
Tabla 4. Resultados históricos de la prueba de matemáticas; promedio del puntaje y desviación estándar de las pruebas 2016-II y 2017-II.....	32
Tabla 5. Porcentajes de estudiantes presentes, en cada uno de los niveles de desempeño de la prueba Saber 11° de matemáticas, en los periodos 2016-II y 2017-II).....	33
Tabla 6. Comparativa histórica, del porcentaje de estudiantes que NO contestaron correctamente las preguntas asociadas a cada uno de los niveles de aprendizajes, de la I.E La Milagrosa, de la ETC y nacional (Colombia).	37
Tabla 7. Calendario de las actividades a aplicar.	56
Tabla 8. Resultados generales obtenidos por los 28 estudiantes de grado 10° en la Prueba Diagnóstica.....	60
Tabla 9. Resultados pregunta No. 1 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	63
Tabla 10. Resultados pregunta N°2 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	65
Tabla 11. Resultados pregunta No. 3 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	66
Tabla 12. Resultados pregunta No. 4 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	68
Tabla 13. Resultados pregunta No. 5 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	69
Tabla 14. Resultados pregunta No. 6 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	71
Tabla 15. Resultados pregunta No. 7 y 8 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	74

Tabla 16. Fases de la clase, con la hoja de trabajo No. 1.....	79
Tabla 17. Resultados generales obtenidos por los 12 grupos de estudiantes de grado 10° en la Hoja de trabajo No. 1.	81
Tabla 18. Resultados pregunta No. 4 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta).	85
Tabla 19. Resultados pregunta No. 5 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	87
Tabla 20. Resultados pregunta No. 6 y 7 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta).	89
Tabla 21. Resultados pregunta No. 8 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).	92
Tabla 22. Fases de la clase con la hoja de trabajo No. 2.....	98
Tabla 23. Resultados generales obtenidos por los 12 grupos de estudiantes de grado 10° en la Hoja de trabajo No. 2.	99
Tabla 24. Resultados pregunta No. 2 de la Hoja de trabajo No. 2.	101
Tabla 25. Resultados pregunta No. 3 de la Hoja de trabajo No. 2.	103
Tabla 26. Resultados generales obtenidos por los 12 grupos de estudiantes de grado 10° en la Hoja de trabajo No. 3.	110
Tabla 27. Resultados pregunta No. 2 de la Hoja de trabajo No. 3 (C: correcta; NC: no contestó).	113
Tabla 28. Fases de la implementación de las actividades.....	120

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Adaptación del Mapa de relaciones de los DBA V.2 para grado décimo; MEN (2017) realizado por los autores.	28
Figura 2. Clasificación del aprendizaje (Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas) por niveles de desempeño, de acuerdo a los resultados obtenidos por establecimiento educativo, en las pruebas 2016-II y 2017-II.	34
Figura 3. Clasificación del aprendizaje (Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos) por niveles de desempeño, de acuerdo a los resultados obtenidos por establecimiento educativo, en las pruebas 2016-II y 20.	35
Figura 4. Clasificación del aprendizaje (Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas) por niveles de desempeño, de acuerdo a los resultados obtenidos por establecimiento educativo, en las pruebas 2016-II y 2017-II.	36
Figura 5.a. Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, donde el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I).	42
Figura 5.b. Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, donde el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I).	44
Figura 6. Identidades pitagóricas por Fiallo (2011).	46
Figura 7. Representación gráfica de la función $F(x) = A \cdot \text{Sen}((B \cdot x) + C)$, tal que $A=B=C=1$. GeoGebra Classic.	48
Figura 8. Tareas de reconocimiento que implican la distinción de aspectos visuales. GeoGebra Classic.	49
Figura 9. Respuestas pregunta 1 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 7 y 8, respectivamente.	64
Figura 10. Respuesta pregunta 1 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 24.	64
Figura 11. Respuesta pregunta 2 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 2	65
Figura 12. Respuestas pregunta 2 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 15 y 20 respectivamente.	66

Figura 13. Respuestas pregunta 3 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 8 y 26, respectivamente.....	67
Figura 14. Respuestas pregunta 3 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No.1.....	67
Figura 15. Enunciado de las preguntas 4, 5 y 6, de la prueba diagnóstica.....	68
Figura 16. Respuestas pregunta 4 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 7 y 27, respectivamente.....	69
Figura 17. Respuesta pregunta 5 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 8.	70
Figura 18. Respuesta pregunta 5 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 11.	70
Figura 19. Respuestas pregunta 6 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 8 y 22 respectivamente.....	72
Figura 20. Respuestas pregunta 6 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 28 y 3 respectivamente.....	72
Figura 21. Enunciado de las preguntas 7 y 8 (prueba diagnóstica).....	73
Figura 22. Pregunta No.7 (prueba diagnóstica).	74
Figura 23. Respuestas pregunta 8 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 27, 8 y 6 respectivamente.....	75
Figura 24. Respuestas pregunta 8 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 14 y 4 respectivamente.....	75
Figura 25. Actividad de recorte y armar.	83
Figura 26. Polígonos recortados.....	83
Figura 27. Polígonos pegados sobre el cuadrado de la hipotenusa.	84
Figura 28. Respuestas a pregunta 2 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 1 y 9.	84
Figura 29. Midiendo las áreas de los cuadrados formados por los lados de un triángulo rectángulo.	85
Figura 30. Respuesta a la pregunta 3 (Hoja de trabajo No.1) del grupo No. 10.	85
Figura 31. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas e incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 4.....	86
Figura 32. Respuesta a pregunta 4 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 1.....	86
Figura 33. Respuesta a pregunta 4 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 8.....	87
Figura 34. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas e incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 5.....	87

Figura 35. Respuestas a pregunta 5 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 11 y 1.	88
Figura 36. Respuesta a pregunta 5 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 8.	89
Figura 37. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas e incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 6 y 7.	89
Figura 38. Respuestas a las preguntas 6 y 7 de la hoja de trabajo 1, dadas por los grupos 12 y 8, respectivamente.	91
Figura 39. Respuestas a las preguntas 6 y 7 de la hoja de trabajo 1, dadas por el grupo 4.	91
Figura 40. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas, incorrectas y no contestadas, por los grupos de estudiantes en la pregunta 8.	92
Figura 41. Respuesta a la pregunta 8 de la hoja de trabajo 1, dada por el grupo 12.	93
Figura 42. Respuesta a la pregunta 8 de la hoja de trabajo 1, dada por el grupo 5.	93
Figura 43. Construcción realizada por los autores en GeoGebra Classic (applet), para la hoja de trabajo No. 2.	101
Figura 44. Respuesta a la pregunta 1 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 5.	101
Figura 45. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas, incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 2.	102
Figura 46. Respuesta a la pregunta 2 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 12.	102
Figura 47. Respuesta a la pregunta 2 (Hoja de trabajo No. 2) de los grupos No. 4 y 1 respectivamente.	103
Figura 48. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas, incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 3.	103
Figura 49. Respuesta a la pregunta 3 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 7.	104
Figura 50. Respuesta a la pregunta 3 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 4.	104
Figura 51. Respuesta a la pregunta 4 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 5.	105
Figura 52. Respuesta a la pregunta 5 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 10 y 4 respectivamente.	105
Figura 53. Respuesta a la pregunta 6 (Hoja de trabajo No.3) del grupo No. 9.	106
Figura 54. Respuesta a la pregunta 7 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 6 y 11 respectivamente.	106
Figura 55. Respuesta a la pregunta 8 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 3 y 10 respectivamente.	107

Figura 56. Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, donde el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I), para la visualización de la identidad pitagórica $Tan2\theta + 1 = Sec2\theta$.	112
Figura 57. Respuesta a la pregunta 1 (Hoja de trabajo No.3) del grupo No. 6.	112
Figura 58. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas y no contestadas por los grupos de estudiantes, en la pregunta 2, de la hoja de trabajo No.3.	113
Figura 59. Respuesta a la pregunta 2 (Hoja de trabajo No.3) del grupo No. 5.	113

LISTA DE ANEXOS.

ANEXO A: Prueba diagnóstica.....	131
ANEXO B: Hoja de trabajo No. 1.....	134
ANEXO C: Hoja de trabajo No. 2.....	137
ANEXO D: Hoja de trabajo No. 3.....	140

RESUMEN.

La investigación que se reporta en el presente trabajo de grado, expone una innovación didáctica, inmersa en un proceso de enseñanza y aprendizaje que promueve el uso de múltiples representaciones; para propiciar la construcción de las identidades Pitagóricas, con la mediación de GeoGebra y material concreto en estudiantes de décimo grado.

Teniendo en cuenta que el modelo educativo colombiano está enfocado en el desarrollo de competencias, es necesario desde la Educación Matemática enfatizar en el desarrollo de los procesos centrales del pensamiento matemático. En este sentido, en la investigación, se incita a los estudiantes de décimo grado al desarrollo de procesos como la visualización, la conjetura, el uso de múltiples representaciones, la argumentación, el razonamiento y comunicación de las ideas matemáticas.

La enseñanza tradicional de la trigonometría, privilegia el uso de los procesos memorísticos y los sistemas de representación simbólicos o algebraicos. En consecuencia, la implementación de material concreto y del micromundo computacional de GeoGebra, resultó ser un factor revolucionario de alto impacto, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas;

Palabras clave: *proceso de aprendizaje, proceso de enseñanza, múltiples representaciones, GeoGebra, material concreto.*

ABSTRACT.

The research that is reported in the present term paper, exposes a didactic innovation, immersed in a process of teaching and learning that promotes the use of multiple representations; to promote the construction of Pythagorean identities, with the mediation of GeoGebra and concrete material in tenth grade students.

Taking into account that the Colombian educational model is focused on the development of competences, it is necessary from the Mathematical Education to emphasize in the development of the central processes of mathematical thinking. In this sense, in the research, tenth grade students are encouraged to develop processes such as visualization, conjecture, the use of multiple representations, argumentation, reasoning and communication of mathematical ideas.

The traditional teaching of trigonometry privileges the use of memory processes and symbolic or algebraic representation systems. Consequently, the implementation of concrete material and the computational microworld of GeoGebra, turned out to be a revolutionary factor of high impact, in the process of teaching and learning Pythagorean identities.

Key words: learning process, teaching process, multiple representations, GeoGebra, concrete material

INTRODUCCIÓN

A nivel nacional, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha fracasado en el desarrollo de competencias y comprensión de la ciencia misma, lo cual se ve reflejado en algunos indicadores como el bajo rendimiento escolar, los altos índices de reprobación y las dificultades en la formación de profesores. En el caso de la enseñanza de la trigonometría, Van Hiele (1957) señala que se privilegian los procesos memorísticos y las representaciones simbólicas o algebraicas de los objetos matemáticos, ya sea por practicidad en el manejo conceptual, a través de una forma de representación específica o, por las creencias que se tengan acerca de la forma en cómo se deben enseñar ciertos contenidos. En consecuencia, la metodología de enseñanza tradicional resulta ser un factor causal, en el limitado desarrollo de aprendizaje significativo y el desinterés en el estudio de las matemáticas.

En este marco, existen diferentes trabajos (Santos Trigo y Benítez (2003), Rivas (2009) y Fiallo (2011)) que destacan la importancia del uso de las múltiples representaciones, material concreto y la implementación de software matemático; para el desarrollo de aprendizaje significativo de las matemáticas en los estudiantes. Por ejemplo; Duval (1995a), respecto a las transformaciones de representación semiótica, distingue dos procesos: (i) la conversión, permite representar los objetos matemáticos utilizando diferentes registros y (ii) el tratamiento, que permite transformar una representación dada, en otra representación bajo el mismo registro. En lo anterior, se evidencia la importancia del uso de múltiples representaciones semióticas de los objetos matemáticos, para el desarrollo de aprendizaje en los estudiantes. También Moreno, en *Instrumentos matemáticos computacionales* (2001) y en *De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática* (2001); con la intencionalidad de articular las nuevas tecnologías al currículo, se destaca la importancia de la mediación instrumental en la educación matemática, a través de los procesos de amplificación y reorganización de los instrumentos y recursos computacionales; que propicien un ambiente de aprendizaje mediante geometría dinámica.

Por otra parte, en el ámbito curricular, el MEN en la serie de lineamientos curriculares (1998), en los estándares básicos de competencia en matemáticas (2006), en los derechos básicos

de aprendizaje V.2. (2016) y la NTCM (2000) en los estándares para la educación matemática, presentan propuestas curriculares para el desarrollo de componentes centrales del pensamiento matemático muy similares. Ambas sugieren que se estimule en las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula, los procesos de resolución y formulación de problemas, razonamiento, comunicación y modelación matemática.

En este sentido, en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, específicamente de las identidades Pitagóricas, es indispensable combinar el uso de las múltiples representaciones de los objetos, con software matemático y material concreto, para desarrollar una propuesta de innovación didáctica en el aula, que promueva el desarrollo de los procesos centrales del pensamiento matemático, con la finalidad de que los estudiantes desarrollen un aprendizaje significativo alrededor del objeto de estudio.

Analizando esta problemática, surge una investigación que contiene una innovación didáctica, cuyo propósito principal es: describir las principales características que tiene un proceso de enseñanza y aprendizaje con la mediación de GeoGebra y material concreto, para propiciar la construcción de las identidades pitagóricas en estudiantes de décimo grado.

Con la finalidad de ofrecer al lector un panorama general del presente documento, se describe a continuación, cada uno de los cinco capítulos que conforman la investigación:

El primer capítulo (definición del problema); tiene como propósito contextualizar la problemática que existe en la enseñanza de las identidades Pitagóricas y, definir las preguntas centrales de la investigación. Este capítulo, consta de cinco apartados (i) contextualización, (ii) antecedentes (de investigación, curriculares, resultados de pruebas estandarizadas), (iii) justificación, (iv) objetivos y, (v) preguntas orientadoras.

El segundo capítulo (marco teórico), presentan algunos referentes teóricos que sustentan la presente investigación y constituyen la línea de base para el diseño y aplicación de instrumentos didácticos e interpretación del problema. Este capítulo consta de cinco apartados: (i) introducción, (ii) el objeto matemático (identidades Pitagóricas), (iii) mediación instrumental, (iv) características de GeoGebra y, (v) uso de múltiples representaciones.

El tercer capítulo (metodología), contiene la propuesta metodológica, las características de los estudiantes que participaran, las fases y condiciones de aplicación, con las que se ejecutará la investigación. Este capítulo consta de seis apartados: (i) introducción, (ii) fase de diseño, (iii) fase de validación, (iv) recolección, (v) procesamiento y, (iv) análisis.

El cuarto capítulo (presentación y análisis de resultados), se presentan y analizan los resultados cuantitativos y cualitativos del estudio. Este capítulo consta de cuatro apartados: (i) estudio diagnóstico, (ii) hoja de trabajo No. 1, (iii) hoja de trabajo No. 2 y, (iv) hoja de trabajo No.3.

El último capítulo contiene las conclusiones de la investigación y las sugerencias propuestas. Consta de tres apartados: (i) respuesta a la pregunta central de investigación, (ii) respuestas a las preguntas auxiliares de investigación y, (iii) sugerencias.

Esta investigación puede resultar de mucha utilidad para profesores de matemáticas, licenciados en proceso de formación e investigadores de innovaciones didácticas porque constituye un aporte para el desarrollo de la investigación en el campo educación matemática.

CAPÍTULO I

1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

1.1. Contextualización

En la Educación Media de Colombia, la enseñanza y aprendizaje de las ciencias, y en particular, de las matemáticas, es deficiente. Existen varios indicadores (MEN (2018)) de esta realidad educativa: bajo rendimiento escolar, bajos resultados en las pruebas estandarizadas, altos índices de reprobación, deserción escolar, desmotivación hacia el estudio de las matemáticas, dificultades en la formación de los profesores, actitud negativa frente al estudio de la disciplina, el poco uso de aplicaciones a otras áreas del conocimiento y de las tecnologías, entre otras. Dentro del campo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Media, la mayoría de los docentes privilegian las representaciones algebraicas de los objetos matemáticos; ya sea por facilidad o comodidad en el manejo conceptual, a través de una forma de representación específica, o de acuerdo a las creencias que tenga el profesor sobre las matemáticas.

Diferentes autores y organizaciones en el mundo (NTCM (2000), Santos Trigo y Benítez (2003), Rivas (2009) y Fiallo (2011)) recomiendan que los estudiantes conozcan y manejen diferentes tipos de sistemas de representación de los objetos matemáticos, que puedan entenderlos y lo más importante, que puedan movilizar ideas de un sistema de representación a otro sin mucha dificultad. Por ende, es evidente que implementar diferentes sistemas semióticos de representación, facilita los procesos cognitivos ligados a los procesos de la construcción del conocimiento matemático (que es objeto de estudio) por parte del estudiante.

Así, resulta de gran importancia identificar en los estudiantes, usos de diferentes registros de representación semióticos, inmersos en su forma de pensar y de resolver problemas (un sistema de representación semiótica, es un sistema de signos cuya función fundamental es la de

comunicación; aunque también favorece el *entendimiento* y la *mediación* con los objetos matemáticos). En concordancia; en Duval (1995a) se considera importante para la aprehensión (por parte de los estudiantes) de los objetos matemáticos en cuestión, la coordinación de varios registros de representación semiótica, donde resulta indispensable distinguir el objeto en cada una de sus representaciones y no confundirlo con estas; por ende, la construcción de los objetos matemáticos está estrechamente vinculada con la capacidad para representarlos, utilizando diferentes sistemas de representación semiótica.

En el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, la mayoría de los docentes inconscientemente se fían de la capacidad de memorización de los estudiantes, los consideran capaces de memorizar símbolos, definiciones, fórmulas, teoremas, tablas de multiplicar, procesos mecánicos para la resolución de sistemas ecuaciones, entre otros. Sin embargo, un aprendizaje basado en procesos memorísticos tiene sus ventajas y desventajas, debido a que la memorización facilita, el rápido y eficaz tratamiento del conocimiento, aunque si dichos procesos carecen de sentido y significado, limitarían la capacidad de los estudiantes para transferir el conocimiento y darle una adecuada aplicación, en contextos diferentes en el que inicialmente fue memorizado.

En el aprendizaje y enseñanza de la trigonometría, se evidencia la relevancia de los procesos cognitivos de memorización y la exclusión de algunos sistemas semióticos de representación de los objetos matemáticos. Van Hiele (1957), señala que uno de los principales problemas en la enseñanza de la trigonometría es el enfoque y carácter algebraico que se le otorga como consecuencia del uso excesivo de fórmulas, símbolos, operaciones y propiedades abstractas. Así mismo, no es un secreto que, en el aula los docentes privilegian los sistemas de representación algebraicos, sobre los numéricos y los geométricos (que también son formas de representación externas de los objetos matemáticos); lo cual, influye de buena forma en la necesidad de optar por la memorización, como herramienta “facilitadora” de los procesos de aprendizaje del estudiante. Como ejemplos, se pueden mencionar, la memorización por parte de los estudiantes de la identidad fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$ (identidad pitagórica) y la memorización mediante mnemotecnias, de las definiciones de las funciones trigonométricas dentro de un triángulo rectángulo (entre los estudiantes, es muy popular la mnemotecnia CO-CA-CO-CA-H-H).

Las investigaciones encontradas señalan la complejidad de la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, debida a la desconexión entre las diferentes formas de ver las razones trigonométricas: como razones entre los lados del triángulo rectángulo, como coordenadas del círculo goniométrico o trigonométrico, como distancias, y como funciones. (Fiallo, 2011; p.1)

En resumen, como una alternativa de solución a los problemas y obstáculos mencionados anteriormente, este trabajo de grado en su desarrollo tratará de responder ¿Qué características tiene un proceso de enseñanza y aprendizaje con la mediación de GeoGebra y material concreto, para propiciar la construcción de las identidades pitagóricas en estudiantes de décimo grado?

1.2. Antecedentes

1.2.1. Investigación

Como antecedentes internacionales se tienen:

El artículo “*Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas*”, Santos Trigo y Benítez (2003); muestra diferentes métodos de solución que emplean estudiantes del nivel medio superior (México) cuando realizan actividades que involucren resolución de problemas, con el fin, de evidenciar la importancia del uso de los diferentes sistemas de representación semióticos de los objetos matemáticos y el aporte de la tecnología en este campo. Hoy en día en las clases de matemáticas, la mayoría de los docentes pierden mucho tiempo profundizando en la formalización de un solo sistema de representación para los objetos matemáticos, cuando es necesario que los estudiantes conozcan diferentes tipos de sistemas de representación, que puedan entenderlos y lo más importante, que puedan movilizar ideas de un sistema de representación a otro sin mucha dificultad. De esta forma, la implementación de diferentes sistemas de representación semióticos de un mismo objeto (en este caso matemático), facilitan los procesos cognitivos ligados a los procesos de la construcción del conocimiento matemático (que es objeto de estudio) por parte del estudiante.

En este estudio se resalta la importancia de que los estudiantes manifiesten su forma de pensar y de resolver problemas a partir del empleo de modelos que involucren distintos sistemas de

representación, con el fin, de facilitar la apropiación, comprensión y profundización de los objetos matemáticos; puesto que no hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación, en este caso, una actividad de representación semiótica. En consecuencia, la implementación de las nuevas tecnologías ofrece la posibilidad de movilizar conocimiento matemático a través de diferentes sistemas de representación de forma más ágil, fácil y efectiva; por ejemplo, existen múltiples softwares matemáticos que permiten la realización de gráficas de funciones de forma sencilla, gráficas que a veces, realizar a mano y con exactitud, pueden resultar un proceso dispendioso y con alto grado de dificultad, que retrase la construcción del conocimiento matemático en cuestión.

Por otra parte, en Fiallo (2011) *“Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica”*, se presenta como objetivo principal, el deseo de proveer información al campo de la educación matemática, con la finalidad de refinar la comprensión de los procesos de aprendizaje asociados a la demostración, dentro del ámbito de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría dinámica.

Esta tesis consta de nueve capítulos: en el capítulo 1, se realiza una introducción a la problemática de estudio y se definen los objetivos de investigación; en el capítulo 2, se hace una revisión bibliográfica sobre trabajos previos asociados a la enseñanza de la trigonometría en Colombia, el uso de software de geometría dinámica y de demostraciones, en la enseñanza de la trigonometría; en el capítulo 3, se plasman las consideraciones teóricas, donde se incluyen conceptos, modelos y teorías que son utilizadas en la estructuración y fundamentación del trabajo, en este capítulo se caracteriza principalmente la metodología de investigación propuesta en el capítulo 4; en el cual, se explicitan tiempos, tipo de actividades, metodología de trabajo y de recolección de información, con base en el uso de software de geometría dinámica, el modelo de Van Hiele, los mapas conceptuales y el análisis de dificultades asociadas a los procesos de representación, razonamiento y demostración en aprendizaje de las razones trigonométricas. En el capítulo 5, se consignan las hojas de trabajo diseñadas a partir de lo plasmado en los capítulos 2 y 3; en el capítulo 6 se consignan los resultados obtenidos, a partir del análisis de la información recolectada; en el capítulo 7, se realiza una evaluación de lo propuesto en el capítulo 5 y de los resultados obtenidos en el capítulo 6, con base en el modelo de Van Hiele. El capítulo 8, está

dedicado a las conclusiones y propuestas finales, obtenidas en la investigación que identifican y caracterizan dificultades en los procesos de planteamiento y construcción de demostraciones, en el ámbito de aprendizaje de las razones trigonométricas. Finalmente, en el capítulo 9 se presentan las fuentes de consulta de información.

Análogamente, en el trabajo de maestría “*Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas*”, Runza (2013); se evidencia un planteamiento secuencial cuyo objetivo, consiste en diseñar una propuesta didáctica que aborde actividades que faciliten la enseñanza de pre-conceptos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de la trigonometría, enfatizando en la importancia del planteamiento y resolución de problemas en distintos contextos cotidianos (ciencia aplicada). Cabe resaltar, que la propuesta no está enfocada en una comunidad o establecimiento educativo en específico; su diseño tiene en cuenta de forma general, los estándares básicos de competencia en matemáticas dictaminados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) colombiano.

En resumen, el trabajo está dividido en tres partes; en la primera, se hace un breve recorrido histórico del origen y uso de las razones trigonométricas. En la segunda parte, se realiza un análisis sustancial de la forma cómo fueron abordados los conceptos trigonométricos a nivel didáctico. Por último, se diseña y presenta la propuesta descrita anteriormente, es importante resaltar que es una propuesta teórica que no ha sido puesta en práctica.

Por último, esta propuesta teórica arroja como conclusión, la importancia de analizar epistemológica y evolutivamente, las situaciones que dieron origen a cada uno de los conceptos trigonométricos, con el fin de explicar la trascendencia del manejo conceptual en la resolución de problemas. También, es fundamental que los docentes reconozcan que la propuesta aquí descrita debe y puede ser modificada parcial o totalmente, con el propósito de que cada docente construya su propia propuesta didáctica dependiendo de las necesidades pedagógicas y del entorno socio-político y cultural.

La enseñanza de las matemáticas necesita que los docentes planeen y propongan situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo para los educandos y así permitir que ellos participen

activamente en la reconstrucción y validación del saber matemático haciendo uso de materiales manipulativos, representativos y tecnológicos para encontrar estrategias de solución a los problemas que se le planteen y de esta manera ayude a profundizar y consolidar los distintos procesos generales. (Runza, 2013, p.87)

De la misma manera, en el trabajo de maestría de Matta (2014); se presenta como objetivo principal, diseñar y aplicar una propuesta didáctica que favorezca la enseñanza de las Razones Trigonométricas usando GeoGebra. Aquí se evidencian las alternativas y variantes que pueden utilizar los docentes para apoyar sus clases de matemáticas (en particular, de trigonometría) con un software de geometría dinámica (GeoGebra). Se diseñó una articulación de una propuesta didáctica, que posteriormente fue aplicada a los estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Distrital Leonardo Posada Pedraza, de la localidad séptima, Bogotá, Colombia.

La propuesta consta de cinco applets de GeoGebra, donde cada una está directamente relacionada con las temáticas asociadas con el estudio de las razones trigonométricas. Además, dicha propuesta incluyó la realización de formularios de Google Docs, que contenían preguntas cuyo propósito era ayudar a los estudiantes a mejorar la comprensión de la temática abordada; para acceder a las cinco applets y los formularios los estudiantes debían ingresar a un blog que se diseñó exclusivamente para la propuesta didáctica. Dentro de las conclusiones obtenidas en este trabajo de campo, las más importantes y que guardan una estrecha relación con el objetivo de este trabajo de grado nos dicen que “La mediación del software en el proceso de enseñanza en efecto facilitó el intercambio entre los sistemas de representación como pasar de lo gráfico-analítico a lo numérico-simbólico, de manera que las representaciones tradicionales “las estáticas” se enriquecen con esta herramienta” (Matta, 2014, p.109).

La propuesta didáctica que se puso en práctica facilitó tanto el proceso de enseñanza al docente, como de aprendizaje a los estudiantes, en donde la observación directa de los Applets y la manipulación de los elementos de las construcciones realizadas con el software, permitieron abstraer ideas y conceptos regularmente incomprensibles con representaciones estáticas”. (Matta, 2014, p.109).

Finalmente, este trabajo de campo dentro de los resultados y conclusiones obtenidas, contiene un análisis cualitativo descriptivo de las respuestas de los formularios y de una encuesta de satisfacción aplicada a los estudiantes para determinar el impacto que tuvo la propuesta didáctica

1.2.2. Curriculares

1.2.2.1. Descripción General Currículo Colombiano.

De acuerdo con el marco legal para el diseño curricular en Colombia, las normas y textos que determinan, guían, planifican y regulan el diseño del currículo en los diferentes establecimientos e instituciones educativas del país, son la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), el decreto 1860 de 1994, la resolución de 2343 de 1996, el decreto 1290 de 2009, los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencia, las matrices de referencia y los derechos básicos de aprendizaje (DBA V.2).

En los últimos años, el ministerio de educación nacional (MEN) ha realizado múltiples reformas al sistema educativo del país, con el fin de mejorar en aspectos como calidad y cobertura; entre ellas se destaca la Ley 1753 (Ley del plan Nacional de desarrollo 2014 – 2018) expedida en el año 2015, con la que se fundamenta la trazabilidad y las estrategias para hacer de Colombia la más educada en América Latina, en el año 2025 (proyección y meta educativa del país, para el mejoramiento de la Calidad educativa). Las reformas realizadas al currículo proponen diversas reflexiones y propuestas en materia académica, social, política y cultural; las cuales tratan de establecer la enseñanza por aprendizajes y evaluación por competencias, articular cobertura y equidad estudiantil con calidad de la educación y referenciar el actuar docente, centrado en el modelo basado en evidencias (MBE).

Currículo es el conjunto de criterios, planes de estudio, metodologías, y procesos que contribuyen a la formación integral y a la construcción de la identidad cultural nacional, regional y local, incluyendo también los recursos humanos, académicos y físicos para poner en práctica las políticas y llevar a cabo el proyecto educativo institucional (Decreto 230, 2002).

Los lineamientos curriculares en matemáticas, de acuerdo con MEN (1998); los podemos clasificar en tres categorías:

Procesos, se destacan en matemáticas los procesos de comunicación, argumentación, razonamiento, representación, resolución y proposición de problemas; **tipos de pensamiento**, conformado por cinco pensamientos, que articulados conforman el pensamiento matemático (pensamiento numérico, variacional, métrico, espacial y aleatorio); y **contexto**, que pueden ser de carácter real, hipotético o formal (en este trabajo de grado se trabaja con contextos formales).

1.2.2.2. Ubicación Curricular del Objeto Matemático.

De acuerdo con los DBA V.2. (MEN, 2017), definida como una *herramienta que el MEN pone a disposición de la comunidad, diseñada para todos los miembros de la institución educativa (padres, madres, cuidadores, docentes y estudiantes) que les permite identificar los saberes básicos que se deben adquirir en los diferentes grados escolares (primero a once) para las áreas de matemáticas y lenguaje*. En ese orden de ideas, los aprendizajes para fortalecer y desarrollar en grado décimo (asociados al aprendizaje de las identidades pitagóricas) son:

Tabla 1.

DBA y evidencias de los DBA, para grado décimo.

DBA	EVIDENCIAS DE LOS DBA
4. Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.	✓ Reconoce el significado de las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo para ángulos agudos, en particular, seno, coseno y tangente. ✓ Explora, en una situación o fenómeno de variación periódica, valores, condiciones, relaciones o comportamientos, a través de diferentes representaciones.

DBA	EVIDENCIAS DE LOS DBA
	✓ Calcula algunos valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario. ✓ Reconoce algunas aplicaciones de las funciones trigonométricas en el estudio de fenómenos diversos de variación periódica, por ejemplo: movimiento circular, movimiento del péndulo, del pistón, ciclo de la respiración, entre otros. ✓ Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.
5. Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos y de sus transformaciones a partir de diferentes representaciones.	✓ Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano. ✓ Identifica las propiedades de lugares geométricos a través de sus representaciones en un sistema de referencia. ✓ Utiliza las expresiones simbólicas de las cónicas y propone los rangos de variación para obtener una gráfica requerida. ✓ Representa lugares geométricos en el plano cartesiano, a partir de su expresión algebraica.

Nota: Adaptado de los DBA V.2. (MEN, 2017).

Con base en las mallas de aprendizaje de 1°, 2°, 3°, 4° y 5°, la información suministrada en Tabla 1, los tipos de pensamiento matemático, las competencias (comunicación, razonamiento, procesamiento, modelación y resolución de problemas) y los once conceptos estructurantes de los DBA (MEN, 2017), se puede organizar el mapa de relaciones en matemáticas para grado décimo, con el fin de evidenciar la ubicación curricular del objeto matemático, de acuerdo a la malla de aprendizaje:

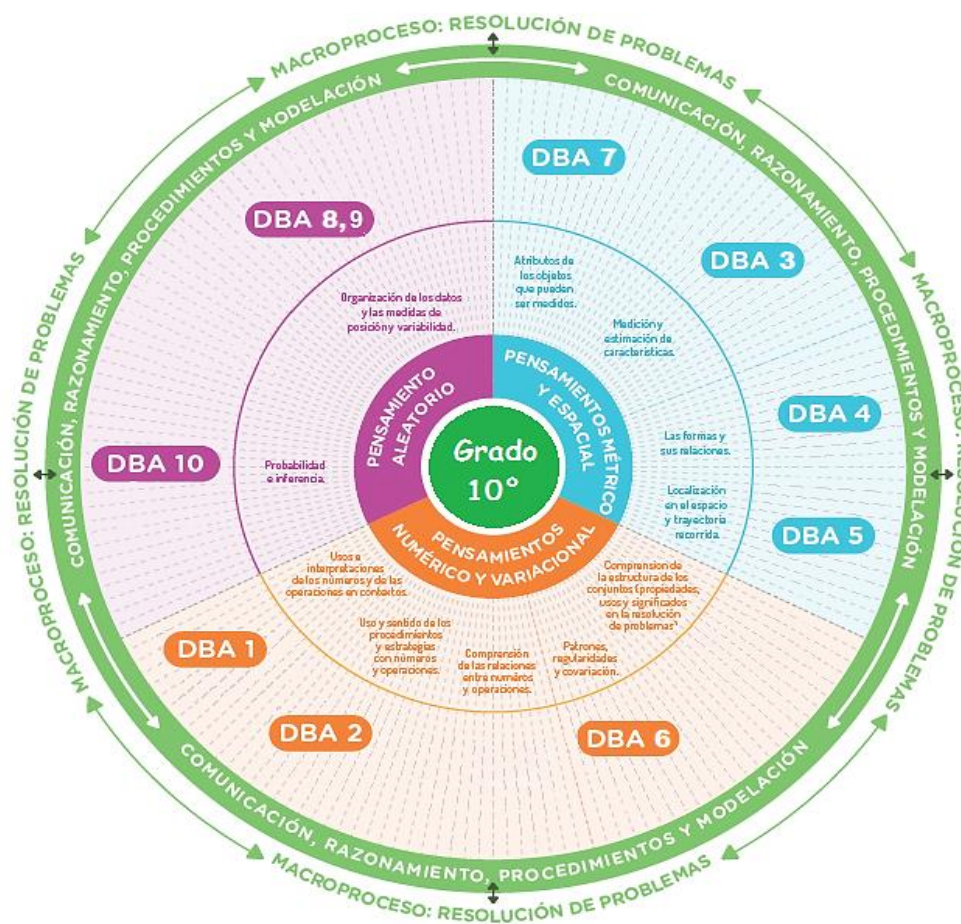


Figura 1. Adaptación del Mapa de relaciones de los DBA V.2 para grado décimo; MEN (2017) realizado por los autores.

1.2.3. Resultados de las pruebas estandarizadas nacionales.

1.2.3.1. Descripción de las pruebas saber de 3°, 5° y 9°.

Por otra parte, las pruebas Saber de 3°, 5° y 9° centralizan su evaluación en las competencias básicas que deben desarrollar los estudiantes, de acuerdo a los ciclos de 1° a 3°, de 4° a 5° y de 6° a 9°; respectivamente. Las áreas evaluadas son matemáticas y lenguaje. Análogamente, al igual que el Saber 11°, estas pruebas generan resultados individuales de los estudiantes y de los establecimientos educativos, sobre las competencias y aprendizajes de las dos áreas evaluadas; además, tienen como propósito contribuir al mejoramiento de la calidad educativa, por medio de evaluaciones periódicas que verifiquen y diagnostiquen, el desarrollo de competencias y aprendizajes en los estudiantes de la educación básica.

Los resultados obtenidos en la prueba para los estudiantes y para los establecimientos educativos, son clasificados en niveles de desempeño, los cuales consisten en una categorización cualitativa, relacionada con la manera en que el estudiante puede desenvolverse con preguntas en una situación contexto específica y con distintos rangos de dificultad (ICFES, 2017). De acuerdo con las guías de orientación de las pruebas Saber 3°, 5° y 9° (ICFES, 2017), se registra la relación entre el puntaje obtenido en el área de matemáticas y los niveles de desempeño en matemáticas para cada uno de los grados, en la siguiente tabla:

Tabla 2.

Clasificación por niveles de desempeño en matemáticas para las pruebas Saber de 3°, 5° y 9°, de acuerdo a los puntajes obtenidos, en el área de matemáticas.

Nivel de Desempeño	Rango de puntajes en Matemáticas		
	Grado Tercero	Grado Quinto	Grado Noveno
Insuficiente	100 – 254	100 – 241	100 – 233
Mínimo	255 – 307	242 – 318	234 - 345
Satisfactorio	308 – 366	319 – 384	346 – 455
Avanzado	367 - 500	385 – 500	456- 500

1.2.3.2. Descripción del Examen Saber 11°.

Los resultados del Saber 11° tienen como objetivo, servir como guía en el camino del mejoramiento continuo de la educación del país y hacer de la evaluación de la calidad educativa, (*ISCE - índice sintético de la calidad educativa*) un instrumento fundamental para identificar fortalezas y debilidades en el sistema educativo, con el propósito de diseñar estrategias curriculares que permitan el mejoramiento al interior de los establecimientos educativos. Desde el año 2016, para los establecimientos educativos el reporte de resultados del examen saber 11° modificó su estructura y ahora presenta cuatro tipos de resultados, para las cinco áreas evaluables (matemáticas, lectura crítica, ciencias sociales y ciudadanas, ciencias naturales e inglés):

(i) **Promedio:** corresponde a una valoración cuantitativa del desempeño medio de los estudiantes del establecimiento educativo, en el reporte de resultados se encontrarán dos tipos de promedio; **el promedio del puntaje por pruebas** que es expresado en una escala de 0 a 100 y se genera a partir de los puntajes obtenidos por los estudiantes de la institución en cada una de las cinco pruebas (para cada prueba del examen, se generará un promedio); y **el promedio global** que es expresado en una escala de 0 a 500, y se genera a partir de los puntajes globales obtenidos por los estudiantes de la institución, que se obtienen multiplicando por cinco el promedio ponderado de los puntajes alcanzados en las cinco pruebas por cada estudiante.

(ii) **Desviación estándar:** es una medida de dispersión de datos, que muestra la variabilidad de los puntajes globales obtenidos por los estudiantes, respecto el promedio global del establecimiento educativo; entre más bajo sea el valor de la desviación, menores serán las diferencias de desempeño entre los estudiantes de la institución.

(iii) **Niveles de desempeño:** son generados para cada una de las pruebas del examen y consisten en una descripción cualitativa, sobre lo que los estudiantes son capaces de hacer, cuando se enfrentan a situaciones con un contexto específico. De acuerdo al desempeño de cada estudiante, en preguntas de distintos niveles de dificultad, se definen cuatro niveles de desempeño. Los estudiantes clasificados en el *nivel 1 (puntaje de 0 a 35 para la prueba de matemáticas)*, sólo se limitan a identificar las tareas demandadas; en el *nivel 2 (puntaje de 36 a 50 para la prueba de matemáticas)*, diferencian procedimientos posibles para realizar tareas requeridas; en el *nivel 3 (puntaje de 51 a 70 para la prueba de matemáticas)*, analizan procedimientos para desarrollar de la mejor manera la tarea solicitada; y en el *nivel 4 (puntaje de 71 a 100 para la prueba de matemáticas)*, deducen y combinan procedimientos para realizar las tareas solicitadas (entre más alto sea el porcentaje de estudiantes que se encuentren en los niveles 3 y 4, mejor será el desempeño del establecimiento educativo).

(iv) **Aprendizajes:** describen de forma detallada las competencias evaluadas en cada prueba del examen; Debido a que las pruebas están diseñadas de acuerdo al **Modelo Basado en Evidencias**, cada pregunta se enfoca en la evaluación de un aprendizaje específico. En Matemáticas, se evalúan tres aprendizajes: **(1)** valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución

a problemas; (2) comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos y (3) frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.

1.2.3.3. Descripción del colegio.

Colegio: Institución Educativa La Milagrosa. **Código DANE:** 105001000418. **Código ICFES (colegio):** 111500. **Sede:** principal. **Zona:** Urbano. **Municipio - Departamento:** Palmira – Valle del Cauca. **ETC:** Palmira. **Dirección:** Carrera 28 # 33 – 12 (esquina). **Sector:** Oficial. **Calendario:** A. **Teléfono:** (2) 2728130.

La institución educativa La Milagrosa, es un colegio cristiano-católico reconocido en la ciudad de Palmira por formar y conducir estudiantes, hacia la excelencia académica. Es un establecimiento educativo que cuenta con tres sedes *((i) La I.E José María Córdoba, forma estudiantes de básica primaria; (ii) la I.E Gregorio Hernández Saavedra, instruye estudiantes de grado sexto, séptimo y transición; y, por último, (iii) La I.E la Milagrosa (sede principal), educa y prepara estudiantes de básica y Media).* La infraestructura de la sede principal, es una construcción de dos pisos, hecha en ladrillo limpio que cuenta con dos patios recreacionales para los estudiantes, el patio principal es una zona verde acompañada de algunas plantas ornamentales y el patio secundario es la zona dispuesta para realizar las actividades deportivas y cuenta con una cancha mixta (fútbol, baloncesto y voleibol). También, la sede principal cuenta con alrededor de catorce salones para los estudiantes, una sala de sistemas integrada por más de 20 computadores portátiles, una sala de docentes, un aula dotada con un tablero inteligente, una oficina para rectoría y otra la coordinación académica y disciplinar, una secretaría (con atención a los estudiantes en el horario del descanso) y dos laboratorios (uno de ciencias y otro de matemáticas). Los estudiantes de la institución son en su mayoría de clase social media o baja, y se caracterizan por su sentido de pertenecía hacia la institución y la ciudad de Palmira, su responsabilidad, respeto, disciplina y compromiso con el medio ambiente (desde hace varios años en la I.E, se desarrolla un proyecto llamado MARSE (*Manejo Adecuado de los Residuos Sólidos Escolares*), a cargo de los docentes y estudiantes)).

1.2.3.3.1. Resultados Históricos (prueba 2016-II y 2017-II) del examen Saber 11°, Pertenecientes a la I.E La Milagrosa.

Comparando los resultados generales del Saber 11° a nivel nacional de las pruebas 2016-II y 2017-II, con el reporte de los resultados históricos obtenidos por la I.E La Milagrosa (sede principal) en los mismos periodos y con los resultados de otros establecimientos educativos de la entidad territorial certificada (ETC), se obtienen las siguientes estadísticas (para los años 2016 y 2017, en la I.E La Milagrosa se encontraban matriculados y presentaron la prueba 113 y 91 estudiantes; respectivamente):

Tabla 3.

Resultados generales; promedio del puntaje global y desviación estándar de las pruebas 2016-II y 2017-II.

Nivel de Agregación	Promedio		Desviación	
	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II
Sede principal	304	306	36	35
Colombia	258	255	47	48
ETC	267	263	49	51
Oficiales Urbanos ETC	273	271	49	51
Oficiales rurales ETC	242	242	43	44
Privados ETC	263	241	47	48

Contrastando los resultados históricos de la prueba de Matemáticas Saber 11° del establecimiento educativo, con los resultados nacionales y los de otras instituciones pertenecientes a la ETC, en los periodos 2016-II y 2017-II, se tiene que:

Tabla 4.

Resultados históricos de la prueba de matemáticas; promedio del puntaje y desviación estándar de las pruebas 2016-II y 2017-II.

Nivel de Agregación	Promedio		Desviación	
	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II
Sede principal	61	61	9	9

Nivel de Agregación	Promedio		Desviación	
	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II
Colombia	51	50	12	12
ETC	53	52	12	13
Oficiales Urbanos ETC	54	54	12	13
Oficiales rurales ETC	47	47	11	11
Privados ETC	51	47	11	11

Equiparando el porcentaje de estudiantes, en cada nivel de desempeño en la prueba de Matemáticas Saber 11° del establecimiento educativo, con el nivel de desempeño a nivel nacional y los de otras instituciones pertenecientes a la ETC, en los periodos 2016-II y 2017-II, se obtiene que:

Tabla 5.

Porcentajes de estudiantes presentes, en cada uno de los niveles de desempeño de la prueba Saber 11° de matemáticas, en los periodos 2016-II y 2017-II.)

Nivel de Agregación	Niveles de desempeño en matemáticas							
	1		2		3		4	
	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II
Sede principal	1%	0%	10%	13%	75%	74%	14%	13%
Colombia	11%	12%	39%	40%	45%	43%	4%	5%
ETC	9%	12%	35%	35%	50%	46%	5%	7%
Oficiales Urbanos ETC	8%	9%	32%	31%	54%	51%	6%	9%
Oficiales Rurales ETC	18%	17%	46%	49%	34%	33%	1%	2%
Privados ETC	9%	18%	42%	46%	46%	34%	3%	3%

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por el establecimiento educativo (pruebas 2016-II y 2017-II), la clasificación por niveles de desempeño (en apartado 1.3.2.) y los resultados de la Tabla 5 para la sede principal, se pueden representar gráficamente el porcentaje de estudiantes que no cumplen con los tres aprendizajes evaluados en la prueba de matemáticas (en apartado 1.3.2.) como:

NO valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.

Semáforo

El 70% o más de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

Entre el 40% y el 69% de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

Entre el 20% y el 39% de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

El 19% o menos de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

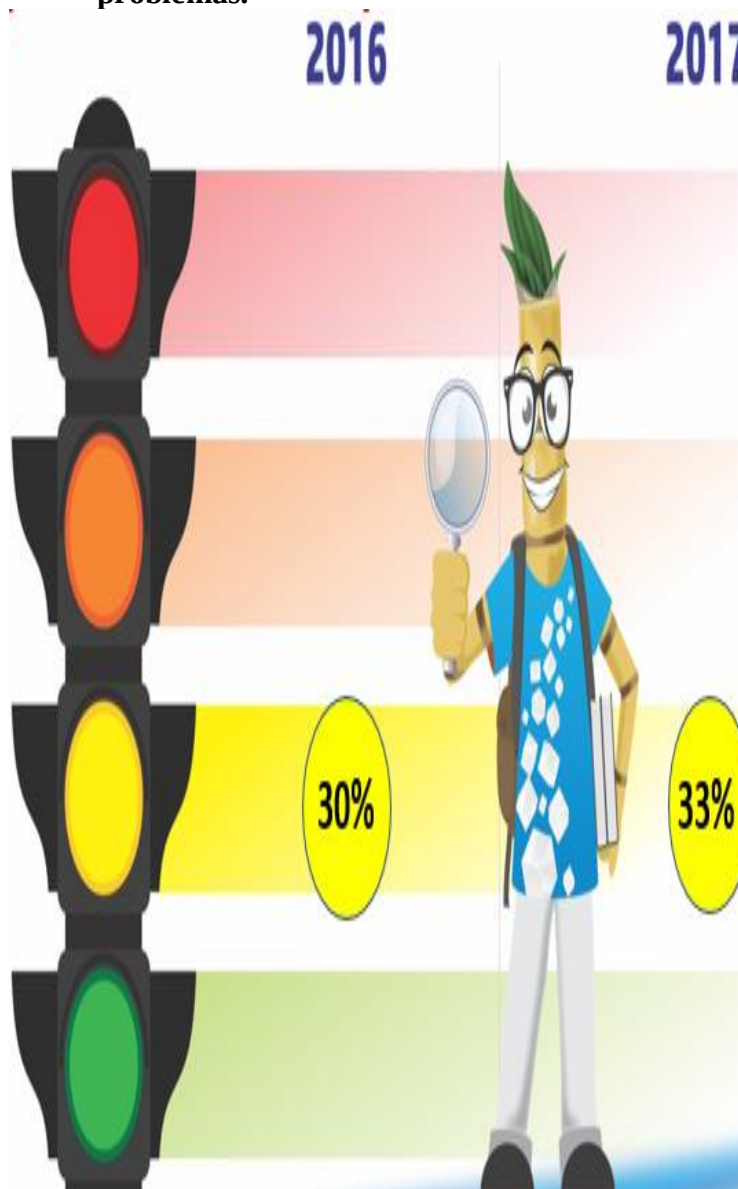


Figura 2. Clasificación del aprendizaje (Valida procedimientos y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas) por niveles de desempeño, de acuerdo a los resultados obtenidos por establecimiento educativo, en las pruebas 2016-II y 2017-II.

NO comprende, ni transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos.

Semáforo

El 70% o más de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

Entre el 40% y el 69% de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

Entre el 20% y el 39% de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

El 19% o menos de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

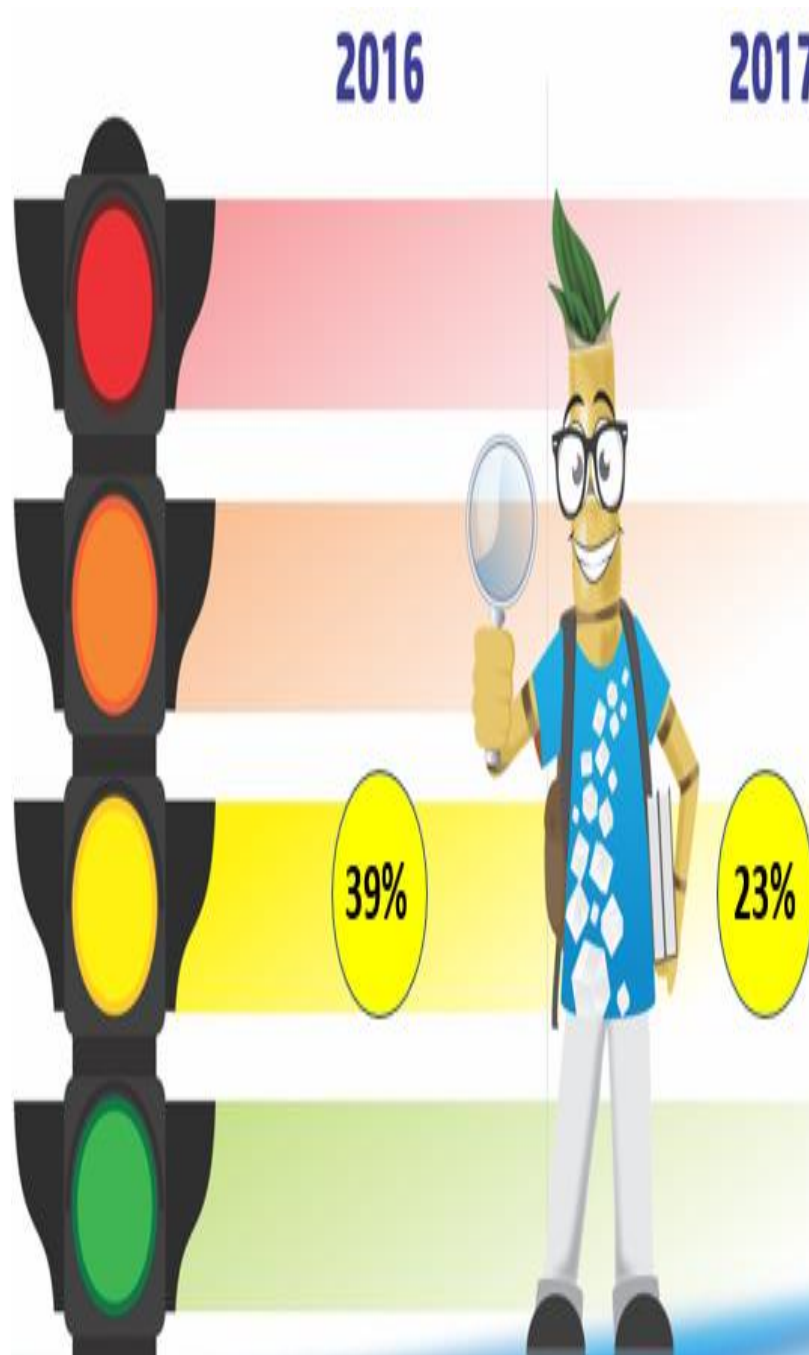


Figura 3. Clasificación del aprendizaje (NO comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos) por niveles de desempeño, de acuerdo a los resultados obtenidos por establecimiento educativo, en las pruebas 2016-II y 20.

Frente a un problema que involucre información cuantitativa, NO plantea ni implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas

Semáforo

El 70% o más de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

Entre el 40% y el 69% de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

Entre el 20% y el 39% de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

El 19% o menos de los estudiantes de la I.E, **NO** contestaron correctamente las preguntas relacionadas con el aprendizaje.

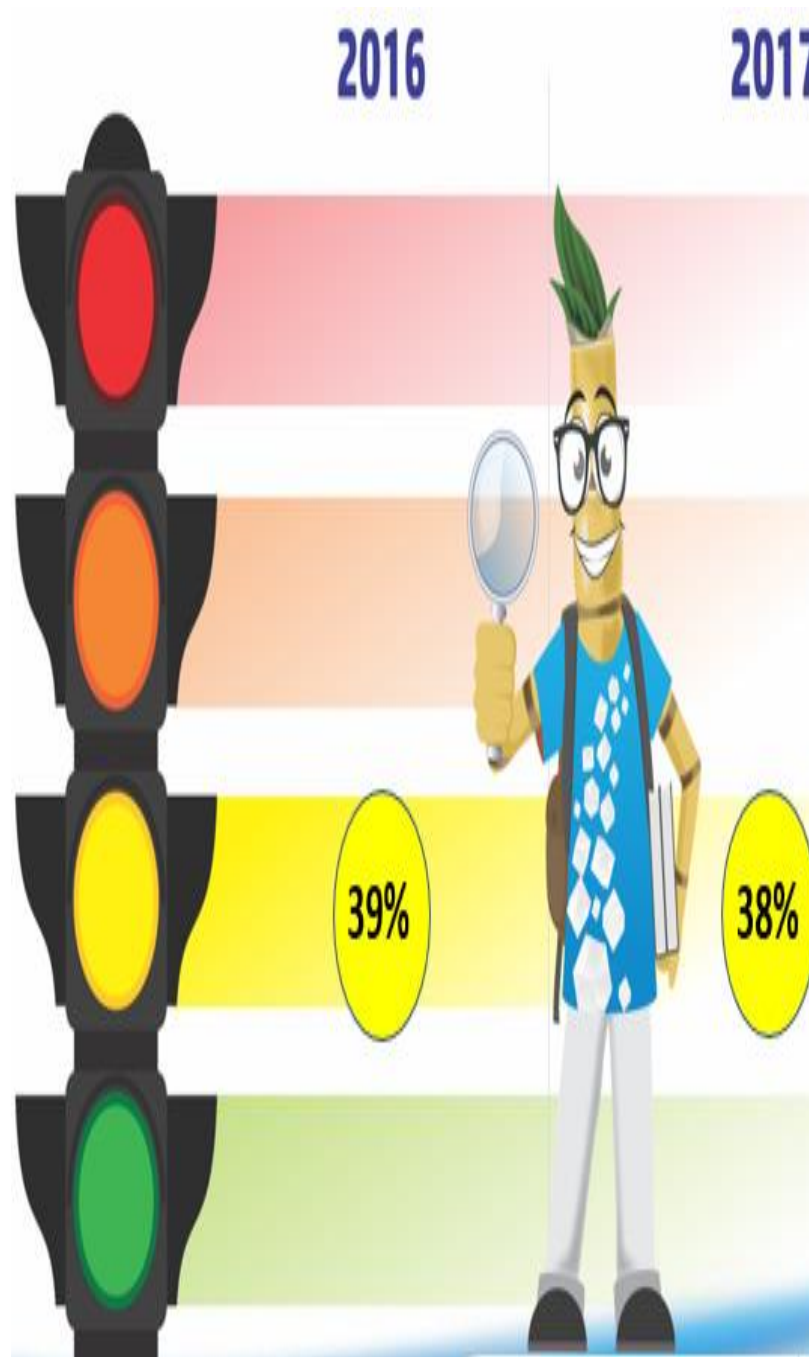


Figura 4. Clasificación del aprendizaje (Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas) por niveles de desempeño, de acuerdo a los resultados obtenidos por establecimiento educativo, en las pruebas 2016-II y 2017-II.

A partir de los resultados consignados en la Tabla 5, y de los resultados del Saber 11° reportados para la ETC y Colombia, por el ICFES (2016) y (2017); se plantea la siguiente tabla comparativa:

Tabla 6.

Comparativa histórica, del porcentaje de estudiantes que NO contestaron correctamente las preguntas asociadas a cada uno de los niveles de aprendizajes, de la I.E La Milagrosa, de la ETC y nacional (Colombia).

Niveles de agregación Aprendizajes	Sede principal		Colombia		ETC	
	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II	2016-II	2017-II
Valido procedimiento y estrategias matemáticas utilizadas para dar solución a problemas.	30%	33%	48%	48%	43%	42%
Comprende y transforma la información cuantitativa y esquemática presentada en distintos formatos.	39%	23%	55%	37%	50%	31%
Frente a un problema que involucre información cuantitativa, plantea e implementa estrategias que lleven a soluciones adecuadas.	39%	38%	54%	54%	52%	48%

1.3.Justificación.

En lo que concierne a lo curricular, Fiallo (2011, p.10-11) afirma, que no existe un enfoque claro de parte del MEN, en cuanto a la metodología que debe ser usada, para abordar la enseñanza de la trigonometría. Por otra parte, para nadie es un secreto, que, en la mayoría de las aulas de clase colombianas, predomina el modelo de enseñanza tradicional de las matemáticas (en específico, de la trigonometría), donde las aproximaciones que se realizan para la comprensión de

los objetos matemáticos, enfatizan en un solo registro de representación estático (el simbólico o algebraico). Así, este modelo de enseñanza tradicional, en cierta forma condiciona la actitud del estudiante y su interés por el aprendizaje de las matemáticas, debido a que, en ella no se articulan actividades de aprendizaje de impacto (actividades en contexto, en las que se pongan en práctica los tres saberes importantes para el desarrollo de competencias, en especial el *saber hacer*), que susciten su afán por aprender y le faciliten la comprensión de esta ciencia. Lo anterior, representa para el estudiante un obstáculo didáctico, que influye en su proceso de aprendizaje, el desarrollo de competencias, procesos centrales del pensamiento y su comprensión de las matemáticas, limitando su capacidad de adaptación y respuesta a los nuevos cambios, retos y exigencias del mundo real, donde la tecnología ha influido y transformado a casi todas las costumbres sociales, culturales, morales y éticas, incluyendo el campo pedagógico y educativo.

Así mismo, es importante que la tecnología permee el modelo de aprendizaje tradicional, que se limita a la comprensión procedimental y de estructura de unos algoritmos (representaciones estáticas). Por tanto, es vital que los docentes exploren e implementen recursos dinámicos digitales (que estimulen los procesos de enseñanza y aprendizaje, mediante el desarrollo de competencias asociadas a los procesos de comunicación, razonamiento y resolución de problemas). Como ejemplos de recursos tecnológicos, se tienen: (i) capsulas y contenidos todos aprender, del MEN, publicadas en el portal educativo de Colombia Aprende (se combinan recursos digitales didácticos, y guías virtuales para la elaboración de material concreto que facilite e impacte el aprendizaje de los estudiantes); (ii) el Simulador de proyecciones interactivas PhET, creada por Carl Wiemann en el 2002 (ganador premio nobel de física 2001), que propicia ambientes de aprendizaje basados en la exploración, la variación y el juego; y (iii) GeoGebra es un micromundo computacional, que permite la comprensión de los objetos matemáticos mediante el uso de las diferentes vistas que ofrece la herramienta (vista CAS, vista algebraica, vista hojas de cálculo, vistas gráficas), facilitando la exploración a través del uso de diferentes registros de representación de los objetos matemáticos.

Finalmente, este trabajo de investigación resulta pertinente, porque contiene una secuencia de innovación didáctica, de modo que, se tratará de describir las principales características que tiene un proceso de enseñanza y aprendizaje, inmerso en un ambiente de software dinámico y material

concreto. De esta forma, los procesos de enseñanza se relacionan con la mediación instrumental, propuesta por Moreno (2001), idea que se encuentra sustentada en Runza (2013, p.87), puesto que, afirma la necesidad de que los docentes preparen e implementen material concreto y herramientas tecnológicas, con el fin de que los estudiantes puedan desarrollar aprendizaje significativo.

Asimismo, los procesos de aprendizaje se encuentran relacionados con la mediación instrumental de Moreno (2001) y, con los beneficios del uso de múltiples representaciones en diferentes registros, propuestos en Duval (1995a); puesto que, tal como plantea Matta (2014, p.109), la mediación instrumental de software tecnológico, resulta ser una potente herramienta, que permite al estudiante analizar y comprender los objetos matemáticos (utilizando diferentes registros de representación), de formas que no sería posible, utilizando solamente representaciones estáticas de dichos objetos (modelo de enseñanza tradicional, que usa un solo registro de representación). En conclusión, en este trabajo se evidenciará una secuencia de innovación didáctica, cuyas actividades de enseñanza estarán condicionadas por las dificultades y formas de aprendizaje, identificadas previamente en los estudiantes.

Objetivos.

1.3.1. Objetivo principal.

Describir las principales características que tiene un proceso de enseñanza y aprendizaje con la mediación de GeoGebra y material concreto, para propiciar la construcción de las identidades pitagóricas en estudiantes de décimo grado

1.3.2. Objetivos secundarios.

- Analizar las características que deben tener las actividades de aprendizaje para que los estudiantes de décimo grado logren construir las identidades pitagóricas.
- Estudiar el papel que desempeña el uso de material concreto y de GeoGebra en la construcción de las identidades Pitagóricas.

- Describir la importancia que tiene el uso de las múltiples representaciones en la construcción de las identidades pitagóricas.

1.4.Preguntas Orientadoras.

1.4.1. Pregunta central.

¿Qué características debe tener un proceso de enseñanza y aprendizaje con la mediación de GeoGebra y material concreto, para propiciar la construcción de las identidades pitagóricas en estudiantes de décimo grado?

1.4.2. Preguntas auxiliares.

¿Qué características deben tener las actividades de aprendizaje para que los estudiantes de décimo grado logren construir las identidades pitagóricas?

¿Qué papel desempeña el uso de material concreto y de tecnología (GeoGebra) en la construcción de las identidades Pitagóricas?

¿Qué importancia tiene el uso de las múltiples representaciones en la construcción de las identidades pitagóricas?

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1.Introducción

En el segundo capítulo se indica el objeto matemático, como así mismo, se estudian algunos referentes teóricos que sustentan la presente investigación, tales como la mediación instrumental, el uso de múltiples representaciones y las características de GeoGebra. Cabe mencionar que este marco referencial constituye un elemento central para el diseño y aplicación de los instrumentos didácticos, así como para interpretar (en un futuro a corto plazo) los resultados obtenidos durante la implementación de las actividades propuestas en el capítulo tres.

2.2. El Objeto Matemático.

Antes de profundizar sobre lo que es una identidad pitagórica, es necesario precisar la diferencia entre una ecuación y una identidad. De Oteyza (2001), afirma que una ecuación es una igualdad entre expresiones algebraicas, que puede incluir funciones trigonométricas o de otro tipo, y puede tener o no solución; en cambio, una identidad es un caso particular de ecuación que es cierta para todos los valores de la variable. Así, se conocen como identidades trigonométricas a las igualdades que involucran funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, entre otros); las cuales resultan de mucha utilidad en la simplificación de expresiones algebraicas, en el cálculo de integrales indefinidas.

En la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, durante la etapa escolar (grado décimo), es común que los estudiantes deban enfrentarse a problemas que contengan funciones trigonométricas, donde su solución involucre determinar uno o más ángulos, relacionados mediante operaciones aritméticas. Aunque son muchas las identidades trigonométricas, este

trabajo de grado se limita como objeto matemático de interés, las tres identidades pitagóricas $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$ y $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$; las cuales se obtienen aplicando el teorema de Pitágoras, a un triángulo rectángulo cualquiera construido al interior de una circunferencia unitaria (centrada en el origen del plano cartesiano), cuya hipotenusa siempre es el segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto sobre ella y, uno de sus catetos siempre reposa sobre el eje x.

No existe un único método para demostrar las identidades trigonométricas; en consecuencia, se realizarán dos de las tres demostraciones de las identidades pitagóricas (en general, para cualquier valor del radio de una circunferencia), combinando argumentos (representaciones) geométricos y algebraicos. La demostración de la tercera identidad pitagórica, se propone como ejercicio al lector.

2.2.1. Demostración de la identidad pitagórica $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

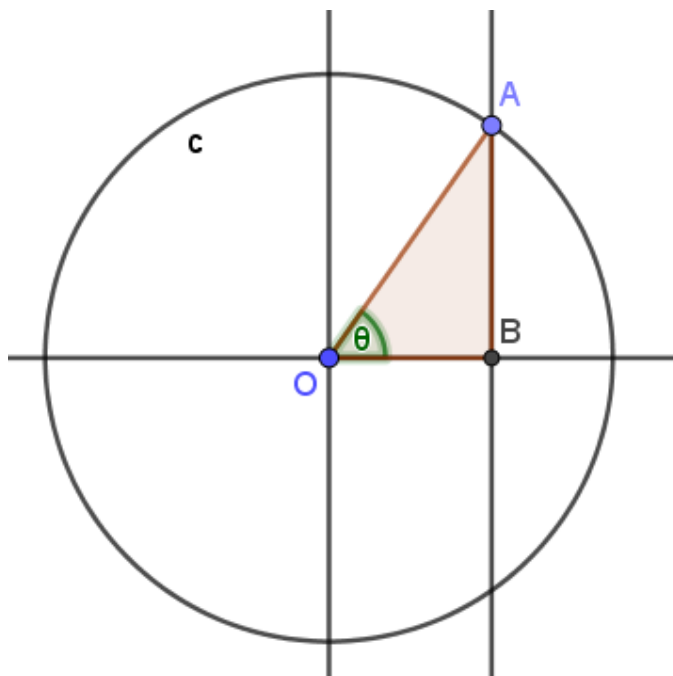


Figura 5.a. Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, donde el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I).

Sea la circunferencia C de centro O y radio $r \in R^+$ y sea A un punto en el plano de coordenadas $(x, y) \in C$; donde $(x, y) \in R \times R$. Sea B el punto de intercepción de la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto A , formando el triángulo rectángulo ΔABO , con catetos $|y| \equiv d(A, B)$ y $|x| \equiv d(O, B)$ y medida de hipotenusa igual a $r \equiv d(O, A)$. Sea θ , el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto sobre el eje x del ΔABO . De acuerdo con la definición de las funciones Seno y Coseno, como razones de los lados de un triángulo rectángulo, se tiene que:

$$\text{Sen } \theta = \frac{|y|}{r}, \quad \text{Cos } \theta = \frac{|x|}{r} \quad [1]$$

Despejando x e y , de las ecuaciones anteriores en [1] se tiene:

$$r * \text{Sen } \theta = |y|, \quad r * \text{Cos } \theta = |x| \quad [2]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el triángulo rectángulo, se puede aplicar el teorema de Pitágoras obteniendo:

$$|x|^2 + |y|^2 = r^2 \quad [3]$$

Sustituyendo las ecuaciones obtenidas de [2], en [3] se obtiene:

$$(r * \text{Sen } \theta)^2 + (r * \text{Cos } \theta)^2 = r^2$$

$$r^2 * \text{Sen}^2 \theta + r^2 * \text{Cos}^2 \theta = r^2$$

$$r^2(\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta) = r^2$$

$$(\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta) = \frac{r^2}{r^2}, \quad r \in R^+$$

En Consecuencia: **$\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$**

2.2.2. Demostración de la identidad pitagórica $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$

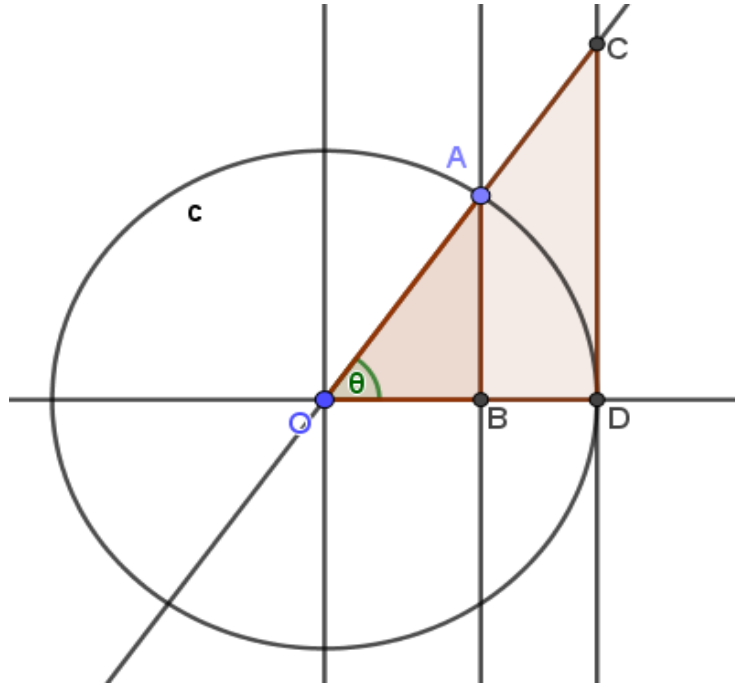


Figura 5.b. Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, construcción diseñada sobre el cuadrante I).

Sea la circunferencia C de centro O y radio $r \in \mathbb{R}^+$ y sea A un punto en el plano de coordenadas $(x, y) \in C$; donde $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea B el punto de intercepción de la recta perpendicular al eje X que pasa por el punto A , formando el triángulo rectángulo ΔABO , con catetos $|y| \equiv d(A, B)$ y $|x| \equiv d(O, B)$ y medida de hipotenusa igual a $r \equiv d(O, A)$. Sea la recta $\overleftrightarrow{CD}$, tangente a la circunferencia C en el punto D . Sea C un punto en el plano de coordenadas $(x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tal que C es el punto de intercepción de la recta $\overleftrightarrow{CD}$ y la recta $\overleftrightarrow{OA}$. Sea el triángulo rectángulo ΔCDO , formado por el eje x y las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{OA}$; con catetos $|y^*| \equiv d(C, D)$ y $|x^*| \equiv d(O, D) \equiv r$ y medida de hipotenusa igual a $h \equiv d(O, C)$. Sea θ , el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto sobre el eje x del ΔABO (el ángulo θ , es compartido por los triángulos rectángulos ΔABO y ΔCDO).

Como los triángulos ΔABO y ΔCDO son semejantes; se tiene que:

$$\frac{|y|}{|x|} = \frac{|y^*|}{r}, \quad \frac{r}{|x|} = \frac{h}{|x^*|} = \frac{h}{r} \quad [4]$$

Despejando $|y^*|$ de [4], se tiene que:

$$r * \frac{|y|}{|x|} = |y^*| \quad [5]$$

Por otra parte, teniendo en cuenta el triángulo rectángulo ΔCDO , se puede aplicar el teorema de Pitágoras obteniendo:

$$|y^*|^2 + r^2 = h^2 \quad [6]$$

Sustituyendo la ecuación obtenida de [5], en [6] se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(r * \frac{|y|}{|x|} \right)^2 + r^2 &= h^2 \\ r^2 * \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^2 + r^2 &= h^2 \\ r^2 * \left[\left(\frac{|y|}{|x|} \right)^2 + 1 \right] &= h^2 \\ \left[\left(\frac{|y|}{|x|} \right)^2 + 1 \right] &= \frac{h^2}{r^2}, \quad r \in \mathbb{R}^+ \\ \left(\frac{|y|}{|x|} \right)^2 + 1 &= \left(\frac{h}{r} \right)^2 \quad [7] \end{aligned}$$

Por otra parte, utilizando lo obtenido en [4] y aplicando la definición de las funciones Tangente y Secante, como razones de los lados de un triángulo rectángulo, se tiene para el ángulo θ que:

$$\tan \theta = \frac{|y|}{|x|} = \frac{|y^*|}{r}, \quad \sec \theta = \frac{r}{|x|} = \frac{h}{|x^*|} = \frac{h}{r} \quad [8]$$

Sustituyendo [8] en [7] se obtiene:

$$(\tan \theta)^2 + 1 = (\sec \theta)^2$$

En Consecuencia: **$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$**

En Fiallo (2011); se encuentran claramente representadas las tres identidades pitagóricas mediante un mapa conceptual (Figura 6):

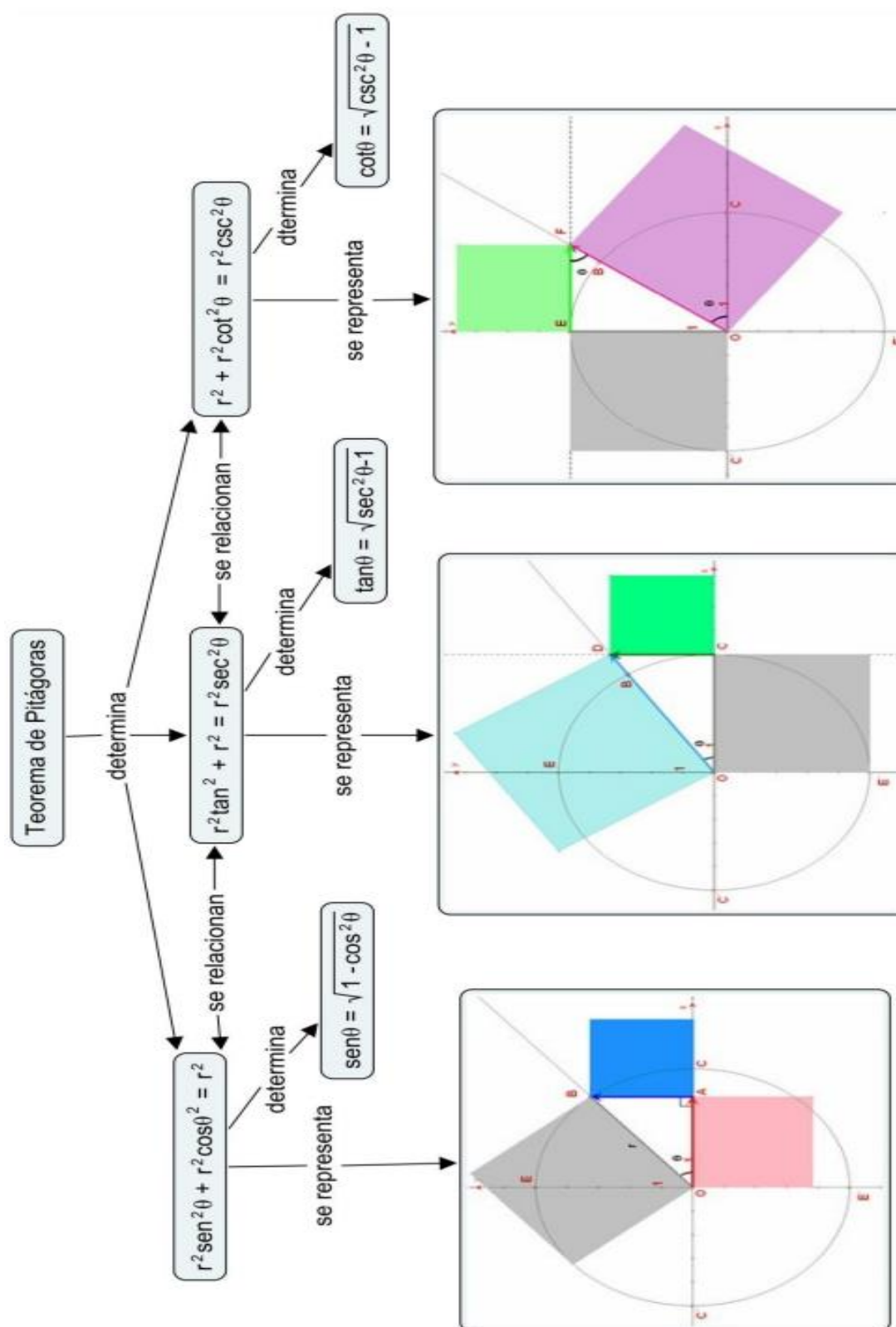


Figura 6. Identidades pitagóricas por Fiallo (2011).

2.3.Mediación Instrumental

Las tres mayores transiciones cognitivas de nuestra especie, han ocurrido durante su evolución. La primera indica la transformación que llevó a la memoria a una fase mimética, la segunda está asociada a la oralidad y finalmente, la tercera está ligada a las representaciones externas, la cual fue desarrollando un nuevo sistema de representación de la realidad, concentradas de manera sustancial en la memoria.

Así pues, podría afirmarse que todo es un conjunto de sucesos acompañados de varios elementos, los cuales han llevado a este desarrollo positivo; así, nuestra especie ha creado herramientas con propósitos premeditados alterando nuestra estructura cognitiva, es decir; la adaptación al mundo exterior a través de “nuevos órganos”. En este marco, es válido afirmar que la herramienta no modifica el pensamiento, pero si lo complementa como parte de una acción humana o una representación misma de lo que se piensa. En consecuencia, el ser humano siempre se ha visto en la necesidad de hacer uso de entes externos, ya sea para comunicarse o expandir su concepción y entendimiento de los objetos. Lo anterior, Luis Moreno lo ha denominado como la mediación instrumental y, señala que: *“las herramientas, como instrumentos de mediación, han sido desarrolladas en distintos medios culturales y en diversos periodos históricos. Son parte integral de las actividades humanas”* (2001, p. 83).

También es necesario mencionar que, dentro de la mediación instrumental se distingue la metáfora de dos procesos: la amplificación y la reorganización; explicadas y diferenciadas por Moreno, mediante una analogía, afirmando que:

La metáfora de las herramientas de amplificación sugiere pensar en una lupa. La lupa deja ver, amplificado, aquello que podía ser visto a simple vista. No cambia, por esto mismo, la estructura del objeto de nuestra visión. La metáfora de las herramientas de reorganización, sugiere pensar en un microscopio. Con el microscopio podemos ver lo que no era posible sin dicha herramienta. Accedemos entonces a otro nivel de la realidad, cualitativamente distinto. Se abre entonces, la posibilidad de acceder a un conocimiento nuevo (2002, p. 85).

Por otra parte, al definir la función $F(x) = A \operatorname{Sen}(Bx + C)$ en GeoGebra, con A, B y C; deslizadores previamente construidos en el micromundo computacional; puede observarse un claro ejemplo de estas metáforas. GeoGebra permite obtener la siguiente representación de un movimiento armónico simple (Figura 7):

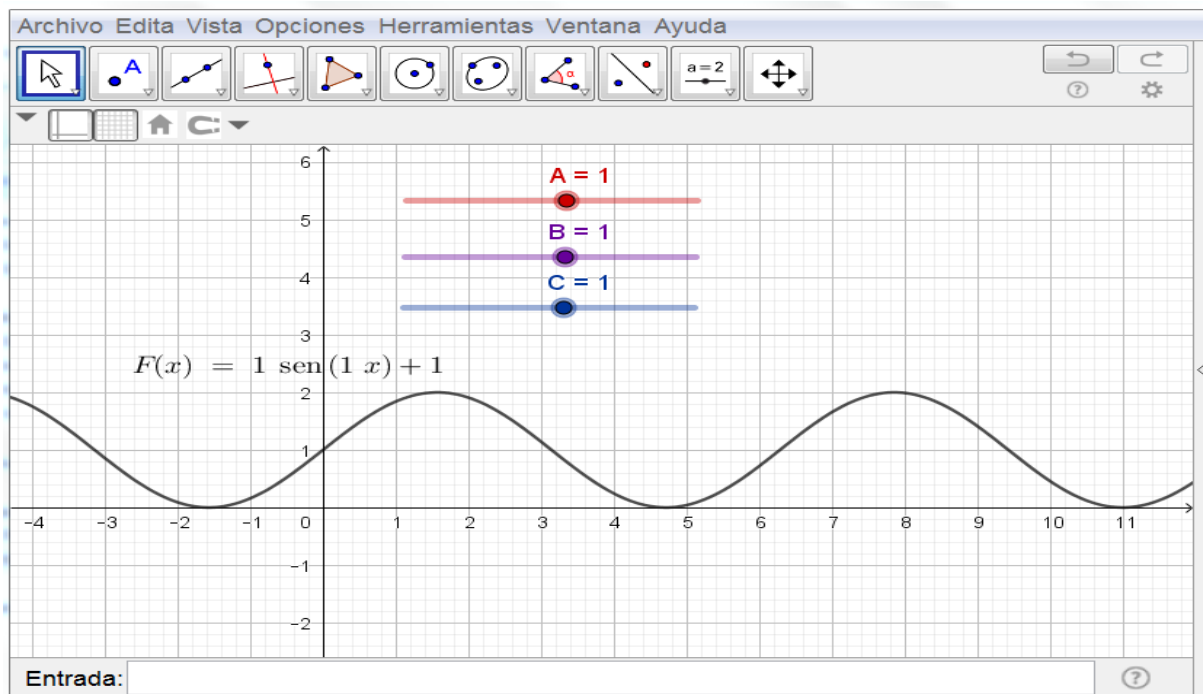
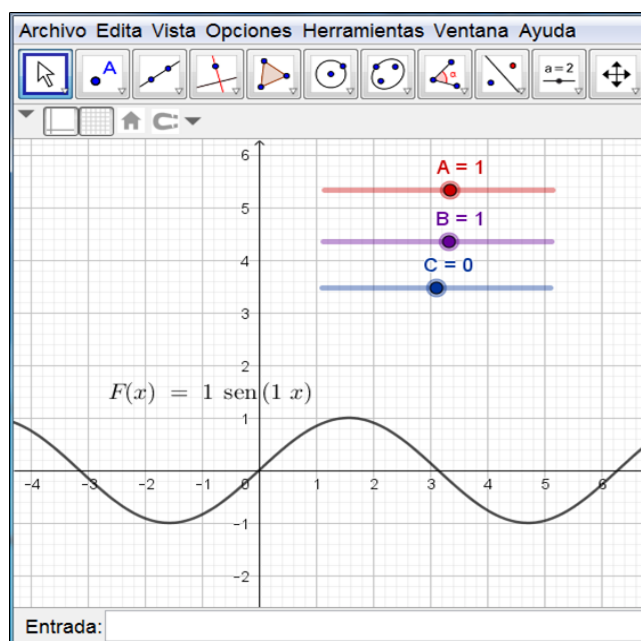


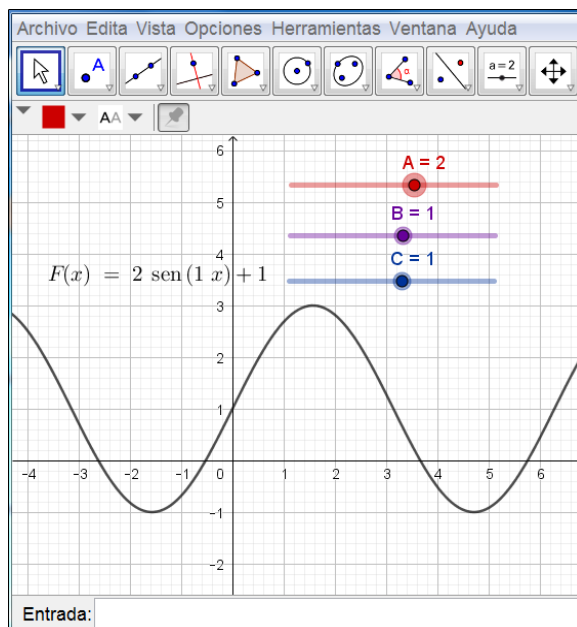
Figura 7. Representación gráfica de la función $F(x) = A \cdot \operatorname{Sen}(B \cdot x) + C$, tal que $A=B=C=1$. GeoGebra Classic.

En GeoGebra, los efectos de visualización producidos por los deslizadores A, B y C dentro de la función, también pueden ser observados usando material concreto (sólo lápiz y papel), aunque resultaría ser una labor ardua y tediosa. En este caso, GeoGebra permite construir lo mismo que puede realizarse con material concreto, sólo que, de una forma más ágil, dinámica y sencilla, por lo que, se puede concebir al micromundo computacional como herramienta de amplificación del objeto matemático. Esta herramienta, permite manipular los diferentes deslizadores. Por ejemplo; manipular el deslizador A, evidencia la variación de amplitud (Figura 8b), el B, permite analizar el cambio de periodo o de frecuencia (Figura 8c) y, el C, facilita la visualización del desfase (Figura 8a). En conclusión, el dominio de recursos y estrategia se ve potenciado por la utilización de la herramienta.

a.



b.



c.

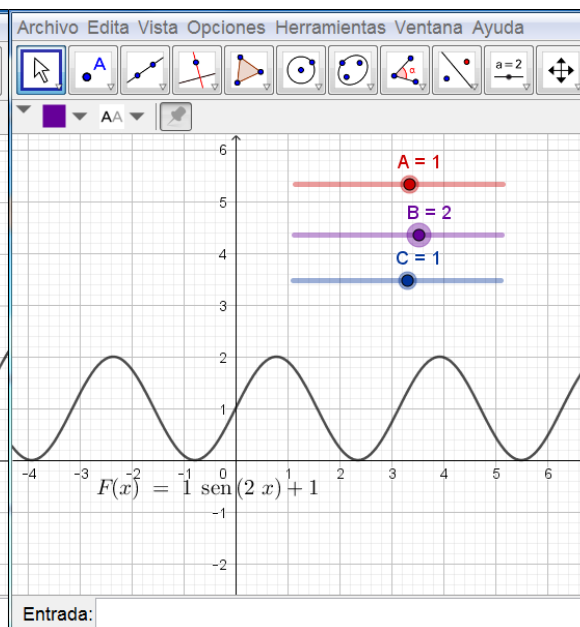


Figura 8. Tareas de reconocimiento que implican la distinción de aspectos visuales.
GeoGebra Classic.

Finalmente, asociado a la implementación de GeoGebra y material concreto, este trabajo tendrá en cuenta el papel que juega la mediación instrumental de estas herramientas, en los procesos de

enseñanza y aprendizaje de las identidades pitagóricas. Por otra parte, es necesario explicitar que las actividades que serán diseñadas con estas herramientas, tendrán en cuenta los resultados y datos que se vayan obteniendo como resultado de las actividades de la secuencia de innovación didáctica (en la metodología será descrita la secuenciación que tendrán las fases de la secuencia didáctica).

2.4. Características de GeoGebra.

GeoGebra es un micro-mundo computacional de la familia de la geometría dinámica, tal que dicho micro-mundo es un sistema (Objetos, operaciones y relaciones) computacional dotado de un conjunto de fenómenos (arrastre, movimiento, lugar geométrico, construcciones y macro-construcciones) que ocurre en la pantalla, además Hohenwarter (2009) menciona que es “.... *para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar*” (p.13). Al ser un software dinámico, permite construir de modo muy simple puntos, rectas, segmentos, polígonos, vectores, etc., de forma que cualquiera de ellos puede sufrir modificaciones con simples movimientos táctiles o del ratón, además, admite la entrada de expresiones directas, (algebraica, aritmética entre otros) y ofrece una amplia variedad de comandos; proporcionando herramientas, que permiten mostrar distintas representaciones como sean necesarias.

GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión, con millones de usuarios en casi todos los países, cuenta con una plataforma llamada GeoGebratube, la cual permite compartir secuencias, diseños y construcciones realizadas por las diferentes personas que hacen parte de esta familia. Actualmente, en Colombia hay cuatro institutos de GeoGebra; ubicados en Cali, Medellín, Bogotá e Ibagué; que constituyen comunidades por convenios realizados por universidades de la zona, que tienen un interés en común y es el desarrollo de materiales soportados por el software, que estén orientados a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En conclusión, GeoGebra se ha convertido en un proveedor líder de software de matemática dinámica, apoyando la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics) y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo (GeoGebra 2001).

Por último, es importante mencionar que en el presente trabajo de grado busca estudiar el rol que protagoniza el uso de GeoGebra, en los procesos de enseñanza y aprendizaje ligados a las identidades pitagóricas.

2.5. Uso de múltiples representaciones.

En matemáticas, el hacer uso de las múltiples representaciones con respecto a un mismo concepto, posibilita una mayor comprensión de dicho concepto, puesto que, según Duval, citado en Brojón, et al. 2015 “se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz de transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo”, haciendo alusión a que sin necesidad de cambiar las propiedades matemáticas representadas, se cambia el contenido de representación y esto se cumple, cuando se hace el cambio de un sistema a otro. No obstante, al momento de un docente enseñar un concepto matemático, este hace uso de un sistema de representación por lo general, el sistema simbólico algebraico, ya sea por facilidad o comodidad en el manejo conceptual, a través de una forma de representación específica, o de acuerdo a las creencias que tenga el profesor sobre las matemáticas. Y, aunque es una concepción errónea del docente el limitar (por así decirlo) la enseñanza de un concepto matemático, ya que conlleva a los estudiantes a un deficiente aprendizaje y a imposibilitar la resolución de problemas asociada a dicho concepto; por esta razón, es necesario que en las instituciones educativas, particularmente en el aula de clase, se implementen diversos tipos de representaciones semióticas, a través de actividades que conlleven a la utilización y articulación de dichas representaciones (esto con el fin de mencionar, que resulta indispensable para la enseñanza de las matemáticas, que los estudiantes logren representar y relacionar los contenidos matemáticos de diversas formas) y, posteriormente a una formalización rigurosa del concepto ya manejado.

Por otra parte, existen tres actividades cognitivas inherentes a toda representación semiótica, que son la formación, el tratamiento y la conversión; las tres se encuentran rigurosamente vinculadas, pero sólo se enfatizará en la conversión y el tratamiento, debido a los objetivos e intereses del presente trabajo. Dentro de las transformaciones de representación semiótica se distinguen dos clases: la conversión y el tratamiento (Duval, 1995a), y aunque muchos docentes no hacen una distinción entre estas dos clases, es necesario diferenciarlas muy bien. La conversión,

es considerada como un proceso de vital importancia, ya que favorece la coordinación de los registros de representación, permitiendo que los estudiantes sean capaces de representar los contenidos matemáticos, utilizando diferentes registros (Duval, 2006); y el tratamiento, es considerado como la transformación de una representación, en otra representación de un mismo registro:

Aunque la conversión pareciera ser muy compleja (debido a que es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas), por las observaciones que se han hecho, se ha probado que para muchos estudiantes (de los diferentes niveles de enseñanza); cambiar la forma de una representación es una operación difícil e incluso en ocasiones imposible, como si para gran parte de ellos, la comprensión que adquieren de un contenido quedará limitada a la forma de representación utilizada.

Finalmente, como el tema de interés de este trabajo se enfoca en la geometría, Duval, hace mención que cuando se trabaja para esta área de las matemáticas, es necesario utilizar un tratamiento discursivo y visual. El primer tipo, hace referencia a teoremas que implican el uso del lenguaje y, propiedades de los datos por deducciones válidas. El segundo, hace alusión a cómo se puede reorganizar de diversas maneras, las formaciones (geométricas) (Duval, 2006). En consecuencia, lo anterior resulta crucial, puesto que proporciona los elementos que se deben tener en cuenta en el diseño de las hojas de trabajo, ya que se hace con la finalidad de tener un punto de referencia, para el análisis de las actividades cognitivas de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes, en el proceso de hallar la solución de las problemáticas abordadas en la hoja de trabajo.

A manera de conclusión, para el siguiente trabajo se tratará de describir la importancia que tiene el uso de múltiples representaciones en la construcción de las identidades Pitagóricas.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA

3.1. Introducción

En este capítulo se describen las actividades que componen el presente trabajo, así como el propósito de cada una de ellas. En primera instancia, se detallan las características de los estudiantes que participarán en la investigación (contexto político y socio-cultural) y, posteriormente, se explican las fases que la integran: diseño y pilotaje de la encuesta de diagnóstico, aplicación del diagnóstico, diseño y pilotaje de las hojas de trabajo. Finalmente, se explica el propósito del análisis de la información tanto cuantitativa como cualitativamente. Asimismo, se describen las condiciones de aplicación y la metodología de trabajo implementada en el aula, en la que destaca de manera importante una dinámica radicalmente distinta a la enseñanza tradicional. De esta manera, los estudiantes participan activamente en la construcción de su aprendizaje.

El trabajo es de carácter mixto porque se basa en el empleo simultáneo de métodos cuantitativos y cualitativos Moscoso (2017). En este sentido, desde lo cuantitativo, se evaluó el rendimiento de los estudiantes en cada hoja de trabajo, con la asignación numérica del rendimiento, ponderando con 1 la respuesta correcta y con 0 la respuesta incorrecta o no respondió. Mientras que en lo cualitativo se reflexionó sobre las características que tuvo el proceso de construcción de conjeturas sobre las identidades pitagóricas, con fundamento en el marco teórico.

3.2. Los sujetos

Las actividades que integran esta propuesta, se aplicó en la institución Educativa La Milagrosa, del sector oficial, ubicada en el centro de la ciudad de Palmira, Valle del Cauca.

En la investigación las personas que participaron, son estudiantes del grado decimo, conformado por 34 estudiantes, de modo que 11 son mujeres (32,4 %) y 23 son hombres (67,6 %) cuyo promedio de edad oscilaba entre los 14 y 16 años.

3.3. Fase de Diseño

En esta primera etapa se diseñarán los instrumentos de recolección de la información:

- a. **Diagnóstico.** Es un instrumento que permite, recolectar información acerca de las creencias, las nociones básicas, el dominio de recursos y la utilización de estrategias tanto heurísticas como de control de los estudiantes, entorno al objeto matemático. De esta manera para la elaboración de este instrumento se revisa la estructura presentada en los DBA en matemáticas, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional, sobre los saberes previos que deben tener los estudiantes para el desarrollo de las identidades pitagóricas.
- b. **Las Hojas de trabajo** son instrumentos de mediación entre la enseñanza y el aprendizaje, que contienen problemas, actividades de exploración, sugerencias, espacios en blanco para construir gráficos, tablas, conjeturas y para resolver problemas con el apoyo de GeoGebra y de material concreto. Su elaboración se da a partir de los resultados obtenidos en la prueba diagnóstico la cual permite tener una visión de cómo se puede llevar a cabo la elaboración de este instrumento.
- c. **Entrevistas clínicas.** Es un instrumento de recolección de la información por la vía oral. Se aplicará posterior a la realización de las hojas de trabajo. Se seleccionarán algunos estudiantes para practicarles una entrevista con dos criterios: (i) soluciones ambiguas o poco entendibles. (ii) Que la solución sea representante de una categoría de análisis. Las entrevistas serán grabadas para su posterior análisis.

3.4. Fase de Validación.

Busca mirar y analizar el diseño pasando por 3 procesos que son:

- a. **Revisión de expertos.** En este caso docentes profesionales (Tutor, docente de matemáticas de la institución educativa La Milagrosa y un Mg. En educación matemática), referentes al área de matemáticas den su opinión y aspecto relevantes que minimicen los posibles errores, dificultades y obstáculos dentro del diseño.
- b. **Pilotaje:** Se aplicará la prueba diagnóstica en los estudiantes, con el fin de identificar diferentes dificultades que puedan presentarse, ya sean carácter didáctico, técnico, semántico, sintáctico o gramatical.
- c. **Reajuste:** A partir de las observaciones realizadas por los expertos y los resultados obtenidos en el pilotaje (prueba diagnóstica), se reajustarán las hojas de trabajo antes de aplicarlas, con la intención de perfeccionar y elaborar hojas de trabajo que realmente permitan dar cuenta del objeto de estudio.

3.5.Recolección.

La recolección de datos es fundamental, ya que a partir de ella se analiza y procesa la información que se obtiene en cada una de las actividades que integran la propuesta. Por lo tanto, los datos se han de tomar de diversas fuentes:

- La prueba diagnóstica (se trabajó de forma individual), que permitió elaborar las hojas de trabajo No 1, 2 y 3.
- Se utilizó como instrumento de recolección (comunicación escrita) las Hojas de Trabajo 1, 2 y 3. Este instrumento de recolección, contiene varias preguntas y un espacio suficiente para que los estudiantes respondan por escrito. La planeación de las Hojas de Trabajo, para ser desarrolladas en grupos, fomentó el trabajo en equipo entre los estudiantes; además, las

actividades aquí expuestas, resultaron ser entretenidas o de su interés. Las preguntas combinaban contextos matemáticos y reales hipotéticos.

- Durante la ejecución de las hojas de trabajo y la prueba diagnóstica se combinan tres momentos: el trabajo individual y grupal, el acompañamiento y la reformulación de contextos. El trabajo individual: en este momento el estudiante se enfrenta al problema sin la ayuda del maestro o algún compañero. El trabajo grupal: en este momento, los estudiantes socializan e interactúan y llegan acuerdos acerca de alguna solución que consideran es la adecuada. El acompañamiento: en este momento interviene el profesor, como formulador de preguntas y sugerencias que permitan al estudiante acercarse cada vez más a la solución del problema. La reformulación de contextos: en este momento, los estudiantes movilizaban los objetos matemáticos en diferentes tipos de contextos y registros de representaciones.
- Se documentará y analizará la información obtenida de los estudiantes producto de la prueba diagnóstica y de la hoja de trabajo.
- En caso de considerarse necesario, se entrevistará a aquellos estudiantes que hayan tenido un desempeño particular e interesante, durante la aplicación de la prueba diagnóstica o el pilotaje de actividades.

Tabla 7.

Calendario de las actividades a aplicar.

Fecha de Aplicación	Actividad	Tiempo
20/02/2019	Prueba Diagnóstico	50 minutos
04/03/2019	Hoja de Trabajo No.1	80 minutos
13/03/2019	Hoja de Trabajo No.2	100 minutos
18/03/2019	Hoja de Trabajo No.3	50 minutos

Fuente: Los autores

3.6. Procesamiento.

Una vez recolectada la información, se debe almacenar en archivos físicos y digitales con identificación, almacenándolos y archivándolos para su salvaguarda.

Posteriormente, la información se convierte en tablas y gráficas para su análisis. Es importante tener en cuenta en esta fase las categorías de análisis seleccionadas. Por ejemplo, en la parte cuantitativa se usarán categorías como: correcto, incorrecto y no contestó. Mientras que, en la parte cualitativa, las gráficas y tablas se construirán con categorías como: recursos, estrategias heurísticas, estrategias de control.

3.7. Análisis.

Se analizará los resultados cuantitativamente y cualitativamente. El análisis cuantitativo evidenciará los resultados con porcentajes de éxito y fracaso obtenidos por los estudiantes. Esta fase del estudio, se desarrollará teniendo en cuenta los referentes propuestos en los capítulos I y II del presente documento, con lo que se quiere poder analizar las características que deben tener las actividades de aprendizaje, para que los estudiantes de décimo grado, logren construir las identidades pitagóricas. También, se espera estudiar el papel que desempeña el uso de material concreto y de GeoGebra en la construcción de las identidades Pitagóricas y, describir la importancia que tiene el uso de las múltiples representaciones en la construcción de las identidades pitagóricas.

Además, se mostrarán pictogramas comparativos respecto las pruebas estandarizadas tenidas en cuenta para el diseño de la prueba diagnóstica y la hoja de trabajo. Por otra parte, el análisis cualitativo tendrá en cuenta el tipo de solución que den los estudiantes a los problemas para categorizar los resultados. Esta fase también tendrá en cuenta las dificultades encontradas durante la implementación de todo lo anteriormente mencionado, con el propósito de mostrar como propuesta final, re-diseñar la prueba diagnóstica y la hoja de trabajo para ser más eficiente y que

permita evidenciar de mejor manera un buen proceso de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes.

CAPÍTULO IV

4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS.

4.1. Estudio diagnóstico.

4.1.1. Descripción del diagnóstico:

La prueba de diagnóstico está compuesta por 8 preguntas (ver anexo 1), las cuales se pueden agrupar en los siguientes bloques:

- Las concepciones (preguntas 1, 2 y 3). Este bloque está conformado por preguntas que exploran las concepciones que tienen los estudiantes sobre el triángulo rectángulo (catetos e hipotenusa) y el área de los cuadrados (diferencia y relación de los atributos medibles (área) del objeto matemático (cuadrado)).
- Las percepciones y el uso de recursos (preguntas 4, 5, 6, 7 y 8). Este bloque destaca aspectos relacionados con las áreas de los cuadrados formados sobre los lados de un triángulo rectángulo y con preguntas en contexto real (relacionado con proporciones). Se desea indagar si los estudiantes conocen o no, el teorema de Pitágoras y las proporcionalidades geométricas y, el impacto que tiene la posición y la forma en la toma de decisiones en la solución de un problema de geometría.

4.1.2. Objetivos del diagnóstico

- Estudiar las concepciones que tienen los estudiantes sobre el triángulo rectángulo (y sus propiedades) y el área de los cuadrados.
- Analizar la influencia que tiene la percepción (posición y ubicación) sobre la toma de decisiones geométricas en la solución de problemas de geometría; específicamente problemas asociados al uso y aplicabilidad del Teorema de Pitágoras.

- Estudiar el dominio inicial que tienen los estudiantes de grado decimo, sobre el teorema de Pitágoras (su uso y sus propiedades) y las proporciones entre figuras geométricas.

4.1.3. Condiciones de aplicación del diagnóstico.

La prueba diagnóstica fue desarrollada por 28 estudiantes, cuyo promedio de edad, oscilaba entre los 14 y 16 años. Se aplicó de manera individual y por escrito. Para resolver las actividades de la prueba, los estudiantes únicamente podían utilizar lápiz y papel. En total utilizaron 50 minutos para responder el total de preguntas.

4.1.4. Resultados del diagnóstico

4.1.4.1. Resultados cuantitativos del diagnóstico.

Tabla 8.

Resultados generales obtenidos por los 28 estudiantes de grado 10° en la Prueba Diagnóstica.

	Pregunta No.								Total de Puntos	%
	Concepciones			Recursos y Percepción						
Alumno No.	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-
1	1	0	0	0	0	0	1	1	3	37,5
2	1	1	1	0	1	1	0	0	5	62,5
3	1	1	0	0	0	0	0	0	2	25
4	1	1	1	0	1	1	0	0	5	62,5
5	1	0	0	0	0	1	0	0	2	25
6	1	0	0	0	1	0	1	1	4	50
7	1	1	1	0	0	1	0	0	4	50
8	1	1	1	0	1	1	1	1	7	87,5

	Pregunta No.								Total de Puntos	%
	Concepciones			Recursos y Percepción						
Alumno No.	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-
9	1	0	1	0	0	0	1	1	4	50
10	1	1	1	0	1	1	1	1	7	87,5
11	1	1	1	0	0	0	1	1	5	62,5
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	0	1	0	0	1	1	0	4	50
14	1	1	0	0	0	0	0	0	2	25
15	1	0	1	0	1	1	1	1	6	75
16	1	0	1	0	0	0	1	0	3	37,5
17	1	0	1	0	1	1	0	0	4	50
18	1	1	1	0	0	0	1	0	4	50
19	1	1	1	0	1	1	0	0	5	62,5
20	1	0	0	0	0	0	1	0	2	25
21	1	1	1	0	1	1	0	0	5	62,5
22	1	1	1	0	0	1	1	0	5	62,5
23	1	1	0	0	0	1	1	0	4	50
24	0	0	1	0	0	0	1	0	2	25
25	1	1	1	0	0	1	1	1	6	75
26	1	0	1	0	0	0	1	1	4	50
27	1	0	1	0	0	0	1	1	4	50
28	1	1	1	0	0	0	1	0	4	50
Prom (%)	92,9	53,6	71,4	0	32,1	50	64,3	35,7	-	50
Promedio bloque(%)	72,6			36,4						
Media Puntos	4									
Des. Tip	1,58									

	Pregunta No.								Total de Puntos	%
	Concepciones			Recursos y Percepción						
Alumno No.	1	2	3	4	5	6	7	8	-	-
	C.V. (%)								39,53	

De acuerdo con los resultados individuales, obtenidos por el grupo de estudiantes en la prueba diagnóstica (50%), se observa un rendimiento académico aceptable. Además, se observa una dispersión alta reflejada en un coeficiente de variabilidad del 39,53%.

- En el Bloque 1 (concepciones)

De los 28 estudiantes que presentaron la prueba diagnóstica, en la Pregunta 1, el 92,9% contestó correctamente teniendo claro la representación gráfica del triángulo rectángulo. En la Pregunta 2, el 53,6% saben definir y caracterizar un triángulo rectángulo. En la Pregunta 3, el 71,4% reconoce e identifica el área, como un atributo medible en un cuadrado.

- En el Bloque 2 (recursos y percepciones)

De los 28 estudiantes que presentaron la prueba diagnóstica, en la Pregunta 4, el 0% redacta y explica, la relación entre las áreas de los cuadrados formados por los lados de un triángulo rectángulo. En la Pregunta 5, el 32,1% utiliza de manera correcta el teorema de Pitágoras para resolver un problema en un contexto netamente matemático. En la pregunta 6, el 50% reconoce, identifica y diferencia los lados de un triángulo rectángulo (hipotenusa, cateto adyacente y opuesto) dependiendo del ángulo de referencia. En la pregunta 7, el 64,3% establece relaciones de semejanza en una figura plana dentro de un contexto real y, en la pregunta 8, el 35,7% usan definiciones o criterios de semejanza (proporciones) para explicar situaciones en un contexto real.

4.1.4.2. Análisis cualitativo del diagnóstico.

- Bloque 1 (Concepciones).

El bloque está compuesto por las preguntas 1, 2 y 3, que buscan indagar por las concepciones sobre: la definición y representación gráfica del triángulo rectángulo, y sobre el cálculo del área de un cuadrado, dadas unas condiciones específicas.

- Bloque 2 (Recursos y percepciones)

Este bloque está compuesto por las preguntas 4, 5, 6, 7 y 8; y busca identificar las nociones y el uso conceptual de los estudiantes sobre el teorema de Pitágoras y la proporción en un problema en contexto netamente matemático y real (respectivamente).

En la pregunta No. 1, de acuerdo con la Tabla 8:

Tabla 9.

Resultados pregunta No. 1 de la prueba diagnóstico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
26	2	0
92,9%	7,1%	0%

En la pregunta No. 1 del 92.9%, 22 estudiante presenta una representación gráfica estándar del triángulo rectángulo, en cambio los otros 2 realizan una representación gráfica no convencional. Y del 7.1%, 2 estudiantes hacen la misma representación realizada por los 22 estudiantes, con la única diferencia de que al momento de identificar los catetos y la hipotenusa lo realizan de manera inadecuada.

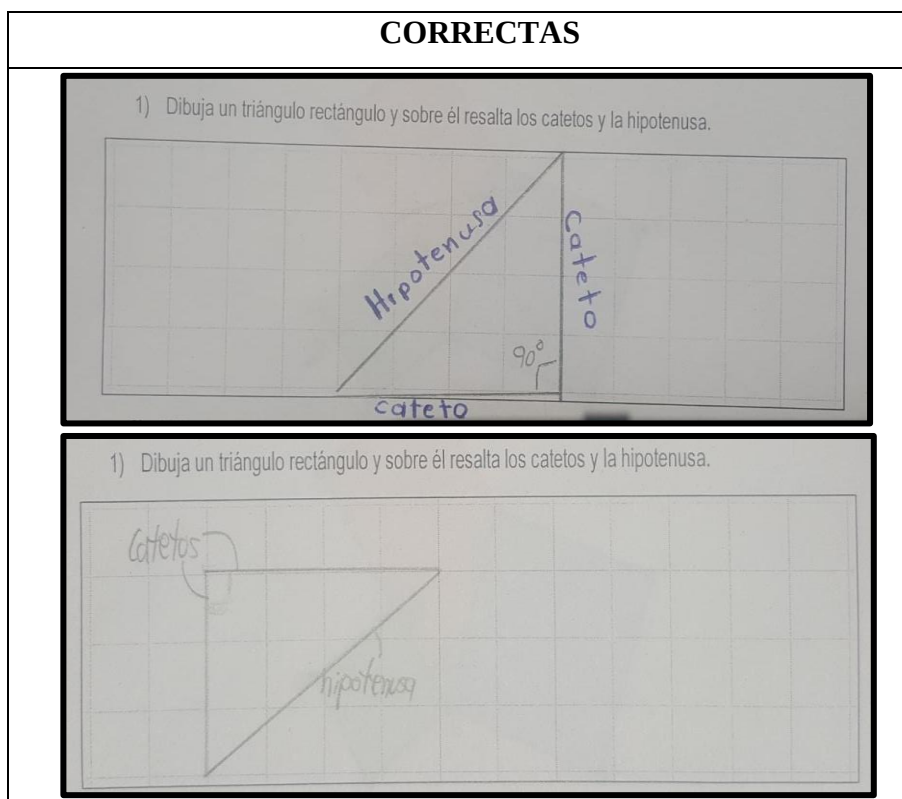


Figura 9. Respuestas pregunta 1 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 7 y 8, respectivamente.

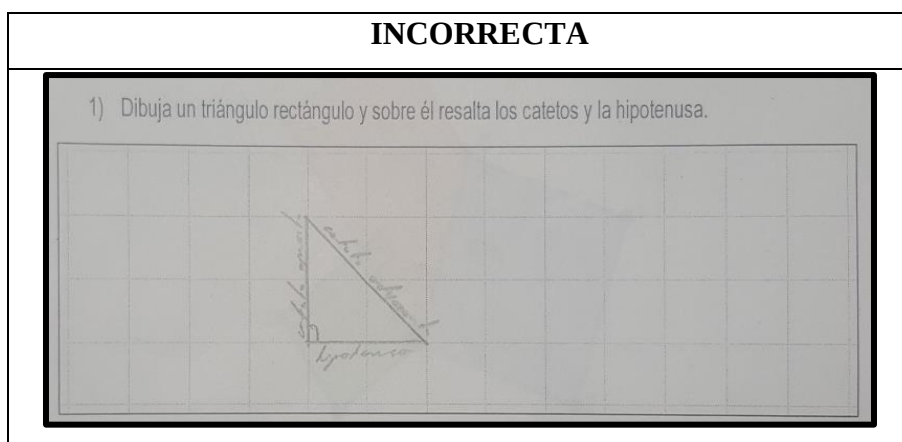


Figura 10. Respuesta pregunta 1 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 24.

En la pregunta No. 2, de acuerdo con la Tabla 10:

Tabla 10.

Resultados pregunta N°2 de la prueba diagnóstico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
15	11	2
53,6%	39,3%	7,1%

En esta pregunta, se observa que 15 estudiantes presentan de manera correcta la definición de un triángulo rectángulo, por medio de características presentes dentro de dicho triángulo. Además, en esta pregunta se observa que del 53,6% de los (15) estudiantes, saben definir y caracterizar un triángulo rectángulo por medio de un ángulo recto (perpendicularidad de los catetos) y los nombres de los lados que lo componen; de los cuales, 5 mencionaron que está conformado por un ángulo recto y dos agudos, 8 solo mencionaron que estaba compuesto por un ángulo recto y 2 hicieron mención de que dos de los catetos estaban perpendicular entre ellos, formándose un ángulo de 90 y que al frente (en palabras del estudiante) de dicho ángulo se encontraba la hipotenusa. Sin embargo, del 39,3%, se evidenciaron aspectos como, no tienen claro el concepto de ángulo recto, definen a partir de un triángulo en particular (ángulos agudos de 45° y catetos iguales), desconocen la relación que tiene la suma de los ángulos internos en un triángulo.

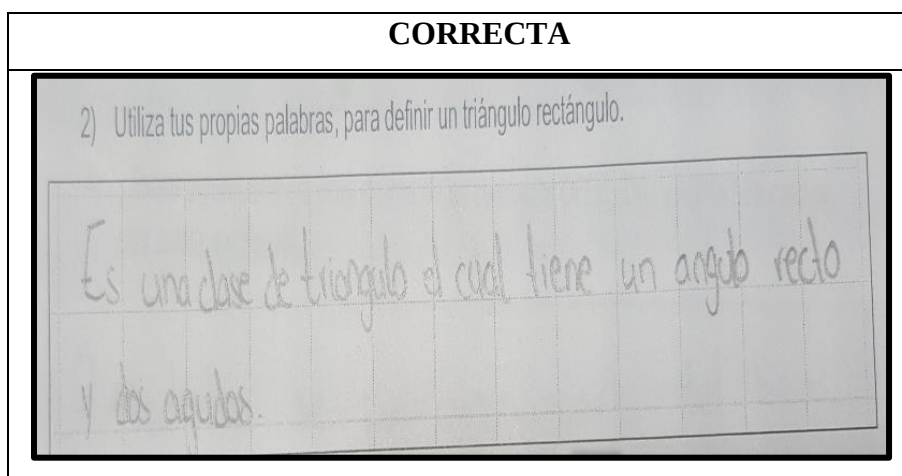


Figura 11. Respuesta pregunta 2 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 2

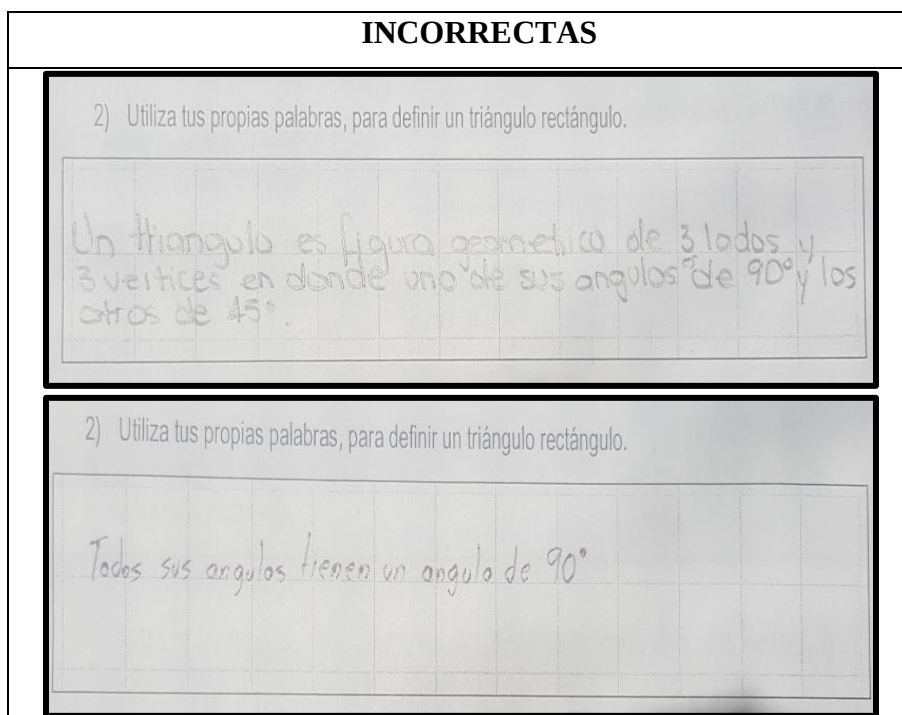


Figura 12. Respuestas pregunta 2 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 15 y 20 respectivamente.

En la pregunta No. 3, de acuerdo con la Tabla 11:

Tabla 11.

Resultados pregunta No. 3 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
20	8	0
71,4%	28,6%	0%

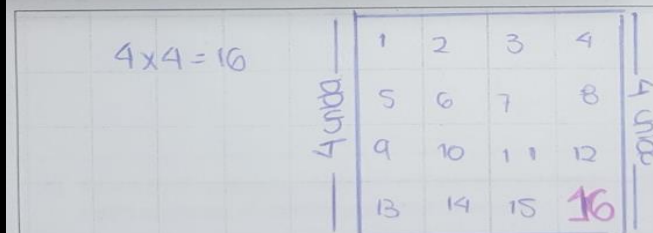
En esta pregunta el 71,4% de los estudiantes, al momento de calcular el área de un cuadrado particular, presentan claridad del concepto, ya que se evidencia de manera correcta el uso de diferentes representaciones (geométrico, lenguaje natural, numérico y algebraico) al momento de contestar. De los cuales, 4 contestaron haciendo uso de tres representaciones (lenguaje natural-algebraico-numérico), 2 usaron las representaciones algebraica y numérica, 10 contestaron de manera geométrica, algebraica y numérica, 3 geométrico-numérico y 1 hizo uso de la cuadrícula plasmada en el cuadro de respuesta, dándole a cada cuadro 1 unidad de medida. Lo cual, le permitió

plasmar geoméricamente el cuadrado y posterior a ello contar cada unidad cuadrada al interior de dicho cuadrado para dar respuesta de forma correcta al problema (geometrico-numerico).

De los 8 estudiantes que contestaron incorrectamente (28,6%): 5 estudiantes presentan una noción incorrecta del atributo de área, puesto que lo confunden con el de perímetro; 2 estudiantes contestan la pregunta a partir de un caso particular que ellos mismos plantean, sin responder (con exactitud) lo que pide la pregunta; por ende, se evidencia que simplemente han aprehendido a estimar el área solo para casos particulares; y, sólo un 1 estudiante responde de manera algebraica para un caso general, sin aplicar una ecuación o fórmula para el cálculo del área.

CORRECTAS

3) Si un cuadrado tiene un lado de 4 unidades ¿Cuál es su área? Justifique



3) Si un cuadrado tiene un lado de 4 unidades ¿Cuál es su área? Justifique

$A_{\square} = l^2 = 4^2 = 16 u^2$

Una unidad cuadrada es como decir unidad x unidad. Por lo que $16 u^2$ es lo mismo que 16 cuadrados de 1u de lado

Figura 13. Respuestas pregunta 3 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 8 y 26, respectivamente.

INCORRECTA

3) Si un cuadrado tiene un lado de 4 unidades ¿Cuál es su área? Justifique



Figura 14. Respuestas pregunta 3 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No.1.

Para responder las preguntas del 4 al 6 de manera correcta, los estudiantes debían conocer el teorema de Pitágoras, saberlo aplicar en un contexto netamente matemático y además a partir de un ángulo diferente al recto identificar sus respectivos catetos (adyacente y opuesto). Donde cada respuesta depende de la siguiente información (Figura 15).

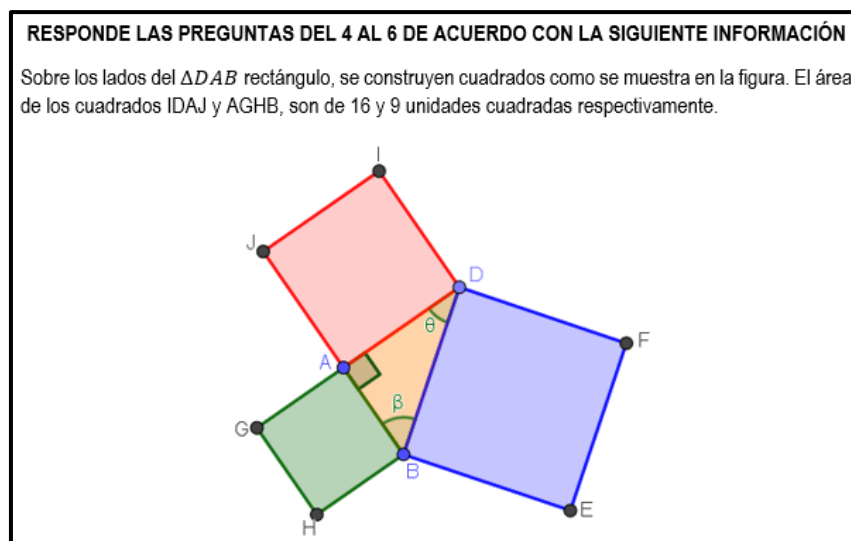


Figura 15. Enunciado de las preguntas 4, 5 y 6, de la prueba diagnóstica.

En la pregunta No. 4, de acuerdo con la Tabla 12:

Tabla 12.

Resultados pregunta No. 4 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
0	25	3
0%	89,3%	10,7%

En esta pregunta, del 89,3%, 7 estudiantes tuvieron dificultades para redactar y explicar, la relación entre las áreas de los cuadrados formados por los lados de un triángulo rectángulo. Entre las respuestas presentadas por los estudiantes, se evidenciaron dificultades para diferenciar un objeto de sus representaciones y de sus atributos. También, se identificaron problemas con la aplicación del teorema de Pitágoras fuera de un contexto algebraico, puesto que, ninguno fue capaz de representar e ilustrar el teorema en lenguaje natural (se evidencia la dependencia y el privilegio de los sistemas de representación algebraicos, para el entendimiento de los objetos matemáticos).

Además, algunos estudiantes tuvieron dificultades para entender la intencionalidad de la pregunta, lo que ratifica la importancia de estimular la lectura desde las matemáticas.

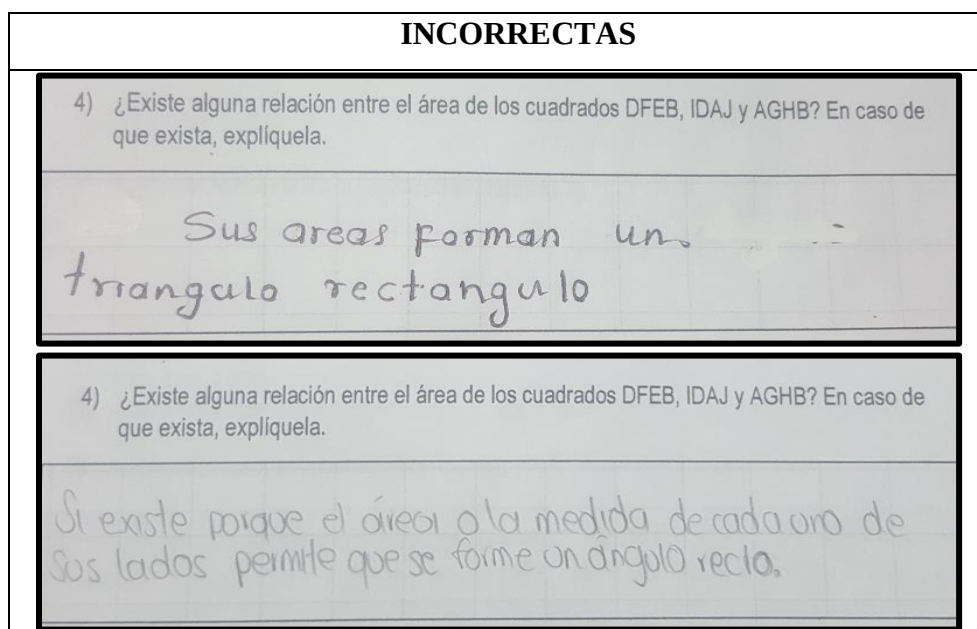


Figura 16. Respuestas pregunta 4 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 7 y 27, respectivamente.

Analizando las respuestas dadas, por los estudiantes 7 y 27, claramente se evidencia que confundieron la representación del objeto, con su atributo (área). En consecuencia, relacionaron las representaciones de los cuadrados (en un registro gráfico) y no sus áreas, tal cual, como lo solicitaba la pregunta 4. Los estudiantes buscaban relación por la forma de la figura que veían (ver Figura 15) y, no prestaban atención estricta a lo que les solicitaba la pregunta.

En la pregunta No. 5, de acuerdo con la Tabla 13:

Tabla 13.

Resultados pregunta No. 5 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
9	10	9
32,1%	35,7%	32,1%

En esta pregunta, el 32,1% de los estudiantes aplican el teorema de Pitágoras de manera correcta, ante un problema en contexto netamente matemático.

Por otra parte, del 35,7% que contestó incorrectamente, se analizó que: 5 estudiantes conocían la representación algebraica del teorema de Pitágoras; aunque, al momento de aplicarlo a un problema particular, no distinguían la diferencia entre un cateto y el área de un cuadrado (unos toman la magnitud del cateto como el área de uno de los cuadrados, o viceversa). Además, los otros 5 estudiantes presentaron una respuesta injustificada, que no tienen relación con lo pedido (intencionalidad) en la pregunta (los estudiantes producían valores erróneos para la respuesta, sin justificación válida).

CORRECTA	
5) ¿Cuántas unidades mide el lado DF del cuadrado DFEB?	
$h^2 = a^2 + b^2$ $h^2 = 16 + 9$ $h^2 = 25$ $h = \sqrt{25} = 5$	$\overline{BD} = 5$ Como todos los lados de un cuadrado tienen la misma medida, DF también mide 5 unidades.

Figura 17. Respuesta pregunta 5 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 8.

INCORRECTA	
5) ¿Cuántas unidades mide el lado DF del cuadrado DFEB?	
$h^2 = c_1^2 + c_2^2$ $h^2 = 16^2 + 9^2$ $h^2 = 256 + 81$	$h^2 = 337$ $h = \sqrt{337}$ $h = 18,3$

Figura 18. Respuesta pregunta 5 (prueba diagnóstica) del estudiante No. 11.

De acuerdo con la respuesta presentada por el estudiante No. 8 (ver Figura 17), se evidencia que vincula ciertas propiedades del cuadrado (lados iguales), con el correcto uso del teorema de Pitágoras; dentro de una situación en contexto netamente matemático. Además, se identifican como registros de representación (para dar solución a la pregunta); una combinación entre, representaciones algebraicas y en lenguaje natural. Asimismo, es claro que el estudiante reconoce la importancia de las unidades de medida, asociadas a las magnitudes de los objetos matemáticos, a la hora de dar su respuesta.

En concordancia con la respuesta expuesta por el estudiante No.11 (ver Figura 18), se identifican ciertas dificultades asociadas a la relación y diferenciación de los objetos matemáticos en cuestión (Teorema de Pitágoras, área de cuadrados y propiedades de los cuadrados). Aquí, el estudiante no diferencia la tesis del teorema de Pitágoras *“la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”*. Con la hipotenusa y los catetos mismos; claramente, confunde las áreas de los cuadrados (construidos sobre los lados del triángulo rectángulo), con la magnitud de los catetos y la hipotenusa. Asimismo, es claro que el estudiante **no** reconoce la importancia de las unidades de medida, asociadas a las magnitudes de los objetos matemáticos, a la hora de dar su respuesta.

En la pregunta No. 6, de acuerdo con la Tabla 14:

Tabla 14.

Resultados pregunta No. 6 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
14	12	2
50%	42,9%	7,1%

En la pregunta 6, el 50% de los estudiantes reconocen, identifican y diferencian los lados de un triángulo rectángulo (hipotenusa, cateto adyacente y opuesto), dependiendo del ángulo de referencia. En cambio, de los estudiantes que contestó incorrectamente (42,9%), se analizó que: 5 de los estudiantes confunden la ubicación de los catetos y la hipotenusa (en un triángulo rectángulo), de acuerdo a un ángulo de referencia dado. Entre estas confusiones, se destaca que 4 de los estudiantes ubican bien la hipotenusa, pero confundían los catetos; y, un estudiante, ubica

la hipotenusa en uno de los catetos. Los otros 5 utilizaban una representación gráfica modificada (posición estándar) del triángulo DAB (ver Figura 15); no obstante, confunden el cateto opuesto con el adyacente (este error es muy común en los estudiantes, cuando ubican un triángulo de forma estándar, suelen tomar como ángulo referencia, el ángulo formado por la hipotenusa y el cateto que sirve de base para el triángulo); 1 relacionaba los vértices del triángulo (puntos) con los catetos y la hipotenusa y 1 afirmaba que los catetos eran los ángulos.

CORRECTA	
6) En el $\triangle DAB$ rectángulo, tomando como referencia el ángulo θ ¿Cuál lado representa el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa?	$\overline{AD}$ es el cateto adyacente $\overline{AB}$ es el cateto opuesto $\overline{DB}$ es la hipotenusa
6) En el $\triangle DAB$ rectángulo, tomando como referencia el ángulo θ ¿Cuál lado representa el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa?	Hipotenusa: $\overline{DB}$ C. Adyacente: $\overline{DA}$ C. opuesto: $\overline{AB}$

Figura 19. Respuestas pregunta 6 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 8 y 22 respectivamente.

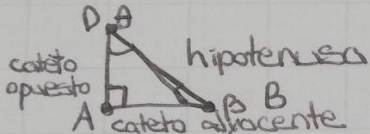
INCORRECTO	
6) En el $\triangle DAB$ rectángulo, tomando como referencia el ángulo θ ¿Cuál lado representa el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa?	 $\overline{AB}$ = cateto adyacente $\overline{DB}$ = hipotenusa $\overline{DA}$ = cateto opuesto.
6) En el $\triangle DAB$ rectángulo, tomando como referencia el ángulo θ ¿Cuál lado representa el cateto adyacente, el cateto opuesto y la hipotenusa?	Hipotenusa lado mas largo θ = cateto opuesto B = cateto adyacente.

Figura 20. Respuestas pregunta 6 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 28 y 3 respectivamente.

De la Figura 19, podemos observar que los estudiantes No. 8 y 22, precisan claramente los lados de triángulo DAB (ver Figura 15), correspondientes al cateto opuesto, adyacente y la hipotenusa. Asimismo, es importante resaltar que ellos utilizan una notación formal, para denotar el nombre de los lados del triángulo.

De acuerdo a la Figura 20, se analiza que el estudiante No. 28, realiza una representación gráfica de un triángulo rectángulo “similar” al $\triangle DAB$, rotada de tal manera, que la posición de este sea estándar y aunque, es bueno, el hecho de que el estudiante haga uso de estas rotaciones, puesto que está haciendo uso de nociones de tal forma que facilita o agiliza su percepción con respecto a un objeto, en este caso el triángulo rectángulo. Pero, hay algo malo de trasfondo en esto y es que el estudiante presenta una dificultad de visualización, el cual, le es incapaz de ubicar el cateto opuesto y adyacente, si el triángulo rectángulo no está ubicado de una forma particular. También, se identifica la dificultad de asociar uno de los ángulos internos (agudos) del triángulo rectángulo, como punto de referencia para reconocer la hipotenusa y los catetos de este mismo. Por otra parte, en concordancia con la respuesta presentada por el estudiante No. 3, se evidencia en él, un error en la conceptualización de los objetos matemáticos; puesto que, confunde los ángulos internos agudos con los catetos.

Para responder las preguntas 7 y 8 de manera correcta, los estudiantes debían tener claridad en el tema de proporciones entre segmentos y aplicar su conocimiento, en la solución de un problema en contexto real (pregunta tipo prueba Saber). Además, estas preguntas deben analizarse conjuntamente, puesto que se complementan; debido a que, en la pregunta No. 7, sólo se debe seleccionar la respuesta que consideren correcta, mientras que, en la pregunta No.8, deben justificar aquella selección realizada en la pregunta No. 7. Asimismo, las respuestas presentadas por los estudiantes, dependen de la siguiente información (Figura 21).

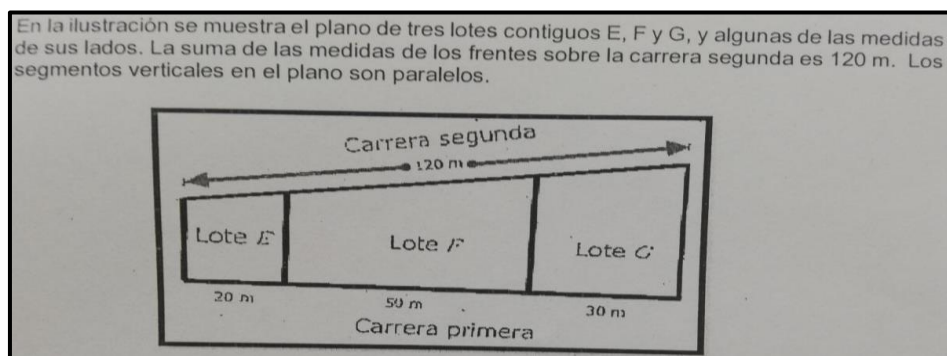


Figura 21. Enunciado de las preguntas 7 y 8 (prueba diagnóstica).

En la pregunta No. 7 y 8, de acuerdo con la Tabla 15:

Tabla 15.

Resultados pregunta No. 7 y 8 de la prueba diagnostico (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

Pregunta	C	I	NC
7	18	7	3
	64,3%	25%	10,7%
8	10	14	4
	35,7%	50%	14,3%

En la pregunta 7 (ver Figura 22), el 64,3% de los estudiantes establecen relaciones de semejanza en un contexto real, para determinar (seleccionar) las longitudes de varios segmentos en una figura plana.

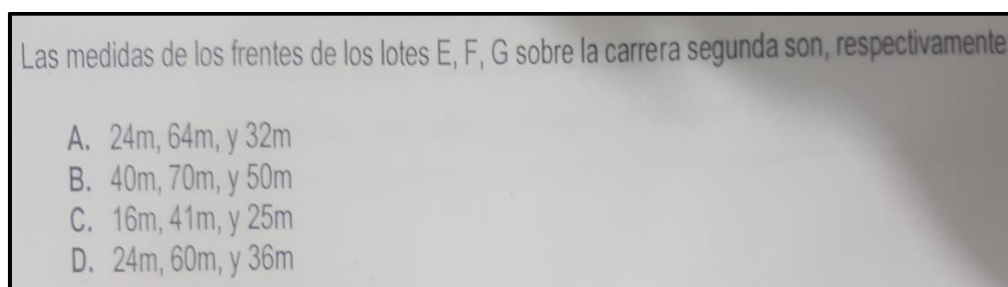
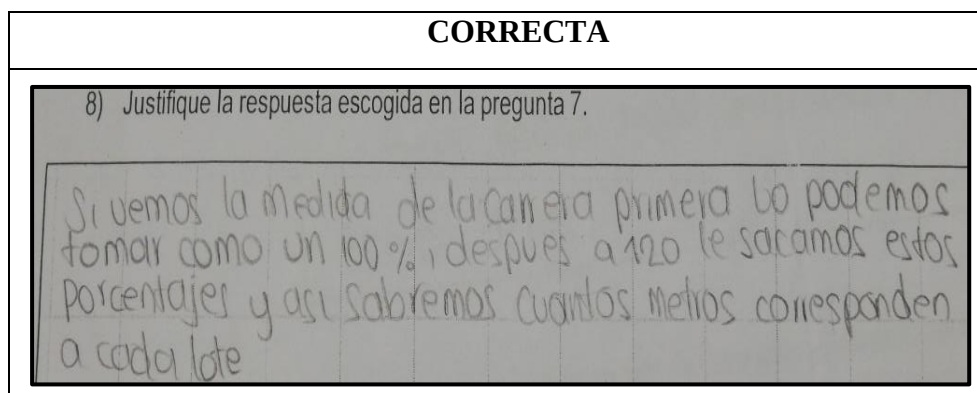


Figura 22. Pregunta No.7 (prueba diagnóstica).

En la pregunta 8, el 35,7% de los estudiantes, usan definiciones o criterios de semejanza (proporciones) para explicar situaciones dentro de un contexto real.



CORRECTA

8) Justifique la respuesta escogida en la pregunta 7.

E) $\frac{100}{120} = \frac{20}{x}$ $x = \frac{120 \times 20}{100} = 24$

F) $\frac{100}{120} = \frac{50}{x}$ $x = \frac{120 \times 50}{100} = 60$

G) $\frac{100}{120} = \frac{30}{x}$ $x = \frac{120 \times 30}{100} = 36$

8) Justifique la respuesta escogida en la pregunta 7.

Sumando la B y la C por logica no da el resultado, mientras que la A el resultado es 120, pero no va acorde al sumatorio, entonces yo digo que es la D por logica, y por que cada 10cm en la primera carrera suma 2cm en la segunda

"D"

Figura 23. Respuestas pregunta 8 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 27, 8 y 6 respectivamente.

INCORRECTO

8) Justifique la respuesta escogida en la pregunta 7.

Por que la suma de esos metros da 120m y por que el rate f es el mas largo con 64m

8) Justifique la respuesta escogida en la pregunta 7.

Estos 2 respuestas suman un total de 120 m. como lo pide la pregunta

Figura 24. Respuestas pregunta 8 (prueba diagnóstica) de los estudiantes No. 14 y 4 respectivamente.

De acuerdo a la Figura 23, se pueden analizar varios aspectos: El estudiante No.27, presenta una solución del problema algebraico, puesto que plantea correctamente la proporción entre los segmentos de la figura (ver Figura 21), a través del planteamiento de una regla de tres. El estudiante No. 27, presenta una solución en la que se evidencia una completa aprehensión y comprensión del concepto de proporcionalidad; implícitamente relaciona las proporciones entre las magnitudes de los segmentos, utilizando porcentajes (el estudiante reconoce una relación parte-todo, utilizando porcentajes en las proporciones; es decir, puede calcular la magnitud del lote F sobre la carrera segunda (ver Figura 21), reconociendo, en primera instancia, que las paralelas verticales que determinan este lote, también determinan segmentos proporcionales sobre la carrera segunda; para posteriormente, determinar, que si este lote representa el 50% de la magnitud total de la carrera primera, también tendrá que representar el 50% de la longitud de toda la carrera, puesto que, ambas carreras son claramente proporcionales).

Por otra parte, en la respuesta expuesta por el estudiante No. 6, se observa un proceso cognitivo más complejo y dinámico, puesto que, utiliza las opciones de respuesta de la pregunta 7 para darle solución a la misma (método deductivo). Inicialmente, se observa un pensamiento métrico y espacial en el estudiante, pues comprende que la suma de las magnitudes de los lotes E, F y G sobre la carrera segunda, debe corresponder exactamente con la magnitud de dicha carrera (120 metros) (ver Figura 21); lo anterior, le permite descartar las opciones de respuesta B y C, porque no suman 120 metros; dejando como únicas opciones de respuesta posibles para la pregunta 7, la A y D (que si suman 120 metros). Además, analizando estas opciones (A y D), se evidencia que ambas coinciden en que, la magnitud del lote E sobre la carrera segunda es de 24 metros y, como son las únicas respuestas posibles, deduce inmediatamente que esta es la magnitud del lote E sobre la carrera segunda. Por otra parte, el enunciado del problema (necesario para contestar la pregunta 7), afirma que el lote E sobre la carrera primera mide 20 metros y, como ya dedujo que este mismo lote sobre la carrera segunda mide 24 metros (reconociendo la proporcionalidad existente entre las dos carreras); el estudiante logra deducir que la proporcionalidad entre carreras es de: por cada 10 metros en la carrera primera, en la carrera segunda se tienen 12 metros (cada 10 metros de la carrera primera, aumentan 2 metros en la carrera segunda). En consecuencia, si los lotes E, F y G sobre la carrera primera miden 20, 50 y 30 metros; sobre la carrera segunda deben medir 24, 60 y 36 metros; respectivamente.

De acuerdo a la Figura 24; se observa que los estudiantes No. 4 y 14, no logra justificar correctamente, cuál es la respuesta de la pregunta 7. El estudiante No. 4, expone una respuesta mediante deducciones, similar a lo presentado por estudiante No. 6; sólo que su razonamiento está incompleto, ya que no se logra determinar con certeza si la respuesta correcta es la opción A o la D. Por otra parte, El estudiante No. 14, aunque también deduce que la suma de las magnitudes de los lotes E, F y G sobre la carrera segunda debe ser 120 metros, no usa definiciones o criterios de semejanza (proporciones) para explicar situaciones dentro de un contexto real (no reconoce que, entre la carrera primera y la carrera segunda, existe una proporcionalidad).

4.1.5. Comentarios finales de la prueba diagnóstico.

De acuerdo al análisis de los resultados obtenidos de la prueba diagnóstica, se identificaron muchas dificultades entorno a los saberes previos (área de los cuadraros, teorema de Pitágoras, teorema de Tales, entre otros), entre dichas dificultades, se destacan los problemas que tuvieron los estudiantes para diferenciar los objetos matemáticos de sus múltiples representaciones y, la incapacidad para identificar objetos y representarlos (cualquier registro), a partir de características y atributos del mismo objeto. Por ejemplo, en la pregunta No. 4 de la prueba diagnóstico (Anexo A), los estudiantes tuvieron dificultad para comprender e identificar que la figura mostrada, representaba gráficamente el Teorema de Pitágoras. Además, dentro de las respuestas analizadas, se observaba que los estudiantes no relacionaban la magnitud del cateto al cuadrado (representación simbólica), con el cuadrado construido sobre uno de los lados del triángulo rectángulo (representación gráfica). En consecuencia, se evidencia una clara dificultad en los estudiantes, para identificar un mismo objeto matemático representado en diferentes registros; por ende, es necesario hacer uso de material concreto y GeoGebra. Los resultados del diagnóstico, se socializaron con los estudiantes, con el fin de corregir y hacer ciertas precisiones en las concepciones y percepciones, que estos tenían de los objetos matemáticos (abordados en el diagnóstico). Finalmente, de acuerdo a los resultados obtenidos del diagnóstico, se elaboraron: la hoja de trabajo No. 1 “Exploración 1: Implementación de Material Concreto; y Exploración (Ver anexo A) 2: implementación de GeoGebra” (ver anexo B) y, la hoja de trabajo No.2 “Exploración 3: Identidad fundamental” (ver anexo C).

4.2. Hoja de trabajo No. 1.

4.2.1. Descripción de la hoja de Trabajo No. 1.

La actividad de la Hoja de Trabajo No. 1, tiene como objetivo que los estudiantes puedan establecer y comprender, la relación existente entre el área de los cuadrados formados sobre los catetos y, el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo (teorema de Pitágoras). Además, busca clarificar ciertos conceptos que tienen los estudiantes, asociados a qué es y cómo ubicar el cateto opuesto, adyacente y la hipotenusa en un triángulo rectángulo. Esta hoja de trabajo, combina el uso de material concreto y de GeoGebra en el aula; para facilitar aproximaciones a la tesis del teorema de Pitágoras, comprendiendo sus hipótesis desde diferentes registros de representación, de los objetos matemáticos.

La hoja de trabajo No. 1, consta de 8 preguntas (ver anexo B), en las cuales, se busca que:

- ✓ Con ayuda de material manipulable, recorta en una figura, los cuadrados contruidos sobre los catetos en un triángulo rectángulo, para la construcción del cuadrado que tiene como lado la hipotenusa.
- ✓ Sobre una aplicación ya construida en GeoGebra, los estudiantes modifiquen las magnitudes de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, con el fin de analizar la relación y recolectar en una tabla, las magnitudes de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los lados de este triángulo.
- ✓ Redacción de lo observado, compara la unión de los cuadrados contruidos sobre los catetos, con el cuadrado sobre la hipotenusa y la relación de los valores colocado en la tabla.
- ✓ Evaluación de lo realizado, con una pregunta que está compuesta en dos partes, para identificar y verificar la aplicación de lo aprendido en otros contextos.

4.2.2. Objetivos de la hoja de trabajo No. 1.

- Aportar un aprendizaje significativo en los estudiantes de grado décimo en el proceso de elaboración de conjeturas, en un contexto geométrico.

- Reforzar y afianzar saberes prerequisite (Teorema de Pitágoras), indispensables para la comprensión y aprendizaje de las identidades trigonométricas, utilizando diferentes registros de representación.

4.2.3. Condiciones de aplicación de la hoja de trabajo No. 1.

La Hoja de Trabajo No. 1, fue realizada por 34 estudiantes organizados en grupos (10 grupos de 3 estudiantes y 2 grupos de 2 estudiantes), se aplicó el 4 de marzo de 2019. El promedio de edad de los estudiantes oscilaba entre los 14 y 16 años. El número de niños es 23 (67,6%) y niñas 11 (32,4%). Para resolver las actividades aquí propuestas, los estudiantes disponían de un lápiz, 1/8 de cartulina, pegante, tijeras, y un computador por grupo de estudiantes con previa instalación del software matemático interactivo GeoGebra. El Applet se configuró de tal forma, que su uso fuera lo más sencillo posible, para una persona que no estuviera familiarizada con ella. En total utilizaron 80 minutos para responder todas las preguntas. Además, al finalizar y entregar la hoja de trabajo, los grupos de estudiantes socializaron sus respuestas con mediación del docente encargado.

El desarrollo de la clase en el grado decimo, se llevó acabo de la siguiente forma:

Tabla 16.

Fases de la clase, con la hoja de trabajo No. 1.

FASE	SUB-FASE	DESCRIPCIÓN
Exploración	Utilizando material concreto	Los estudiantes recortan (construcción del teorema de Pitágoras), los cuadrados que están conformados por los catetos de un triángulo rectángulo, donde uno de ellos se recorta de tal forma que queda dividido en cuatro polígonos. Posterior a ello se busca unir los polígonos de tal manera que se

FASE	SUB-FASE	DESCRIPCIÓN
		forme el cuadrado que tiene como uno de sus lados la hipotenusa. El estudiante redacta una conjetura a partir de lo realizado.
	Utilizando GeoGebra	Manejo del GeoGebra, explorando una construcción geométrica (teorema de Pitágoras) por medio del arrastre de unos deslizadores, que generan diferentes magnitudes en los catetos, la hipotenusa y desde luego sus áreas correspondientes, donde cada uno de estos valores eran registrados en una tabla. Para posterior a ello redactar una conjetura a partir de dicho registro numérico.
Socialización		En este momento los estudiantes, contaron con un espacio, para la socialización de los resultados obtenidos. El profesor hizo de moderador.
Formalización		Finalizada la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizó e institucionalizó las ideas y los resultados obtenidos en cada una de las actividades.

4.2.4. Resultados de la Hoja de trabajo No. 1:

4.2.4.1. Resultados cuantitativos de la hoja de trabajo No. 1.

Tabla 17.

Resultados generales obtenidos por los 12 grupos de estudiantes de grado 10° en la Hoja de trabajo No. 1.

Grupo No.	Estudiante No.	Pregunta No.								Total de puntos	%
		Recorta	Conjetura	Medir	Conjetura	Evaluación					
		1	2	3	4	5	6	7	8		
1	18, 20 y 10	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
2	24, 29 y 30	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
3	19, 23 y 6	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
4	12 y 31	1	1	1	1	1	0	0	0	5	62,5
5	1, 15 y 26	1	1	1	1	1	1	1	0	7	87,5
6	27, 25 y 17	1	1	1	1	1	1	1	0	7	87,5
7	14, 21 y 19	1	1	1	1	1	1	1	0	7	87,5
8	13, 32 y 11	1	1	1	0	0	1	1	1	6	75
9	4, 2 y 5	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
10	28 y 16	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
11	3, 33 y 34	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
12	8, 22 y 7	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
Promedio (%)		100	100	100	91,7	91,7	91,7	91,7	66,7	-	91,7
Media		7									
Desv. Tip.		0,99									
C.V		13,4%									

De acuerdo con los resultados grupales, obtenidos por los estudiantes en la hoja de trabajo 1 (91,7%), se observa un rendimiento académico favorable. Además, se observa una dispersión aceptable reflejada en un coeficiente de variabilidad del 13,4%.

A continuación, caracterizamos de forma general cada una de las preguntas en medir, conjeturar y evaluar, agrupando aquellas que comparten dichas características.

- Recorta

De los 12 grupos de estudiantes que presentaron la hoja de trabajo 1, en la pregunta 1, el 100%, logro recortar, armar y pegar cada uno de los polígonos sobre el cuadrado (tiene como uno de sus lados la hipotenusa), sobreponiendo cada uno de los polígonos en su totalidad.

- Conjeturar

De las preguntas 2, 4 y 5, se puede decir de forma general que, en promedio, el 94,5% de los 12 grupos conformados por los estudiantes, logran realizar, dada una situación específica, redactar de manera correcta una conjetura con respecto a indicios y observaciones. En cambio, el 5,5% presenta dificultades para expresar sus conjeturas.

- Medir

En la pregunta 3, el 100% de los grupos, manipula los deslizadores en GeoGebra y para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo, completa y anota los valores de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de dicho triángulo.

- Evaluación

De las preguntas 6, 7 y 8, se infiere que, de los 12 grupos, en promedio el 83,4%, responde de manera correcta, tomando como recurso lo visto anteriormente para justificar sus decisiones. Mientras que, el 16,6% presentan problemas al momento de argumentar.

4.2.4.2. Resultados cualitativos de la hoja de trabajo No. 1.

En la Pregunta No. 1, el 100% de los grupos de estudiantes recortaron con tijeras los cuadrados formados por los catetos de un triángulo rectángulo, con la diferencia de que uno de ellos se dividía en 4 polígonos irregulares (Figura 26). Posterior a ello, pegaron lo recortado sobre el cuadrado (tiene como uno de sus lados la hipotenusa), de tal manera que cada uno de los polígonos sobrepuso en su totalidad dicho cuadrado (Figura 27).

A continuación, se muestran evidencia del trabajo realizado por los diferentes grupos, el cual, guardando la identidad de los estudiantes se toman las evidencias directamente a lo realizado y no a los estudiantes involucrados, también se decide tapar los nombres de los estudiantes involucrados en los grupos de la hoja de trabajo.

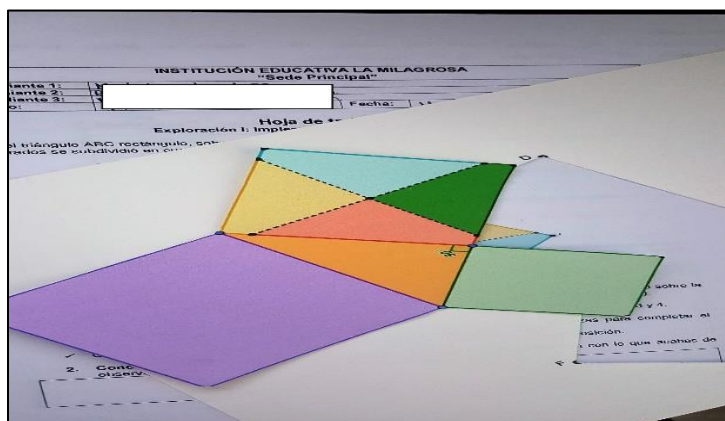


Figura 25. Actividad de recorte y armar.

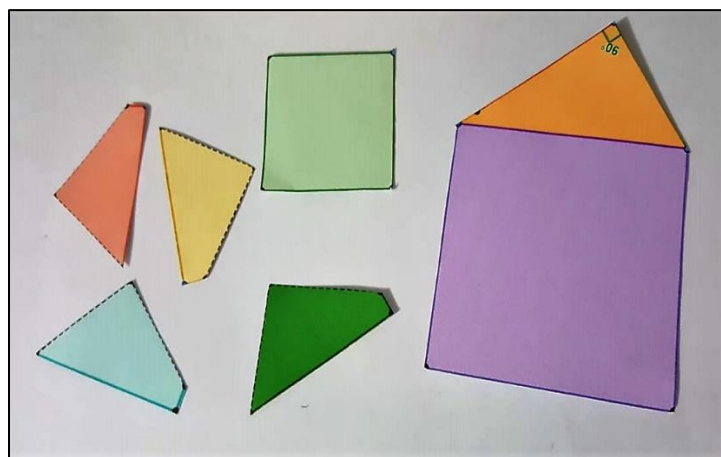


Figura 26. Polígonos recortados.

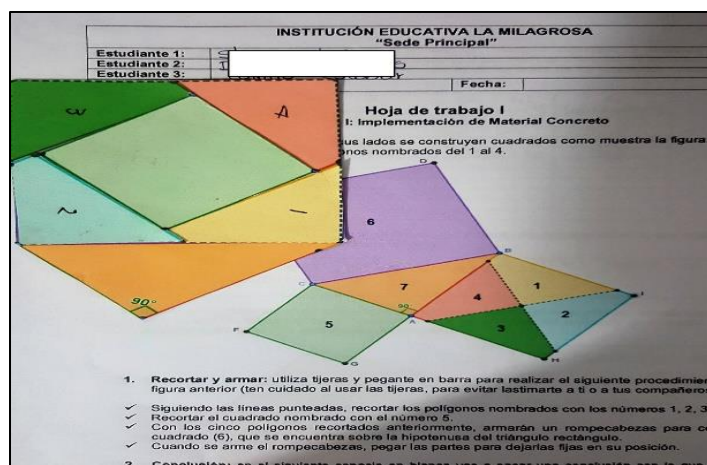


Figura 27. Polígonos pegados sobre el cuadrado de la hipotenusa.

En la pregunta No. 2, el 100% de los 12 grupos de estudiantes, logra redactar de manera correcta lo realizado en la pregunta 1, lo cual conlleva a decir que los estudiantes por medio de esta actividad realizada con material concreto (pregunta 1), les permitió de cierta forma evidenciar y así plasmar apropiadamente dicha observación. Aunque, algunos estudiantes al momento de conjeturar, se expresaban de acuerdo a características de los objetos como el tamaño (percepción). Un claro ejemplo de ello fue lo expresado en la Figura 28, por el grupo No. 1.

CORRECTAS	
2. Conclusión: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.	la suma de las dos áreas de los cuadrados menores es igual al área del cuadrado mayor.
2. Conclusión: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.	la suma de las áreas de los 2 cuadrados recortados es igual al área del cuadrado mayor (#6)

Figura 28. Respuestas a pregunta 2 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 1 y 9 respectivamente.

Pregunta No. 3, el 100% de los grupos de estudiantes, manipula los deslizadores dentro de la aplicación GeoGebra, que les permite variar las medidas de los catetos y la hipotenusa del triángulo

rectángulo que allí se encuentra. Registrando así, paralelamente cada una de las medidas en una tabla.

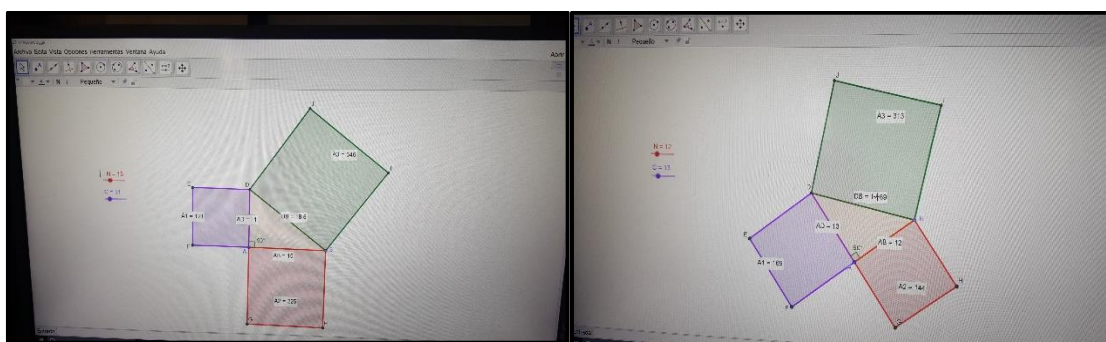


Figura 29. Midiendo las áreas de los cuadrados formados por los lados de un triángulo rectángulo.

3. Abre la aplicación en Geogebra con el nombre de "Triángulo rectángulo" y manipula el triángulo rectángulo que allí aparece usando los deslizadores. Para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo, completa y anota en la tabla los valores de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de dicho triángulo.

A_1 [unidades ²]	A_2 [unidades ²]	$(A_1 + A_2)$ [unidades ²]	A_3 [unidades ²]
64	196	260	260
64	144	208	208
576	144	720	720
169	144	313	313
81	225	306	306
324	100	424	424
49	25	74	74
900	484	1384	1384

Figura 30. Respuesta a la pregunta 3 (Hoja de trabajo No.1) del grupo No. 10.

En la pregunta No. 4, de acuerdo con la Tabla 18:

Tabla 18.

Resultados pregunta No. 4 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta).

C	I
11	12
91,7%	8,3%

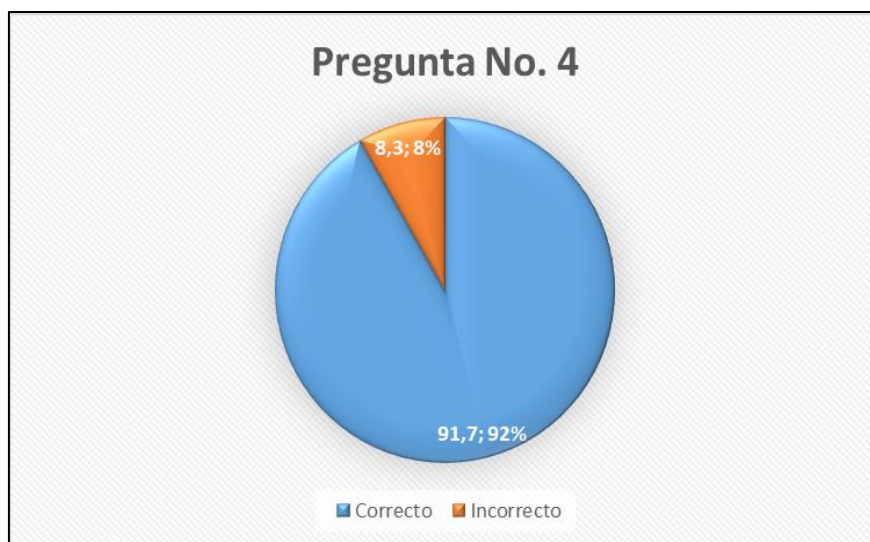


Figura 31. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas e incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 4.

De acuerdo a lo obtenido en la pregunta No.3; el 91,7% de los grupos de estudiantes, en la pregunta No. 4 logra identificar, redactar y conjeturar, acerca de la suma de las áreas de los cuadrados que se forman, sobre los lados del triángulo rectángulo. Sin embargo, el 8,3% que hace referencia a un grupo de estudiantes, presenta una conjetura que va de acuerdo a lo observado en la tabla, solo que presentan una palabra (Figura 33) que perturba aquella conclusión. Por lo que sí, transformamos esa palabra triángulos a cuadrados podemos decir que lo redactado, con dicha modificación sería correcta.

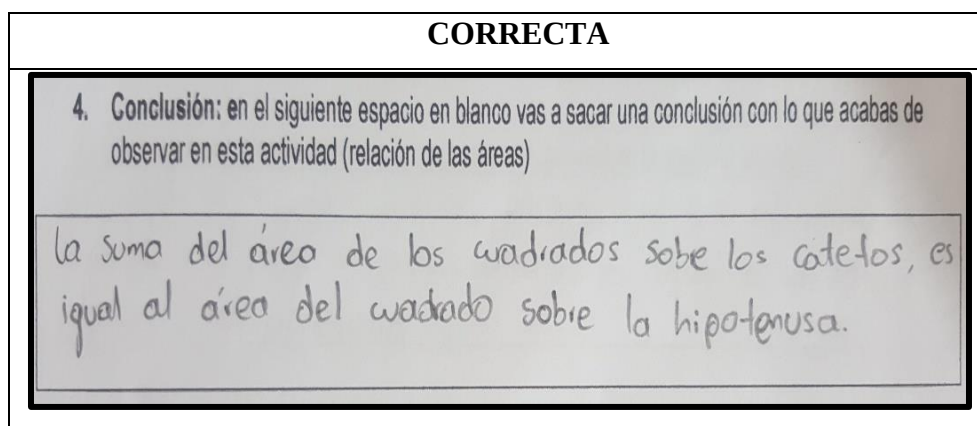


Figura 32. Respuesta a pregunta 4 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 1.

INCORRECTA
4. Conclusión: en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad (relación de las áreas) La suma de las áreas de los triángulos 1 y 2 es la Área de 3

Figura 33. Respuesta a pregunta 4 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 8.

En la pregunta No. 5, de acuerdo con la Tabla 19:

Tabla 19.

Resultados pregunta No. 5 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I
11	12
91,7%	8,3%

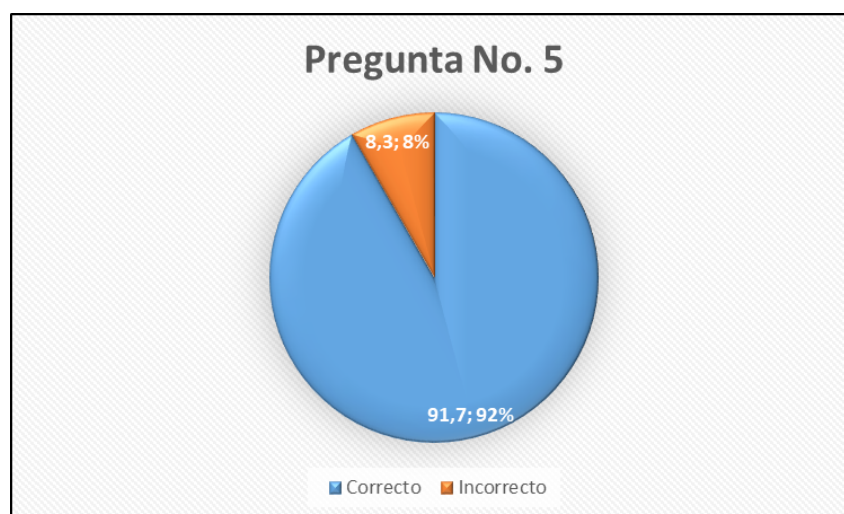


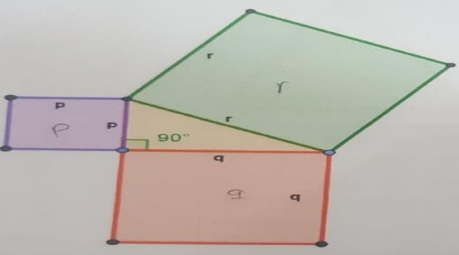
Figura 34. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas e incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 5.

En la pregunta No. 5, 11 de los 12 grupos (91,7%), de acuerdo a lo realizado desde la pregunta 1 hasta la 4, logran redactar de manera general una propiedad que relaciona las áreas de los

cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Aunque se evidencia en 8 grupos una dependencia por una representación algebraica, y 3 grupos, que de hecho son muy pocos, redactaron la propiedad bajo una representación de lenguaje natural. En cambio, el grupo faltante, presenta un esquema memorístico del teorema de Pitágoras y, esto hace referencia a que en la pregunta 4, donde los estudiantes al colocarles otras letras para enmarcar los catetos y la hipotenusa en el triángulo rectángulo, ellos responden de acuerdo a aquellas letras que se conocen de forma estandarizada (h: hipotenusa, catetos: a y b, o C1 y C2), por lo que creen que esas letras estandarizadas son representación para cualquier problema que se les designe.

CORRECTAS

5. De acuerdo con lo estudiando hasta el momento, y usando la siguiente gráfica, redacta una propiedad que relaciones las áreas de los cuadrados construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo (puedes usar palabras o expresiones algebraicas)

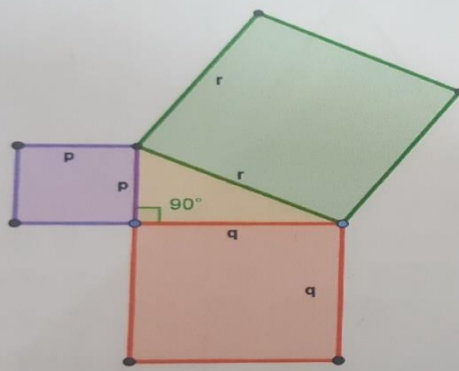


$$A_p + A_q = A_r$$

$$p^2 + q^2 = r^2$$

$$p \times p + q \times q = r \times r$$

5. De acuerdo con lo estudiando hasta el momento, y usando la siguiente gráfica, redacta una propiedad que relaciones las áreas de los cuadrados construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo (puedes usar palabras o expresiones algebraicas)



$$p^2 + q^2 = r^2$$

la suma de las áreas de los cuadrados, es igual al área del cuadrado mayor.

Figura 35. Respuestas a pregunta 5 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 11 y 1 respectivamente.

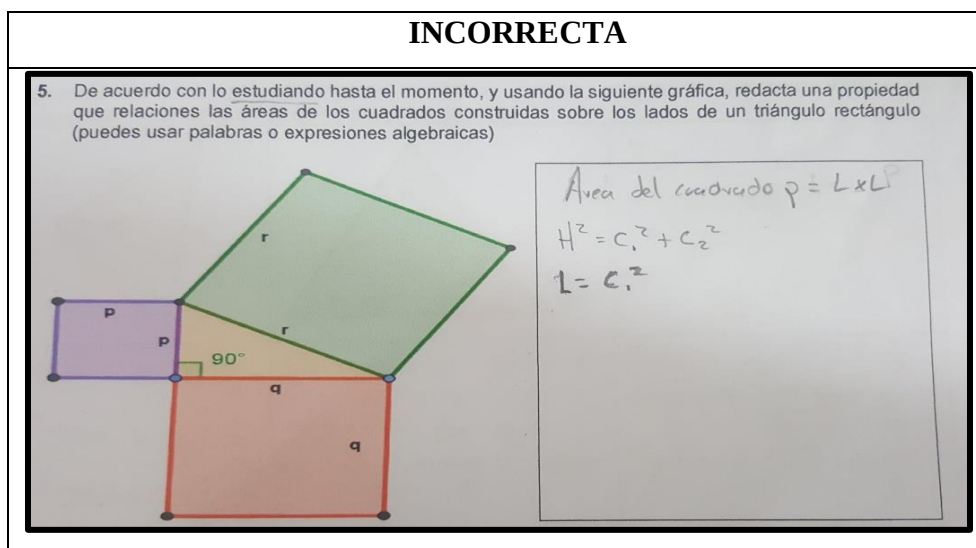


Figura 36. Respuesta a pregunta 5 (hoja de trabajo 1) del grupo No. 8.

En la pregunta No. 6 y 7, de acuerdo con la Tabla 20:

Tabla 20.

Resultados pregunta No. 6 y 7 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta).

Pregunta	C	I
6 y 7	11	1
	91,7%	8,3%

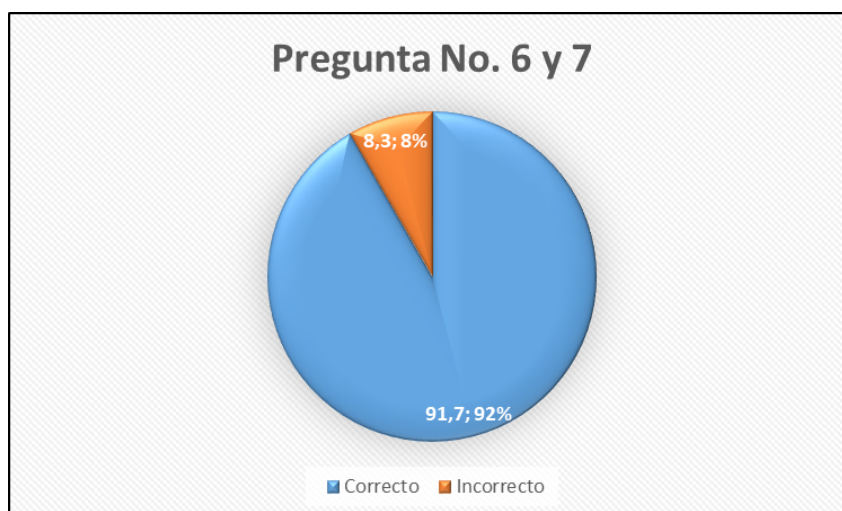
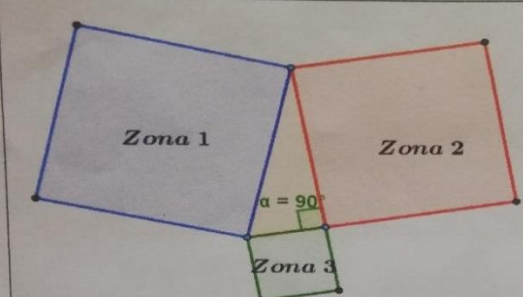


Figura 37. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas e incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 6 y 7.

Las preguntas 6 y 7, están relacionadas; puesto que la selección realizada por los estudiantes en la pregunta 6, condiciona la justificación presentada en la pregunta 7. El 91,7% de los estudiantes justificaron y seleccionaron correctamente la respuesta a las preguntas 6 y 7; el 8,3% restante, no seleccionaron, ni justificaron asertivamente su respuesta. En las respuestas presentadas por los grupos 12 y 8 (ver Figura 38), claramente se puede observar que, para la solución y explicación de la situación en contexto, planteada en la pregunta 6, los estudiantes identificaron implícitamente el teorema de Pitágoras, sin necesidad de que, en el enunciado o contexto de la pregunta se sugiriera utilizarlo. Por otra parte, en las respuestas presentadas por los estudiantes del grupo 4 (ver Figura 39), se identifican dos dificultades, la primera está asociada a la equivocada interpretación y lectura de la figura presentada en la pregunta 6; puesto que, se deja guiar por ideas y nociones intuitivas, considerando a “ojo” que la Zona 2 y 3, representan más área que la Zona 1. La segunda dificultad, radica en la justificación presentada en la pregunta 7, debido a que se puede evidenciar una falta de pensamiento espacial, al considerar la Zona 3 equivalente a la unión de las Zonas 1 y 2.

CORRECTAS

6. La figura muestra la estructura de tres zonas cuadradas de una finca que deben dividirse entre dos propietarios.



Se tienen las siguientes opciones para dividir el terreno disponible entre los dos propietarios:

Opción 1: La zona 1 para el propietario 1, la zona 2 para el propietario 2, y la zona 3 se divide en partes iguales entre los dos propietarios.

Opción 2: La zona 1 para el propietario 1 y la zona 2 y 3 para el propietario 2.

Al comparar las opciones presentadas, se puede afirmar que (Marca con una X la respuesta correcta):

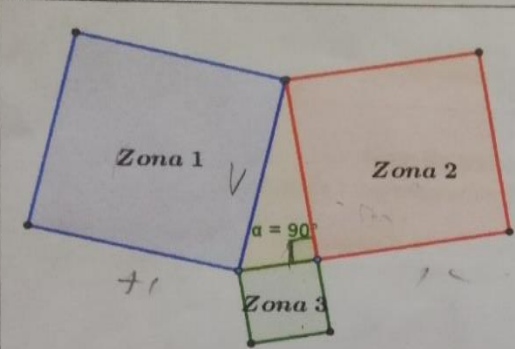
☒ A. la opción 1 es equitativa para los dos propietarios. ☐ B. la opción 1 es desfavorable para el propietario 1.
☐ C. la opción 2 es equitativa para los dos propietarios. ☐ D. la opción 2 es desfavorable para el propietario 1.

7. Justifica con tus propias palabras, la respuesta seleccionada en la pregunta anterior.

La opción 2 es equitativa porque la suma de las áreas de la zona 2 y 3 es igual al área de la zona 1 por lo que es equitativo.

CORRECTAS

6. La figura muestra la estructura de tres zonas cuadradas de una finca que deben dividirse entre dos propietarios.



Se tienen las siguientes opciones para dividir el terreno disponible entre los dos propietarios:

Opción 1: La zona 1 para el propietario 1, la zona 2 para el propietario 2, y la zona 3 se divide en partes iguales entre los dos propietarios.

Opción 2: La zona 1 para el propietario 1 y la zona 2 y 3 para el propietario 2.

Al comprar las opciones presentadas, se puede afirmar que (Marca con una X la respuesta correcta):

A. la opción 1 es equitativa para los dos propietarios. B. la opción 1 es desfavorable para el propietario 1.
☒ C. la opción 2 es equitativa para los dos propietarios. D. la opción 2 es desfavorable para el propietario 1.

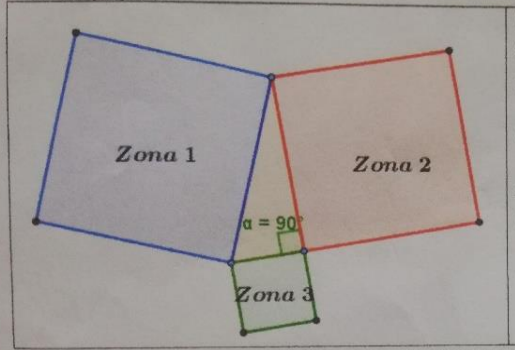
7. Justifica con tus propias palabras, la respuesta seleccionada en la pregunta anterior.

Es equitativa la opción 2 para los dos ya que gracias al teorema de Pitágoras nos damos cuenta que la suma de los dos catetos nos da la área de la zona 1.

Figura 38. Respuestas a las preguntas 6 y 7 de la hoja de trabajo 1, dadas por los grupos 12 y 8, respectivamente.

INCORRECTA

6. La figura muestra la estructura de tres zonas cuadradas de una finca que deben dividirse entre dos propietarios.



Se tienen las siguientes opciones para dividir el terreno disponible entre los dos propietarios:

Opción 1: La zona 1 para el propietario 1, la zona 2 para el propietario 2, y la zona 3 se divide en partes iguales entre los dos propietarios.

Opción 2: La zona 1 para el propietario 1 y la zona 2 y 3 para el propietario 2.

Al comprar las opciones presentadas, se puede afirmar que (Marca con una X la respuesta correcta):

A. la opción 1 es equitativa para los dos propietarios. B. la opción 1 es desfavorable para el propietario 1.
 C. la opción 2 es equitativa para los dos propietarios. ☒ D. la opción 2 es desfavorable para el propietario 1.

7. Justifica con tus propias palabras, la respuesta seleccionada en la pregunta anterior.

Seleccionamos la D. porque el área de la zona 1 y el área de la zona 2 es igual al área de la zona 3 por eso la zona se divide en dos partes una para la zona 1 y la zona 2.

Figura 39. Respuestas a las preguntas 6 y 7 de la hoja de trabajo 1, dadas por el grupo 4.

En la pregunta No. 8, de acuerdo con la Tabla 21:

Tabla 21.

Resultados pregunta No. 8 de la Hoja de trabajo No 1 (C: correcta; I: incorrecta; NC: no contestó).

C	I	NC
8	3	1
66,7%	25%	8,3%

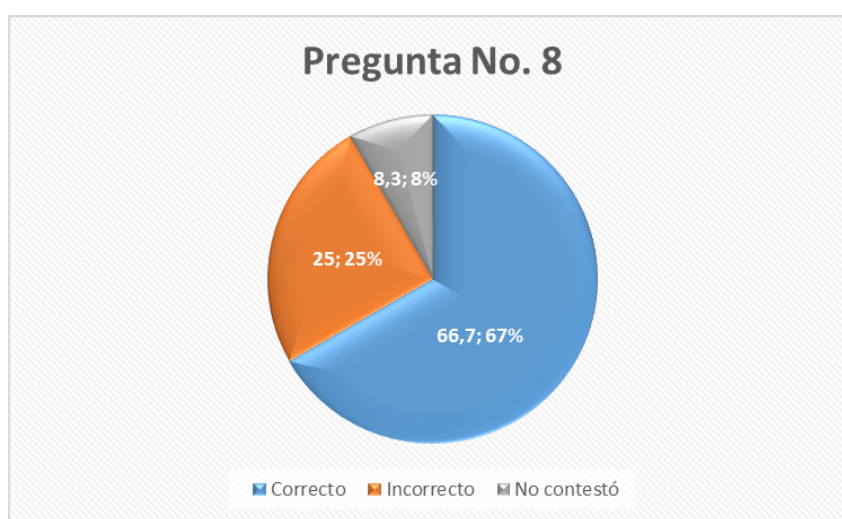


Figura 40. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuestas correctas, incorrectas y no contestadas, por los grupos de estudiantes en la pregunta 8.

En la pregunta 8, el 66,7% de los grupos de estudiantes pudieron identificar, determinar y calcular las razones trigonométricas dentro de un triángulo, siempre y cuando fuese posible (triángulo rectángulo), respecto a un ángulo dado. Además, el 25% de los grupos no identificaron y calcularon de forma correcta las razones trigonométricas en cada triángulo, respecto al ángulo dado; y, sólo 8,3% de los grupos no resolvieron la pregunta. Dentro de los estudiantes que contestaron correctamente, se identificó que todos reconocían la necesidad de que el triángulo fuera rectángulo, para poder definir las razones trigonométricas, respecto al ángulo dado. Por otra parte, dentro de los estudiantes que contestaron de manera incorrecta, se observó dos tipos de errores (ver Figura 42) en sus respuestas: el primer error, está ligado a una cuestión de notación de las razones trigonométricas, puesto que para denotarlas utilizaban S, C, T en vez de

$\text{sen}(\theta)$, $\text{cos}(\theta)$ y $\text{tan}(\theta)$; respectivamente. El segundo error, está asociado a la confusión entre cosecante y secante; puesto que, los estudiantes las asocian en sus respuestas de manera incorrecta, como las reciprocas de las razones coseno y seno; respectivamente.

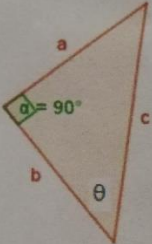
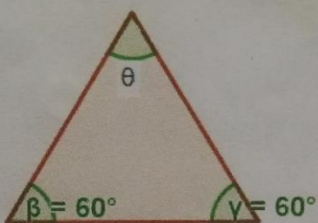
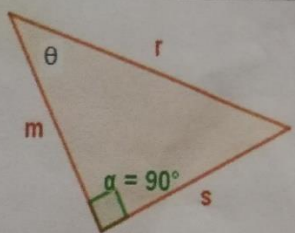
CORRECTAS		
8. En caso de ser posible, debajo de cada triángulo escribe (determine) las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente) del ángulo θ. Si no es posible determinarlas, justifica con tus propias palabras.		
		
$\text{Sen}\theta = \frac{a}{c}$ $\text{Cos}\theta = \frac{b}{c}$ $\text{tang}\theta = \frac{a}{b}$ $\text{Cosecante} = \frac{c}{a}$ $\text{Sec}\theta = \frac{c}{b}$ $\text{Cot}\theta = \frac{b}{a}$	No se pueden determinar porque el triángulo no es rectángulo.	$\text{sen}\theta = \frac{s}{r}$ $\text{csc}\theta = \frac{r}{s}$ $\text{cos}\theta = \frac{m}{r}$ $\text{sec}\theta = \frac{r}{m}$ $\text{tan}\theta = \frac{s}{m}$ $\text{cot}\theta = \frac{m}{s}$

Figura 41. Respuesta a la pregunta 8 de la hoja de trabajo 1, dada por el grupo 12.

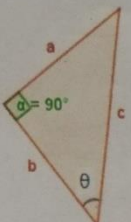
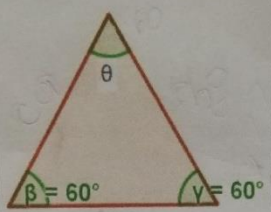
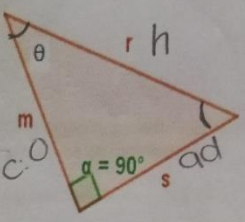
INCORRECTA		
8. En caso de ser posible, debajo de cada triángulo escribe (determine) las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente) del ángulo θ. Si no es posible determinarlas, justifica con tus propias palabras.		
		
$s = \frac{a}{c}$ $cs = \frac{b}{c}$ $tan = \frac{a}{b}$ $cse = \frac{c}{b}$	NO es posible de terminarlo porque no es un triángulo rectángulo.	$s = \frac{m}{r}$ $c = \frac{s}{r}$ $t = \frac{m}{s}$ $cs = \frac{r}{s}$ $s = \frac{r}{m}$ $ct = \frac{s}{m}$ $cs = \frac{h}{cd}$ $s = \frac{h}{co}$ $ct = \frac{co}{cd}$

Figura 42. Respuesta a la pregunta 8 de la hoja de trabajo 1, dada por el grupo 5.

4.2.4.3. Entrevista clínica.

A continuación, se muestra fragmentos de las entrevistas realizadas a algunos de los estudiantes que estuvieron presentes en el desarrollo de la hoja de trabajo 1, la cual fue un registro de audio y aunque el criterio que se tenía sobre la escogencia de cada uno de los entrevistados era a partir de los resultados de casos atípicos o de acuerdo al desempeño entre la prueba diagnóstica y la hoja de trabajo 1, cabe mencionar que algunos de los chicos por pena o temor no la realizaron por lo que se tomó la decisión de hacerlo de forma voluntaria.

4.2.4.3.1. Entrevista estudiante No. 8.

Este estudiante, presento dificultades con la pregunta 4 de la prueba diagnóstica vinculada al teorema de Pitágoras; por lo que debido a su excelente rendimiento en el grupo 12 al que correspondía, durante la aplicación de la hoja de trabajo 1 y a su actitud de querer participar de la entrevista. Destacamos lo siguiente de dicha entrevista:

Docente: ... de acuerdo a los recortes que hemos hecho del trabajo con material concreto, recortar la figura que tuviste en tus manos, (manipulable) parecida a esta (señala figura plasmada en pregunta 1, Anexo B). me gustaría que me explicaras ¿cómo llegaste a esta respuesta? (señala pregunta 2, Anexo B).

Estudiante: bueno yo llegue a esta respuesta, porque como podemos ver aquí en este cuadrado (señala cuadrado dividido en 4 polígonos, Anexo B; pregunta 1) digamos, tiene el lado de un cateto ¡no!, entonces podemos decir, que este digamos, este es el cuadrado de un cateto. Lo mismo con este (señala cuadrado enmarcado con el número 5, Anexo B; pregunta 1) entonces cuando nosotros armamos esta figura (señala el cuadrado enmarcado con el número 6, Anexo B; pregunta 1) podemos darnos cuenta que las cuatro partes de del cuadrado de este cateto (señala cuadrado dividido en 4 polígonos, Anexo B; pregunta 1) y este cuadrado de este cateto (señala cuadrado enmarcado con el número 5, Anexo B; pregunta 1) cabían perfectamente aquí, en el cuadrado

grande que sería el cuadrado de la hipotenusa, por lo tanto quedamos en esa conclusión, que la suma del área de los cuadrado de los catetos es igual al área del cuadrado de la hipotenusa.

En este fragmento se puede ver que el estudiante No. 8, comunica de forma oral una conjetura a partir de lo realizado con material concreto, el cual expresa su respuesta señalando directamente en su hoja de trabajo la conclusión adquirida a partir de su experiencia tangible con el objeto matemático y que además concluye de manera correcta respecto a los objetivos planteados en la hoja de trabajo 1 para aquella pregunta.

4.2.4.3.2. Entrevista estudiante No. 10.

Este estudiante, al igual que el anterior, presento dificultades con la pregunta 4 de la prueba diagnóstico vinculado al teorema de Pitágoras; por lo que debido a su excelente rendimiento en el grupo 1 al que correspondía, durante la aplicación de la hoja de trabajo 1. Y a su actitud voluntaria de hacer parte de la entrevista, decidimos mostrar una parte de lo obtenido de dicha entrevista.

Docente: nos gustaría que de pronto profundizaras un poco más como a partir de lo que se desempeñó utilizando las hojas de trabajo en GeoGebra y el material cortando. ¿Cómo pudiste llegar a esta respuesta? (señala pregunta 2, anexo B).

Estudiante: pues basándonos ya en lo que decía aquí ¡no! (señala el enunciado de los pasos a seguir en la pregunta 1. Anexo B) digamos que ya como ustedes ya nos habían explicado armando lo del material de trabajo, las formulas, ya uno se da cuenta que al sumar estas dos áreas (señala los dos cuadrados formados por los catetos, Anexo B) lo típico es que de esta ¡no! (señala el cuadrado formado por la hipotenusa) ya que pues el teorema de Pitágoras nos dice que el área de los catetos da el área de la hipotenusa ¡no!.

Docente: ¿el área de los catetos?

Estudiante: La suma de los lados de los catetos. La suma de los catetos al cuadrado nos tiene que dar la hipotenusa al cuadrado esa es la fórmula del teorema de Pitágoras ¡no!.y..

Docente: Los cuadrados sobre los catetos. la suma de los cuadrados sobre los catetos te va a dar igual...

Estudiante: a la hipotenusa al cuadrado.

Docente: listo ¿eso fue todo?

Estudiante: Si yo creo que, si eso fue todo, pues yo aquí puse que la suma de las dos áreas de los cuadrados menores este y este (señala los cuadrados formados por los catetos) nos da el área del cuadrado mayor (señala el cuadrado formado sobre la hipotenusa).

En el fragmento de la entrevista al estudiante No. 10, se observa que es capaz de comunicar de forma oral una conjetura, a partir de la actividad realizada con material manipulable. Aunque, en ciertos instantes de su discurso, se observan algunas dificultades para representar y comunicar (verbalmente) con claridad, la relación matemática que encuentra en la actividad.

En contraste, la entrevista del estudiante No. 10, está más asociada al tamaño de los objetos y, no es tan formal como el estudiante No.8. Sin embargo, ambos conjeturan de acuerdo a lo trabajado en la actividad con material concreto.

4.3.Hoja de trabajo No. 2:

4.3.1. Descripción de la hoja de trabajo No. 2.

La Hoja de Trabajo No. 2, se elabora a partir de los resultados obtenidos en la hoja de trabajo 1, la cual, tiene como objetivo que los estudiantes a través de la exploración por medio de GeoGebra, utilizando diferentes registros de representación, logren observar, identificar y

construir un aprendizaje significativo, asociado a la identidad trigonométrica fundamental, permitiendo que vean la estrecha relación que tiene esta, con el teorema de Pitágoras.

La Hoja de Trabajo No. 2, está compuesta por 8 preguntas (ver anexo C), organizadas de manera articulada, con la finalidad de que:

- ✓ sobre una aplicación construida en GeoGebra, que consiste en un triángulo rectángulo al interior de una circunferencia, que tiene uno de sus vértices (formando un ángulo agudo) en el centro de dicha circunferencia; los grupos de estudiantes a través del uso de unos deslizadores, modifiquen las magnitudes del ángulo, el radio, y análogamente la hipotenusa y sus respectivos catetos, con el fin de que paralelamente recolecten cada una de las medidas en una tabla e identifiquen las magnitudes de dos de las razones trigonométricas ($\sin(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$).
- ✓ a través de una representación gráfica tomada de la aplicación construida mencionada anteriormente, el grupo de estudiantes identifiquen las áreas de los cuadrados formados por los lados del triángulo rectángulo presente en dicha construcción, pero en términos de seno y coseno.
- ✓ una vez realizado, lo mencionado en los dos párrafos anteriores, los grupos de estudiantes, con sus propias palabras redacten (conjeturan) la relación que evidencian.

4.3.2. Objetivos de la hoja de trabajo No. 2.

- ✓ Analizar las estrategias que utilizan los grupos de estudiantes del grado 10 en el proceso de elaboración de conjeturas, a partir de diferentes representaciones.
- ✓ Analizar la importancia que tiene el uso de GeoGebra en el proceso de verificación de una ley.

4.3.3. Condiciones de aplicación de la hoja de trabajo No. 2.

La Hoja de Trabajo No. 2, fue contestada por 34 estudiantes, cuyo promedio de edad oscilaba entre los 14 y 16 años. El número de niños es 23 (67,6%) y niñas 11 (32,4%). La Hoja de Trabajo No. 2, fue una prueba grupal, que se aplicó el 13 de marzo de 2019 por escrito; posterior a ello, se socializó los resultados con el docente y todo el grupo de estudiantes. Además, para resolver las actividades, los estudiantes utilizaban lápiz, papel y un computador por cada grupo (con previa instalación del software matemático interactivo GeoGebra); el Applet se configuró de tal forma, que su uso fuera lo más sencillo posible para una persona que no estuviera familiarizada con ella. En total utilizaron 100 minutos para responder el total de preguntas y su respectiva socialización.

Las fases en que se desarrolló la clase para la Hoja de Trabajo No. 2 en el grado decimo son: Tabla 22.

Fases de la clase con la hoja de trabajo No 2.

FASE	DESCRIPCIÓN
Exploración	Manejo del GeoGebra, explorando una construcción geométrica que consta de un triángulo rectángulo al interior de una circunferencia, haciendo uso del arrastre por medio de unos deslizadores, que generan diferentes magnitudes del ángulo, el radio y desde luego la hipotenusa y sus respectivos catetos, donde cada uno de estos valores eran registrados en una tabla, en la cual, tenían que sumar e identificar a que razón trigonométrica asociaba cada medida. Para posterior a ello redactar una conjetura a partir de dicho registro numérico.
Socialización	En este momento los estudiantes, contaron con un espacio, para la socialización de los resultados obtenidos. El profesor hizo de moderador.
Formalización	Finalizada la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizó e institucionalizó las ideas y los resultados obtenidos en cada una de las actividades.

4.3.4. Resultados obtenidos de la hoja de trabajo No. 2.

4.3.4.1. Resultados cuantitativos de la hoja de trabajo No.2.

Tabla 23.

Resultados generales obtenidos por los 12 grupos de estudiantes de grado 10° en la Hoja de trabajo No. 2.

Grupo No.	Estudiante No.	PREGUNTA No.								Total de Puntos	%
		Medir	Conjetura	Evaluación	Medir	Conjetura					
		1	2	3	4	5	6	7	8		
1	18-20-10	1	0	1	1	1	1	1	1	7	88
2	24-29-30	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
3	19-23-6	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
4	12-31	1	0	0	1	1	1	1	1	6	75
5	1-15-26	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
6	27-25-17	1	0	1	1	1	1	1	1	7	88
7	14-21-19	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
8	13-32-11	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
9	4,2-5	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
10	28-16	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
11	3-33-34	1	0	1	1	1	1	1	1	7	88
12	8-22-7	1	1	1	1	1	1	1	1	8	100
Promedio (%)		100	66,67	91,67	100	100	100	100	100	-	94,79
		Media					7,58				
		Desv. Tip.					0.67				
		C.V (%)					8,82				

De acuerdo con los resultados grupales, obtenidos por los estudiantes en la hoja de trabajo 2 (94,79%), se observa un rendimiento académico favorable. Además, se observa una dispersión aceptable, reflejada en un coeficiente de variabilidad del 8,82%.

A continuación, caracterizamos de forma general cada una de las preguntas en medir, conjeturar y evaluar, agrupando aquellas que comparten dichas características.

- Medir

En la pregunta 1 y 6, el 100% de los grupos, manipula los deslizadores en GeoGebra y para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo, el ángulo y el radio, completa y anota cada una de las magnitudes en una tabla.

- Conjeturar

De las preguntas 2, 3, 7 y 8, se puede decir de forma general que el 89,6% de los 12 grupos conformados por los estudiantes, logran realizar, dada una situación específica, redactar de manera correcta una conjetura con respecto a indicios y observaciones. En cambio, el 10,4% presenta dificultades para expresar sus conjeturas.

- Evaluación

De las preguntas 4 y 5 se infiere que de los 12 grupos el 100%, responde de manera correcta, tomando como recurso lo visto anteriormente para justificar sus decisiones.

4.3.4.2. Análisis cualitativo de la hoja de trabajo No. 2.

En la pregunta No. 1, el 100% de los grupos de estudiantes, a partir de la aplicación en GeoGebra, logran completar los valores requeridos en una tabla para cualquier ángulo, es decir que los grupos, para cada ángulo, identifican los catetos, la hipotenusa y las áreas de los cuadrados formados por dichos lados, y paralelamente el seno y el coseno del ángulo, sus cuadrados y la suma de estos.

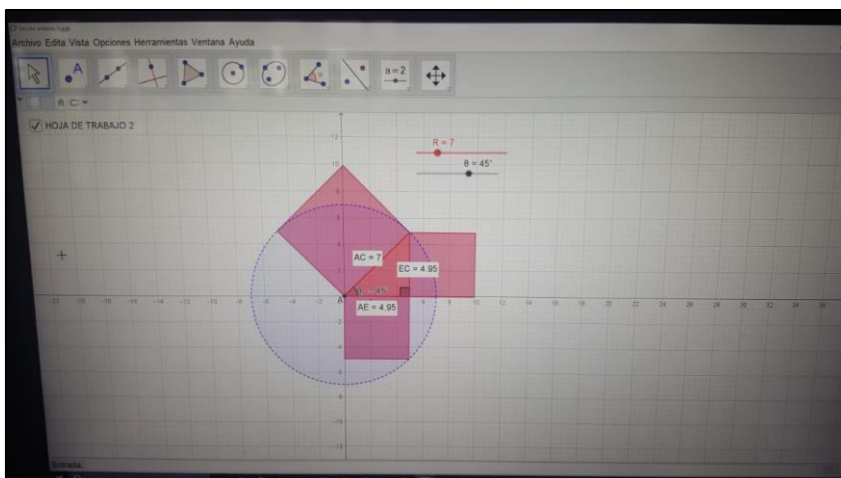


Figura 43. Construcción realizada por los autores en GeoGebra Classic (applet), para la hoja de trabajo No. 2.

A continuación, se muestra evidencia del trabajo realizado por uno de los grupos de estudiantes, de la toma de medidas con ayuda de GeoGebra.

1. A partir de la aplicación de Geogebra, para valores diferentes del ángulo θ completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

θ°	$\text{Sen}(\theta)$	CO [und]	$\text{Cos}(\theta)$	CA [und]	$\text{Sen}^2(\theta)$	A_1 [und ²]	$\text{Cos}^2(\theta)$	A_2 [und ²]	$\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta)$	A_3 [und ²]
15	0,26	0,26	0,97	0,97	0,07	0,07	0,93	0,93	1	1
30	0,5	0,5	0,87	0,87	0,25	0,5	0,75	0,25	1	1
45	0,71	0,71	0,71	0,71	0,5	0,5	0,5	0,5	1	1
60	0,87	0,87	0,5	0,5	0,75	0,75	0,25	0,25	1	1
75	0,97	0,97	0,26	0,26	0,93	0,93	0,07	0,07	1	1

CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; A_1 : medida área cuadrado 1; A_2 : medida área cuadrado 2; A_3 : medida área cuadrado 3

Figura 44. Respuesta a la pregunta 1 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 5.

En la pregunta No. 2, de acuerdo con la Tabla 24:

Tabla 24.

Resultados pregunta No. 2 de la Hoja de trabajo No. 2 (C: correcta; I: incorrecta).

C	I
8	4
66,67%	33,33%

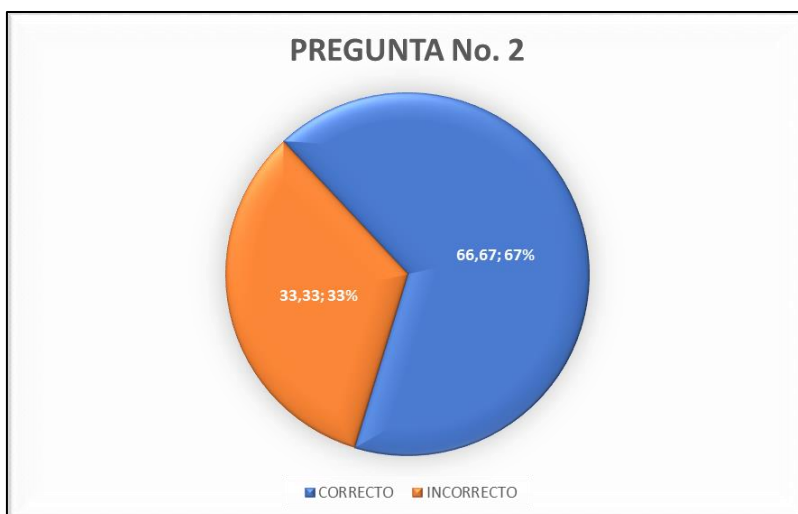


Figura 45. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuesta correctas, incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 2.

En la pregunta No. 2., 8 de los 12 grupos (66,67%), a partir de las medidas obtenidas en la pregunta 1, redactan de manera correcta la relación que existe entre los valores adquiridos paralelamente para el seno y coseno del ángulo y la medida de los catetos. En cambio, los 4 grupos restantes (33,33%), 3 de ellos, presentan dificultades en la comprensión e interpretación del enunciado, puesto que sus respuestas fueron totalmente diferentes a lo pedido y el grupo faltante, en un primer instante se ve que responde de acuerdo a lo esperado, pero ponen un enunciado de más, que nos indica que a partir de unos indicios planteados en las respuestas obtenidas de la pregunta 1, hay una observación errónea por parte del grupo.

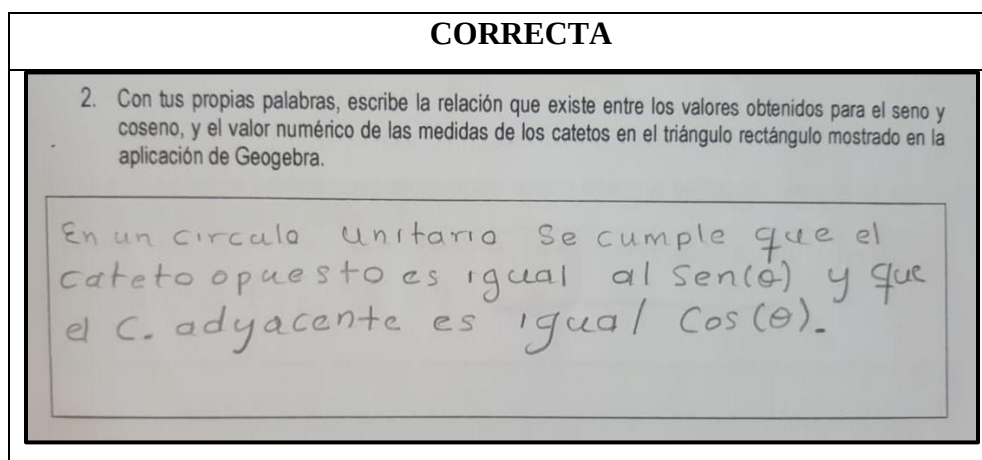


Figura 46. Respuesta a la pregunta 2 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 12.

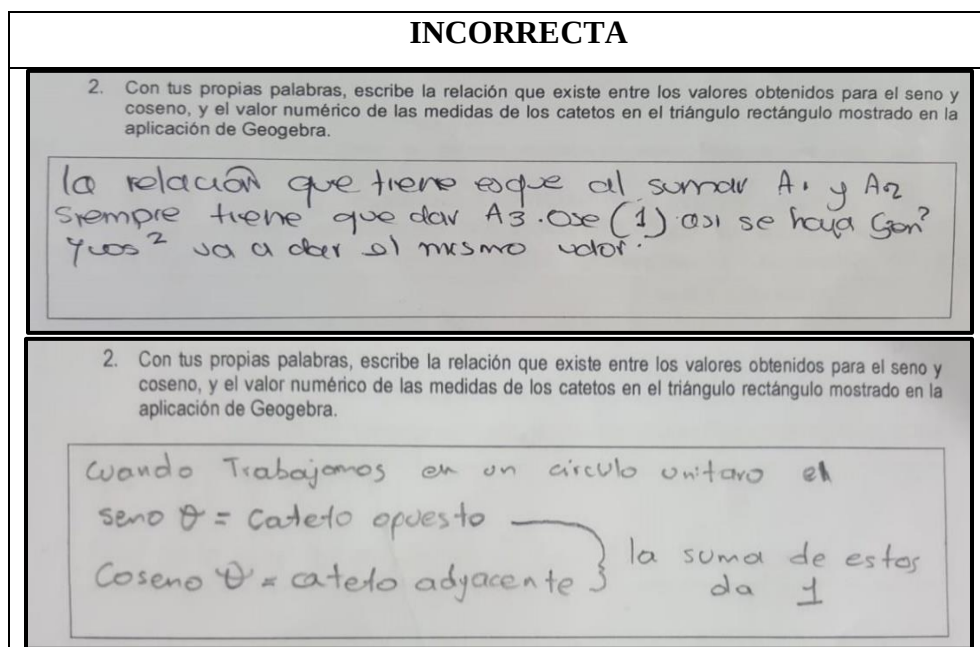


Figura 47. Respuesta a la pregunta 2 (Hoja de trabajo No. 2) de los grupos No. 4 y 1 respectivamente.

En la pregunta No. 3, de acuerdo con la Tabla 25:

Tabla 25.

Resultados pregunta No. 3 de la Hoja de trabajo No. 2 (C: correcta; I: incorrecta).

C	I
11	1
91,67%	8,33%

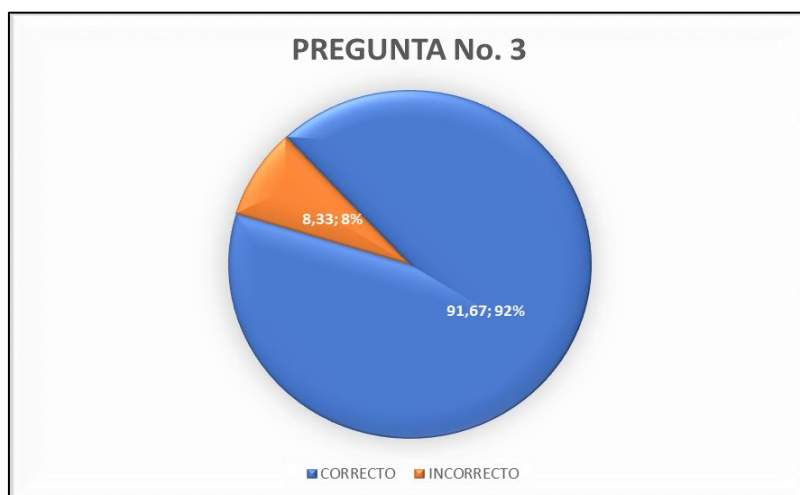


Figura 48. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuestas correctas, incorrectas, contestadas por los grupos de estudiantes en la pregunta 3.

En la pregunta No. 3, 11 de los 12 grupos (91,67%), a partir de las medidas obtenidas en la pregunta 1, redactan de manera correcta la relación que existe entre los valores adquiridos paralelamente para el seno y coseno cuadrado del ángulo y la medida de las áreas de los cuadrados contruidos sobre los lados del triángulo rectángulo presentado en la aplicación. catetos. En cambio, 1 grupo (8,33%), presentan dificultades en la comprensión e interpretación del enunciado, puesto que su respuesta es totalmente diferente a lo pedido.

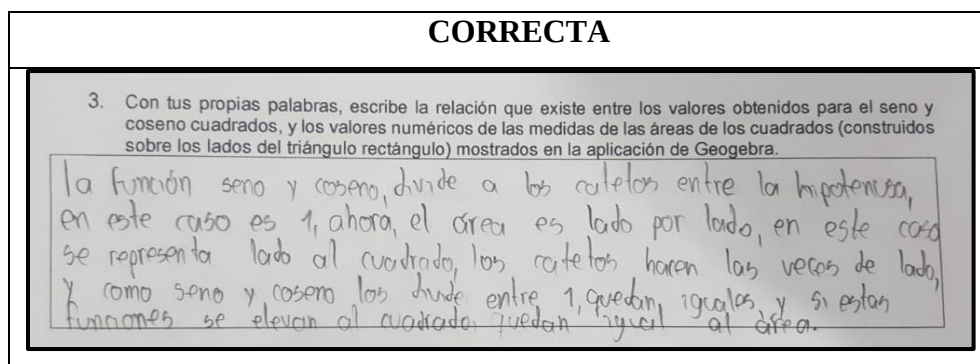


Figura 49. Respuesta a la pregunta 3 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 7.

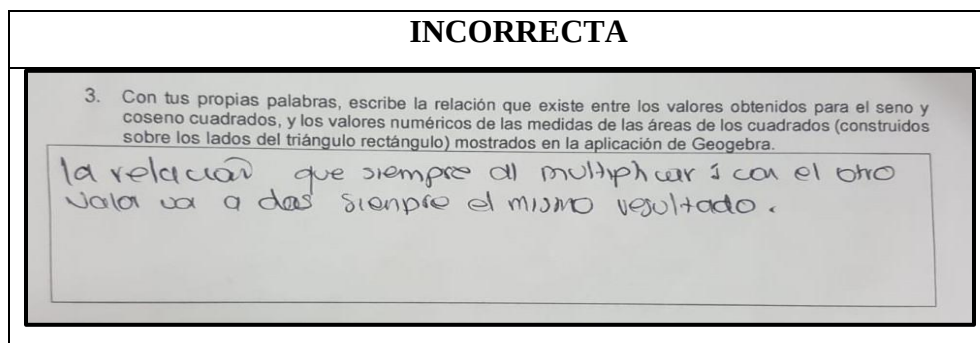


Figura 50. Respuesta a la pregunta 3 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 4.

En la pregunta No. 4 y 5, la cual se realiza con la intención de observar si los estudiantes ante un caso particular (circulo unitario) logran responder, teniendo como base lo que han venido realizando anteriormente, por lo que el 100% de los grupos de estudiantes, a partir de dicha ilustración (Figura 51) lograron identificar las magnitudes de sus áreas en términos de seno y coseno del ángulo indicado y además todos los grupos con sus propias palabras lograron caracterizar la identidad para dicho caso.

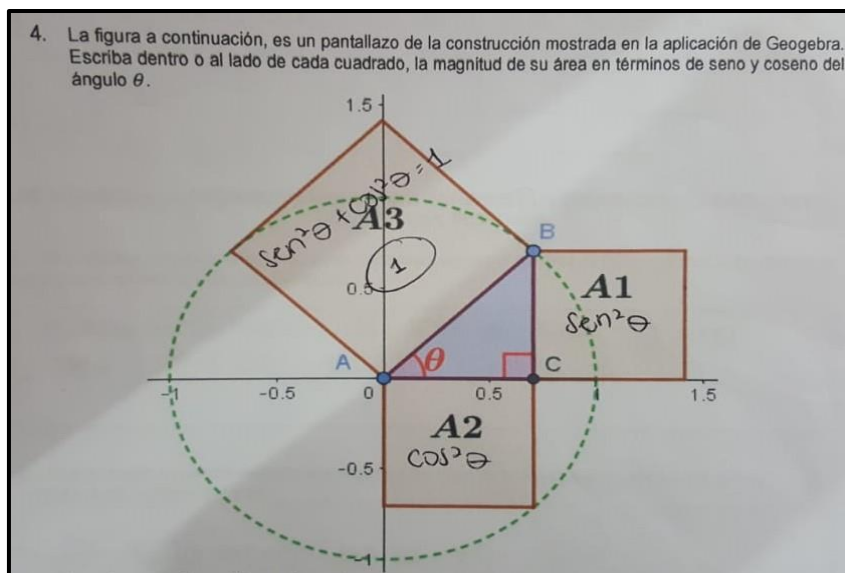


Figura 51. Respuesta a la pregunta 4 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 5.

5. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos de seno y coseno del ángulo θ .

1) $h^2 = c^2 + c^2$ 2) $A_3 = A_2 + A_1$ 3) $A_3 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ 4) $A_3 = 1$

• Para que esto sea valido el triangulo debe hallarse en una circunferencia unitaria.

5. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos de seno y coseno del ángulo θ .

(A1) es el cateto opuesto siempre va hacer $\sin^2 \theta$ y (A2) es el cateto adyacente va hacer $\cos^2 \theta$ la suma de estos siempre va hacer 1 en (A3) siempre y cuando el radio sea 1 y sea unitario.

Figura 52. Respuesta a la pregunta 5 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 10 y 4 respectivamente.

En la pregunta No. 6., de hecho, similar a la pregunta No. 1 con la única diferencia que para este caso el radio de la circunferencia varia en magnitud, permitiéndonos salir de un caso particular (circulo unitario) a uno más general, por lo que, el 100% de los grupos de estudiantes, a partir de la aplicación en GeoGebra, lograron completar los valores requeridos en una tabla para cualquier radio y ángulo, es decir que los grupos, para cada radio, variaban 2 veces el ángulo e identifican los catetos, la hipotenusa y las áreas de los cuadrados formados por dichos lados, y paralelamente el seno y el coseno del ángulo, sus cuadrados y la suma de estos.

6. A partir de la aplicación de Geogebra, para valores diferentes del ángulo θ y r completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

r [und]	θ°	$\text{Sen}(\theta)$	$\text{Cos}(\theta)$	$\text{Sen}^2(\theta)$	A_1 [und ²]	$\text{Cos}^2(\theta)$	A_2 [und ²]	$\text{Sen}^2(\theta) + \text{Cos}^2(\theta)$	A_3 [und ²]
5	30°	0.5	0.866	0.25	6.25	0.75	18.75	1	25
	60°	0.866	0.5	0.75	18.75	0.25	6.25	1	25
7	60°	0.87	0.5	0.75	36.75	0.25	12.25	1	49
	45°	0.71	0.71	0.50	24.5	0.50	24.5	1	49
10	15°	0.259	0.966	0.067	6.7	0.933	93.3	1	100
	70°	0.94	0.34	0.884	88.3	0.116	11.7	1	100

Figura 53. Respuesta a la pregunta 6 (Hoja de trabajo No.3) del grupo No. 9.

En la pregunta No. 7 y 8., los 12 (100%) grupos de estudiantes contestaron de manera correcta, para la pregunta 7, 11 de los grupos utilizó el lenguaje algebraico y solo 1 grupo utilizó el lenguaje natural y el algebraico, para plasmar el teorema de Pitágoras en términos de seno y coseno del ángulo a partir de lo obtenido en la tabla de la pregunta 6, y en la pregunta No. 8 conjeturaron con respecto a lo obtenido de la pregunta 6 y 7 tal que, todos los grupos llegaron al objetivo que se tenía para aquella pregunta, por ende, identificaron un aspecto muy importante con respecto al radio, que en un primer instante desde la pregunta No. 1 hasta la No. 5 se trabajó para un radio igual a uno a partir de esta ya se variaba ese radio de modo que, los estudiantes al confrontar estos dos “planos” con la ayuda de GeoGebra, conjeturaron que, sin importar el radio, la identidad trigonométrica fundamental se sigue cumpliendo.

7. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos del seno y el coseno del ángulo θ .

$$\text{Sen}^2 + \text{Cos}^2 = 1$$

7. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos del seno y el coseno del ángulo θ .

la suma de las dos funciones trigonométricas elevadas al cuadrado siempre va a dar como resultado 1

$$\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$$

Figura 54. Respuesta a la pregunta 7 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 6 y 11 respectivamente.

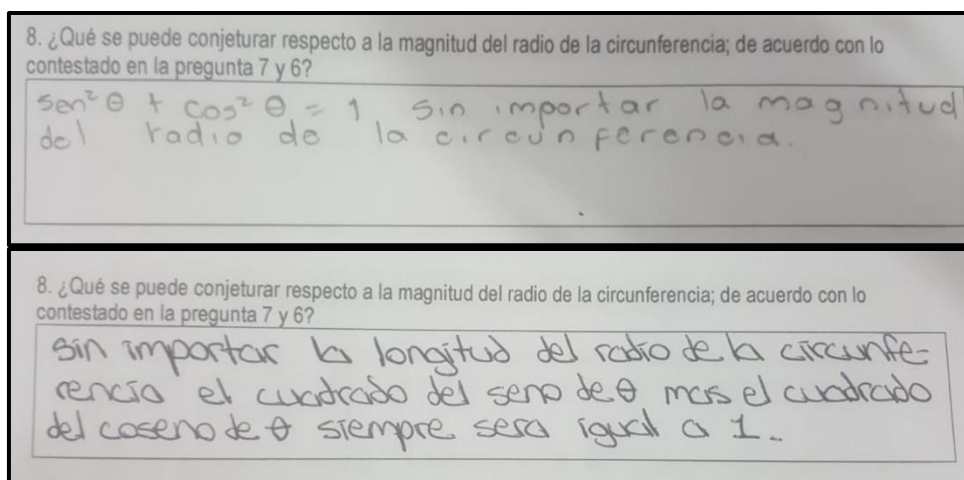


Figura 55. Respuesta a la pregunta 8 (Hoja de trabajo No.2) del grupo No. 3 y 10 respectivamente.

4.3.4.3. Entrevista clínica.

Para ampliar la información proporcionada en la hoja de trabajo No. 2. por algunos estudiantes fue necesario recurrir a las entrevistas clínicas, de las cuales se presenta a continuación la transcripción de algunos fragmentos relevantes. Esto tiene como propósito ofrecer al lector una muestra de respuestas dadas por el estudiante posterior a las aplicaciones.

4.3.4.3.1. Entrevista a estudiante No. 8.

Docente: ... Me gustaría que profundizaras un poco más y explicararas la respuesta que has dado en la pregunta número 5.

Estudiante: bueno en la pregunta numero 5 podemos ver con respecto al grafico que hay, encima de la pregunta 5, que estábamos trabajando con un circulo unitario, ósea que tenia de radio 1, entonces aquí podíamos ver que la hipotenusa era 1 por lo tanto que significa esto cuando vamos hacer las propiedades trigonométricas respecto al ángulo teta, podemos ver acá que el seno digamos que es el cateto opuesto sobre la hipotenusa. Pero como la hipotenusa es 1 entonces básicamente podemos descartarla y decir que el seno de teta es igual al cateto opuesto. Entonces, si nosotros sabemos que el área del triángulo del. perdón, el área del cuadrado A1 es digamos cateto opuesto al cuadrado, entonces ya sabemos que cateto opuesto es igual al seno, por lo tanto

el área del cuadrado del cuadro uno, va a ser seno cuadrado de teta, entonces como vimos en la pregunta anterior donde vimos que la suma de los cuadrados de los catetos era igual al cuadrado de la hipotenusa y haciendo lo mismo que hicimos en el cuadrado uno pero con el cuadrado 2, con la función trigonométrica coseno que cumple lo mismo que el seno entonces podríamos decir que seno cuadrado de teta más coseno cuadrado de teta es igual a 1.

Docente: ¿tu como sabes que el área de este cuadrado A3 es uno?

Estudiante: Porque como estamos trabajando en un círculo unitario, aquí podemos ver que la hipotenusa es de radio. es la medida del radio y en un círculo unitario el radio es uno entonces para hallar el cuadrado sería uno por uno y nos da uno.

En el fragmento anterior, se puede observar al estudiante explicando detalladamente lo que realizó en la pregunta No. 5, de la hoja de trabajo 2. En lo expuesto, se identifica una clara construcción de un aprendizaje significativo, alrededor de la identidad Pitagórica fundamental, para un caso particular, de una circunferencia unitaria.

4.4. Hoja de trabajo No. 3.

4.4.1. Descripción de la Hoja De Trabajo No. 3.

La Hoja de Trabajo No. 3, se elabora a partir de los resultados obtenidos en la hoja de trabajo 1 y 2; la cual, tiene como objetivo que los estudiantes, a través de la exploración por medio de GeoGebra (utilizando diferentes registros de representación), logren observar, identificar y construir un aprendizaje significativo, asociado a la identidad ($\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$), permitiendo analizar la estrecha relación que tiene esta, con el teorema de Pitágoras y Tales.

La Hoja de Trabajo No. 3, compuesta por 2 preguntas (ver anexo D), busca que:

- ✓ sobre una aplicación construida en GeoGebra, que consiste en un triángulo rectángulo con uno de sus catetos tangente y, con la hipotenusa secante a un punto de una circunferencia, que tiene uno de sus vértices (formando un ángulo agudo) en el centro de dicha

circunferencia; los grupos de estudiantes a través del uso de unos deslizadores, modifiquen las magnitudes del ángulo, el radio, y análogamente la hipotenusa y sus respectivos catetos, con la intencionalidad de recolectar, cada una de las medidas en una tabla e identificar las magnitudes, de dos de las razones trigonométricas ($\tan(\alpha)$ y $\sec(\alpha)$).

- ✓ a través, de una representación gráfica de la construcción mencionada anteriormente; el grupo de estudiantes, identifique las áreas de los cuadrados formados por los lados del triángulo rectángulo (presente en dicha construcción), pero en términos de tangente y secante.
- ✓ a partir de lo anterior, cada uno de los grupos, redacten con sus propias palabras (conjeturen), la relación que evidencian.

4.4.2. Objetivos de la hoja de trabajo No. 3.

- Analizar las estrategias que utilizan los grupos de estudiantes del grado 10 en el proceso de elaboración de conjeturas, a partir de diferentes representaciones.
- Analizar la importancia que tiene el uso de GeoGebra en el proceso de verificación de una ley.

4.4.3. Condiciones de aplicación de la hoja de trabajo.

La Hoja de Trabajo No. 3, la contestaron 32 estudiantes (los estudiantes 29 y 17 no se presentaron ese día), cuyo promedio de edad, oscilaba entre los 14 y 16 años. El número de niños es 22 (68,8%) y niñas 10 (31,2%). La Hoja de Trabajo No. 3, fue una prueba grupal, que se aplicó el 18 de marzo de 2019 por escrito, posterior a ello, se socializaban los resultados con el profesor y todo el grupo de estudiantes. Para resolver las actividades, los estudiantes utilizaban lápiz, papel y un computador por grupo con previa instalación del software matemático interactivo GeoGebra. El Applet se configuro de tal forma que su uso fuera lo más sencillo posible para una persona que

no estuviera familiarizada con ella. En total utilizaron 50 minutos para responder el total de preguntas y su respectiva socialización.

Las fases llevadas a cabo en la aplicación de esta hoja de trabajo son equivalentes a la realizada en la hoja de trabajo 2 (Tabla 22).

4.4.4. Resultados obtenidos de la hoja de trabajo No 3:

4.4.4.1. Resultados cuantitativos de la hoja de trabajo No. 3

Tabla 26.

Resultados generales obtenidos por los 12 grupos de estudiantes de grado 10° en la Hoja de trabajo No. 3.

Grupo No.	Estudiante No.	Pregunta No.		Total, de puntos	%
		Medir	Conjetura		
		1	2		
1	18, 20 y 10	1	0	1	50
2	24 y 30	1	1	2	100
3	19, 23 y 6	1	1	2	100
4	12 y 31	1	1	2	100
5	1, 15 y 26	1	1	2	100
6	27 y 25	1	1	2	100
7	14, 21 y 19	1	1	2	100
8	13, 32 y 11	1	1	2	100
9	4, 2 y 5	1	1	2	100
10	28 y 16	1	1	2	100
11	3, 33 y 34	1	1	2	100
12	8, 22 y 7	1	1	2	100
Promedio (%)		100	91,67	-	95,8
Media				1,92	

Grupo No.	Estudiante No.	Pregunta No.		Total, de puntos	%
		Medir	Conjetura		
		1	2		
	Desv. Tip			0,29	
	CV (%)			15,1%	

De acuerdo con los resultados grupales, obtenidos por los estudiantes en la hoja de trabajo 3 (95,8%), se observa un rendimiento académico favorable. Además, se observa una dispersión aceptable reflejada en un coeficiente de variabilidad del 15%.

A continuación, caracterizamos de forma general cada una de las preguntas en medir, conjeturar y evaluar, agrupando aquellas que comparten dichas características.

- Medir

En la pregunta 1, el 100% de los grupos, manipula los deslizadores en GeoGebra y para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo y el ángulo, completa y anota cada una de las magnitudes en una tabla.

- Conjeturar

En la pregunta 2, se evidencia que el 91,67% de los 12 grupos conformados por los estudiantes, logran realizar, dada una situación específica, redactar de manera correcta una conjetura con respecto a indicios y observaciones. En cambio, el 8,3% no expreso su conjetura.

4.4.4.2. Análisis cualitativo de la hoja de trabajo No. 3.

En la pregunta No. 1., el 100% de los grupos de estudiantes, a partir de la aplicación en GeoGebra, logran completar los valores requeridos en una tabla para cualquier ángulo, es decir que los grupos, para cada ángulo, identifican los catetos, la hipotenusa y las áreas de los cuadrados

formados por dichos lados, y paralelamente la tangente y la secante del ángulo, sus cuadrados y la suma de estos.

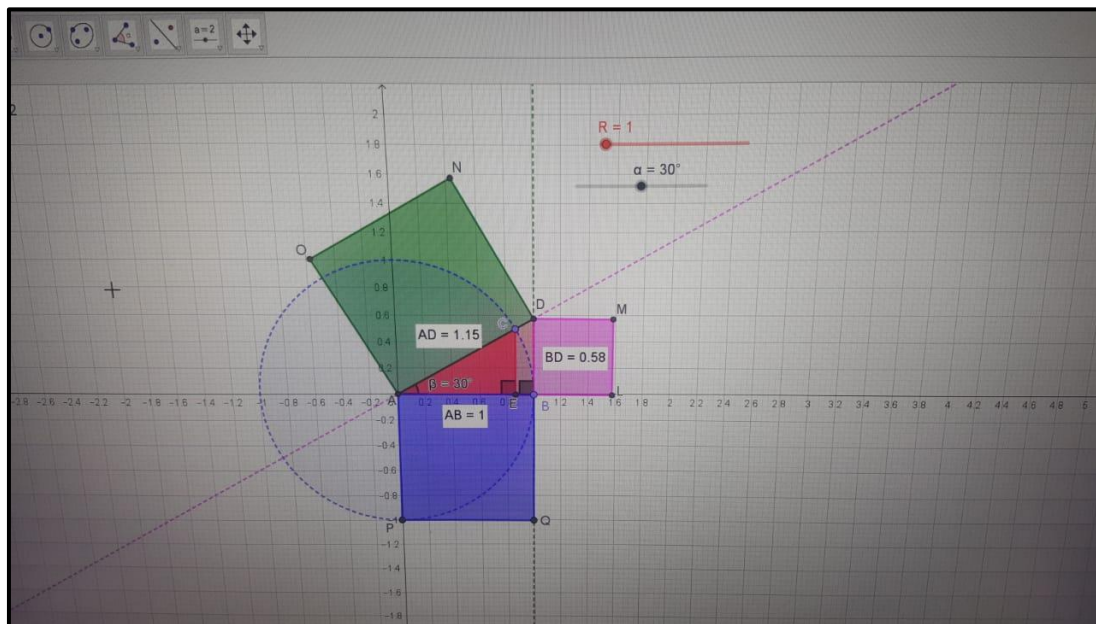


Figura 56. Construcción propia (por los autores), diseñada en GeoGebra Classic (caso particular, donde el triángulo rectángulo se encuentra en el cuadrante I), para la visualización de la identidad pitagórica $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$.

A continuación, se muestra evidencia del trabajo realizado por uno de los grupos de estudiantes, de la toma de medidas con ayuda de GeoGebra.

1. A partir de la aplicación de Geogebra, para valores diferentes del ángulo θ completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

θ°	CA [und]	$\tan(\theta)$	CO [und]	$\sec(\theta)$	H [und]	A_1 [und ²]	$\tan^2(\theta)$	A_2 [und ²]	$\tan^2(\theta) + 1$	$\sec^2(\theta)$	A_3 [und ²]
45	1	1	1	1,41	1,41	1	1	1	2	2	2
30	1	0,58	0,58	1,15	1,15	0,33	0,33	1	1,33	1,33	1,33
60	1	1,73	1,73	2	2	3	3	1	4	4	4
15	1	0,27	0,27	1,04	1,04	0,07	0,07	1	1,07	1,07	1,07
85	1	11,43	11,43	11,47	11,47	130,65	130,65	1	131,65	131,65	131,65

CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; A_1 : medida área cuadrado 1; A_2 : medida área cuadrado 2; A_3 : medida área cuadrado 3

Figura 57. Respuesta a la pregunta 1 (Hoja de trabajo No.3) del grupo No. 6.

En la pregunta No. 2, de acuerdo con la Tabla 27:

Tabla 27.

Resultados pregunta No. 2 de la Hoja de trabajo No. 3 (C: correcta; NC: no contestó).

C	NC
11	1
91,67%	8,33%

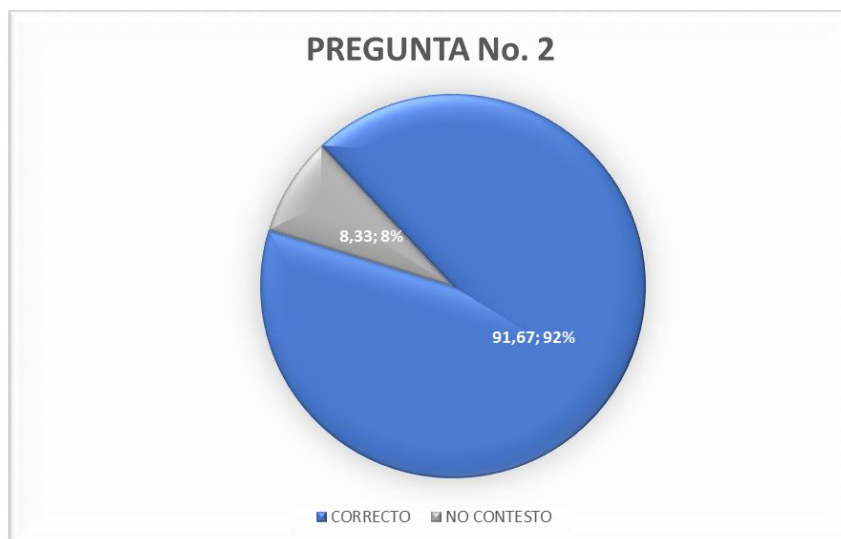


Figura 58. Diagrama circular que muestra la proporción entre las respuestas correctas y no contestadas por los grupos de estudiantes, en la pregunta 2, de la hoja de trabajo No.3.

En la pregunta No. 2, 11 de los 12 grupos (91,67%), a partir de las medidas obtenidas en la pregunta 1, redactan de manera correcta la relación que existe, entre los valores recolectados para la tangente y secante del ángulo de referencia y, la medida de los catetos; de los cuales 5 grupos lo hicieron de forma algebraica y, 6 en lenguaje natural. Por otra parte, el grupo restante (8,33%), no presentó una conjetura y esto se presentó, puesto que fueron llamados a presentar un examen que tenían pendiente en otro salón de clases.

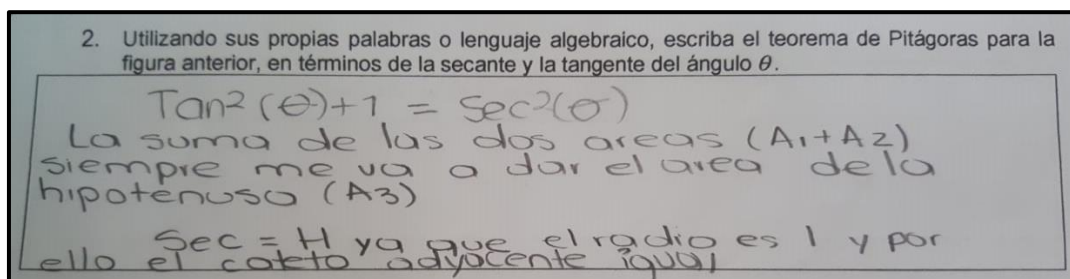


Figura 59. Respuesta a la pregunta 2 (Hoja de trabajo No.3) del grupo No. 5.

4.5. Comentarios finales.

En el estudio diagnóstico, se encontró que los estudiantes presentaban dificultades asociadas a la noción de triángulo rectángulo, área del cuadrado, el teorema de Pitágoras, y aplicabilidad de este último, obteniendo un desempeño del 50%.

Por otra parte, al aplicar la hoja de trabajo 1, el 92% de los grupos de estudiantes obtuvo un resultado académico favorable. Estos resultados, reflejan una gran diferencia respecto a los resultados obtenidos en el diagnóstico, siendo un indicador del alto impacto que tuvo la innovación didáctica y la metodología implementada, para sentar las bases conceptuales y abordar de buena manera, en las siguientes hojas de trabajo, las identidades pitagóricas. Además, el gran impacto de la innovación, también se ve reflejado en los resultados obtenidos en las hojas de trabajo No. 2 y 3; obteniendo en estas, una favorabilidad del 95% y 96%; respectivamente.

Los resultados anteriormente expuestos, son consecuencia de los siguientes factores:

- La actitud positiva y activa de los estudiantes en el desarrollo de las diferentes actividades, en las que se trabajaron aspectos como: recortar, medir, calcular, visualizar, encontrar relaciones y comunicar ideas (oral y escrita), permitió captar el interés de los estudiantes y así establecer roles más activos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.
- El uso de las diferentes representaciones como las visuales, numérica, algebraica y verbal.
- La ruptura con la metodología de enseñanza tradicional de las identidades, al presentar una propuesta innovadora de aula, cuyo papel protagónico es ocupado ahora por el estudiante y no por el profesor, cuyo rol cambia al papel de guía, mediador y agente facilitador, para el desarrollo de aprendizaje significativo en el estudiante. Esta metodología, articulada a la mediación instrumental ofrecida por GeoGebra y material concreto, permitía que el estudiante, mediante la exploración con los recursos (computacionales o material concreto), interactuara directamente con distintas representaciones de los objetos matemáticos, lo cual facilitaba su comprensión y entendimiento, sin que el docente tuviese

que intervenir demasiado o decirle exactamente al estudiante, qué era lo que tenía que ver y a qué tenía que llegar.

- El uso de GeoGebra. Estamos en una época donde hay gran furor por el uso de las tecnologías digitales, donde es muy común el uso desde temprana edad de este tipo de herramientas. Por tanto, el uso de herramientas como GeoGebra dentro del aula, promueve el interés por el estudio de las matemáticas. Puesto que, el dinamismo de este software, permite arrasar, mover, cambiar el tamaño, visualizar objetos, representar un mismo objeto utilizando diferentes registros, entre otros. Hace que los estudiantes estén expectantes frente a los fenómenos que ocurren en la pantalla del computador.

CAPITULO V

5. CONCLUSIONES.

El presente capítulo está dividido en tres partes. En la primera parte se da respuesta a la pregunta central de investigación. En la segunda parte se responden las preguntas auxiliares, a partir de las evidencias encontradas en el estudio. Mientras que, en la última parte, se hace un conjunto de sugerencias para los profesores de matemáticas y para los investigadores en Educación Matemática.

5.1.Respuesta a la pregunta central de la investigación.

¿Qué características debe tener un proceso de enseñanza y aprendizaje con la mediación de GeoGebra y material concreto, para propiciar la construcción de las identidades pitagóricas en estudiantes de décimo grado?

El ambiente de aprendizaje generado, permitió la construcción de un aprendizaje significativo en los estudiantes. Lo anterior, fue producto de varios factores, tales como:

- a. *La formación de los docentes* (autores). Los docentes participantes en el proyecto cuentan con una amplia formación en matemáticas, en didáctica y pedagogía, que influyó positivamente en los procesos de enseñanza (asociados al diseño del diagnóstico y de las hojas de trabajo).
- b. *El rol de los profesores*. En el método tradicional de enseñanza, el profesor asume un rol protagónico y los estudiantes un rol pasivo, reducido prácticamente a tomar notas. En la innovación didáctica que aquí se reporta, el profesor asume un rol distinto, que implica ser *mediador y orientador* realizando sugerencias y preguntas a los estudiantes.
- c. *La metodología*. Las secuencias implementadas en el presente estudio, involucran las siguientes fases: *Diagnóstico, Exploración, Comunicación, Institucionalización y Evaluación*. A continuación, se hace una breve descripción de cada fase:

Tabla 28.

Fases de la implementación de las actividades.

FASE	SUB-FASE	DESCRIPCIÓN
Diagnóstico		Los estudiantes contestan un conjunto de preguntas relativas al dominio de recursos sobre: área del cuadrado, componentes del triángulo rectángulo y conocimiento del teorema de Pitágoras.
Exploración	Utilizando material concreto	El profesor lleva impreso un material que incluye un triángulo rectángulo y cuadrados en cada uno de los catetos y la hipotenusa. Uno de los cuadrados sobre los catetos queda subdividido (ver Anexo B). Los estudiantes recortan los polígonos sobre los catetos y a manera de rompecabezas, completan el cuadrado construido sobre la hipotenusa. Esta es una manera visual y lúdica de aproximarse informalmente a las propiedades matemáticas.
	Utilizando GeoGebra	Manejo del GeoGebra, explorando una construcción geométrica por medio del arrastre de unos deslizadores, que generan diferentes magnitudes en los catetos, la hipotenusa y desde luego sus áreas correspondientes, donde cada uno de estos valores eran registrados en una tabla. Para posterior a ello redactar una conjetura a partir de dicho registro numérico.
Comunicación	Escrita	Después de hacer la exploración con material concreto y GeoGebra, el estudiante se remite a completar espacios de la hoja de trabajo, llenar tablas, responder preguntas, buscar regularidades y construir conjeturas, las cuales deben ser reportadas por la vía escrita.

FASE	SUB-FASE	DESCRIPCIÓN
	Oral	En este momento los estudiantes, contaron con un espacio, para la socialización de los resultados obtenidos. El profesor hizo de moderador.
Formalización		Finalizada la socialización por parte de los estudiantes, el profesor organizó, formalizó e institucionalizó las ideas y los resultados obtenidos en cada una de las actividades.

Los resultados del diagnóstico tuvieron un promedio de rendimiento del 50%, como fruto de la metodología empleada, las actividades de aprendizaje, la mediación del material concreto y el uso de GeoGebra y el rol del profesor, los estudiantes lograron mejorar su nivel de rendimiento de la siguiente manera: en la hoja de trabajo No. 1. alcanzaron un 92%, mientras que en la hoja de trabajo No 2 obtuvieron un 95% de rendimiento y en la última hoja de trabajo tienen un 96%. Este es un indicador claro del alto impacto que tuvo la innovación didáctica sobre el estudio de los estudiantes.

Por su parte, el estudio tuvo impacto en calidad de las producciones de los estudiantes. En particular en la calidad de los procesos comunicativos y de uso de múltiples representaciones de las identidades trigonométricas. En particular fue notorio el avance en la fluidez y en la calidad de la comunicación escrita (conjeturas) que realizan los estudiantes.

En las entrevistas realizadas a los estudiantes, se evidenció que la investigación despertó mayor motivación por el estudio de las matemáticas. Asimismo, los estudiantes recomiendan que la metodología desarrollada en el estudio, sea empleada en otros cursos de matemáticas. Estos hechos constituyen un indicador del grado de aceptación que tuvo la población escolar que participó en el estudio, sobre la metodología y las actividades de aprendizaje utilizadas.

- d. *El tipo de actividades* de aprendizaje (hojas de trabajo, el material concreto y los recursos computacionales). Las hojas de trabajo despertaron interés en los estudiantes para el aprendizaje de las identidades pitagóricas, por medio del uso de material concreto

(manipulable) y GeoGebra, de modo que, favorecía la visualización de los objetos matemáticos utilizando múltiples registros de representación semiótica (Duval, 1993). Este enfoque permitió una participación activa de los estudiantes, en las fases de exploración, redacción de conjeturas, socialización e institucionalización.

- e. *La autonomía y seguridad estimulada* en la forma de trabajo del estudiante, producto de la metodología implementada, donde los estudiantes podían comprobar y verificar por sí mismos, las respuestas que daban a cada una de las actividades y ejercicios propuestos (los estudiantes eran capaces de identificar y corregir sus errores, gracias a la facilidad que ofrecían los materiales, tanto concretos como tecnológicos, sin necesidad, de la participación directa de los docentes). Aquí, la mediación de los recursos tecnológicos, proporciona y facilita, un dinamismo en la visualización de las identidades (representaciones diferentes al lenguaje simbólico), creando estrategias que amplifiquen y reorganicen la comprensión y entendimiento del objeto matemático, que no son tan sencillas de percibir, tan sólo usando lápiz y papel (Moreno, 2002)

5.2.Respuestas a las preguntas auxiliares de investigación.

¿Qué características deben tener las actividades de aprendizaje para que los estudiantes de décimo grado logren construir las identidades pitagóricas?

Las actividades de aprendizaje implementadas en el estudio que se reporta en el presente documento tienen varias características:

- a. Estudio diagnóstico. Este estudio se realizó con el propósito de identificar el dominio sobre conocimientos y habilidades que sirven de pre-requisito para construir las identidades Pitagóricas. Este estudio se comporta como una línea de base o punto de partida que sirve de referencia para documentar el impacto que tenga la secuencia didáctica en el aprendizaje de los estudiantes.

Los resultados del diagnóstico no fueron satisfactorios, esto quiere decir que los estudiantes en la etapa inicial del estudio no tenían el dominio sobre algunos conocimientos y habilidades básicas. Para suplir esta parte, el profesor realizó una nivelación.

- b. Las actividades de aprendizaje involucran material concreto (papel, recortables, tijeras, pegamento). El uso de este material estimuló el deseo por aprender del estudiante, puesto que resolver el rompecabezas se le presentó como un reto de aprendizaje. La utilización de este material desarrolla varias habilidades: (i) motricidad fina, (ii) visualización de las propiedades matemáticas. Adicionalmente, se desarrolla una sensación de cercanía con el concreto, de manera que impulsa hacia el desarrollo de actitudes favorables al estudio de las matemáticas.
- c. Las actividades de aprendizaje incluyen el uso de GeoGebra. Las aplicaciones de GeoGebra, permitieron a los estudiantes visualizar las identidades Pitagóricas desde una perspectiva geométrica y no estrictamente algebraica (enseñanza tradicional en el colegio a la cual están acostumbrados). Así mismo, los estudiantes pudieron utilizar varias propiedades del micromundo computacional de GeoGebra como: el arrastre, la animación y el uso de diferentes registros semióticos de representación como el visual, el numérico, el algebraico y el verbal.
- d. Las actividades utilizadas en el presente estudio desarrollan las sugerencias del MEN (1998) y del NCTM (200) sobre los siguientes aspectos: (i) se desarrollan dos tipos de pensamiento, el geométrico y el variacional. (ii) El estudio contribuye al desarrollo de procesos centrales del pensamiento matemático como: la resolución de problema, la comunicación de ideas matemáticas, argumentación de las mismas y el uso de múltiples representaciones. (iii) Las actividades de aprendizaje fueron desarrolladas en un contexto formal o puramente matemático.

¿Qué papel desempeña el uso de material concreto y de tecnología (GeoGebra) en la construcción de las identidades Pitagóricas?

Generalmente los estudiantes vienen predispuestos a estudiar las identidades. La información que traen al aula heredada de otros estudiantes que ya abordaron el tema o de sus familiares hacen que desarrollen sistemas de creencias (Schonefeld, 1985) adversos. El uso de juegos y material concreto hizo que se rompieran tales creencias y que se desarrollaran actitudes favorables hacia el estudio de las identidades.

El micromundo GeoGebra tiene un conjunto de fenómenos que facilitan el estudio de las identidades trigonométricas

- a. Los estudiantes pudieron abordar el estudio de las identidades desde diferentes registros semióticos de representación, lo cual fue desarrollado a través de las diferentes vistas del micromundo computacional.
- b. El uso del arrastre y la animación hacen que el estudiante aborde el estudio de las identidades desde una perspectiva dinámica. El arrastre hace que el estudiante pueda manipular de manera “directa” con una mano virtual y que sienta cerca los objetos matemáticos. El movimiento despierta curiosidad e interés.
- c. Con el apoyo de GeoGebra los estudiantes exploran los objetos matemáticos desde diferentes ángulos o perspectivas y hacen que puedan amplificar el dominio de recursos y habilidades. Este hecho hace que puedan ver más y comunicar más.
- d. Con el uso de GeoGebra, el material concreto y metodología de trabajo, permitió que el estudio de las identidades trigonométricas se realizara de manera diferente a la tradicional, produciendo una reorganización cognitiva.

¿Qué importancia tiene el uso de las múltiples representaciones en la construcción de las identidades pitagóricas?

Tradicionalmente el estudio de las identidades trigonométricas se restringe al uso de la representación algebraica. Generalmente en el aprendizaje de estas propiedades, los estudiantes de décimo grado experimentan muchas dificultades y se restringen de manera exclusiva a la memorización de hechos insustanciales para ellos.

La innovación didáctica que aquí se reportó, involucró actividades sugeridas por Duval (1993) relacionadas con la aprehensión cognitiva: (i) El tratamiento, (ii) la conversión. En este sentido, se utilizó material concreto para manejar registros visuales sobre el Teorema de Pitágoras y sobre las identidades trigonométricas. Adicionalmente, se utilizaron las diferentes vistas de GeoGebra para realizar el uso de diferentes registros semióticos: En la vista hoja de cálculo, se manejaron los registros numéricos, en la vista gráfica los registros visuales, mientras que en la vista CAS se usaron los registros algebraicos y en la hoja de trabajo se consignaron las ideas matemáticas en el registro verbal.

El uso de material concreto y de GeoGebra en sus diferentes vistas) fue complementario y tuvo varios efectos: (i) la concretes del conocimiento estudiado, (i) la visualización de las ideas matemáticas, (iii) el tratamiento en diferentes registros, (iv) la búsqueda de invariantes, (v) la generalización de las ideas.

El registro algebraico es el más abstracto. Los otros registros hacen que los estudiantes desarrollen conocimientos y habilidades que les permite construir la generalización de las identidades y entender desde diferentes ángulos o perspectivas la representación algebraica.

Las producciones de los estudiantes en la representación verbal, da cuenta que ellos han avanzado en la construcción de las propiedades de las identidades. Sin embargo, estas producciones tienen algunas dificultades de redacción y ortografía. Esto es natural, pues obedece a la poca frecuencia de producción verbal, pues dicha producción no es habitual y en el estudio, los estudiantes la elaboraron de manera sencilla y sin ayuda externa. Este hecho es un indicador que la competencia comunicativa de los estudiantes se puede desarrollar con la metodología de trabajo ya expuesta.

5.3.Sugerencias.

De acuerdo a la experiencia obtenida con los estudiantes y el profesor titular del curso, nos parece conveniente o sugerimos tener en cuenta, los siguientes puntos que pueden facilitar el proceso de enseñanza aprendizaje, no solo de identidades sino de aspectos asociados a la matemática, que brinde estímulo y gusto a los estudiantes.

5.3.1. Para los profesores.

- a. De acuerdo a la experiencia obtenida con los estudiantes y el profesor titular del curso, nos parece conveniente o sugerimos tener en cuenta los siguientes puntos, que pueden facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje, no solo de identidades sino de aspectos asociados a la matemática, que brinde estímulo y gusto a los estudiantes (las actividades de aprendizaje aquí reportadas pueden convertirse en fuente de inspiración para que los profesores de matemáticas diseñen hojas de trabajo para otros contenidos curriculares).
- b. En el estudio, se evidenció que la metodología de trabajo incluye fases que resultaron ser efectivas para desarrollar conocimientos y procesos centrales del pensamiento matemático. Se sugiere a los profesores implementar dichas fases.
- c. Es necesario que los profesores de matemáticas, además de su profundo conocimiento sobre la disciplina, sobre la didáctica y la pedagogía, debe realizar cursos de educación continua para perfeccionar sus competencias TIC`s.
- d. Los profesores de matemáticas deben ser conscientes que, para implementar una clase de matemáticas con la mediación de tecnologías digitales, se debe desplegar una logística que incluye: dominio de la metodología de trabajo (diferente a la tradicional) diseño o adaptación de actividades de aprendizaje, funcionamiento y disponibilidad del centro de cómputo.

- e. El estudio aquí reportado se realizó en el nivel de la media. Se recomienda que los profesores de la básica y del nivel profesional estudien la posibilidad de emprender metodologías innovadoras y que vayan en la misma dirección a la reportada en este estudio.

5.3.2. Para la investigación

A partir de la realización del presente estudio, se le recomienda a la comunidad de investigadores de educación matemática los siguientes aspectos.

- a. Se recomienda realizar estudios de investigación, similares a los que se reporta en el presente documento en otros tipos de pensamiento como el numérico, el variacional y el estocástico. Abordando otros contenidos curriculares y otros procesos centrales del pensamiento matemático.
- b. Es inminente la erosión curricular. Esto quiere decir que es altamente probable una transformación curricular por la incorporación de las tecnologías digitales en las clases de matemáticas. Desde esta perspectiva, se sugiere abordar un estudio de investigación donde se estudien las identidades trigonométricas a una edad escolar más temprana.
- c. En el estudio que aquí se reporta, se utilizó pc y GeoGebra. Se recomienda hacer estudios con la mediación de otro tipo de dispositivos como celulares, tabletas, Mac y de otro tipo de software educativo.
- d. Se recomienda investigar sobre las competencias que debe desarrollar un profesor de matemáticas, cuando incorpora las tecnologías digitales en su práctica profesional.
- e. En el presente trabajo se abordó el estudio de las identidades, utilizando GeoGebra y material concreto, una metodología especial y hojas de trabajo. Se obtuvo un alto impacto. Se recomienda realizar un estudio de investigación que documente el impacto que tiene sobre el aprendizaje de las identidades trigonométrica, el uso de la misma metodología,

con hojas de trabajo similares y únicamente del material concreto (papel, tijeras, estuche de geometría, colores, pegamento).

REFERENCIAS.

- Borjon, E.; Torres, M. & Sosa, L. (2015). *Representaciones Semióticas de Sistemas de Ecuaciones Lineales de 2X2 con Excel*. XVI CIAEM-IACME, Chiapas, México. 1-9. Recuperado de. http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/1042/80
- Corberán, S; Gutiérrez, A; Huerta, M; & Pastor, A; Margarit, J; Peñas, A; & Ruíz, E (1994). Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele. CIDE & Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia. *DIN IMPRESORES*. Madrid, España. ISBN: 84-369-2539-4.
- De Oteyza, E. (2001). Geometría analítica y trigonometría. México: Grupo Editorial Pearson Education.
- Duval R. *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna, Peter Lang, 1995a.
- Duval R. *Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación*. La gaceta de la real sociedad matemática española RSME, Vol. 9.1 (2006), (pp. 143–168). recuperado de <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=546>
- Fiallo, J (2011). Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia. *Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas*. Valencia, España.
- Hohenwarter, M. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra, manual Oficial de la Versión 3.2. Recuperado de <https://app.GeoGebra.org/help/docues.pdf>.
- Hernández, A. (2019). Construcción de conjeturas geométricas con la mediación de GeoGebra en los estudiantes del grado octavo. Facultad de ciencias de la educación de la Universidad del Tolima.

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Magister en Educación. Tolima, Colombia.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior. Resultados Saber 11°, 2016-II (2016). *Consulta de resultados pertenecientes a Institución Educativa La Milagrosa, Sede1. Palmira, Valle del Cauca.* Recuperado de: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/agregadoHistoricoEstablecimiento.jsf#No-back-button>

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2017). Resultados Saber 11°, 2017-II. *Consulta de resultados pertenecientes a Institución Educativa La Milagrosa, Sede1. Palmira, Valle del Cauca.* Recuperado de: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/agregadoHistoricoEstablecimiento.jsf#No-back-button>

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2017). Guía de Orientación para la prueba Saber 3°. Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2017). Guía de Orientación para la prueba Saber 5°. Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2017). Guía de Orientación para la prueba Saber 9°. Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2017). Guía de Orientación para la prueba Saber 11°, 2017-II. Bogotá, Colombia.

Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación Superior, (2017) Resultados Saber 11°, histórico 2016-II y 2017-II. *Consulta de resultados pertenecientes a Institución Educativa La Milagrosa, Sede1. Palmira, Valle del Cauca.* Recuperado de:

<http://www.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016-web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/agregadoHistoricoEstablecimiento.jsf#No-back-button>

Matta, N, (2014). GeoGebra como herramienta para la enseñanza de razones trigonométricas en grado décimo en la IED Leonardo Posada Pedraza. *Universidad Nacional de Colombia, facultad de ciencias, departamento de física, sede Bogotá*. Trabajo de grado para obtener el título de *Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*. pp. 66-110.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Serie lineamientos Curriculares. Santa Fe de Bogotá, D.C.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Imprenta Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2015). Colombia, la mejor educada en el 2025. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional; Universidad de Antioquia. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje V.2. Materiales de la Caja Siempre Día E. *Panamericana Formas e Impresos S.A.* ISBN: 978-958-691-925-8.

Ministerio de Educación Nacional (2016). Matriz de referencia (Matemáticas). Materiales de la Caja Siempre Día E. *Adaptado de MEN, Estándares básicos de competencia. Bogotá, Colombia.*

Ministerio de Educación Nacional (2017). Mallas de aprendizaje (Matemáticas grado 1°). Documento para la implementación de los DBA. *Bogotá, Colombia.*

Ministerio de Educación Nacional (2017). Mallas de aprendizaje (Matemáticas grado 2°). Documento para la implementación de los DBA. *Bogotá, Colombia*

Ministerio de Educación Nacional (2017). Mallas de aprendizaje (Matemáticas grado 3°). Documento para la implementación de los DBA. *Bogotá, Colombia*

Ministerio de Educación Nacional (2017). Mallas de aprendizaje (Matemáticas grado 4°). Documento para la implementación de los DBA. *Bogotá, Colombia*

Ministerio de Educación Nacional (2017). Mallas de aprendizaje (Matemáticas grado 5°). Documento para la implementación de los DBA. *Bogotá, Colombia*

Ministerio de Educación Nacional (2018, agosto 08). Estadísticas e indicadores de la educación preescolar, básica y media [Página web]. *Recuperado de: <https://www.datos.gov.co/d/ji8i-4anb/visualization>*

Ministerio de Educación Nacional (2018, octubre 20). Resultados agregados por secretaría (entidades territoriales) [Página web]. *Recuperado de: <http://www2.icfesinteractivo.gov.co/resultados-saber2016web/pages/publicacionResultados/agregados/saber11/resultadosSecretarias.jsf#No-back-button>*.

Moreno, L. y Santos, M. (2001). *De la herramienta al instrumento: una perspectiva informática, Educación Matemática*, 13 (2) 78-97.

Moreno, L. (2001). *Instrumentos matemáticos computacionales*. *Recuperado de: https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo1.pdf*

Moreno L. (2002) *Instrumentos matemáticos computacionales*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula de Matemáticas*. Serie Memorias. *Recuperado de https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-81040_archivo1.pdf*.

Moscoso, J. (2017) Los métodos mixtos en la investigación en educación: hacia un uso reflexivo. *Cuaderno de pesquisa*. Vol 47. No. 144. Pp. 632 – 649.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

- Rivas, Antonio. (2009). *Un estudio sobre la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad en secundaria*. Universidad Autónoma de Coahuila; Saltillo, México. Tesis de Posgrado para obtener el grado académico de maestro en matemática educativa.
- Runza, G. (2013). Las razones trigonométricas en el planteamiento y resolución de problemas. *Universidad Nacional de Colombia, facultad de ciencias, departamento de matemáticas, sede Bogotá*. Trabajo de grado para obtener el título de *Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales*.
- Santos, M; & Benítez, D. (2003). Herramientas tecnológicas en el desarrollo de sistemas de representación para la resolución de problemas. *Perfiles Educativos, Vol XXV, núm. 100, pp. 23-41. Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación Distrito Federal, México*.
- Schoenfeld A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- University of Colorado. (s.f). PhET Interactive Simulations - Physics, PhET: Interactive simulations. Recuperada en Enero 14, 2009, del sitio Web temoa : Portal de Recursos Educativos Abiertos (REA) en <http://temoa.tec.mx/es/node/16402>
- Van Hiele, P.M. (1957). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría). (Tesis doctoral). *Universidad de Utrecht, Utrecht (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991)*.

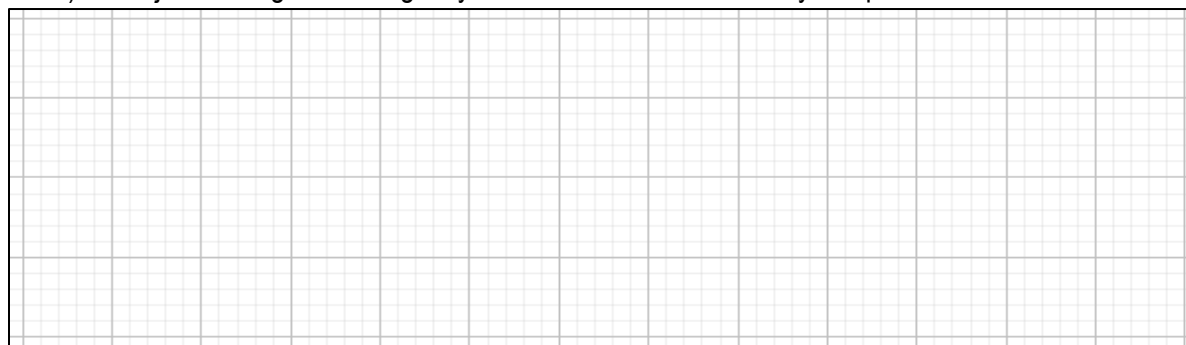
ANEXOS

ANEXO A: *Prueba diagnóstica.*

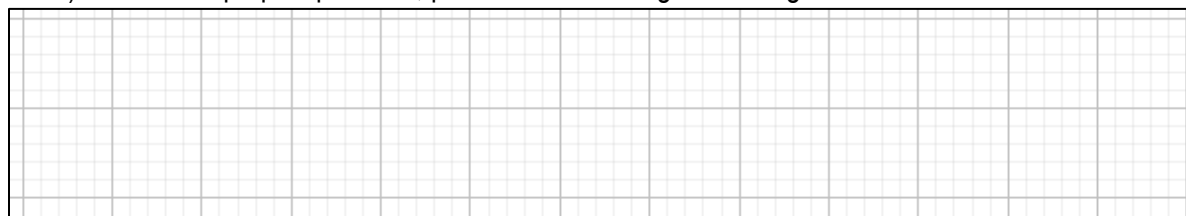
INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA MILAGROSA “Sede Principal”			
Nombre:			
Grado:		Fecha:	

(PRUEBA DIAGNÓSTICA)

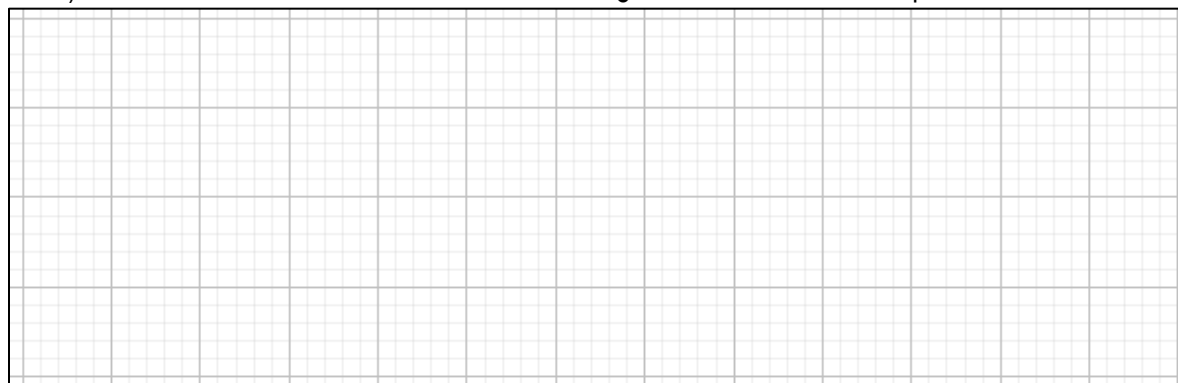
- 1) Dibuja un triángulo rectángulo y sobre él resalta los catetos y la hipotenusa.



- 2) Utiliza tus propias palabras, para definir un triángulo rectángulo.

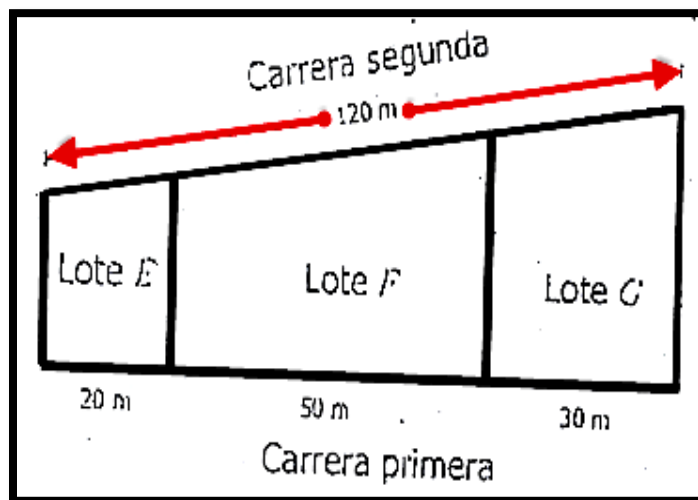


- 3) Si un cuadrado tiene un lado de 4 unidades ¿Cuál es su área? Justifique



RESUELVE LAS PREGUNTAS 7 Y 8 DE ACUERDO A LA SIGUIENTE INFORMACIÓN

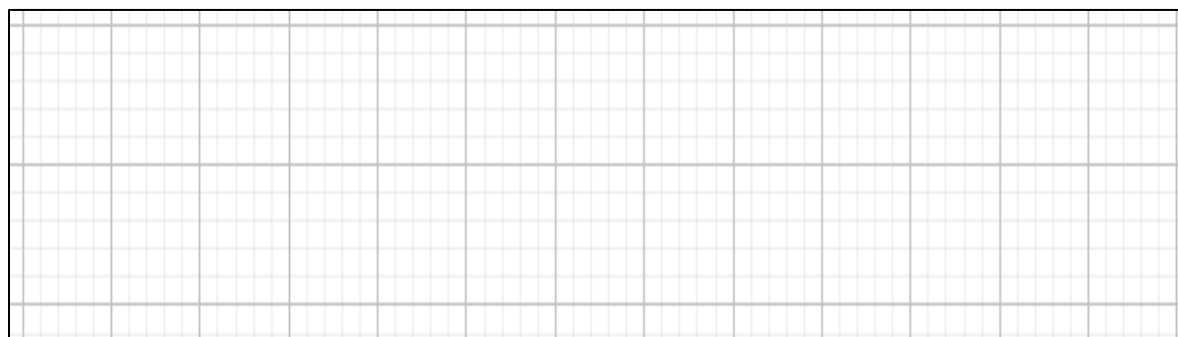
En la ilustración se muestra el plano de tres lotes contiguos, E, F y G, y algunas de las medidas de sus lados. La suma de las medidas de los frentes sobre la carrera segunda es 120 m. Los segmentos verticales en el plano son paralelos.



7. Las medidas de los frentes de los lotes E, F, G sobre la carrera segunda son, respectivamente,

- A. 24m, 64m, y 32m B. 40m, 70m, y 50m
C. 16m, 41m, y 25m D. 24m, 60m, y 36m

8. Justifica la opción de respuesta seleccionada en la pregunta 7.



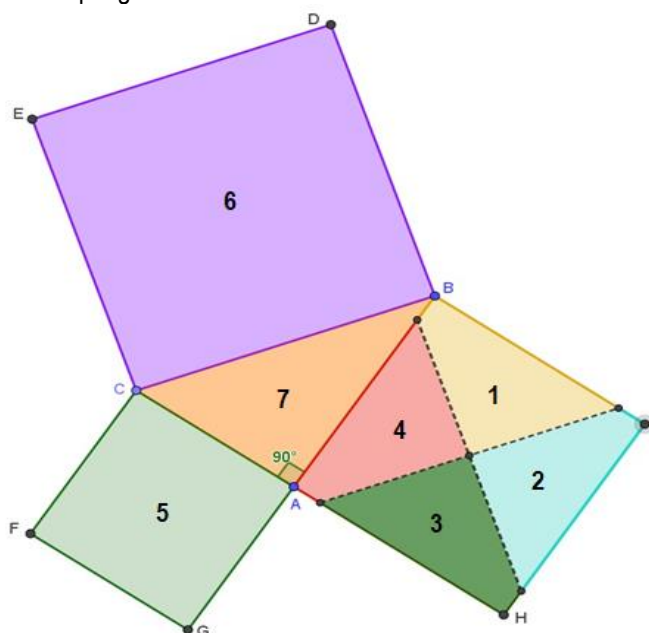
ANEXO B: Hoja de trabajo No. 1.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA MILAGROSA			
"Sede Principal"			
Estudiante 1:			
Estudiante 2:			
Estudiante 3:			
Grado:		Fecha:	

Hoja de trabajo I

Exploración I: Implementación de Material Concreto

Sea el triángulo ABC rectángulo, sobre sus lados se construyen cuadrados como muestra la figura. Uno de los cuadrados se subdividió en cuatro polígonos nombrados del 1 al 4.



- Recortar y armar:** utiliza tijeras y pegante en barra para realizar el siguiente procedimiento sobre la figura anterior (ten cuidado al usar las tijeras, para evitar lastimarte a ti o tus compañeros).
 - ✓ Siguiendo las líneas punteadas, recortar los polígonos nombrados con los números 1, 2, 3 y 4.
 - ✓ Recortar el cuadrado nombrado con el número 5.
 - ✓ Con los cinco polígonos recortados anteriormente, armarán un rompecabezas para completar el cuadrado (6), que se encuentra sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo.
 - ✓ Cuando se arme el rompecabezas, pegar las partes para dejarlas fijas en su posición.
- Conclusión:** en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad.

--

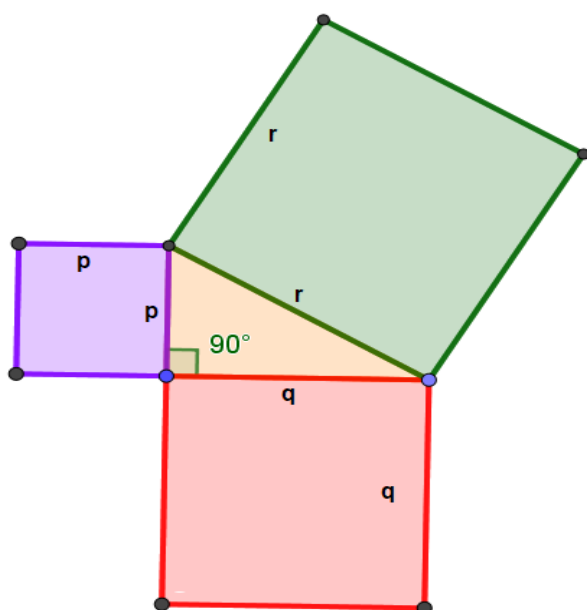
Exploración 2: implementación de GeoGebra

3. Abre la aplicación en GeoGebra y manipula el triángulo rectángulo que allí aparece usando los deslizadores. Para medidas diferentes de los lados del triángulo rectángulo, completa y anota en la tabla los valores de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de dicho triángulo.

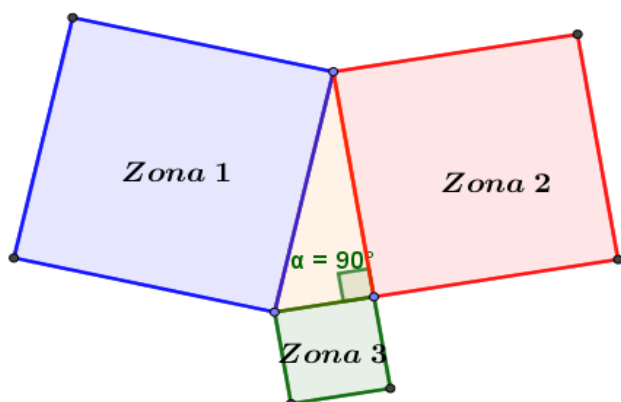
A_1 [unidades ²]	A_2 [unidades ²]	$(A_1 + A_2)$ [unidades ²]	A_3 [unidades ²]

4. **Conclusión:** en el siguiente espacio en blanco vas a sacar una conclusión con lo que acabas de observar en esta actividad (relación de las áreas)

5. De acuerdo con lo estudiando hasta el momento, y usando la siguiente gráfica, redacta una propiedad que relaciones las áreas de los cuadrados construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo (puedes usar palabras o expresiones algebraicas)



6. La figura muestra la estructura de tres zonas cuadradas de una finca que deben dividirse entre dos propietarios.



Se tienen las siguientes opciones para dividir el terreno disponible entre los dos propietarios:

Opción 1: La zona 1 para el propietario 1, la zona 2 para el propietario 2, y la zona 3 se divide en partes iguales entre los dos propietarios.

Opción 2: La zona 1 para el propietario 1 y la zona 2 y 3 para el propietario 2.

Al comprar las opciones presentadas, se puede afirmar que (Marca con una X la respuesta correcta):

- A. la opción 1 es equitativa para los dos propietarios. B. la opción 1 es desfavorable para el propietario 1.
C. la opción 2 es equitativa para los dos propietarios. D. la opción 2 es desfavorable para el propietario 1.

7. Justifica con tus palabras, la respuesta seleccionada en la pregunta anterior.

--

8. En caso de ser posible, debajo de cada triángulo escribe (determine) las razones trigonométricas (seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente) del ángulo dado. Si no es posible determinar las razones, justifica con tus propias palabras.

ANEXO C: Hoja de trabajo No. 2.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA MILAGROSA "Sede Principal"			
Estudiante 1:			
Estudiante 2:			
Estudiante 3:			
Grado:		Fecha:	

Hoja de trabajo II

Exploración III: identidad fundamental

Abre la aplicación de GeoGebra con el nombre de "Circulo Unitario", ahí encontrarás una construcción geométrica que contiene una circunferencia de radio unitario (**1 und**) y en su interior, un triángulo rectángulo (ver figura, en la aplicación). También, se muestran la medida de los catetos y la hipotenusa, y la construcción de cuadrados sobre cada lado del triángulo. La aplicación posee un deslizador para cambiar la medida del ángulo θ (ángulo interno del triángulo rectángulo).

1. A partir de la aplicación de GeoGebra, para valores diferentes del ángulo θ completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

θ°	$Sen(\theta)$	CO [und]	$Cos(\theta)$	CA [und]	$Sen^2(\theta)$	A_1 [und ²]	$Cos^2(\theta)$	A_2 [und ²]	$Sen^2(\theta) + Cos^2(\theta)$	A_3 [und ²]

CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; A_1 : medida área cuadrado 1; A_2 : medida área cuadrado 2; A_3 : medida área cuadrado 3

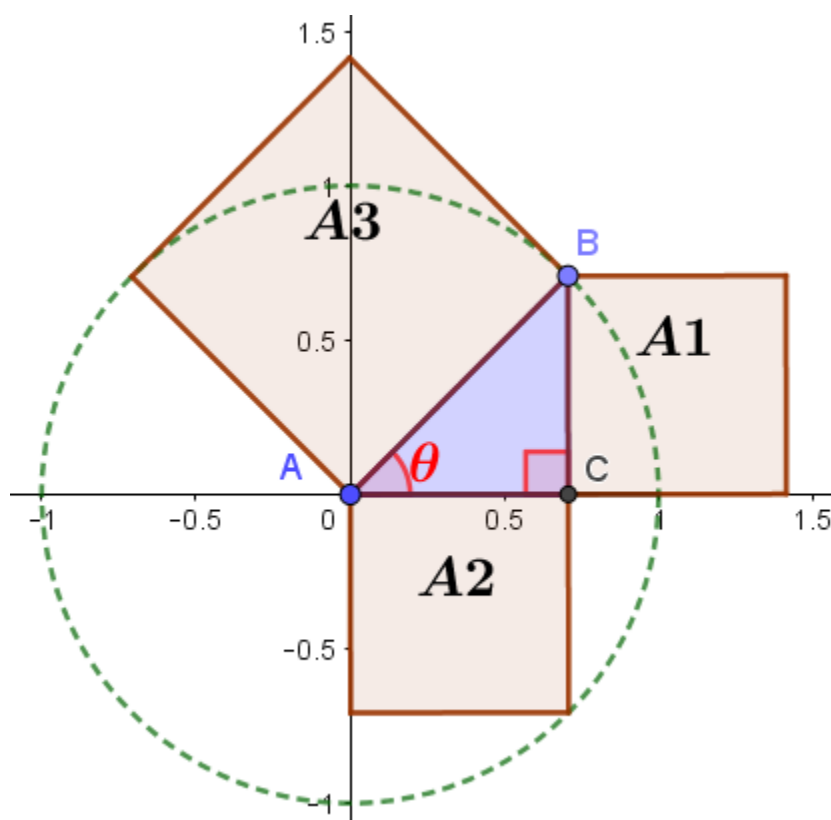
RESPONDE LAS PREGUNTAS 2 A 5, DE ACUERDO A LO REGISTRADO EN LA TABLA ANTERIOR Y LO OBSERVADO EN LA APLICACIÓN DE GEOGEBRA

2. Con tus propias palabras, escribe la relación que existe entre los valores obtenidos para el seno y coseno, y el valor numérico de las medidas de los catetos en el triángulo rectángulo mostrado en la aplicación de GeoGebra.

--

3. Con tus propias palabras, escribe la relación que existe entre los valores obtenidos para el seno y coseno cuadrados, y los valores numéricos de las medidas de las áreas de los cuadrados (construidos sobre los lados del triángulo rectángulo) mostrados en la aplicación de GeoGebra.

4. La figura a continuación, es un pantallazo de la construcción mostrada en la aplicación de GeoGebra. Escriba dentro o al lado de cada cuadrado, la magnitud de su área en términos de seno y coseno del ángulo θ .



5. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos de seno y coseno del ángulo θ .

6. A partir de la aplicación de GeoGebra, para valores diferentes del ángulo θ y r completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

r [und]	θ°	$Sen(\theta)$	$Cos(\theta)$	$Sen^2(\theta)$	A_1 [und ²]	$Cos^2(\theta)$	A_2 [und ²]	$Sen^2(\theta)$ + $Cos^2(\theta)$	A_3 [und ²]
				,					

DE ACUERDO A LO REGISTRADO EN LA TABLA ANTERIOR Y LO OBSERVADO EN LA APLICACIÓN DE GEOGEBRA, RESPONDE

7. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos del seno y el coseno del ángulo θ .

8. ¿Qué se puede conjeturar respecto a la magnitud del radio de la circunferencia; de acuerdo con lo contestado en la pregunta 7 y 6?

ANEXO D: Hoja de trabajo No. 3.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LA MILAGROSA			
"Sede Principal"			
Estudiante 1:			
Estudiante 2:			
Estudiante 3:			
Grado:		Fecha:	

Hoja de trabajo III
Exploración III: identidad

Abre la aplicación de GeoGebra con el nombre de "Circulo Unitario II", ahí encontrarás una construcción geométrica que contiene una circunferencia de radio unitario (**1 und**) y en su interior, un triángulo rectángulo (ver figura, en la aplicación). También, se muestran la medida de los catetos y la hipotenusa, y la construcción de cuadrados sobre cada lado del triángulo. La aplicación posee un deslizador para cambiar la medida del ángulo θ (ángulo interno del triángulo rectángulo).

1. A partir de la aplicación de GeoGebra, para valores diferentes del ángulo θ completa los valores requeridos en la tabla a continuación.

θ°	CA [und]	$Tan(\theta)$	CO [und]	$Sec(\theta)$	H [und]	A_1 [und ²]	$Tan^2(\theta)$	A_2 [und ²]	$Tan^2(\theta) + 1$	$Sec^2(\theta)$	A_3 [und ²]

CA: cateto adyacente; CO: cateto opuesto; A_1 : medida área cuadrado 1; A_2 : medida área cuadrado 2; A_3 : medida área cuadrado 3

**DE ACUERDO A LO REGISTRADO EN LA TABLA ANTERIOR Y LO OBSERVADO EN LA
 APLICACIÓN DE GEOGEBRA, RESPONDE**

2. Utilizando sus propias palabras o lenguaje algebraico, escriba el teorema de Pitágoras para la figura anterior, en términos de la secante y la tangente del ángulo θ .

--