

UNA APROXIMACIÓN A LOS PROCESOS RELACIONADOS CON LA
CONCEPTUALIZACIÓN DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA EN AMBIENTES
DE GEOMETRÍA DINÁMICA

DORA MILEYCI BARRANTES

CARLOS ANDRES CUARTAS

ADRIANA MARIA SANCHEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN

MATEMÁTICAS

ZARZAL, COLOMBIA

2012

UNA APROXIMACIÓN A LOS PROCESOS RELACIONADOS CON LA
CONCEPTUALIZACIÓN DE LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA EN AMBIENTES
DE GEOMETRÍA DINÁMICA.

DORA MILEYCI BARRANTES

0762119

CARLOS ANDRES CUARTAS

0762131

ADRIANA MARIA SANCHEZ

0762132

Trabajo de grado para optar por el título

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO:

JORGE ENRIQUE GALEANO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
ZARZAL, COLOMBIA
2012



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta:

1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

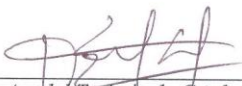
Título del Trabajo:	UNA APROXIMACIÓN A LOS PROCESOS RELACIONADOS CON LA PRODUCCIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EQUIVALENTES EN AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA		
Se trata de:	Proyecto ☐	Informe Final ☒	
Director:	JORGE ENRIQUE GALEANO		
1er Evaluador:	DIEGO GARZÓN		
2do Evaluador:	MARÍA FERNANDA PALOMINO		
Fecha y Hora	Año: 2012	Mes: 09	Día: 4 Hora: 7:00 p.m.
Estudiantes			
Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico	
DORA MILEYCI BARRANTES	0762119	3470 -Lara f	
CARLOS ANDRÉS CUARTAS	0762131	3470	
ADRIANA MARÍA SÁNCHEZ	0762132	3470	

Evaluación			
Aprobado	☒	Meritorio	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) ante:			
Director del Trabajo	☐	1er Evaluador	☐
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:			
Año:	Mes:	Día:	Hora:
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).			

Firmas:		
	DIEGO GARZÓN C.	Maria Fernanda Palomino
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Observaciones:	Recomendaciones:	Razón del Desacuerdo - Alternativas:
(si se considera necesario, usar hojas adicionales)		
Se sugiere realizar algunos ajustes de redacción y edición, anexados en el documento digital.		
 Director del Trabajo de Grado DIEGO CARLÓN C. 1er Evaluador Prof. Felipe 2do Evaluador		

Agradezco al Buen Dios que me ha dado el regalo de la vida, los dones de la fortaleza y sabiduría para guiar mis pasos y ha sido mi compañero fiel en todo momento.

A mis padres Oliva y Julio César que con su amor incondicional, comprensión y dedicación me han brindado el apoyo para culminar mi carrera.

A mi hijo y esposo Sebastián y Gustavo Adolfo quienes con su existencia me han llenado de alegría y fortaleza y me animan diariamente para alcanzar mis metas.

A todas las personas que me han brindado su apoyo incondicional para culminar mi carrera.

Dora Mileyci Barrantes R.

Agradezco a Dios Por ser mi consejero y amigo que nunca me abandona.

A mis padres Ignacio y Rosa Mary, por su apoyo y sacrificio para hacer de mi una persona de bien.

A mi hijo Miguel Ángel y a mi esposa Paola por su apoyo incondicional y porque me inspiran a seguir siempre adelante. Los amo mucho.

A mis hermanos Ignacio y Luis, porque guiaron muchos de mis pasos por el buen camino.

A todas las personas que me han brindado su apoyo y siempre han creído en mí.

Carlos Andrés Cuartas P.

Agradezco a Dios por darme la sabiduría y la fortaleza para culminar mi carrera.

A mis hijos Yenny Fernanda y José Alejandro por su inmenso amor, por la constante colaboración y la paciencia que me tuvieron durante todo este tiempo. Los amo.

A mi esposo Carlos Holmes por su valioso apoyo incondicional, por su dedicación, comprensión y amor que me motivaron a seguir el camino de la superación.

A mi madre Laura Nelly por su amor, por su apoyo, por motivarme a seguir mis estudios.

A mis hermanas y a todas las personas que me han brindado su apoyo en el desarrollo de mi carrera.

Adriana María Sánchez P.

AGRADECIMIENTOS

A nuestro director el profesor Jorge Enrique Galeano por su valiosa dedicación, apoyo y generosa Orientación. A la profesora Miryam Vázquez por sus aportes académicos y apoyo durante toda la carrera. A nuestros evaluadores: la profesora María Fernanda Mejía Palomino y el profesor Diego Garzón; por sus orientaciones, correcciones e ideas.

Al grupo de Educación Matemática y Nuevas Tecnologías (EM&NT) del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle en especial al profesor Octavio Pabón por sus aportes.

A los estudiantes de grado 8, del colegio Gimnasio los Alpes por su participación y apoyo en la implementación de las actividades.

A todos mis profesores y compañeros de la Universidad del Valle quienes contribuyeron a mi formación profesional.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	10
PALABRAS CLAVES:.....	10
LISTA DE ILUSTRACIONES	11
CAPÍTULO 1.....	16
1. ASPECTOS GENERALES.....	16
1.1. JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.	18
1.2. OBJETIVOS.....	22
1.2.1. OBJETIVO GENERAL.....	22
1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	22
1.3. ANTECEDENTES	23
1.3.1. LA CAJA DE POLINOMIOS.....	23
2. MARCO TEÓRICO	27
2.1. ALGUNOS ELEMENTOS GENERALES DE LA TEORIA DE CAMPOS CONCEPTUALES.....	27

2.2. NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE CAMPOS CONCEPTUALES.....	30
2.2.1. CONCEPTO	31
2.2.2. CAMPO CONCEPTUAL	32
2.2.3. LA CONCEPTUALIZACIÓN.....	32
2.2.4. LA SITUACIÓN.....	33
2.2.5. ESQUEMA.....	34
2.2.6. COMPONENTES FUNDAMENTALES DEL ESQUEMA PARA EL ANÁLISIS DE SITUACIONES.....	36
2.2.6.1. LAS METAS, LAS SUB-METAS Y LAS ANTICIPACIONES	36
2.2.6.2. INVARIANTES OPERATORIOS: CONCEPTO EN ACTO Y TEOREMA EN ACTO	37
2.2.7. LOS ESQUEMAS SEGÚN LA CLASE DE SITUACIONES.....	39
3. METODOLOGÍA, PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE.	47
3.1. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN.....	48
3.2. LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE	49
3.2.1. DURACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LAS SITUACIONES	52

3.3. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LAS SITUACIONES.	53
3.3.1. CALCULA EL ÁREA DEL RECTÁNGULO	53
3.3.2. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA CON CUADRILÁTEROS.	58
3.3.3. MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON PROPIEDAD DISTRIBUTIVA	65
3.3.4. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA	72
3.4. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES.	77
3.5. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA APLICACIÓN DE LAS SITUACIONES	79
3.5.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 1	79
3.5.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 2	84
3.5.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 3	91
3.5.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 4	101
3.6. ANÁLISIS GENERAL DE LOS RESULTADOS.	108
3.6.1. EL ARRASTRE Y LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA	111
3.6.2. EL VÍNCULO ÁLGEBRA - GEOMETRÍA	111
4. CONCLUSIONES	114

BIBLIOGRAFÍA.....	119
ANEXO A. ANÁLISIS CURRICULAR.	122
PROPUESTA CURRICULAR PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR.	124
PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRÁICOS.	125
EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LOS SISTEMAS GEOMÉTRICOS.....	128
EL PENSAMIENTO VARIACIONAL, EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LAS TECNOLOGÍAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO	131

RESUMEN

El desarrollo de este trabajo se fundamenta sobre algunas bases de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, (1983), para indagar sobre la posibilidad de conceptualización del tema *la propiedad distributiva* través del vínculo álgebra - geometría mediado por Cabri Geometry II Plus en el diseño de cuatro situaciones pensadas para ser aplicadas en el grados octavo de la educación secundaria.

Se escoge un Ambiente de Geometría Dinámica como Cabri Geometry II Plus porque se presenta como una herramienta que permite potenciar el vínculo álgebra – geometría siendo una alternativa de tratamiento de contenidos temáticos y procesos matemáticos.

PALABRAS CLAVES:

Campos conceptuales, geometría, álgebra, Cabri Geometry II Plus propiedad distributiva.

LISTA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Representación geométrica de los números o literales según las actividades de la caja de polinomios.....	25
Ilustración 2. Representación geométrica de los números o literales según las actividades de la caja de polinomios.....	25
Ilustración 3. Representación geométrica de los números o literales según las actividades de la caja de polinomios.....	26
Ilustración 4. Guía de trabajo situación 1.....	55
Ilustración 5. Guía de trabajo situación 2 (página 1).	62
Ilustración 6. Guía de trabajo situación 2 (página 1).	63
Ilustración 7. Guía de trabajo situación 3 (página 1).	68
Ilustración 8. Guía de trabajo situación 3 (página 2).	69
Ilustración 9. Guía de trabajo situación de aprendizaje 4 (página 1).	74
Ilustración 10. Guía de trabajo situación de aprendizaje 4 (página 2).	75
Ilustración 11. Ventana de trabajo situación de aprendizaje "Calculo de área".....	80
Ilustración 12. Calculo de área de rectángulo a partir de las instrucciones de la situación de aprendizaje.	81
Ilustración 13. Producción textual y operatoria de E_5	82
Ilustración 14. Producción textual y operatoria de E_5	83

Ilustración 15. Propiedad distributiva con cuadriláteros. Ventana original de trabajo de la segunda situación de aprendizaje.	85
Ilustración 16. Producción textual y operatoria de E_4	86
Ilustración 17. Producción textual y operatoria de E_3	87
Ilustración18. Propiedad distributiva con cuadrilátero ejercicio. Ventana original de trabajo de la segunda situación de aprendizaje en el ítem 4.	88
Ilustración 19. Producción textual y operatoria de E_4	89
Ilustración 20. Producción textual y operatoria de E_2 . Omisión de paréntesis.	90
Ilustración 21. Multiplicación de binomios con propiedad distributiva. Ventana original de trabajo de la tercera situación de aprendizaje.	91
Ilustración 22. Producción textual de E_4	92
Ilustración 23. Tabla de valores para las longitudes de las bases de los rectángulos. Hoja de trabajo de E_1	93
Ilustración 24. Producción textual de E_1	94
Ilustración 25. Tabla de valores para las longitudes de las bases y las alturas de los rectángulos. Hoja de trabajo de E_1	95
Ilustración 26. Rectángulo construido a partir del arrastre de los puntos A, R, V y W según las instrucciones de la guía de trabajo. Ventana de trabajo de E_4	96
Ilustración 27. Producción operatoria de E_4	97
Ilustración 28. Multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio. Ventana original de trabajo de la tercera situación de aprendizaje.	97

Ilustración 29. Rectángulo construido a partir del arrastre de los puntos A, R, V y W según las instrucciones de la situación de aprendizaje. Ventana de trabajo de E_4	98
Ilustración 30. Producción operatoria de E_4	99
Ilustración 31. Producción operatoria de E_1	100
Ilustración 32. Propiedad distributiva. Ventana original de trabajo de la cuarta situación de aprendizaje.	102
Ilustración 33. Producción textual de E_3	103
Ilustración 34. Propiedad distributiva. Ventana original de trabajo de la cuarta situación de aprendizaje. Reconfiguración de los rectángulos.....	104
Ilustración 35. Producción operatoria de E_4	105
Ilustración 36. Propiedad distributiva ejercicio. Ventana original de trabajo de la cuarta situación de aprendizaje. Reconfiguración de los rectángulos con longitudes literales.	106
Ilustración 37. Producción textual y operatoria de E_3	107
Ilustración 38. Producción textual y operatoria de E_3	108
Ilustración 39. Página 117 del libro Glifos 8. Guía del Docente.	123
Ilustración 40. Página 117 del libro Glifos 8. Guía del Docente.	123
Ilustración 39. Página 117 del libro Glifos 8. Guía del Docente.	124

INTRODUCCIÓN.

En este documento se presenta cuatro situaciones como una aproximación a los procesos relacionados con la propiedad distributiva en ambientes de Geometría Dinámica para estudiantes de grado octavo. El documento consta de cuatro capítulos claramente diferenciados, cada uno de los cuales se fue desarrollando en el diseño de las situaciones y su posterior aplicación y análisis de los resultados.

El primer capítulo, denominado —ASPECTOS GENERALES —, se describe el problema de investigación, la justificación de la propuesta y los objetivos que se pretenden alcanzar teniendo en cuenta referentes teóricos como los campos conceptuales, Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas, y la relación álgebra – geometría mediado por Cabri Geometry II Plus. Se describen los antecedentes relacionados con la propuesta del trabajo y cómo son aplicados en las aulas de clase.

En el segundo capítulo — MARCO TEÓRICO — se describen los aportes de la teoría de los campos conceptuales que han sido tomados como parte de la metodología para la elaboración y los análisis preliminares de este trabajo; de la misma manera se presentan las posturas teóricas que sustentan el uso de los Ambientes de Geometría Dinámica en este caso Cabri Geometry II Plus y la posibilidad de trabajar el vínculo álgebra – geometría.

En el tercer capítulo, — PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE — se dan los criterios de construcción y análisis preliminar de las situaciones diseñadas para ser llevada al aula de clase y los análisis de los resultados de la misma.

Finalmente, en el capítulo cuarto — CONCLUSIONES — se retoman diferentes aspectos de la elaboración de este trabajo de grado describiendo los resultados obtenidos del proceso de la comparación de los análisis preliminares y los posteriores.

CAPÍTULO 1.

1. ASPECTOS GENERALES.

El presente trabajo de grado, pretende abordar la enseñanza del álgebra escolar a través del diseño e implementación de una serie de situaciones de aprendizaje, atendiendo a uno de los problemas fundamentales del aprendizaje inicial del álgebra en relación con los procesos de conceptualización de la propiedad distributiva, ya que tradicionalmente los estudiantes memorizan los conceptos, procedimientos y algoritmos asociados a este proceso sin comprender su significado y sin encontrar relaciones entre ellos, lo cual no permite una verdadera apropiación de dicho conocimiento.

Teniendo en cuenta esta problemática se analizó el diseño y aplicación de cuatro situaciones, tomando como referente teórico la teoría de Campos Conceptuales y la implementación de los Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) a los procesos matemáticos. Se aclara que esta propuesta de situaciones de aprendizaje es un estudio experimental.

El uso de algunas bases teóricas desde el marco de la teoría de los Campos Conceptuales, es un recurso que fortalece el desarrollo del trabajo en el análisis y diseño de las situaciones presentadas a los estudiantes, porque asume que las acciones

usadas por ellos están organizados por los esquemas mentales que representan el conocimiento operacional del mismo.

Se complementa el marco teórico señalando la importancia de los Ambientes de Geometría Dinámica en especial el software Cabri Geometry II Plus, su mediación en los procesos de enseñanza y aprendizaje en actividades que aumentan en el estudiante su potencial de aprendizaje como lo destacan Moreno y Waldegg (2002):

La importancia de las herramientas computacionales para la educación matemática está asociada a su capacidad de ofrecernos medios alternativos de expresión matemática. A su capacidad para ofrecer formas innovadoras de manipulación(...) Estas posibilidades permiten la creación de ambientes de trabajo en el aula, que propician la manipulación, la exploración, la predicción, la representación, la visualización, la validación, el análisis de alternativas, la justificación, la argumentación. (p. 64)

De acuerdo a estas posibilidades que nos ofrece Cabri Geometry II Plus, tendremos en cuenta para el análisis de las secuencias de situaciones la exploración y manipulación con el fin de observar los esquemas,, metas, submetas y los invariantes operatorios que movilizará el estudiante en la aplicación de las secuencias mediado por Cabri Geometry II Plus.

En síntesis, el trabajo de grado se fundamentó en algunos elementos de la teoría de Campos Conceptuales, con el fin de realizar el diseño y análisis de una

secuencia de situaciones de aprendizaje para la conceptualización de la propiedad distributiva mediado por Cabri Geometry II Plus

El presente trabajo de grado se inscribe en la Línea de formación en Tecnologías de la Información y la Comunicación que en adelante se nombrará con la sigla (TIC) y de la línea de Didáctica de la Matemática del Programa Licenciatura en Educación Básica, Énfasis en Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle seccional Zarzal.

1.1. JUSTIFICACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

El problema fundamental de la enseñanza del álgebra, radica en la forma árida, abstracta, descontextualizada y alejada del mundo concreto con que se presentan los numerosos temas que generalmente son tratados como independientes y sin estructura definida. Los estudiantes memorizan conceptos, procedimientos y algoritmos sin comprensión de su significado y sin construcción de relaciones entre ellos (Díaz, 1997).

Este problema en la enseñanza en la escuela, radica en la falta de significación de procesos algebraicos y uso de los conceptos por parte de los estudiantes, quienes acuden a métodos memorísticos adquiridos en el proceso de aprendizaje, reduciendo el concepto de propiedad distributiva a un algoritmo o simple cálculo algebraico, el cual el docente refuerza a través de la ejecución de una serie de ejercicios del tema, dando por sentado que el estudiante comprende el proceso de la propiedad

distributiva. Esta forma tradicional de enseñanza no permite una interiorización del proceso.

Teniendo en cuenta esta problemática, se diseñó una secuencia de situaciones de aprendizaje, las cuales son experimentales. Dichas situaciones tuvieron como objeto de investigación el álgebra en contextos geométricos. La secuencia desarrolla el tema de la propiedad distributiva que se aborda en el grado octavo de la educación básica secundaria en Colombia, en un sistema que enriquece su significación, trata de adecuarse a las posibilidades cognitivas del alumno de este nivel, estableciendo nexos entre el álgebra (expresiones algebraicas) y la geometría (áreas de figuras geométricas como el rectángulo y el cuadrado) mediante el uso de AGD (*Cabri Geometry II Plus*) que le permiten aproximarse a la exploración de conceptos, propiedades, procedimientos y algoritmos algebraicos.

Es preciso señalar que el vínculo Álgebra – Geometría por medio de los AGD se presenta como una alternativa de tratamiento de contenidos temáticos y procesos matemáticos, ofreciendo un medio alternativo como herramienta que posibilita trabajar las figuras geométricas que pueden ser modificadas de manera continua mientras mantienen su descripción (Laborde & Capponi, 1994). Es precisamente en este punto en el que la integración de herramientas informáticas y computacionales, como los AGD, *Cabri Geometry II Plus*, se revela como una posibilidad de potenciar este vínculo.

La construcción de situaciones de aprendizaje haciendo uso de AGD en el aula de clase, permite sacar a flote una serie de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre los estudiantes, un medio (instrumento: ordenador) y el sistema educativo (docente), con el objetivo de que los estudiantes se apropien de un saber construido dentro del contexto escolar (Brousseau. 1986).

Desde los lineamientos curriculares para el área de matemáticas, se “reconoce el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones” (MEN, 1998. p. 14)., El Ministerio de Educación Nacional promueve la integración de tecnologías para la enseñanza de conceptos matemáticos, sin embargo, existen pocos trabajos o guías potentes para el desarrollo de la enseñanza del álgebra en los temas relacionados con la propiedad distributiva a través del uso de herramientas computacionales y de manera especial en la educación básica secundaria (8º y 9º); Entre estos trabajos encontramos la tesis de Mejía (2004) donde muestra la importancia de integrar las TIC para la enseñanza de la factorización de expresiones cuadráticas, logrando el aprendizaje significativo, rescatando algunos procedimientos y conceptos relacionados con el tema y desapercibidos en la enseñanza tradicional.

Esta serie de consideraciones, nos permiten plantear el siguiente interrogante de investigación:

¿Cómo posibilitar la conceptualización de la propiedad distributiva a través del vínculo álgebra - geometría mediado por un AGD?

1.2. OBJETIVOS

1.2.1. OBJETIVO GENERAL

Indagar desde la teoría de Campos Conceptuales el tratamiento de la propiedad distributiva en ambientes de geometría dinámica mediante el diseño y aplicación de secuencias de situaciones de aprendizaje.

1.2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Relacionar algunos elementos teóricos y metodológicos, desde la teoría de Campos Conceptuales a la enseñanza y aprendizaje de la propiedad distributiva mediado por Cabri Geometry II Plus.
- Identificar algunas condiciones, posibilidades y limitaciones del diseño de la secuencia de situaciones relativa a la conceptualización de la propiedad distributiva mediado por Cabri Geometry II Plus.
- Diseñar y gestionar una situación de aprendizaje relativa a la propiedad distributiva mediante Cabri Geometry II Plus.
- Describir y comparar los desempeños matemáticos de los estudiantes de octavo grado de educación básica secundaria participantes en la experiencia.

1.3. ANTECEDENTES

Como fuentes para abordar el problema de investigación, se han tenido en cuenta proyectos y actividades relacionados con la enseñanza de la propiedad distributiva, abordando el modelo tradicional con lápiz y papel y el uso de los materiales manipulables que abordan el problema desde una perspectiva netamente algebraica.

1.3.1. LA CAJA DE POLINOMIOS.

Uno de los proyectos que tiene relación con el problema de investigación es el de La Caja de Polinomios de Soto, Mosquera y Gómez (2005). En este trabajo se conjugan los aportes de cuatro matemáticos famosos: Euclides, siglo III a.C. en su libro Los Elementos en el teorema 431 del Libro I, permite la construcción de fichas rectangulares de distintas dimensiones pero de igual área y que se apoya en la proposición 34 del mismo texto en la que demuestra que cualquier diagonal de un paralelogramo lo divide en partes iguales; así mismo, se utiliza el tercer axioma o noción común en el cual Euclides (citado por Soto, Mosquera y Gómez, 2005, p. 2) asevera: “Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales” (p. 2).

¹En cada paralelogramo los complementos de dos cualesquiera paralelogramos contruidos alrededor de una diagonal del primer paralelogramo son iguales (equiextensos).

El segundo aporte se debe a Tabit ben Qurra el Harani, siglo X d.C. matemático dedicado a la contemplación de las cantidades y quien de manera generosa presenta el concepto de homogeneización, concepto que permite tratar a los polinomios a través del manejo de las áreas de rectángulos, atendiendo a las dimensiones de la base y de la altura.

El último aporte se debe a los franceses Pierre de Fermat y a René Descartes, siglo XVII d.C. donde extienden la aplicación del tratamiento de polinomios a través de las áreas de rectángulos a polinomios con coeficientes negativos con la utilización del plano cartesiano,

Otro referente es la ponencia “Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra” del XIV encuentro de profesores de matemáticas, a cargo de Morales y Sepúlveda (2006), es el primer referente que muestra la metodología de trabajar álgebra en contextos geométricos. De acuerdo con ellos, el álgebra geométrica es una alternativa que puede proporcionar ideas para factorizar cierta clase de polinomios que aparecen en el contexto escolar; sin duda, es una opción didáctica que debemos explorar ya que los estudiantes están familiarizados con situaciones de adición y sustracción áreas, permite la visualización y manipulación de estos elementos, lo cual puede contribuir a un mejor entendimiento de los procedimientos algebraicos de factorización.

Después de haber estudiado los contenidos de lenguaje algebraico y valor numérico de expresiones algebraicas, lo que pretende la propuesta es buscar que los estudiantes de bachillerato logren apropiarse del concepto de propiedad distributiva a partir de construcciones de figuras geométricas rectangulares.

Por ejemplo, para las situaciones con álgebra en contextos geométricos propone que los números o literales pueden representarse mediante figuras geométricas: segmentos o áreas. Por ejemplo: el número 2 puede representar un segmento de dos unidades de longitud, el 4 un área de un cuadrado de 2 por 2, el 6 un segmento de dos unidades de longitud, el 4 un área de un cuadrado de 2 por 2, el 6 un área de un rectángulo de base 1 y altura 6 o de altura 2 y de base 3, etc.

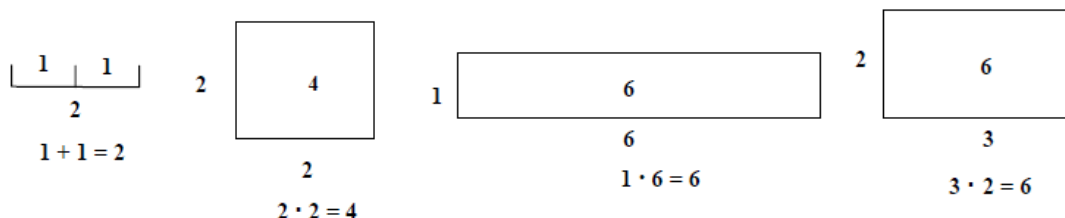


Ilustración 1. Representación geométrica de los números o literales según las actividades de la caja de polinomios

Los literales cuyos valores sean positivos representan segmentos o áreas de cualquier magnitud o cantidad desconocida.

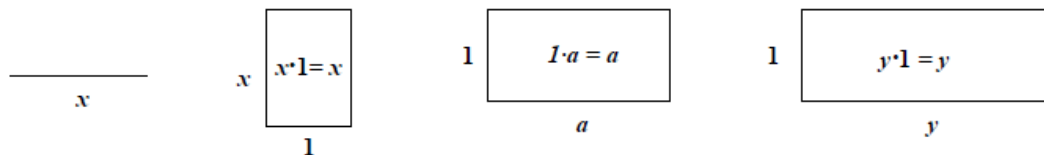


Ilustración 2. Representación geométrica de los números o literales según las actividades de la caja de polinomios

Los coeficientes numéricos representan múltiplos o submúltiplos de la magnitud geométrica (segmento o área de un rectángulo o cuadrado). Así por ejemplo: $2x$ $2x$ puede representar dos veces la longitud del segmento x o el área de un rectángulo de altura 2 y de base x o bien de base 2 y altura x

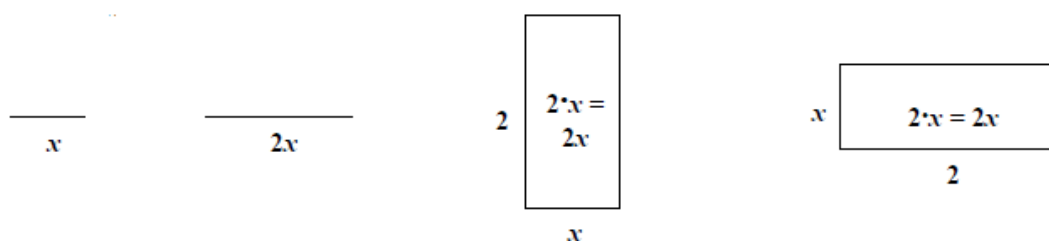


Ilustración 3. Representación geométrica de los números o literales según las actividades de la caja de polinomios

La caja de polinomios permite un juego operatorio simbólico, pero posee una gran limitante, no permite desarrollar satisfactoriamente el concepto de variable que es fundamental para el pensamiento algebraico.

Con el diseño de la secuencia de situaciones se pretende que los estudiantes se aproximen al concepto de propiedad distributiva gracias a la mediación de los Ambientes de Geometría Dinámica como Cabri Geometry II Plus a partir de la aplicación ya que una diferencia que tendrá con respecto al trabajo de la caja de polinomios es que los Ambientes permiten fundamentar el concepto de variación.

CAPÍTULO 2.

2. MARCO TEÓRICO

Para el diseño e implementación de esta propuesta se tomó como referente teórico, la teoría de Campos Conceptuales de Vergnaud (1982) y la importancia del uso de los AGD en el aula para la creación de situaciones que promuevan el aprendizaje significativo a través de la observación, reflexión y argumentación de patrones e invariantes, implícitos en la secuencia de situaciones de aprendizaje que permitan la generalización de patrones numéricos y geométricos en la conceptualización de la propiedad distributiva.

Otra posición importante es la que presenta el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998; 1999) con respecto a la enseñanza del álgebra desde el pensamiento variacional, la geometría desde el pensamiento espacial y el uso de TIC en las aulas de clase (ver anexo curricular)

2.1. ALGUNOS ELEMENTOS GENERALES DE LA TEORIA DE CAMPOS CONCEPTUALES

Esta propuesta ha tomado la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1982) teniendo en cuenta definiciones como concepto, campo conceptual,

conceptualización, situación y esquema, los cuales son definitivos para la comprensión de la conceptualización de la propiedad distributiva.

La teoría de campos conceptuales de Gerard Vergnaud es una teoría psicológica de la conceptualización (Vergnaud, 1990, p. 147). Se trata de una teoría pragmática en el sentido de que presupone que la adquisición de conocimientos es modelada por situaciones, problemas y acciones del sujeto en esas circunstancias (1990, p. 147). Se ocupa de estudiar el funcionamiento cognitivo del sujeto en situación, proporcionando un marco de referencia para el diseño de situaciones de aprendizaje, permitiendo establecer las condiciones necesarias de dicho diseño.

La teoría de campos conceptuales es una teoría cognitivista, que pretende proporcionar un marco coherente y algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas, especialmente las que se refieren a las ciencias y a las técnicas, debido a que ofrece un marco para el aprendizaje, es de interés para la didáctica de las matemáticas, en particular.

Vergnaud (1983) toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Vergnaud propuso la Teoría de Campos Conceptuales con la idea de que sirva de marco teórico en investigaciones relacionadas con actividades cognitivas, particularmente con aquellas que tienen que ver con aprendizajes científicos y técnicos.

En primer lugar, Vergnaud (1983) establece la importancia de la conceptualización y de los esquemas correspondientes. Para él, un concepto adquiere sentido para el sujeto a través de situaciones problemas, no reduciéndolo simplemente a una definición. Por otra parte, establece que el conocimiento racional es necesariamente operatorio. En cuanto a las situaciones, distingue dos tipos:

Aquellas para las que el sujeto dispone de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación de aprendizaje.

Aquellas para las que el sujeto no tiene todas las competencias necesarias.

En el primer caso, las conductas del sujeto serán automatizadas y estarán organizadas por un único esquema. En el segundo caso, el sujeto se ve obligado a reflexionar, explorar, realizar tentativas, etc., esto lo llevará a esbozar varios esquemas que deberán ser acomodados, separados y recombinados; este proceso es el que lleva a descubrimientos.

En definitiva, los conocimientos sólo adquieren generalidad si los elementos que los definen son aprehensibles por el sujeto, al margen de referencias a situaciones particulares. Esto implica que deben estar integrados en una red de conceptos que el sujeto ha comprendido mediante un proceso de reflexión sobre estos conceptos y teoremas en acto, proceso que Piaget calificaría de abstracción refleja.

La teoría de los campos conceptuales supone que la intención del desarrollo cognitivo es la conceptualización (Vergnaud, 1996. p.118). Esta es la piedra angular de la cognición. Luego, se debe prestar toda la atención a los aspectos conceptuales de los esquemas y al análisis conceptual de las situaciones para las cuales los estudiantes desarrollan sus esquemas, en la escuela o fuera de ella Vergnaud, (1994). Bajo este modelo metodológico este proyecto se caracterizó por tener un esquema de trabajo que permitió realizar un estudio experimental dentro del aula de clase, realizando 4 situaciones de aprendizaje diseñadas y llevadas al aula para ser experimentadas bajo un trabajo de observación y análisis de las mismas.

La teoría de los campos conceptuales (Vergnaud; 1990) proporciona un marco coherente para comprender el proceso de conceptualización, cuando los alumnos del nivel medio estudian el álgebra en relación con los procesos de construcción de expresiones algebraicas equivalentes aplicando la propiedad distributiva; debido a que sienta algunos principios de base para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de competencias complejas.

2.2. NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORIA DE CAMPOS CONCEPTUALES.

Para el estudio de la conceptualización de los alumnos en situación de aprendizaje, se tienen en cuenta los constructos teóricos de: concepto, campo conceptual, situación, esquema, invariantes operatorios, conocimiento operatorio; y

se discuten las implicaciones de estos constructos teóricos en la enseñanza, en particular en la enseñanza del álgebra en relación con la conceptualización de la propiedad distributiva.

2.2.1. **CONCEPTO**

Vergnaud (1983) define al concepto como una tripleta de tres conjuntos designada por: $C(S, I, \Gamma)$. Un conjunto de situaciones, un conjunto de invariantes operatorios, y un conjunto de formas lingüísticas y simbólicas que constituyen los diferentes sistemas de representación.

La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto.

El significado [I]: Es el conjunto de invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto) sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas.

El significante [Γ]: conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

Respecto a esta definición, resulta relevante puntualizar que no se deben confundir los significantes con los significados. Y esto es así, porque las palabras utilizadas recobran muchos significados según la situación de aprendizaje dentro de la cual se esté. Por otro lado, el sentido acordado por el sujeto se corresponde parcialmente, y a veces no del todo, al significado convencional de palabras y

enunciados, o al que le da el profesor. Esto se debe a que no hay un homomorfismo directo, sino parcial, entre lo real y el lenguaje, incluido el científico.

2.2.2. CAMPO CONCEPTUAL

Vergnaud (1983) define campo conceptual como, en primer lugar, un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distinta. Debido a que un concepto no se forma aislado sino en conjunto con otros, es posible afirmar que los conceptos del álgebra se desarrollan juntos, en un largo período de escolaridad, al interior de una gran variedad de situaciones, y en relación con otros conceptos. Así, el campo conceptual del álgebra en relación con la conceptualización de la propiedad distributiva, es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o más funciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

2.2.3. LA CONCEPTUALIZACIÓN.

La conceptualización es un proceso que forma parte de la situación y está dirigido a reducir la incertidumbre que genera el enfrentarse a situaciones, sean estas nuevas o conocidas. Así, mientras la situación refiere a los gestos, los conocimientos y competencias científicas y técnicas, la interacción con los otros, las competencias lingüísticas, las competencias afectivas, etc.; la conceptualización puede ser definida como la construcción, o la identificación directa o cuasi-directa de los objetos del mundo, de sus propiedades, relaciones y transformaciones (Vergnaud, 2007b, p.299).

Así, el análisis de la conceptualización, que es a partir de los esquemas pasa inevitablemente por el análisis de la situación, de la cual las conductas observables son una parte muy pequeña. Pero el análisis de la conceptualización de la propiedad distributiva no puede llevarse a cabo, si no es a partir del análisis de las conductas observables. Pues no es posible tener acceso a la parte no observable de la actividad. Sin embargo, el esquema aunque no es una conducta, tiene la función de generar la actividad y la conducta en situación. Y por esto es que resulta posible estudiar mediante el análisis de las conductas, los componentes que permiten el funcionamiento del esquema, esto es, los *invariantes operatorios*.

2.2.4. LA SITUACIÓN

El concepto de situación es muy importante dentro de la teoría de los campos conceptuales debido a que los procesos cognitivos y las respuestas del sujeto, son en función de las situaciones a las cuales son confrontados.

La *situación*, dice Vergnaud (1999, p. 8), tiene el carácter de *tarea*. Así, la noción de *situación* parece ajustarse a las ideas de tarea, meta u objetivo. En este contexto, como una meta, objetivo o tarea es factible de desglosarse en subtareas o submetas. Es posible conocer en parte, su naturaleza y dificultad. La dificultad de una tarea no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes subtareas, pero el fracaso en una subtarea implicará el fracaso global. Así, tendrán carácter de *situación* (tarea): saltar una valla, resolver una ecuación, calcular una integral,

resolver un problema de interés compuesto, analizar la variación de parámetros de la familia de funciones exponenciales, etc.

Las situaciones son las que dan sentido al concepto; son las situaciones las responsables por el sentido atribuido al concepto (Barais & Vergnaud, 1990, p.78); un concepto se torna significativo a través de una variedad de situaciones (1990, p. 46). Pero el sentido no está en las situaciones en sí mismas, así como no está en las palabras ni en los símbolos. El sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes; más precisamente son los **esquemas**, i.e. los comportamientos, y su organización, evocados en el sujeto por una situación o por un significante (representación simbólica) que constituyen el sentido de esa situación o de ese significante para ese individuo (1990, p. 18).

2.2.5. ESQUEMA

El concepto de esquema es juntamente con el de situación uno de los más importantes de la teoría de los campos conceptuales debido a que son los esquemas quienes se adaptan a las situaciones, y no el sujeto al objeto, como había formulado Piaget. Así, para Vergnaud (1983) los esquemas son pragmáticos en el sentido de que funcionan para la adaptación y la acción operatoria del sujeto. Los esquemas se acomodan a las situaciones pues se relacionan con las características de las situaciones a las cuales se aplican y son funcionales a estas.

Las definiciones que Vergnaud (1983) propone de esquema son las siguientes:

1. Un esquema es una totalidad dinámica funcional.
2. Un esquema es una organización invariante de la actividad para una clase definida de situaciones.
3. Un esquema comprende necesariamente cuatro categorías de componentes:
 - a. Una meta (o varias), sub-metas y anticipaciones.
 - b. Reglas de acción, de toma de información y de control.
 - c. Invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)
 - d. Posibilidades de inferencia.

La definición de esquema, superadora de las ideas de Piaget, Vygotsky, y Bruner; es analítica, y resulta ser fundamental para el análisis de la situación en general, y de la *conceptualización* en particular. Las expresiones concepto-en-acción y teorema-en-acción designan los conocimientos contenidos en los esquemas. Son también designados, por Vergnaud (1982), por la expresión más global de **invariantes operatorios**. “Teorema-en-acción es una proposición considerada como verdadera sobre lo real; concepto-en-acción es una categoría de pensamiento considerada como pertinente Vergnaud (1996, p. 202)”.

2.2.6. COMPONENTES FUNDAMENTALES DEL ESQUEMA PARA EL ANÁLISIS DE SITUACIONES

El concepto de *esquema* como se ha definido anteriormente, ahora se van a describir cada uno de los componentes que conforman un esquema y los cuales constituyen la base conceptual, implícita o explícita que permiten obtener la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más pertinentes para abordar una situación (Vergnaud, 1996, p. 201).

Estos componentes son las metas y anticipaciones, reglas de acción, invariantes operatorios y posibilidades de inferencia – los invariantes operatorios, los conocimientos-en acción (conceptos y teoremas-en-acción).

2.2.6.1. LAS METAS, LAS SUB-METAS Y LAS ANTICIPACIONES

Aunque la **meta** no sea plenamente consciente, o si hay varias en la misma *actividad*, siempre es posible identificar una intencionalidad en la organización de la situación, con su cortejo de *sub-metas* y *anticipaciones*. Este primer componente representa en el *esquema* lo que se llama a veces la intención, el deseo, la necesidad, la motivación, la espera. Pero ninguno de estos conceptos es por sí sólo un *esquema*, por lo cual resulta esencial integrar la meta, la intención y el deseo en el mismo concepto de *esquema*. Por otra parte, y debido a que la situación de aprendizaje responde a una organización que es simultánea y secuencial a la vez, la *meta* se

divide en *sub-metas* y *anticipaciones*. Las *metas*, las *sub-metas* y las *anticipaciones* preceden y acompañan el movimiento, y son objeto por parte del estudiante de un control casi permanente mientras se lleva a cabo la acción

2.2.6.2. **INVARIANTES OPERATORIOS: CONCEPTO EN ACTO Y TEOREMA EN ACTO**

Los *invariantes operatorios* forman la parte más epistémica del esquema, la que tiene la función de identificar y reconocer los objetos, sus propiedades, sus relaciones, y sus transformaciones. La función principal de los *invariantes operatorios* es tomar y seleccionar la información pertinente, e inferir luego, las consecuencias útiles para la acción, el control y la toma de información. Es entonces una función de *conceptualización* y de *inferencia*. En este aspecto, la teoría de los campos conceptuales se aparta totalmente de un modelo de tipo: "*información luego acción*", ya que propone que los *esquemas* administran en forma entremezclada la continuación de las acciones, las tomas de información y de los controles. La eficacia del *esquema* se construye gradualmente y a medida.

Por definición, un *concepto en acto* es una categoría pertinente, y como tal no es susceptible de verdad o falsedad, sino solamente de la pertinencia o de la no pertinencia. En cambio, un *teorema en acto* es una proposición tenida por verdadera en la situación. La relación entre *teoremas* y *conceptos* es dialéctica, en el sentido que no hay *teorema* sin *conceptos* y no hay *concepto* sin *teorema*.

Es decir, que los *conceptos en acto* son la base para la construcción de los *teoremas en acto*, y son los *conceptos en actos* los que permiten la formación de los *teoremas en acto*, a partir de los cuales se hace posible la organización de la *actividad* y las *inferencias*.

Por otra parte, resulta relevante explicar que un *concepto en acto* no es un concepto, ni un *teorema en acto* un teorema. En la ciencia, los conceptos y los teoremas son explícitos y se puede discutir su pertinencia y su verdad. Este no es necesariamente el caso para los *invariantes operatorios*. Los conceptos y los teoremas explícitos no forman sino la parte visible del iceberg de la *conceptualización*; pero sin la parte escondida formada por los *invariantes operatorios*, esta parte visible no sería nada. Estos *invariantes operatorios* (*conceptos en acto* y *teoremas en acto*), son en particular, la base conceptual implícita (o explícita) de los *esquemas* debido a que permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una *situación* (Vergnaud, 1990). En consecuencia, las decisiones que tome un alumno ante una determinada *situación* van a depender del *esquema* activado, pero más específicamente de los *conceptos en acto* y *teoremas en acto* de los que disponga el sujeto para enfrentar la situación.

Cuando los *conceptos* y *teoremas en acto* se hacen explícitos, se convierten en objetos de reflexión acerca de los cuales se puede discutir su validez, pues se los aproxima a los conocimientos científicos. Por otra parte, todos los conocimientos

científicos tienen sus raíces en *teoremas y conceptos en acto*, que son la base de toda la *conceptualización*. Y como el carácter del conocimiento cambia si éste es comunicable, debatido y compartido, estos *conceptos*, son en cierta medida, descontextualizados de las *situaciones* en las que se generaron.

2.2.7. LOS ESQUEMAS SEGÚN LA CLASE DE SITUACIONES

Un aspecto de los *esquemas* que resulta relevante puntualizar tiene que ver con la diferencia en la adaptación de los *esquemas* a las situaciones según éstas sean reconocidas por el sujeto como nuevas o conocidas:

Situaciones conocidas: Cuando el sujeto se enfrenta a una clase de *situaciones* para las cuales él dispone en su repertorio de competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de esa situación, como es el caso presentado en la situación 1, los estudiantes fueron orientados por la guía entregada por el docente (en el cual, aun cuando la situación era nueva, no fue considerada como tal por el sujeto), porque logran responder a los interrogantes planteados, es posible observar que para esa misma clase de situaciones, las conductas son muy automatizadas, y organizadas por un *esquema* único.

Situaciones nuevas: Pero cuando el sujeto se enfrenta a una clase de situaciones nuevas (o considerada por él como nueva), como es el ejemplo las situaciones 2, 3 y 4 donde las construcciones están previamente establecidas,

los estudiantes deben explorarlas para identificar el valor común partiendo de los elementos que la definen y de las variaciones de los segmentos. De esta manera la observación y el análisis de sus dudas y de sus errores; muestra que las conductas en situación abierta son igualmente estructuradas por los *esquemas*. Estos son tomados del vasto repertorio de *esquemas* disponibles, y especialmente de los que están asociados a las clases de situaciones que parecen tener una semejanza con la *situación* tratada actualmente. Pero como la semejanza no es sino parcial y eventualmente ilusoria, los *esquemas* son solamente esbozados, y las tentativas se interrumpen antes de haber sido concluidas; se pueden evocar sucesivamente varios *esquemas*, e incluso simultáneamente. Así, en este segundo caso, es posible observar el esbozo sucesivo de dos *esquemas*, que pueden entrar en competición y que para llegar a la solución buscada, deberán ser acomodados, separados y recombinados. Este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos.

La teoría de campos conceptuales es una teoría que se fundamenta en el diseño de situaciones llamadas por Vergnaud: tareas, y que tiene implícita una serie de aspectos conceptuales descritos anteriormente y que permiten analizar de manera adecuada los procesos de aprendizaje desarrollados por los estudiantes, en el proceso de aprendizaje significativo. Bajo este marco teórico, el presente trabajo se desarrollo a partir del diseño y aplicación de cuatro situaciones de aprendizaje, llevadas al aula de clase, las cuales fueron observadas, registradas y posteriormente analizadas.

En este punto es preciso señalar la importancia que tienen los AGD en especial Cabri Geometry II Plus para el aprendizaje desde el punto de vista del proceso de la conceptualización teniendo en cuenta la teoría de los campos conceptuales, ya que este permite organizar los esquemas que representan el conocimiento operacional y organizan la adaptación progresiva de los esquemas en el sujeto (Vergnaud, 1997). A continuación se presenta el concepto del AGD Cabri Geometry II Plus.

AMBIENTES DE GEOMETRÍA DINÁMICA.

Los Ambientes de Geometría Dinámica como herramienta para la enseñanza de la conceptualización de la propiedad distributiva, buscó experimentar y analizar las posibilidades y condiciones que se pueden presentar en la incorporación de esta estrategia de enseñanza para la conceptualización de la factorización en el grado octavo, teniendo en cuenta los antecedentes e importancia que ha tenido el uso de programas en la enseñanza de procesos matemáticos.

Si bien el impacto de las computadoras sobre las prácticas escolares no ha sido tan fuerte como se esperaba, desde hace ya más de dos décadas, el impacto epistemológico ha sido mayor que lo previsible en ese entonces Balacheff & Kaput, (1996). Esto se debe fundamentalmente al proceso de reificación de los objetos matemáticos y a las relaciones entre ellos que el estudiante puede activar en los

entornos interactivos computacionales. Lo anterior permite una forma de actividad mucho más directa que la que se trabaja a lápiz y papel.

La incorporación de tecnología en la clase de matemática ofrece nuevas estrategias en los entornos para la exploración en geometría dinámica. La manipulación directa que ofrecen los sistemas de geometría dinámica como el Cabri Geometry II Plus, en el cual sus características de capacidad de arrastre (dragging), la huella que deja la figura cuando se arrastra y la animación, permiten crear un ambiente experimental en el aula, dando la oportunidad de modelar, simular, observar, conjeturar, predecir y generalizar (MEN, 1999).

Además, los AGD permiten realizar distintos tipos de arrastre de acuerdo al propósito de la situación llevada al aula, entre esos tipos de arrastre según Arzarello (1998) y Hölzd (1996) citados en Gutiérrez (2006) tenemos:

Arrastre de Test: para comprobar si la construcción realizada conserva las condiciones matemáticas del problema.

Arrastre guiado: se arrastra un objeto con la finalidad de obtener un caso particular de la figura construida

De acuerdo con lo anterior, la diferencia fundamental entre un entorno de lápiz y papel y un entorno de geometría dinámica es precisamente el dinamismo. Como las construcciones son dinámicas, las figuras en la pantalla adquieren una

temporalidad: ya no son estáticas sino móviles, por lo tanto sus propiedades deberán estar presentes en todas las posibles posiciones que tomen en la pantalla.

Cabe anotar que los AGD como Cabri Geometry II Plus fueron diseñados como instrumentos para la enseñanza de la geometría, pues se convierte en objeto de “experimentación” sobre la teoría, sin utilizar de manera directa el discurso, contribuyendo a superar uno de los obstáculos principales del aprendizaje de la geometría, como es la superación de las tensiones entre los procesos de visualización y su potencial heurístico en los procesos de justificación e identificación de relaciones del conocimiento matemático.

El uso de la teoría de los campos conceptuales y el diseño de las situaciones en AGD como Cabri Geometry II Plus permiten asumir que las acciones son organizadas por los esquemas mentales que representan el conocimiento operacional en la actividad mental del sujeto. Vergnaud (1997). Para Vergnaud, el principio de la conceptualización puede ser especificado por la tesis de que el desarrollo humano se produce por medio de la adaptación progresiva de los esquemas a las nuevas situaciones. En concordancia con ello, los AGD nos permiten proponer situaciones para establecer una relación coherente con la adaptación de las dimensiones cognitivas.

Este último aspecto lo brinda Cabri Geometry II Plus, ya que su aporte específico es que permite la inserción en el proceso de aprendizaje de la invariante a

través de la visualización de una figura. A continuación se realiza una descripción del software y su función como mediador instrumental.

LA MEDIACIÓN INSTRUMENTAL

El uso de Ambientes de Geometría Dinámica transforma el papel del docente en el aula, posibilitando al estudiante a interactuar en una cultura matemática escolar, en el cual la comunicación de ideas tiene gran importancia. Como lo expresa Luis Moreno Armella:

El conocimiento no es resultado ni de la sola actividad del sujeto, ni tampoco de la sola presencia del objeto de conocimiento. El conocimiento surge de la interacción del sujeto cognoscente y el objeto de su conocimiento. Ellos constituyen una pareja dialéctica indisociable.

De este modo en la interacción sujeto y conocimiento, existe un proceso de mediación instrumental de tipo material y simbólica, la presencia de estos instrumentos de mediación transforma la actividad cognitiva del estudiante...
“depende de su construcción y en su interpretación, de la especificidad del contexto en el que surgen. Por lo tanto para que el estudiante pueda utilizar el conocimiento construido en otros contextos, hace falta la intervención permanente del profesor quién a través de su propuesta conduce al estudiante a una nueva construcción (que

se da a un nuevo nivel de abstracción) del esquema cognitivo que subyace a su construcción situada (Moreno, 2002)

La presencia de herramientas computacionales en la educación, como instrumentos de mediación de las actividades orientadas al aprendizaje, permite ver los sistemas de representación con una característica central: es ejecutable. Esto significa, dicho de manera simplificada, que una vez instalados en el lenguaje del medio ambiente computacional, las nuevas representaciones son procesables, manipulables. Ese es el caso de las construcciones que se realizan en un entorno de geometría dinámica. La posibilidad de desplazar las figuras (dragging) conservando relaciones estructurales de las mismas, es una forma de manipulación, de ejecución de representaciones informáticas, que contribuye al realismo de estos objetos geométricos.

Cuando se usa un computador, el estudiante tiene diversas posibilidades, una es la disposición de un espacio de representación externa (como un cuaderno); la otra es procesar esa información de cierta manera debido a la ejecutabilidad del sistema de representación que le suministra la máquina.

La mediación instrumental comienza desde el momento en que podemos redefinir los objetos matemáticos en términos de las construcciones ejecutables. No

sólo hay representaciones ejecutables sino también construcciones ejecutables, por ejemplo las que se hacen con Cabri.

CAPÍTULO 3

3. METODOLOGÍA, PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE.

El diseño y aplicación de las tareas tiene como referencia metodológica la teoría de campos conceptuales Vergnaud (1983) en la cual se propone el diseño de un conjunto de experiencias en el entorno de Cabri Geometry II Plus que permitan generar situaciones matemáticas que puedan ser trabajadas por los estudiantes, creando en ellos la necesidad de resolverlas de tal manera que el conocimiento que se busca movilizar aparezca como una solución acertada a los problemas o como dominio del conocimiento por parte de los estudiantes.

Teniendo en cuenta que Cabri Geometry II Plus es un medio que favorece los procesos y habilidades para desarrollar pensamiento geométrico y así mismo, permite que los estudiantes se involucren en situaciones donde pueden hacer actividades matemáticas propias del quehacer matemático.

De otra parte, tanto los AGD Cabri Geometry II Plus como los libros de texto ofrecen posibilidades para diseñar y gestionar una secuencia de situaciones de aprendizaje diferentes. Por tal motivo, es el profesor quien debe tener en cuenta el

contexto escolar, y así mismo delimitar y complementar aquellas características que desee resaltar para obtener un objetivo propuesto.

En el proceso de elaboración de las situaciones se propone realizar el análisis preliminar de cuatro situaciones de aprendizaje diseñadas, la intervención en el aula y el análisis de resultados. En el análisis preliminar se hizo una descripción de los resultados esperados por los estudiantes cuando se enfrentan a las situaciones planteadas.

En la fase de aplicación de las secuencias de situaciones, se tuvo en cuenta las acciones y procedimientos de los estudiantes cuando interactúan con el diseño propuesto, para luego ser contrastadas con los resultados esperados. La información obtenida de la producción escrita por parte de los estudiantes después de la aplicación de las situaciones permite dar cuenta de la pertinencia o no pertinencia de llevar al aula los AGD en la conceptualización de la propiedad distributiva desde el punto de vista algebraico y de qué manera contribuyen a dar respuesta a la pregunta planteada en el trabajo de investigación.

3.1. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Las características de nuestro trabajo de grado responden a los del tipo descriptivo, que son los que se utilizan cuando el propósito del investigador es decir cómo es y cómo se manifiesta un determinado fenómeno. Al decir de Dankhe (1986, en Sampieri et al., 1991) “los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades

importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis” (p. 60). Buscan medir o evaluar diversos aspectos, dimensiones o componentes del fenómeno o fenómenos a investigar, para lo cual se selecciona una serie de cuestiones y se mide cada una de ellas independientemente, para así, describir lo que se investiga; lo que implica un considerable conocimiento del área que se investiga, para realizar las preguntas específicas que se busca responder (Sampieri et al., 1991, pp.60-62).

Para poder llevar a cabo esa “descripción – medición” buscamos responder cada uno de los objetivos específicos que se plantearon. Con este fin, es que hemos organizado los distintos elementos referidos a cada objetivo específico – según lo visto en el marco teórico – de una manera operacional, lo que nos permitirá hacer las preguntas pertinentes de cada elemento a describir.

Se analizarán los materiales que se han generado como consecuencia de la aplicación de las situaciones.

3.2. LAS SITUACIONES DE APRENDIZAJE

Cada situación abarcó un tema en común que es el concepto de área, para ser aplicado como esquema a las experiencias posteriores, y así crear un conjunto de tareas en las que se relacionan los contenidos, conceptos y estructuras que están conectadas para realizar el proceso de adquisición del conocimiento, en este caso particular la propiedad distributiva.

Se adaptaron los conceptos de área de cuadriláteros (cuadrado y rectángulo) en cada situación a partir de la mediación de Cabri Geometry II Plus, para estudiar desde el sistema numérico – variacional el concepto de propiedad distributiva, adaptado a un contexto geométrico, el cual pretende brindar un enfoque más práctico al tema. La intención de las situaciones es poder generalizar la propiedad distributiva desde el punto de vista algébrico.

La idea de trabajar el concepto de propiedad distributiva a partir del contexto geométrico y mediado por Cabri Geometry II Plus, surge a partir del trabajo de la caja de polinomios (Soto, Mosquera & Gómez, 2005) en el que se pretende enseñar álgebra en contextos geométricos, ya que propone que los números o literales pueden representarse mediante figuras geométricas, segmentos o áreas. Las secuencias de situaciones realizadas en Cabri Geometry II Plus consisten en crear un nexo entre ideas geométricas y algebraicas mediados por Cabri Geometry II Plus.

Cada una de las cuatro actividades situaciones busca que el estudiante interactúe en Cabri Geometry II Plus mediante el manejo de cuadriláteros (rectángulos y cuadrados), y llegue a establecer que el producto de las dimensiones de la base por altura arroja como resultado el área del cuadrilátero, además que analice la variación de la superficie en relación al arrastre de los segmentos que establecen las dimensiones de las figuras. Posteriormente, se empieza a relacionar las áreas de distintos cuadriláteros y establecer una longitud en común entre las dos áreas hasta

llegar a una longitud en común (factor común) entre varios cuadriláteros, para luego establecer una expresión por medio de la propiedad distributiva.

Para el desarrollo de las cuatro actividades, a cada estudiante se hizo entrega de una carpeta informática con el nombre de *Situaciones Cabri Geometry II Plus* la cual contenía los archivos de las construcciones previamente realizadas por los investigadores.

En la secuencia de situaciones, las construcciones están previamente establecidas, ellos deben explorarlas para identificar el factor común y escribir una expresión que use la propiedad distributiva, partiendo de los elementos que la definen y de las variaciones de los segmentos. Hay que tener en cuenta que esta propuesta centra su atención en el reconocimiento de elementos básicos que definen la propiedad distributiva (como es el factor común de una expresión). El uso de estas construcciones evita que los estudiantes realicen el procedimiento para obtenerlas, ganando tiempo en la exploración de la situación propuesta. Así, la aplicación de las secuencias se centra más en la organización de los esquemas y los conceptos y teoremas en acto que debe movilizar el estudiante para lograr la conceptualización del tema partiendo de las metas y submetas que se tracen al brindar la solución a cada una de las interrogantes de la secuencia.

En síntesis, con el diseño de cada secuencia de situaciones de aprendizaje, se buscó asegurar que los estudiantes movilicen esquemas y organicen las conductas

para cada una de las situaciones dadas, pero organicen a la vez su acción y la toma adecuada de los conceptos a utilizar como esquemas para la producción tanto en forma operatoria como en forma descriptiva.

3.2.1. DURACIÓN DE LA APLICACIÓN DE LAS SITUACIONES

El tiempo estimado aproximadamente para aplicar la secuencia de situaciones es de cuatro sesiones de clase de 45 minutos. En la ejecución de ellas, el profesor se constituye en un mediador y de esta manera debe ser un administrador del tiempo destinado para su aplicación, brindando apoyo y evitando que sus estudiantes se pierdan en el propósito planteado.

El profesor, como mediador es la persona encargada de plantear los acuerdos, entre ellos están los tiempos, la organización, la participación y las responsabilidades. Debe explicar cómo están organizadas las situaciones, qué tiempo se destina para resolverlas, cuáles son las reglas de juego de cada una. Así, su tarea consiste en ayudar al alumno a desarrollar su repertorio de esquemas y representaciones evitando revelar las respuestas a los estudiantes, sus preguntas deben estar orientadas a que ellos mismos busquen la respuesta sin decirles la estrategia que permite resolver cada situación.

3.3. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LAS SITUACIONES.

En este apartado se presentan los análisis preliminares de cada una de las situaciones, realizadas para el desarrollo de este trabajo.

3.3.1. CALCULA EL ÁREA DEL RECTÁNGULO

Esta situación es tomada del trabajo de la caja de polinomioSoto, Mosquera y Gómez (2005). Y adaptada al contexto de Cabri Geometry II Plus para tratar de visualizar la variación de las longitudes de la figura. La situación inicia con la descripción del contexto que enmarca el desarrollo de la aplicación de la situación para los estudiantes: el manejo del software Cabri Geometry II Plus y el concepto de área y variación de la misma de acuerdo a las longitudes de la figura bajo la cual están estructuradas las preguntas. La situación pretende que el estudiante establezca relaciones entre las variables involucradas, identificando regularidades en la construcción, finalmente debe llegar a formular una expresión que describa las relaciones entre las variables (base, altura)

Las instrucciones dadas permiten que el rectángulo solo modifique sus dimensiones a partir del arrastre de los extremos de cada segmento sin que sus propiedades se alteren. Cada segmento está previamente nombrado y se ha realizado

la medición de su longitud en centímetros con el fin que el estudiante realice la tarea de hallar el área del rectángulo.

En la aplicación de esta situación se les entregará en una hoja de trabajo a los estudiantes las preguntas que deben contestar a partir de la experiencia. Estas preguntas las deben responder de manera individual, hay que aclarar que el archivo informático no trae las preguntas. Finalmente se realizará una exposición de los resultados con el fin de que los estudiantes comparen las acciones realizadas y los resultados obtenidos.

Con la situación se espera que los estudiantes empiecen a movilizar el concepto que construye el estudiante acerca del área (base por altura) y la variación de esta cuando el estudiante a partir del arrastre cambia las longitudes de los segmentos dados.

El profesor debe realizar las intervenciones necesarias que promuevan al estudiante a calcular la unidad de medida de superficie del rectángulo construido, y aclarar que este concepto es necesario durante las próximas actividades a trabajar con el fin de llegar a la conceptualización de la propiedad distributiva.

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA SITUACIÓN 1.

Nombre: Calcula el área del rectángulo

Recursos: computadores, software Cabri Geometry II Plus.

Materiales: fotocopia situación 1.

En este apartado se presenta la situación N° 1 que fue aplicada en el grupo de estudiantes de octavo. La actividad fue diseñada para ser desarrollada individualmente.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: _____

GRADO: octavo

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre *de rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$A =$ _____

$A =$ _____ Área del rectángulo

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura
 - Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.

3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

Ilustración 4. Guía de trabajo situación 1.

Inicialmente el profesor da indicaciones sencillas y fáciles con respecto al manejo del programa Cabri Geometry II Plus, teniendo en cuenta que era el primer contacto de los estudiantes con el software, por tanto se toma esta opción para que ellos tuvieran un trabajo más autónomo en las siguientes situaciones. En este caso se tiene en cuenta que el esquema funciona de acuerdo a una situación nueva, donde el estudiante se encuentra en una etapa de descubrimiento de la herramienta. El estudiante observará la figura de un rectángulo (situación referente de la tarea) con el cual se empezará a realizar una serie de preguntas cuyas finalidades para el caso es hacer que el estudiante calcule el área del rectángulo (concepto en acto), luego, a través de la observación realizar conjeturas del área de la figura al variar las longitudes base y altura (teorema en acto).

Al culminar las instrucciones de la tabla, el estudiante debe proceder a contestar dos preguntas referentes al área de la figura. La primera pregunta corresponde a hallar un valor numérico del área de la figura a partir de los valores iniciales de la base y la altura. En este punto de la aplicación de la secuencia de situación, los estudiantes deben empezar a realizar las anticipaciones para generar las producciones adecuadas para la solución de las cuestiones (metas, subtemas). Posteriormente realizará la instrucción de arrastre de los segmentos de la figura para explorar la variación del área y así poder conjeturar y dar respuesta a la segunda pregunta.

La consigna “Calcula el área de tu rectángulo” se toma como una iniciativa para encaminar las situaciones posteriores, ya que el tema importante y base del trabajo con los estudiantes es el concepto de área, en particular, en el caso de los polígonos rectangulares. En los espacios en blanco, que se dejan intencionalmente en la guía, los estudiantes deben completar de acuerdo con su criterio de respuesta en concordancia con el teorema en acto que en este caso es el producto de las longitudes del rectángulo base por altura y lo observado en la pantalla de Cabri Geometry II Plus. Este punto permite al estudiante actuar en situación (forma operatoria del conocimiento)².

El segundo punto de la actividad es una instrucción que permite al estudiante visualizar el valor del área del rectángulo en la ventana de trabajo de Cabri Geometry II Plus, con la intención que él pueda observar el cambio de este valor en función de las longitudes de la base y la altura.

La pregunta *¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?* Está encaminada a que el estudiante analice el comportamiento de la figura al variar la longitud de los segmentos y describa que está sucediendo con la figura construida. En concordancia con Vergnaud (2007) el tercer punto permite que el estudiante describa o realice su propia conjetura de lo observado

²La forma operatoria del conocimiento, es la que permite actuar en situación (y eventualmente tener éxito)

en la ventana de trabajo de Cabri Geometry II Plus, es decir en forma predicativa del conocimiento³.

Los aportes del docente son determinantes para la aprehensión del concepto de área y la importancia del concepto de factores, para encaminar cada actividad hacia el concepto principal como lo es el de la propiedad distributiva encontrando un factor común en las expresiones.

Esta actividad permite que el estudiante retome el esquema mental del concepto de área del rectángulo y el teorema en acto, es decir, el producto de base por altura. Es importante este esquema ya que será empelado en todas las situaciones a seguir para acercarnos al tema primordial que es el de *la propiedad distributiva*.

3.3.2. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA CON CUADRILÁTEROS.

La situación número 2 es un ejercicio tomado de la propuesta para la enseñanza de la factorización mostrada en el XIV Encuentro de Profesores de Matemática Morales y Sepúlveda (2006), y adaptada al contexto de Cabri Geometry II Plus.

El propósito principal es ir desplegando el concepto de propiedad distributiva (invariante operatorio) por medio del factor común, el estudiante debe comenzar a

³la forma predicativa del conocimiento, es la que enuncia los objetos de pensamiento, sus propiedades, sus relaciones y sus transformaciones

relacionar que el área de un rectángulo (concepto en acto) se puede obtener a partir de la suma de las área de otros cuadriláteros (teorema en acto), en nuestro caso serán dos rectángulos, cuyas alturas son factores comunes.

En la aplicación de esta situación se les entregará una hoja de trabajo a los estudiantes, con las preguntas que deben contestar a partir de la experiencia. Estas preguntas las deben responder de manera individual.

Con la aplicación de la situación, se quiere mostrar al estudiante que en muchos casos la propiedad distributiva puede expresarse como la composición de área de una figura rectangular a partir de la suma de áreas de otros rectángulos.

En primera instancia se espera que el estudiante observe que los rectángulos tienen una longitud en común (concepto en acto), que en el caso de la actividad será la altura, con ello empezaran a organizar sus esquemas para generar las anticipaciones y metas en la solución de las preguntas. Para lograr esto se pide que hallen la expresión del área de cada rectángulo, es decir el producto de la base por la altura (teorema en acto). Allí encontraran que uno de esos factores tiene un valor igual al de la otra expresión. Nuevamente el concepto en acto es el de área de rectángulo y el teorema en acto el producto de las longitudes del rectángulo base por altura.

Para esta situación, el diseño implicó el manejo de valores tanto numéricos como literales para hallar el área de las figuras y seguidamente expresar el producto de las mismas identificando el factor común. Los conceptos que deben movilizar para

lograr los resultados esperados son los de operaciones en el conjunto numérico de los reales y en expresiones algebraicas (Representación simbólica o signifiicante).

Los puntos 1, 2 y 3 se inicia con la sub-meta 1 en la que se tiene en cuenta la extracción de los valores numéricos para las longitudes de los segmentos. A partir del cuarto ítem que muestra una figura similar a la anterior, pero ahora no se observan valores numéricos, en su defecto, cada segmento tiene expresado su longitud en forma literal. De nuevo se espera la sub-meta 2 donde el estudiante repita la expresión de áreas de los rectángulos, ahora con literales (Teorema en acto). Con la finalidad de hacer una inferencia que es ir iniciando al estudiante a construir la idea de propiedad distributiva de manera algebraica.

La importancia de esta actividad es brindar la primera idea de propiedad distributiva, además de ir generando en el estudiante la organización de los nuevos conceptos que se está formando con el avance de la situación. La forma dinámica del Cabri Geometry II Plus permite aclarar que el factor común es un valor numérico o literal que se encuentra multiplicando a otros dos valores (Concepto en acto). En el caso de la actividad la altura se muestra como un factor común de las bases de los rectángulos (Teorema en acto). En síntesis se espera llegar a la expresión $z(x+y)$ donde z es el factor común de la suma de x y y . (Conceptualización de la propiedad distributiva).

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA SITUACIÓN 2

Nombre: Propiedad distributiva con cuadriláteros

Recursos: Computadores, software Cabri Geometry II Plus.

Materiales: Fotocopia situación 2

NOMBRE ESTUDIANTE: _____
GRADO: octavo

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 =$	$A_2 =$
Resultado	$A_1 =$	$A_2 =$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$$A_t =$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

Ilustración 5. Guía de trabajo situación 2 (página 1).

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.

- Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.

- Observa los cambios en la figura.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1			$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2		z	
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$		

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

Ilustración 6. Guía de trabajo situación 2 (página 1).

En este apartado se presenta la situación N° 2 que fue implementada en el grupo de estudiantes de octavo. La situación fue diseñada para ser desarrollada individualmente.

Esta situación busca manipular por medio del arrastre de segmentos los valores numéricos o literales de las bases o las alturas de los rectángulos que están previamente contruidos por los investigadores. Inicia con la sub-meta 1 que corresponde a las instrucciones para abrir el archivo llamado *propiedad distributiva con cuadriláteros* y por medio de la opción de arrastre que permite Cabri Geometry II Plus, variar las longitudes de base y altura. El arrastre permite ir visualizando en la

pantalla los cambios de área de los rectángulos permitiendo identificar y reconocer los objetos, sus propiedades, sus relaciones y transformaciones cuando se varía las longitudes de los segmentos (Invariante operatorio). Se espera que la observación de la variación del área movilice esquemas pertinentes para calcular el área de rectángulo y utilicen los conceptos en acción como área de polígonos y los teoremas en acto como el producto de base del rectángulo por la altura del mismo, la suma de áreas como resultado de la unión de dos áreas de polígonos. En concordancia con la teoría de los campos conceptuales Vergnaud (1983) si se articulan adecuadamente este conjunto de invariantes operatorios, se puede inferir que los resultados esperados sean los resultados correctos para la situación de aprendizaje.

Las primeras preguntas buscan que el estudiante empiece a observar que existe un valor común en cada producto (anticipación), por lo cual al establecer la expresión del cálculo de las áreas, se indicara que ese valor es un valor común (concepto en acto). Así cada pregunta está proponiendo al estudiante a que relacione en las expresiones el valor que es común a cada producto. El teorema en acto que debe utilizar el estudiante al momento de calcular las áreas, es el que debe permitir que el estudiante pueda determinar que existe un valor común que tienen los rectángulos, en este caso de la situación de aprendizaje es la altura de las dos figuras rectangulares.

Las preguntas 5 y 6 son ítem que relacionan los procedimientos anteriores, pero en dos representaciones simbólicas diferentes (significante), ya que las figuras

de Cabri Geometry II Plus que se muestran a los estudiantes implican longitudes con valores literales, ahora el proceso cambia del sistema numérico al algébrico con el fin de generalizar más el proceso de la propiedad distributiva a través de la expresión algebraica. Es importante que el teorema en acto que se utiliza en el ejercicio es el mismo que en las preguntas anteriores, con la excepción que también se debe poner en juego conceptos en acto por ejemplo las expresiones algebraicas.

3.3.3. MULTIPLICACIÓN DE BINOMIOS CON PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

La situación número 3 es un ejercicio tomada del libro guía del docente Glifos procesos matemáticos 8 Arévalo et al (2008), y adaptada al contexto de Cabri Geometry II Plus. Con la aplicación de la situación, la meta que se pretende es ir desplegando el concepto de propiedad distributiva donde el factor común ahora es un binomio (Teorema en acción), el estudiante debe comenzar a relacionar que el área de un rectángulo se puede obtener a partir de la suma de más de dos área de otros rectángulos (concepto en acto), en nuestro caso serán cuatro rectángulos, cuyas alturas son los factores comunes. Aquí es necesario que el estudiante implique los conceptos en acto de áreas de rectángulos, operaciones con números reales y expresiones algebraicas.

En la aplicación de esta situación se entregará una guía de trabajo a los estudiantes para contestar las preguntas a partir de la experiencia. Estas preguntas las deben responder de manera individual.

De acuerdo con la situación, la meta es mostrar al estudiante que en muchos casos la propiedad distributiva puede extenderse a la solución del área de un rectángulo compuesto por la suma de más de dos áreas de otros rectángulos (Concepto en acto). Por medio de la sub-meta 1, se espera que el estudiante observe que los rectángulos tienen una longitud en común, a diferencia de la anterior situación esta puede ser la base de un rectángulo con la altura de otro (Teorema en acto). Para lograr esto se pide que calculen el área de cada rectángulo, es decir, el producto de la base por la altura (Concepto en acto). Allí encontraran que uno de esos factores tiene un valor igual al de la otra expresión.

Para esta situación el diseño implicó el uso tanto de valores numéricos como literales para calcular el área de las figuras y seguidamente expresar el producto de las mismas identificando el binomio como factor común (Concepto en acto), con el fin de ir iniciando al estudiante a construir la idea de propiedad distributiva de manera algebraica (conceptualización de la propiedad distributiva).

Las preguntas 1 al 4, permiten trabajar la situación en una clase de representación que es netamente numérica como medida de los segmentos que sirven de base o alturas para los rectángulos visualizados en la ventana de trabajo de Cabri

Geometry II Plus. Los esquemas a movilizar en estos puntos serian las operaciones con números reales y el cálculo de áreas de rectángulos (Concepto en acto). A partir del sexto ítem se muestra una figura similar a la anterior, pero ahora no se observan valores numéricos, en su defecto, cada segmento tiene expresado su longitud en forma literal (Cambio de representación simbólica o signifiicante). De nuevo se espera que el estudiante repita la expresión de áreas de los rectángulos, ahora con literales. La meta es ir iniciando al estudiante a la conceptualización de la propiedad distributiva con un binomio como factor común de manera algebraica.

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA SITUACIÓN 3.

Nombre: Multiplicación de binomios con propiedad distributiva.

Recursos: computadores, software Cabri Geometry II Plus.

Materiales: fotocopia situación 3.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: _____

GRADO: octavo

Situación 3. Producto de binomios con Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales positivos.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Variar la longitud de las bases y alturas de los rectángulos

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (A, B, D y D) de los segmentos.

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo			
Rectángulo azul			
Rectángulo rojo			
Rectángulo verde			

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

4. Mueve los puntos A, R, V y W de un extremo a otro y observa los cambios.

5. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

Ilustración 7. Guía de trabajo situación 3 (página 1).

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo			
Rectángulo azul			
Rectángulo rojo			
Rectángulo verde			

- Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

Ilustración 8. Guía de trabajo situación 3 (página 2).

La situación N° 3 inicia con las instrucciones para abrir el archivo llamado *Multiplicación de binomios con propiedad distributiva* y de allí se implican una serie de respuestas que conllevan a realizar una explicación de manera descriptiva de lo que acontece al realizar de forma correcta las instrucciones de la situación en desarrollo. Este punto moviliza los esquemas de longitudes de los rectángulos y la variación que se muestra a partir del cambio de medida de los segmentos que indica la guía cuyos puntos extremos hay que arrastrar. A continuación debe completar una tabla con los valores que estén brindando los segmentos utilizados para cada rectángulo del color indicado (Cambio de representación simbólica).

El conjunto de esquemas que esperamos movilicen los estudiantes, sean los adecuados de acuerdo con los conceptos y teoremas en acto que este pone en juego.

Por ejemplo, se infiere que el estudiante utilice en primera instancia el teorema en acto del cálculo de área de rectángulo, es decir el producto de base por altura en cada uno de las figuras rectangulares. Por otra parte, el arrastre de los puntos A, B, C y D confirmaría la existencia de valores comunes entre longitudes de los rectángulos. Es importante que el estudiante comience a reflexionar sobre la variación de las longitudes y el área del rectángulo y determinar en qué otras figuras se observa el mismo patrón a la vez para luego determinar los factores comunes.

El punto 2 de completar la tabla permite asignar un valor establecido a cada longitud de los rectángulos, luego deben expresar el producto de ellos para identificar los factores comunes en cada área establecida (Teorema en acto). Así al momento de realizar otras interrogantes, el estudiante tenga en relativo orden los datos necesarios para llegar a conclusiones o resultados pedidos.

Las preguntas 3, 4 y 5 conllevan a formar otra figura a partir de las dadas originalmente en la situación. El arrastre de los puntos A, R, V y W de un extremo a otro permiten visualizar la nueva figura de la que serán parte los rectángulos. Para este caso la reflexión importante es identificar los factores Altura y Base de la nueva figura con el fin de expresar el área en términos de las longitudes. Desde el punto anterior el estudiante debe establecer que las longitudes de los rectángulos forman una nueva figura, por lo cual nuevamente deben utilizar el teorema en acto del producto de cálculo de área de rectángulos teniendo en cuenta el concepto en acto de las áreas de estas figuras, además él debe implicar en su teorema en acto que las

longitudes altura y base de la nueva configuración es ahora la suma de las alturas de los rectángulos de color amarillo y verde, mientras las bases se generan de la suma de las bases de los rectángulos verde y azul.

Con los esquemas que creemos deben ser movilizados en esta parte de la situación de aprendizaje por los estudiantes pueden permitir que las soluciones que produzcan los estudiantes estén estrechamente relacionados con la conceptualización de la propiedad distributiva, porque identifican en la ventana de trabajo por medio del arrastre de las figuras, valores que son comunes en cada cálculo de área, además la expresión aritmética del cálculo del área de la nueva figura.

Concluidos los puntos anteriores, la situación prosigue ahora solicitando al estudiante que ejecute un nuevo archivo en Cabri Geometry II Plus llamado multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio En las interrogantes del 7 al 9 la finalidad es la misma que en las primeras preguntas, sin embargo acá los valores de las longitudes cambian a literales, en consecuencias se tendrán binomios como factores que representan la altura y la base de la nueva figura creada.

La situación 3 permite que los estudiante deban enfrentarse a una serie de conceptos nuevos para él (situación nueva), donde los esquemas que ha reforzado en las anteriores situaciones serán puestas a prueba. Las respuestas brindadas por los estudiantes describirán el comportamiento de la figura al variar la longitud de los segmentos y la conformación de una nueva figura a partir de los rectángulos dados.

En concordancia con Vergnaud (1982) la secuencia de situaciones permite que el estudiante describa o realice su propia conjetura de lo observado en la ventana de trabajo de Cabri Geometry II Plus, llevándolo a nuevos descubrimientos utilizando los teoremas en acto de el cálculo de área para identificar expresiones comunes, y movilizar los conceptos aprendidos durante las anteriores situaciones de aprendizaje para establecer la expresión de la nueva configuración rectangular, logrando hacer inferencias y concluir los objetivos propuestos por el estudiante para dar solución a las preguntas.

3.3.4. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

La última situación de aprendizaje presenta una recopilación de las secuencia de situaciones anteriores. Es importante que los estudiantes descubran el factor común de un trió de rectángulos. Dichos rectángulos están separados y al arrastrar una serie de puntos, estos se reconfiguraran en un solo rectángulo, dando lugar a observar el factor común entre cada figura (ver Anexo carpeta informática. *Actividades Cabri Geometry II Plus - actividad 4 - .”Propiedad Distributiva”*). Esta actividad es tomada del libro de la serie Glifos Arévalo et al (2008), para grado octavo y rediseñada para el contexto de Cabri Geometry II Plus.

En la aplicación de esta situación de aprendizaje se les entregará una guía de trabajo a los estudiantes, en la cual está las preguntas que deben contestar a partir de la experiencia. Estas preguntas las deben responder de manera individual.

Con esta actividad se pretende que el estudiante logre afianzar el concepto de la propiedad distributiva. Se quiere mostrar al estudiante que en muchos casos la propiedad distributiva puede observarse en la solución del área de un rectángulo compuesto por la suma de áreas de otros rectángulos. En primera instancia se espera que el estudiante observe que los rectángulos tienen una longitud en común (que en el caso de la situación de aprendizaje será la altura). Para lograr esto se pide que calculen el área de cada rectángulo, es decir el producto de la base por la altura. Allí encontraran que las expresiones tienen un valor igual entre ellos.

La forma dinámica del Cabri Geometry II Plus permite visualizar que el factor común es un valor numérico o literal que se encuentra multiplicando a otros dos valores y por medio del arrastre que permite el software, identificar este factor común como una variable. En este caso la altura se muestra como un factor común de las bases de los rectángulos. Con el desarrollo de la consigna planteada se espera llegar a la expresión $x (y + z + w)$ donde x es el factor común de la suma de y, z y w

PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS PRELIMINAR DE LA SITUACIÓN 4.

Nombre: Propiedad distributiva con cuadriláteros.

Recursos: Computadores, software Cabri Geometry II Plus.

Materiales: Fotocopia situación 4.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: _____

GRADO: octavo

Situación 4. Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales.
 Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *propiedad distributiva*.
- Variar la longitud de la altura de los rectángulos.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas un extremo de los segmentos de colores.

2. Mueve los puntos U, R, V de un extremo a otro y observa los cambios. ¿Cuál crees que es el segmento que se debe considerar como el factor común en todas las áreas de los rectángulos? ¿Por qué?

3. Abre el archivo con el nombre de *propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.
- Unir los tres rectángulos en uno solo.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo			
Rectángulo azul			
Rectángulo rojo			

Ilustración 9. Guía de trabajo situación de aprendizaje 4 (página 1).

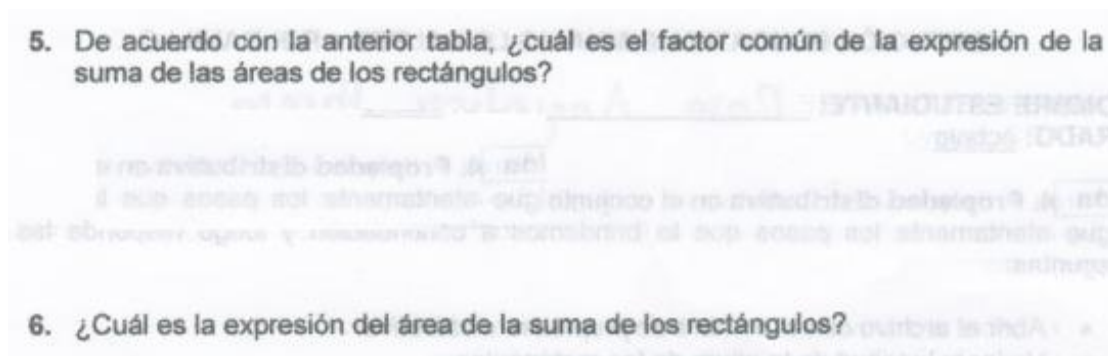


Ilustración 10. Guía de trabajo situación de aprendizaje 4 (página 2).

En este apartado se presenta la situación de aprendizaje N° 4 que fue implementada en el grupo de estudiantes de octavo. La situación de aprendizaje fue diseñada para ser desarrollada individualmente.

La guía de trabajo inicialmente empieza mostrando las instrucciones que le permite al estudiante variar la longitud de la base y la altura de los rectángulos por medio del arrastre e ir visualizando los cambios las invariantes y las variaciones presentes en la construcción para luego dar respuesta a una serie de preguntas. Es importante que el estudiante tenga organizado sus esquemas, por ejemplo debe anticipar que el resultado que obtendrá será una expresión desarrollada utilizando un valor común como factor de una suma de longitudes (concepto en acción propiedad distributiva). También debe poner en práctica aquellos conceptos que a través de la secuencia de situaciones ha fortalecido, atendiendo a lo que expuesto por Vergnaud (1982) cuando afirma que un campo conceptual requiere el dominio de varios

conceptos de naturaleza distinta, debido a que un concepto no se forma aislado sino en conjunto con otros.

La primera pregunta busca que el estudiante después de haber observado la variación que tienen las figuras rectangulares de acuerdo a los segmentos que conforman la base y la altura. Explique que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos e identifique los factores comunes. Según lo anterior, el estudiante debe poner en acción el teorema en acto del cálculo de área de rectángulo, y la variación que sufre el mismo cuando una de sus longitudes varía.

En el punto 2 se encuentra una instrucción acompañada de dos preguntas, la instrucción conlleva a formar otra figura a partir de las dadas originalmente en la actividad. El arrastre de los puntos a , r , v y w de un extremo a otro permiten visualizar la nueva figura de la que serán parte los rectángulos. Para este caso la reflexión importante es identificar los factores Altura y Base de la nueva figura con el fin de expresar el área en términos de sus factores, que es lo que se espera lograr al responder las dos preguntas. Con respecto a este punto es necesario que a partir de la visualización de la pantalla de trabajo de Cabri Geometry II Plus, el estudiante genere anticipaciones sobre los esquemas que deberá movilizar para obtener una expresión aritmética donde se obtenga un valor común como factor de una suma.

El punto 3 es una instrucción la cual se debe realizar paso a paso para posteriormente dar respuesta a las preguntas 4, 5 y 6. Los estudiantes deben

completar una tabla especificando la base, la altura y la expresión de áreas de cada rectángulo (rectángulo amarillo azul y rojo), identificar el factor común de los tres rectángulos y escribir cual sería la expresión del área total la suma de los rectángulos aplicando el concepto de propiedad distributiva, para ello deberán poner en acción el concepto en acto de las operaciones de los números reales y los teoremas en acto como producto, calculo de área y operaciones con expresiones algebraicas. En estos puntos (4, 5 y 6) los valores de las longitudes ya no son valores numéricos si no literales con el fin de trabajar con expresiones algebraicas.

3.4. APLICACIÓN DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES.

Las cuatro actividades se presentaron a cinco estudiantes del colegio Gimnasio los Alpes del municipio de Roldanillo en la mañana del 23 de julio de 2012 a las 9:00 a.m. en las instalaciones de colegio Belisario Peña Piñeiro de dicha localidad. La sección fue llevada a cabo allí, debido a que se contaron con estudiantes que voluntariamente participaron en las secuencias de situaciones de aprendizaje, por motivos que los estudiantes se encontraban en receso académico.

A cada estudiante se le hizo el préstamo de un portátil con las carpetas de las situaciones en el escritorio del computador, además se entregaron las fotocopias con las instrucciones y las preguntas para cada una de las situaciones.

Los encargados de aplicar las situaciones, minutos antes prepararon los equipos portátiles con el programa Cabri Geometry II Plus, la carpeta de las

situaciones y la macro rectángulo que se utilizaría en la primera actividad de reconocimiento de la herramienta y los conceptos previos a abordar durante la jornada. Luego cada docente ayudaba en el desarrollo de las situaciones, a responder inquietudes y aclarar las dudas de los estudiantes y en algunas ocasiones intervenía en las orientaciones.

Las situaciones se trabajaron de manera individual para que cada estudiante lograra observar y realizar sus propias conclusiones de acuerdo a las instrucciones y preguntas que se asignaron en cada una. Algunos estudiantes entregaron las soluciones de las situaciones un poco más temprano que otros, el último estudiante terminó a las 11:45 a.m. Al final de la sesión se recogieron las hojas de trabajo de los estudiantes.

En el desarrollo de las secuencias de situaciones se han determinado dos técnicas e instrumentos de recogida de datos. Se utilizaron registros escritos como: hojas de trabajo de las cuatro actividades aplicadas a los estudiantes, y un registro visual a través de fotos y de la grabación de video.

3.5. RESULTADOS OBTENIDOS EN LA APLICACIÓN DE LAS SITUACIONES

Se describen los resultados obtenidos de la producción escrita por parte de los estudiantes después de la aplicación de las secuencias de situaciones. Se muestran algunas ilustraciones de los archivos en Cabri Geometry II Plus e imágenes de los trabajos realizados por los estudiantes, para ello se hará mención a los estudiantes con las siglas (E₁, E₂, E₃, E₄ y E₅)

3.5.1. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 1.

Calcula el área del rectángulo.

En la primera fila de la tabla con los pasos a seguir y las instrucciones, se solicita al estudiante que abra el archivo en Cabri Geometry II Plus con el nombre de *Calcula el área del rectángulo*. Allí encontraran la siguiente ventana de trabajo.

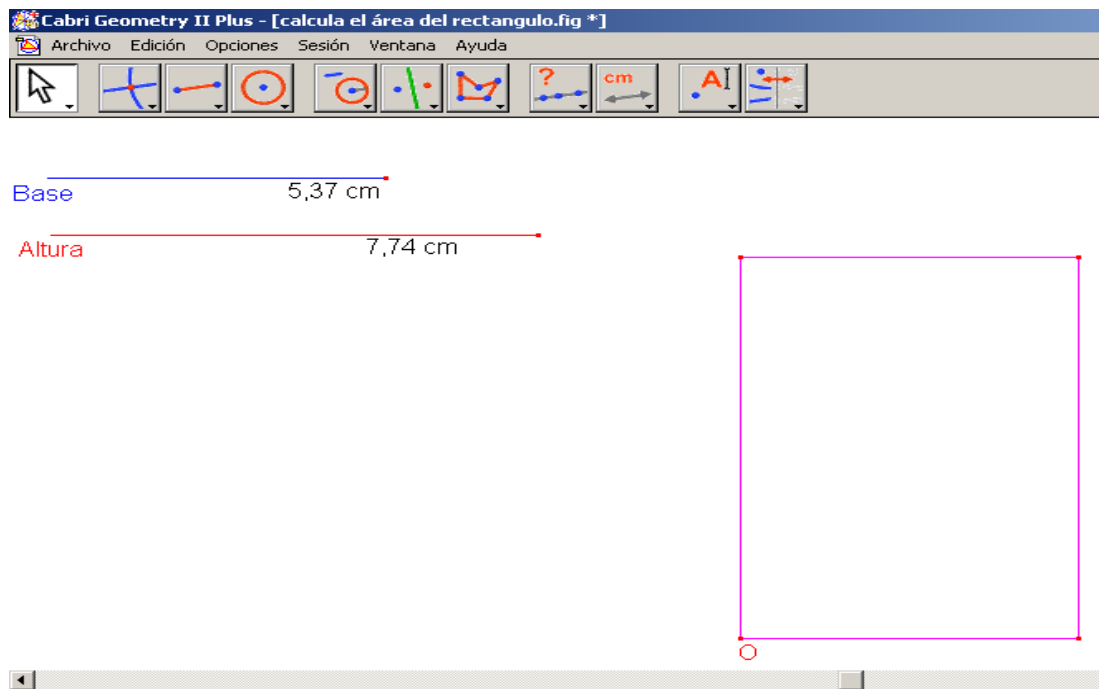


Ilustración 11. Ventana de trabajo situación de aprendizaje "Calculo de área".

Con el desarrollo de esta primera situación de aprendizaje se notó que al iniciarla, la mayoría de los estudiantes se les dificultó un poco debido a la interacción con un sistema nuevo para ellos, esta situación de aprendizaje fue en primera instancia de reconocimiento y manejo del software Cabri Geometry II Plus, a la vez que se trabajaba el concepto de área y variación de la misma.

En cuanto a la pregunta ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo? La mayoría de los estudiantes coincidieron en afirmar que el área varía.

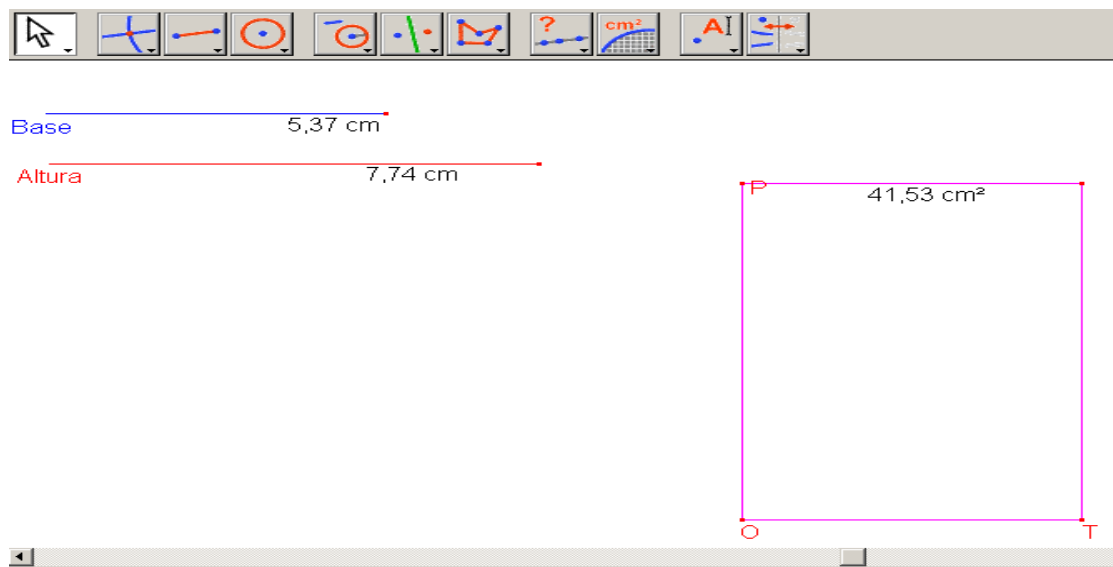


Ilustración 12. Cálculo de área de rectángulo a partir de las instrucciones de la situación de aprendizaje.

En cuanto a las producciones textuales realizadas por los estudiantes, se observó que ellos logran realizar la expresión de los valores del área del rectángulo inicialmente construido, luego por medio del arrastre de los extremos de cada segmento logran evidenciar la variación que sufre el área como consecuencia de la variación de la base y la altura de este.

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre *de rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$$A = \underline{5,37\text{cm} \cdot 7,79\text{cm}}$$

$$A = \underline{41,56\text{cm}^2} \quad \text{Área del rectángulo}$$

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura

- Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.

3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

el área aumenta o disminuye, variando directamente proporcional a las magnitudes de los segmentos Base y Altura (Azul y Rojo)

Ilustración 13. Producción textual y operatoria de E₅.

El estudiante E₅ logra expresar el área de la figura inicial a partir de las longitudes de los segmentos base y altura. Se puede inferir que la observación que hizo el estudiante en la ventana de trabajo de Cabri Geometry II Plus organizó algunas anticipaciones en concordancia a lo planteado por Vergnaud (1997) Luego en su producción textual se nota claramente que pudo evidenciar la variación del área de la figura cuando arrastra cualquiera de los segmentos. De acuerdo a la producción textual es claro que el estudiante movilizó el esquema de área de rectángulos y lo hace a partir de la puesta en acción del teorema en acto el cálculo de áreas de

rectángulo cuando utiliza el producto de las longitudes base por altura del rectángulo y concluye que el valor del área de la figura esta variando en relación a la variación de cualquiera de sus longitudes.

La producción del estudiante E₅, involucra el concepto de proporcionalidad (concepto en acto). Es posible que para este estudiante la proporcionalidad sea un tema que abarcará las posteriores situaciones, y utilizó este concepto como un esquema para realizar su respuesta en forma descriptiva. Este tipo de respuestas muestra los distintos esquemas utilizados por los estudiantes para llegar a la solución de la actividad.

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre de *rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$A = 5,37m \times 7,74 m$

$A = 41,5638$ Área del rectángulo

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura

- o Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.

3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

El area aumenta o disminuye dependiendo de como se mueben las longitudes.

Ilustración 14. Producción textual y operatoria de E₅.

Es importante resaltar que el esquema utilizado por el estudiante en esta situación de aprendizaje es el que pretende reforzar la actividad, ya que esta describiendo claramente que pasa con el área cuando una de las longitudes del rectángulo esta variando. Matemáticamente, es posible justificar que la actividad retomó el concepto en acto de área de rectángulo y la variación que puede sufrir cuando se modifica la base o la altura del mismo, gracias al arrastre que permite Cabri Geometry II Plus. Este arrastre que permitió Cabri Geometry II Plus en la situación de aprendizaje 1 ha dejado en claro que se logra organizar los primeros esquemas de área, concepto que tendrán que utilizar los estudiantes en las posteriores actividades como un elemento para llegar a conceptualizar la propiedad distributiva.

3.5.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 2

Propiedad distributiva con cuadriláteros.

La finalidad de esta actividad fue que a partir de la manipulación de unos segmentos, los cuales inicialmente tenían valores numéricos, los estudiantes lograran establecer que el área del rectángulo se puede obtener a partir de la suma de las áreas de los dos rectángulos, identificando cual era el factor común entre ellos.

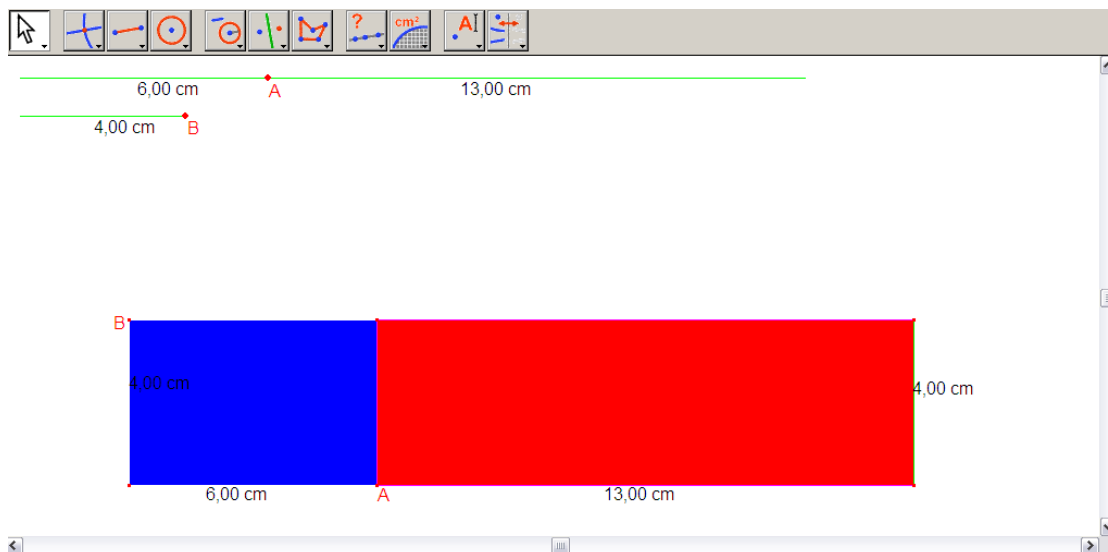


Ilustración 15. Propiedad distributiva con cuadriláteros. Ventana original de trabajo de la segunda situación de aprendizaje.

Como la actividad no conducía a realizar construcciones, fue importante observar la producción escrita de cada estudiante, razón por la cual debían llenar luego una tabla en primera instancia con valores numéricos y en segunda instancia con expresiones literales. Así el objetivo de este trabajo es que ellos logaran identificar el valor común que existía entre los rectángulos de colores y establecer la expresión en propiedad distributiva con el factor común de las expresiones de la sumatoria de áreas.

El 60% de los estudiantes alcanzó el objetivo propuesto, ya que lograron establecer la operación de propiedad distributiva. Identificando el factor común. El 40% restante solo expresaron la suma de los resultados de las áreas, sin embargo no establecieron la expresión con un factor común, aunque logran identificarlo.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 4,95 \times 5,95$	$A_2 = 14,05 \times 5,95$
Resultado	$A_1 = 29,45$	$A_2 = 83,60$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$$A_t = A_1 + A_2$$

$$A_t = 29,45 + 83,60 = 113,05$$

$$5,95 (4,95 + 14,05) = 113,05$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

Es el 5,95

Ilustración 16. Producción textual y operatoria de E₄.

Se evidencia claramente que el estudiante E₄ en su producción escrita logra identificar el factor común, porque por medio de dos expresiones logra desarrollar el concepto de propiedad distributiva donde un número es un factor común de los productos de la suma de las dos áreas. En este caso el estudiante moviliza el concepto de valor común agregado al esquema aprendido en la anterior situación de aprendizaje como es el área de rectángulos para lograr conceptualizar el producto con un factor como valor común en la expresión.

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

A = base · altura

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 6,00 \text{ cm} \cdot 4,00 \text{ cm}$	$A_2 = 13,00 \cdot 4,00$
Resultado	$A_1 = 24,00 \text{ cm}^2$	$A_2 = 52,00$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$A_t =$

$$A_t = 24,00 \text{ cm}^2 + 52,00 \text{ cm}^2 = \cancel{76,00 \text{ cm}^2}^{10,00 \text{ cm}} 76,00 \text{ cm}$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

que tienen el mismo valor de altura

Ilustración 17. Producción textual y operatoria de E_3 .

La producción textual de E_3 demuestra que no plasma en su respuesta todos los procesos paso a paso. Hace un trabajo analítico del valor común que se establece entre las dos áreas, y plantea de forma descriptiva la respuesta a la pregunta 3. En esta situación de aprendizaje los esquemas que moviliza este estudiante en conjunto son los conceptos de área de rectángulo, operaciones con números reales, y los teoremas en acto para el caso utilizado por el estudiante es el producto de longitudes base por altura.

Posteriormente se realizó una actividad muy similar donde los segmentos fueron nombrados con literales y se omitió su valor numérico, con la finalidad de que los estudiantes encontraran la expresión del área de los rectángulos, iniciándolos en la construcción de una idea algebraica de la propiedad distributiva.

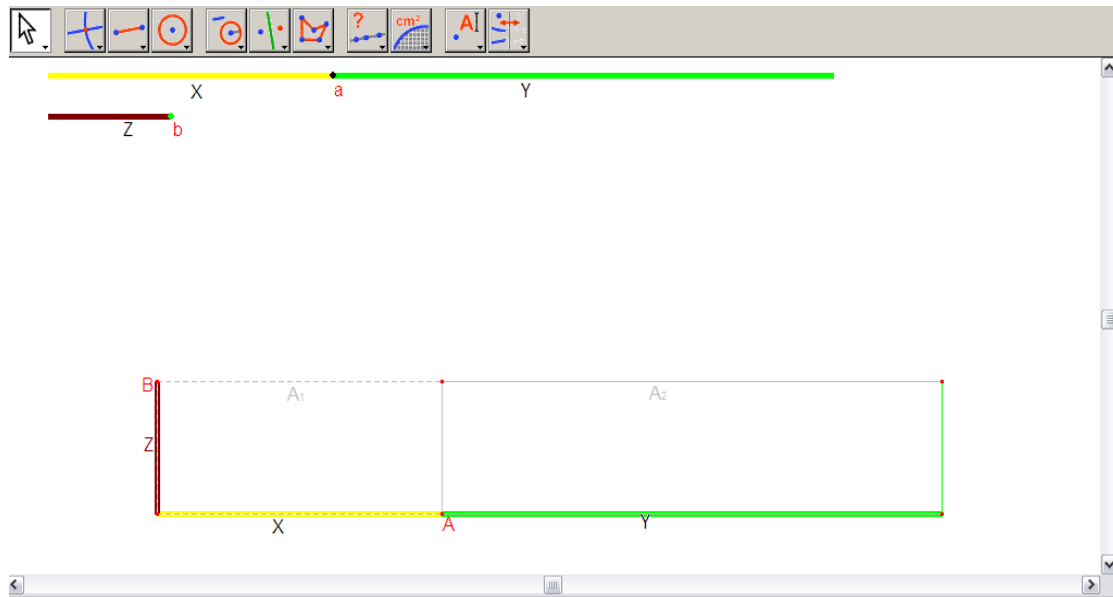


Ilustración18. Propiedad distributiva con cuadrilátero ejercicio. Ventana original de trabajo de la segunda situación de aprendizaje en el ítem 4.

La misma actividad realizada ahora con expresiones algebraicas arroja un balance muy similar al punto anterior. Se debe hallar el factor común de los resultados de las áreas de los rectángulos. El 60% de los estudiantes logran establecer la expresión donde el factor común es la altura de los rectángulos.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	y	z	$A = y \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$A = z(x + y)$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

$$z(x + y) = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

Ilustración 19. Producción textual y operatoria de E_4 .

El estudiante identifica claramente las longitudes en expresiones literales de los segmentos de cada rectángulo. Luego se nota la clara aplicación de la propiedad distributiva, donde el factor común es el literal z estableciendo la razón de equivalencia entre las dos expresiones. Los esquemas utilizados por el estudiante claramente son los de operaciones con expresiones algebraicas y área de rectángulos. La organización de los invariantes hace que el estudiante aplique la propiedad distributiva al observar en la ventana de trabajo que la altura que comparten los dos rectángulos es de igual valor, y que por más que modifique los segmentos, los valores de la altura serán los mismos para ambas figuras. Así, la sumatoria de áreas conceptualizaría aun más el concepto de propiedad distributiva como el producto de un valor común en la expresión de suma de dos cantidades.

El 40% de los estudiantes realiza dicha expresión, pero omiten el paréntesis que toma a la suma de las bases como una sola unidad, lo cual puede dar paso a operar de acuerdo a la jerarquía de las operaciones, donde primero se realizan las multiplicaciones y luego las sumas. Pero es importante resaltar que aun así, el estudiante logra concluir que la altura es el factor común de la expresión.

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.

- Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.
- Observa los cambios en la figura.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	y	z	$A = y \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$A = x + y \cdot z$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

El factor común es z

Ilustración 20. Producción textual y operatoria de E_2 . Omisión de paréntesis.

Esta actividad permitió acercar a los estudiantes a la propiedad distributiva iniciando la actividad con expresiones numéricas y posteriormente generalizándola en su forma algebraica a partir de la longitud en común de la suma de los productos de dos áreas de rectángulos.

3.5.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 3

Multiplicación de binomios con propiedad distributiva.

En la primera fila de la tabla con los pasos a seguir y las instrucciones, se solicita al estudiante que abra el archivo en Cabri Geometry II Plus con el nombre de *Multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Allí encontraran la siguiente ventana de trabajo.

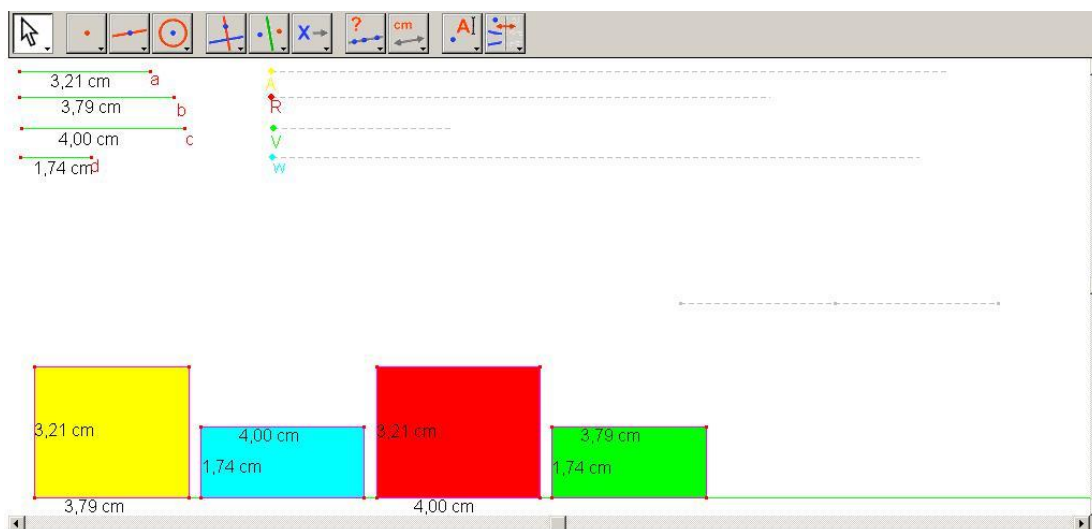


Ilustración 21. Multiplicación de binomios con propiedad distributiva. Ventana original de trabajo de la tercera situación de aprendizaje.

El estudiante observó que al variar la longitud de los segmentos, se establece un cambio en los valores de los rectángulos que comparten la longitud de dicho rectángulo. Pero el caso va más allá de esta aclaración, debido a que han logrado identificar algunas de las relaciones de los segmentos con los rectángulos, por

ejemplo el más sencillo y claro es el segmento con extremo “a”, ya que se nota que forma parte de la altura de los rectángulos de color amarillo y rojo. Igualmente pasa con el segmento que tiene como extremo el punto “d”, porque se identifica claramente que forma parte de la altura de los rectángulos azul y verde. Los segmentos con extremos “b” y “c” muestran claramente que varían las bases de los rectángulos de color *amarillo – verde* y *azul – rojo* respectivamente, pero como estos se encuentran situados sobre una semirrecta oculta, la impresión que dan es que los demás rectángulos también están variando, sin que ellos se hayan percatado que las longitudes no están cambiando, sino que se están cambiando de posición en la ventana de trabajo debido a la longitud que toman las bases de los rectángulos implicados con los segmentos que están variando.

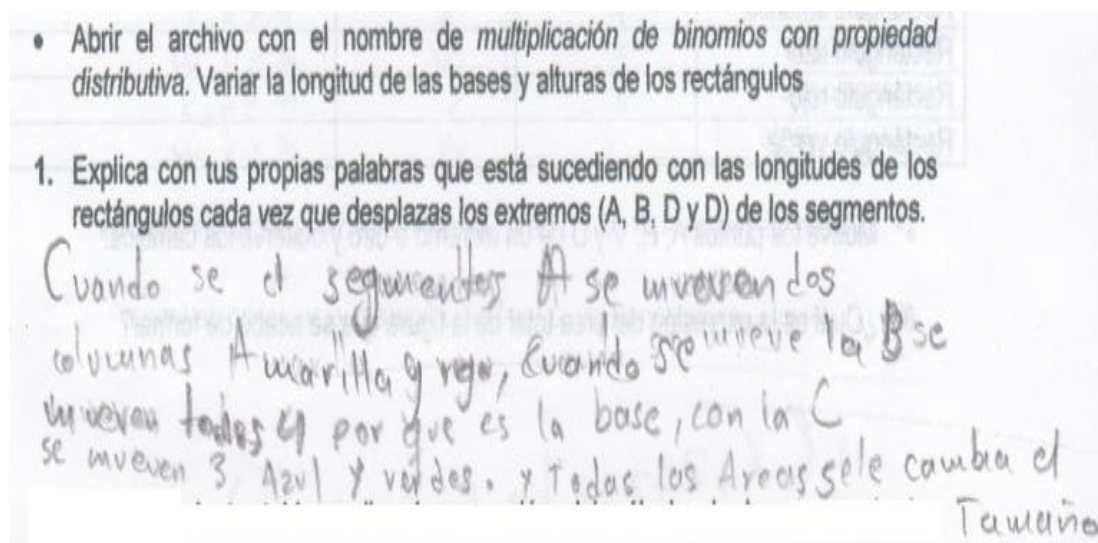


Ilustración 22. Producción textual de E₄.

La estudiante E₄ no establece la relación que existe entre las diferentes magnitudes de los segmentos que establecen las bases y las alturas de los rectángulos. Esta dificultad puede estar asociada a la forma en que se plantea la pregunta o a una conjetura visual. (Ver Anexo carpeta informática. *Actividades Cabri Geometry II Plus - actividad 4 “Multiplicación de Binomios con **Propiedad Distributiva**).*

Desde el campo conceptual esta errónea visualización podría generar que se movilicen esquemas diferentes a los que originalmente busca generar la situación de aprendizaje.

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	4,50	4,11	$A = 4,50 + 4,11$
Rectángulo azul	3,53	2,84	$A = 3,53 + 2,84$
Rectángulo rojo	3,53	4,11	$A = 3,53 + 4,11$
Rectángulo verde	4,50	2,84	$A = 4,50 + 2,84$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

Por que hay unas columnas que se mueven a la misma vez que muebe un segmento

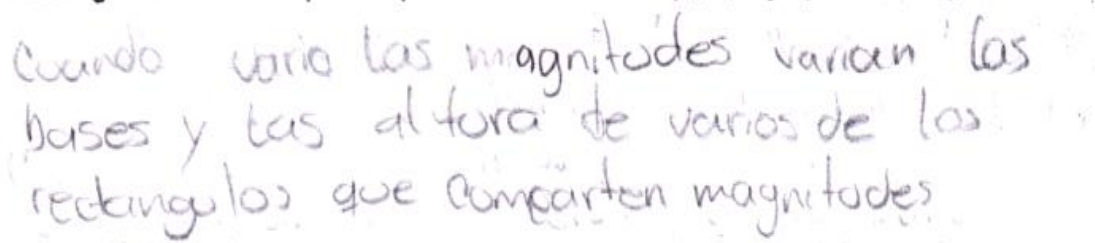
Ilustración 23. Tabla de valores para las longitudes de las bases de los rectángulos. Hoja de trabajo de E₁.

La producción textual del estudiante indica que los esquemas movilizados son precisamente los que se han trabajado en anteriores situaciones, donde el teorema en

acto son las operaciones de producto y suma de números reales, mientras el concepto en acto se trabaja desde el concepto de área de rectángulo. La diferencia de los resultados del estudiante se observa en la forma de argumentar sus soluciones ya que de acuerdo a lo que el logra visualizar en la ventana de trabajo, que varias figuras se mueven cuando se varia un segmento, sin tener en cuenta que esas figuras comparten unas bases colineales a una semirrecta oculta, por lo cual da la impresión que todas las figuras cambiaran el valor de su área.

Otras producciones de estudiantes tratan de explicar los factores comunes que existen entre los rectángulos, pero no dejan clara dicha relación ya que no son explícitos en decir que longitudes son comunes y cuales pertenecen a los rectángulos.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (a, b, c y d) de los segmentos.



cuando varia las magnitudes varían las bases y las alturas de varios de los rectángulos que comparten magnitudes

Ilustración 24. Producción textual de E₁.

A pesar que hubo dificultades en identificar los segmentos con magnitudes iguales al arrastrar los extremos *a*, *b*, *c* y *d* de los segmentos, en el punto dos, el completar la tabla hizo posible establecer los valores comunes entre pares de rectángulos.

Aún con las dificultades presentadas para la argumentación de las soluciones, es importante resaltar que los esquemas movilizados por los estudiantes les permiten organizar de manera clara la forma de operatoriedad con las expresiones, y conjugan varios conceptos para lograrlo, sin embargo al momento de argumentar con sus propias palabras no logran tener una explicación clara de lo que originalmente está sucediendo en la ventana de trabajo.

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	3,55cm	3,61cm	$A = 3,55 \cdot 3,61 \text{ cm}$
Rectángulo azul	3,53 cm	2,42cm	$A = 3,53 \cdot 2,42 \text{ cm}$
Rectángulo rojo	3,53cm	3,61cm	$A = 3,53 \cdot 3,61 \text{ cm}$
Rectángulo verde	3,55cm	2,42cm	$A = 3,55 \cdot 2,42 \text{ cm}$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

Porque hay rectángulos que comparten magnitudes o sea bases y Alturas.

Ilustración 25. Tabla de valores para las longitudes de las bases y las alturas de los rectángulos. Hoja de trabajo de E₁.

Es resaltable que cada estudiante ha podido establecer que la altura o la base de los rectángulos son factores comunes en pares de rectángulos, pero al 60% de los estudiantes le es difícil establecer una expresión en factores del área de la nueva configuración del rectángulo, a partir de la suma de áreas de los rectángulos originales.



Ilustración 26. Rectángulo construido a partir del arrastre de los puntos A, R, V y W según las instrucciones de la guía de trabajo. Ventana de trabajo de E₄.

Una dificultad observada en la expresión formada por el 60% de los estudiantes de acuerdo a la nueva configuración del rectángulo y los valores que observaban en ella, fue que tomaron todos los valores que determinaban las bases y las alturas de cada rectángulo, dando así una expresión del área con valores repetidos para el producto de la suma de alturas por la suma de bases. Aquí, los esquemas configurados para llegar a las soluciones o metas planteadas por los estudiantes, se ven afectados por otro concepto que se infiere es el de perímetro, ya que suman las longitudes. Este caso nos pone de manifiesto que los esquemas que movilizan los estudiantes al observar la ventana de trabajo son totalmente diferentes a los que se esperaban que produjeran de acuerdo al análisis preliminar. El concepto elegido por

el estudiante causa que se tomen teoremas en acto no errores sino inadecuados para la solución de la situación.

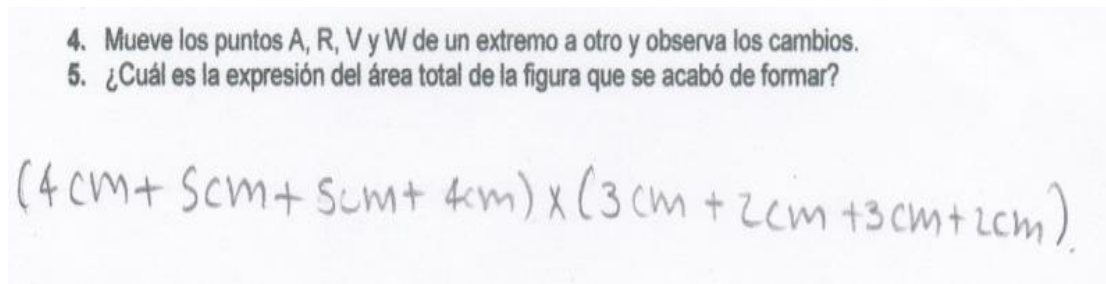


Ilustración 27. Producción operatoria de E_4 .

De igual manera pasa con la expresión de los rectángulos con longitudes literales. Ellos pueden manejar las expresiones para las áreas de cada rectángulo por separado, pero cometen el mismo error al reconfigurar los rectángulos en uno solo.

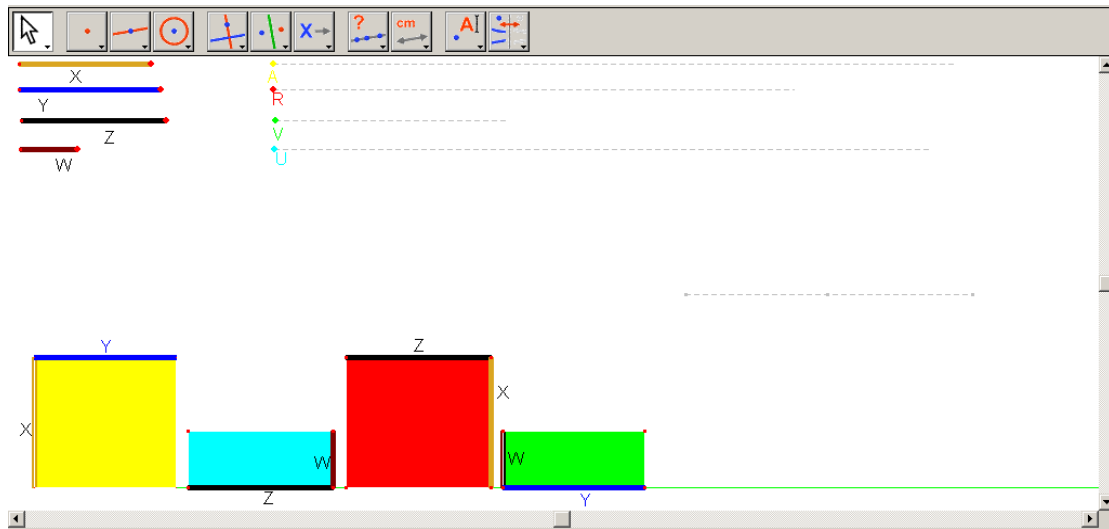


Ilustración 28. Multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio. Ventana original de trabajo de la tercera situación de aprendizaje.

En la ventana de trabajo, los estudiantes siguen atentamente los pasos para reconfigurar los cuatro rectángulos en uno solo. Ahora las longitudes de cada rectángulo están expresadas en literales.

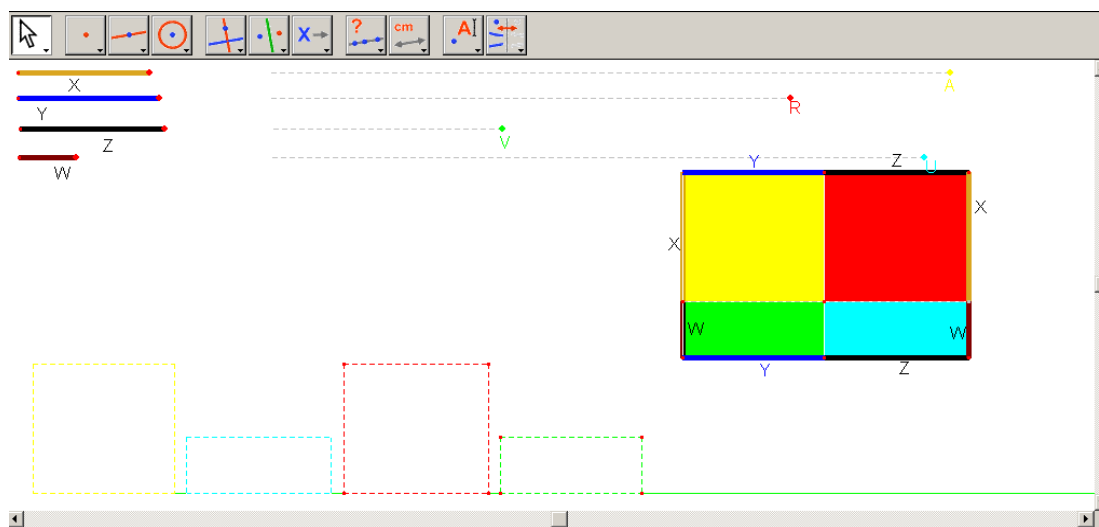


Ilustración 29. Rectángulo construido a partir del arrastre de los puntos A, R, V y W según las instrucciones de la situación de aprendizaje. Ventana de trabajo de E_4 .

Nuevamente la producción operatoria del estudiante de acuerdo a la nueva configuración del rectángulo y los valores que observaban en ella, se observa la dificultad al expresar el área con valores repetidos para el producto de la suma de alturas por la suma de bases. La movilización de los esquemas para lograr la anticipación de metas en la solución de la situación de aprendizaje ha tomado un camino diferente para este estudiante, debido a que afrontar una nueva situación de aprendizaje, ha hecho tomar un conjunto de conceptos relacionados con el cálculo del perímetro de cuadriláteros.

Otros estudiantes lograron utilizar el concepto en acto de área de rectángulos y las operaciones con expresiones algebraicas para determinar que el cálculo total del área de la nueva figura es el producto de los binomios conformados por la altura y la base.

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	y * x
Rectángulo azul	z	w	z * w
Rectángulo rojo	z	x	z * x
Rectángulo verde	x	w	y * w

• Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$(y + z) \cdot (x + w)$

Ilustración 30. Producción operatoria de E₄.

Con respecto a la producción textual y operatoria del 40% de estudiantes en la actividad tres, se observa que en la reconfiguración de la figura, se suman las alturas de los rectángulos con longitudes x y w , y realizan el producto por la suma de las bases y y z para establecer el área con un binomio como factor común. La respuesta a la situación de aprendizaje resalta los esquemas adecuados, ya que

moviliza el concepto de área y de los teoremas en acto como la reconfiguración de la nueva figura tomando en cuenta que ahora las nuevas dimensiones son el resultado de la suma de las alturas y y z y las bases x y w .

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones en factores del área de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión en factores
Rectángulo amarillo	y	x	$A = y \cdot x$
Rectángulo azul	z	w	$A = z \cdot w$
Rectángulo rojo	z	x	$A = z \cdot x$
Rectángulo verde	y	w	$A = y \cdot w$

8. Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.
 9. ¿Cuál es la expresión en factores del área total de la figura que se acabó de formar?

$A = (y + z) \cdot (x + w)$

Ilustración 31. Producción operatoria de E_1 .

La tercera actividad no permitió esclarecer en la mayoría de los estudiantes el factor común como un binomio, ya que lo visualizado en la ventana de trabajo y los esquemas utilizados por ellos para llegar a las soluciones no fueron las esperadas de acuerdo a los análisis preliminares. De lo anterior es preciso señalar que los esquemas utilizados por ellos no son los adecuados para esta situación de aprendizaje, lo que conlleva a pensar en que otros conjuntos de esquemas pueden estar obstaculizando el total desarrollo de la conceptualización de la propiedad distributiva y en este caso, se estaría de acuerdo con Vergnaud (1990) cuando afirma que la dificultad de una

situación de aprendizaje no es ni la suma ni el producto de la dificultad de las diferentes submetas que se propone el estudiante, pero el fracaso en una submeta implicará el fracaso global.

La posible dificultad que se puede observar es que el esquema utilizado por los estudiantes es similar a las anteriores actividades, donde se sumaban las bases, pero la altura es común. Aquí el 60% de los estudiantes tomó cada valor que lograron observar en las figuras, sin establecer que la nueva figura solo toma los valores comunes para establecer la suma de la longitud de las alturas y luego realizar el producto con la suma de las bases.

3.5.4. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA SITUACIÓN 4.

Multiplicación de binomios con propiedad distributiva.

En las instrucciones, se solicita al estudiante que abra el archivo en Cabri Geometry II Plus con el nombre de ***Multiplicación de binomios con propiedad distributiva.*** Allí encontraran la siguiente ventana de trabajo.

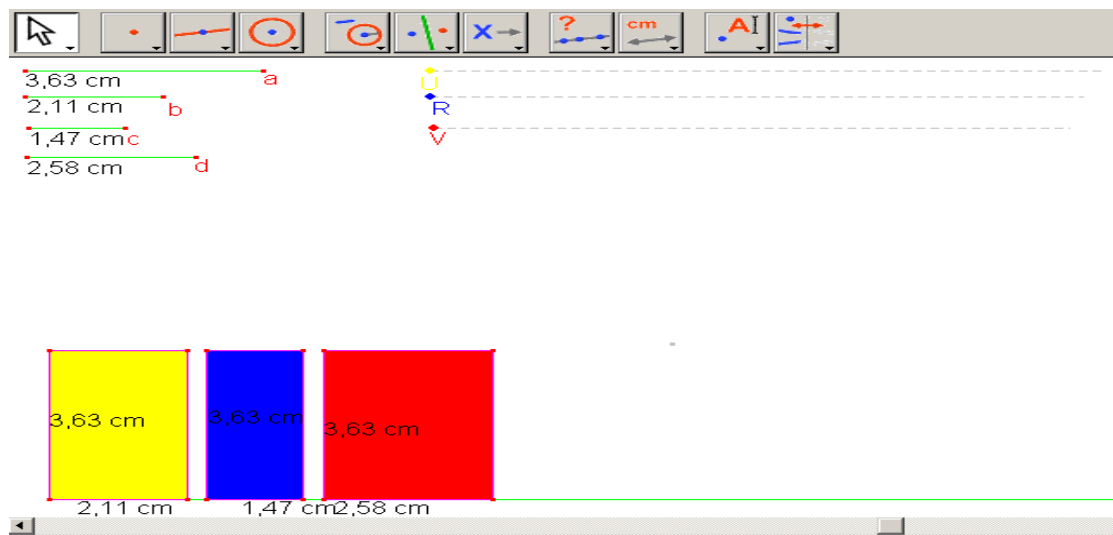


Ilustración 32. Propiedad distributiva. Ventana original de trabajo de la cuarta situación de aprendizaje.

La situación de aprendizaje es un refuerzo de los ejercicios anteriores, por tanto es claro que los estudiantes en esta conclusión de la actividad tienen un mayor conocimiento del concepto de la propiedad distributiva, ya que el 80% de los estudiantes logra identificar el factor común que tiene cada área de los rectángulos, en este caso la altura. La figura inicial está compuesta por tres rectángulos cuya altura es el factor común, y sobre la cual los estudiantes establecerán las soluciones a las preguntas de forma textual como operatorias. Por medio de la hoja de trabajo, se les solicita a los estudiantes analizar lo que sucede con las figuras cuando se hace el arrase de los segmentos con extremos *a*, *b*, *c* y *d*.

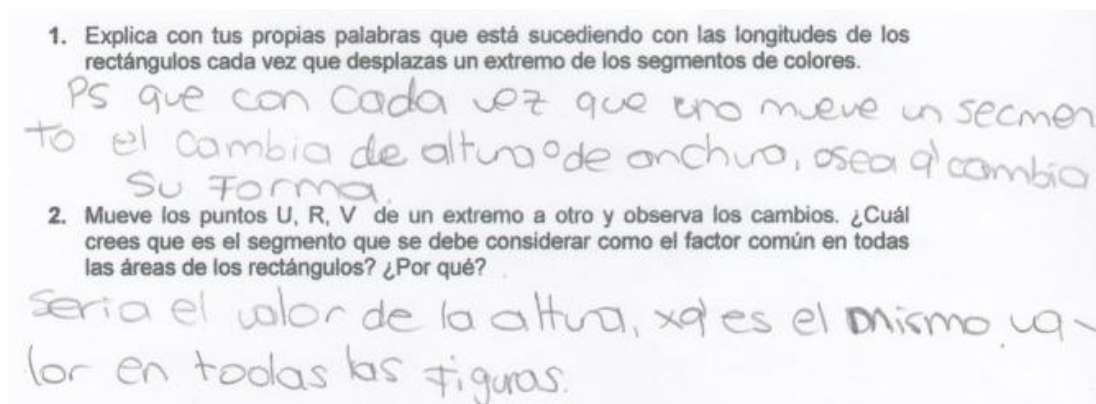


Ilustración 33. Producción textual de E₃.

Este primer análisis realizado por los estudiantes, permite la identificación del factor común para luego ser aplicada a la propiedad distributiva. En esta actividad es fácil identificar los segmentos que conforman cada rectángulo, y en especial el segmento que conforma la altura de cada rectángulo. Los esquemas utilizados para lograr argumentar esta pregunta de la situación de aprendizaje 4, tiene que ver con los conceptos que moviliza la visualización de la figura en la ventana de trabajo de Cabri Geometry II Plus, donde se aplica el concepto que los estudiantes han estructurado a través de las situaciones donde se implica que la variación de los segmentos que configuran los rectángulos modificarían las áreas de los mismos. Por tanto, relucen los primeros resultados de la actividad, ya que pueden crear tareas y subtarear adecuadas para lograr la conceptualización adecuada y por tanto, la elección de los esquemas pertinentes para afrontar la nueva situación de aprendizaje.

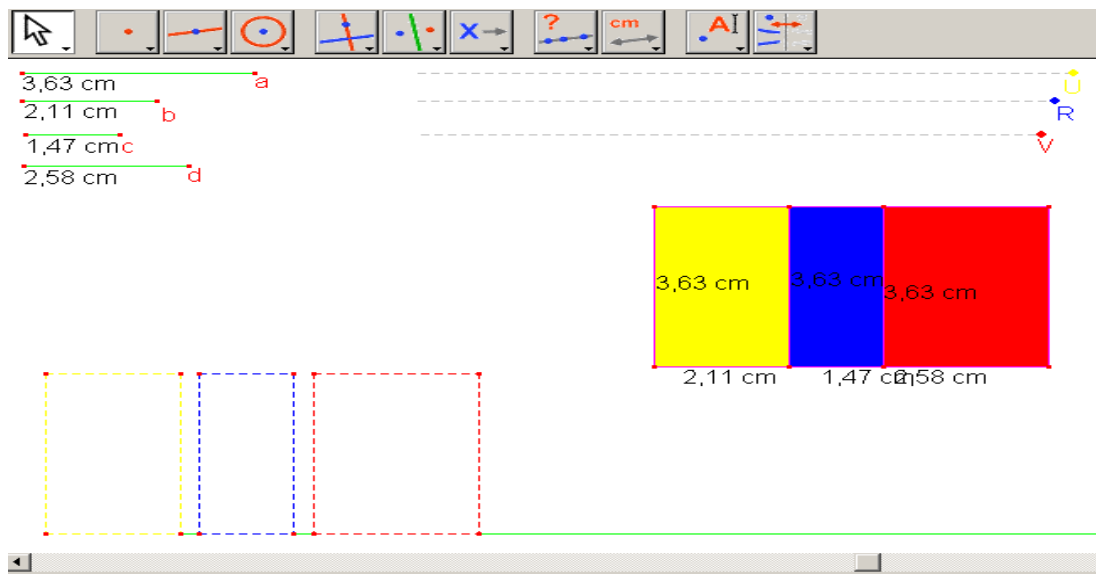


Ilustración 34. Propiedad distributiva. Ventana original de trabajo de la cuarta situación de aprendizaje.
Reconfiguración de los rectángulos.

Los resultados obtenidos obtiene es que cada participante de las situaciones logra establecer el cálculo del área del rectángulo configurado por los tres rectángulos, así muestran claramente que la altura es un factor común de la base conformada por la suma de los segmentos y , z & w .

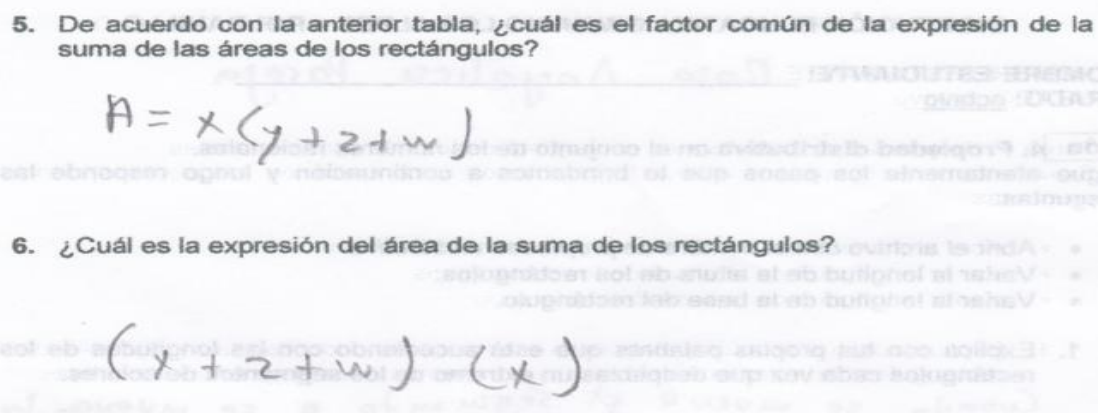


Ilustración 35. Producción operatoria de E_4 .

La anticipación de las tareas a realizar para lograr el resultado, implica que los esquemas movilizados en los resultados fueron adecuados, ya que se nota que aplican el concepto que han trabajado en situaciones anteriores donde los estudiantes obtienen una expresión deducida de la propiedad distributiva cuyo factor común es la altura de cada uno de los rectángulos. También se evidencia la puesta en acción de los teoremas en acto como la sumatoria de las expresiones que representan las áreas de cada rectángulo para la nueva configuración de la figura resultante del arrastre de los puntos U, R y V.

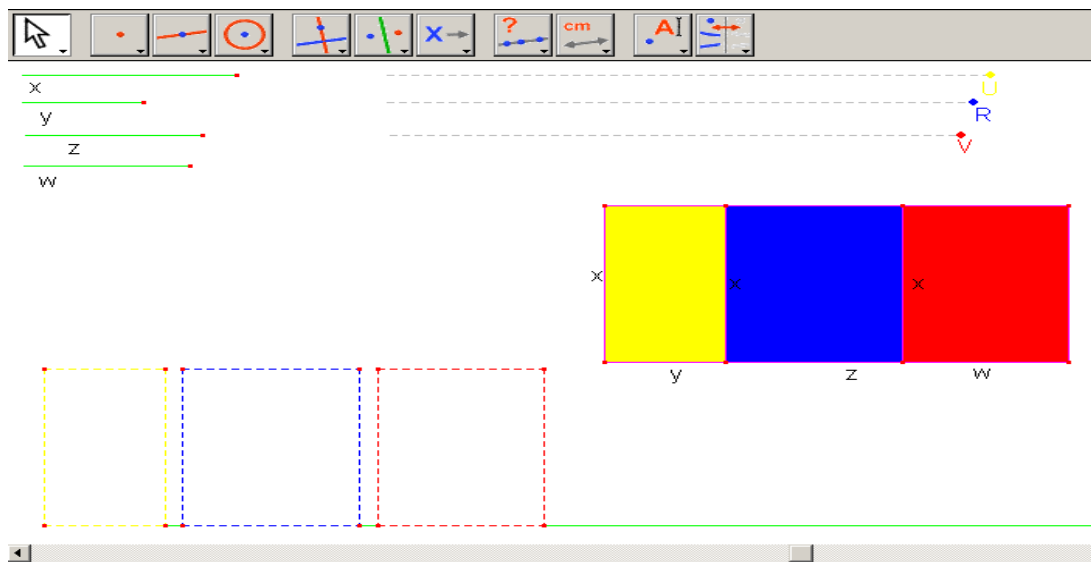


Ilustración 36. Propiedad distributiva ejercicio. Ventana original de trabajo de la cuarta situación de aprendizaje.
Reconfiguración de los rectángulos con longitudes literales.

La configuración de los rectángulos, permite que el estudiante logre identificar el factor común que en este caso es el literal x . Luego la solución que se pide en la actividad, es expresar el producto del factor común con la suma de las bases de los rectángulos.

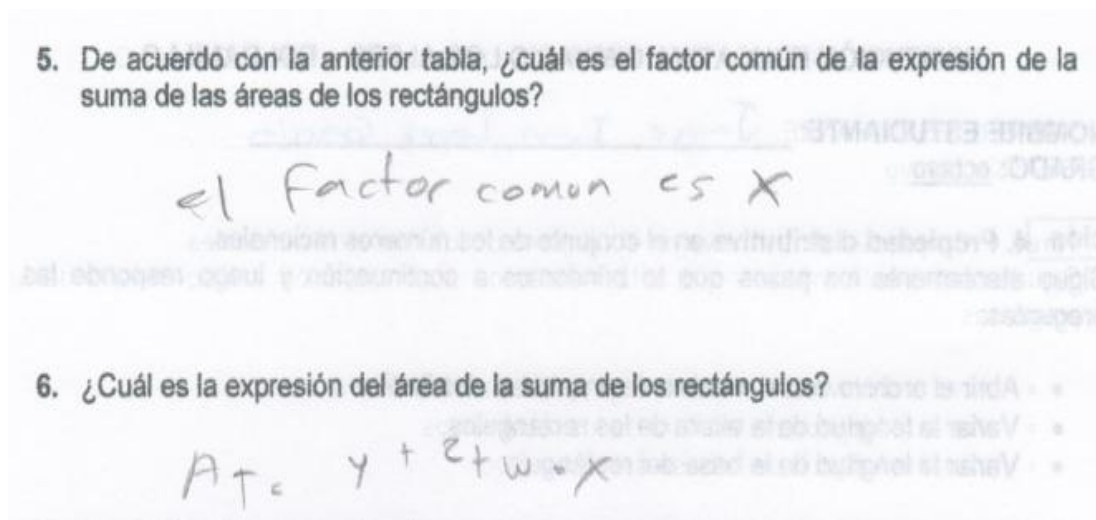


Ilustración 37. Producción textual y operatoria de E₃.

Es importante aclarar que el 20% de los estudiantes reincidieron en aplicar la propiedad distributiva omitiendo los paréntesis que indican el producto entre el factor común y las sumas de las bases, pero esto no le impide que reconozca que la altura es la longitud común a cada área. Para este estudiante la conceptualización que ha hecho a través de las situaciones con respecto a la propiedad distributiva, podría traer dificultades a futuro, debido a que el uso de paréntesis es de carácter organizativo de la jerarquía de las operaciones, es decir, que el factor que es común a una suma se aplica a cada sumando, sin paréntesis parecería que solo lo aplica a solo un sumando.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión en factores
Rectángulo amarillo	y	x	$A = y \cdot x$
Rectángulo azul	z	x	$A = z \cdot x$
Rectángulo rojo	w	x	$A = w \cdot x$

5. De acuerdo con la anterior tabla, ¿cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de las áreas de los rectángulos?

el factor común es x

6. ¿Cuál es la expresión factorizada del área de la suma de los rectángulos?

$$AT = y + z + w \cdot x$$

Ilustración 38. Producción textual y operatoria de E_3 .

La culminación de la actividad 4 arroja en el 100% de los estudiantes la identificación del factor común y la expresión por medio de la propiedad distributiva.

3.6. ANÁLISIS GENERAL DE LOS RESULTADOS.

En el proceso de realización de las cuatro situaciones de aprendizaje,, teniendo en cuenta los análisis preliminares, se puede resaltar que a través de la variación de los segmentos los estudiantes logran identificar el factor común que existen en cada una de las construcciones. Así se logró una primera aproximación al concepto de la propiedad distributiva.

Es importante aclarar que las situaciones se trabajaron desde el sistema numérico – variacional, es decir, cada actividad daba inicio con el trabajo de cálculo de áreas con valores comunes numéricos y culminaba con un ejercicio donde las longitudes cambian a valores literales para hacer la introducción a la generalización del concepto de la propiedad distributiva.

Se reconoce que las situaciones no conllevan a una fuerte comprensión del concepto, porque no se logró abarcar todo el campo numérico, por ejemplo, se trabaja siempre en el conjunto de los números racionales positivos. Es una debilidad que se puede observar y que probablemente pueda tener una solución para manejarlo con el software, pero que no logramos este punto en nuestro trabajo. También se notó que las situaciones propuestas por los estudiantes para lograr la concertación de los resultados en algunos casos no movilizaban los esquemas esperados desde el análisis preliminar.

En general, se observó que *el arrastre* se constituyó en un instrumento durante el desarrollo de esta secuencia, ya que aparece en todas las situaciones para establecer la relación de dependencia entre el movimiento de diversos segmentos y un valor numérico variable que establecía la base o la altura del rectángulo. De esta manera se confirma la suposición planteada en los análisis a priori que afirma que el alumno podrá observar los factores comunes entre una familia de rectángulos a partir del arrastre de segmentos, tema crucial ya que esta situación de aprendizaje permite la organización y selección de los esquemas necesarios para lograr las metas propuestas

en las subtarear de la situación de aprendizaje. Así mismo, afirmaciones como la anterior valida un punto de nuestras hipótesis de investigación sobre las condiciones, restricciones y limitaciones que están involucradas en el diseño de una situación de aprendizaje para la enseñanza de procesos relacionados con la producción de expresiones algebraicas equivalentes mediados por Cabri Geometry II Plus. Dicho objetivo se concreta en un alto porcentaje, ya que se evidencia que los AGD movilizan esquemas que hacen posible afrontar una situación conocida o desconocida para el estudiante.

Desde el marco teórico abordado para este trabajo, se puede observar que algunos estudiantes logran utilizar conceptos necesarios para movilizar y aprender nuevos esquemas. Inicialmente se pretendía observar que las situaciones de aprendizaje lograran movilizar bastantes esquemas en los estudiantes, pero los resultados obtenidos evidencian que solo se usan los conceptos necesarios o primarios para lograr los objetivos en cada pregunta. El estudio de los esquemas, en particular de los conceptos-en-acto y teoremas-en-acto, nos permiten entender mejor la forma en la que los alumnos usan, ven y entienden el tema de la propiedad distributiva, y también los conocimientos y los conceptos matemáticos sobre los cuales reposan. Algunos de los esquemas que identificamos a partir de las acciones de los alumnos vienen de sus conocimientos y de su experiencia en papel y lápiz en posibles clases anteriores relacionadas con el tema, por ejemplo el concepto de área, producto y suma.

3.6.1. EL ARRASTRE Y LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Las ventajas que nos proporciona el programa de Cabri Geometry II Plus como son la posibilidad del arrastre, variación de las longitudes de segmentos y áreas de rectángulos, posibilita que el estudiante tenga en cuenta muchas más característica de algunos objetos geométricos y algebraicos relacionados con la propiedad distributiva, que las que se obtienen en una clase que no utiliza las nuevas tecnologías ya que hay mayor producción cognitiva, porque hacen que el estudiante organice sus esquemas y movilice conceptos necesarios para llevar a cabo respuestas a una secuencia de situaciones.

En las cuatro actividades propuestas a los estudiantes existía una relación entre el arrastre que permite el programa Cabri Geometry II Plus sobre las figuras previamente establecidas y la propiedad distributiva, donde los estudiantes por medio de el arrastre llegaban a identificar cual era el valor común de los segmentos correspondientes a un lado del rectángulo y después formular la expresión algebraica de la propiedad mencionada. Este proceso de arrastre y visualización permite que el estudiante se genere tareas y subtareas para lograr el éxito de la conceptualización del tema trabajado, en concordancia con la teoría de campos conceptuales.

3.6.2. EL VÍNCULO ÁLGEBRA - GEOMETRÍA

Las cuatro actividades propuestas a los estudiantes vincularon la geometría y el álgebra por medio de un AGD como lo es Cabri Geometry II Plus, el programa

permitió realizar las construcciones y por medio del arrastre los estudiantes llegaron a identificar cual era el valor común de las respectivas construcciones. Las formulaciones algebraicas de las propiedades que identificaron a través de la visualización con el programa fueron registradas y desarrolladas a lápiz y papel.

Es importante señalar una gran ventaja que se obtiene al aplicar la secuencia de situaciones con álgebra y geometría mediado por Cabri Geometry II Plus, es que se permite desarrollar el concepto de variación gracias a la función de arrastre que ofrece el programa y que muestra las variaciones de las longitudes o las áreas de las figuras expuestas en la ventana de trabajo, además que permite las operaciones simbólicas. Por tanto es preciso señalar la importancia que tienen los AGD en especial Cabri Geometry II Plus para el aprendizaje y el vinculo que hace entre el álgebra y geometría desde el punto de vista del proceso de la conceptualización teniendo en cuenta la teoría de los campos conceptuales, ya que este permite organizar los esquemas que representan el conocimiento operacional y organizan la adaptación progresiva de los esquemas en el sujeto (Vergnaud, 1997).

En vista de las situaciones analizadas, el aporte de la teoría de los campos conceptuales a la vinculación del álgebra y geometría es fundamental porque nos permite tener en cuenta el conjunto de conceptos que hay que hacer movilizar en cada una de las situaciones para lograr una conceptualización satisfactoria del tema de la propiedad distributiva. Para el caso de las secuencias de situaciones los conceptos tenidos en cuenta son los de área de rectángulo, operaciones con números reales y

expresiones algebraicas y la representación de ellas en objetos geométricos como lo son los cuadriláteros para estas situaciones.

CAPÍTULO 4

4. CONCLUSIONES

En la secuencia de situaciones para la enseñanza del álgebra en contextos geométricos mediados por Cabri Geometry II Plus se hizo un análisis de la contribución de este AGD para la conceptualización de la propiedad distributiva, pero en especial se hizo énfasis en la utilización de conceptos para afrontar nuevas situaciones de aprendizaje, teniendo en cuenta algunos elementos bases de la teoría de los campos conceptuales presentados por Vergnaud (1982). Este marco teórico nos permitió estructurar un análisis preliminar acerca de los conceptos que se debían tener en cuenta para el diseño de las situaciones y anticipar los posibles esquemas que el estudiante debía movilizar para la conceptualización de la propiedad distributiva.

De acuerdo a lo anterior, se tuvo en cuenta que el empleo de los AGD permite a los estudiantes la exploración de movimientos, como el arrastre, para el análisis de las variaciones de las longitudes de los segmentos y las áreas. La exploración se hizo observando el desplazamiento de cada segmento, permitiéndosele al estudiante, la exploración de tal manera que verifiquen sus conjeturas y/o puedan surgir nuevas ideas.

Con respecto a los elementos tomados en el marco teórico para este trabajo, como la teoría de los campos conceptuales, los esquemas que puede movilizar el estudiante para lograr las metas en las tareas propuestas son necesarios para movilizar y aprender nuevos esquemas. Las situaciones presentadas no lograron movilizar un amplio contenido de esquemas con sus respectivos invariantes operatorios, pero se debe tener en cuenta que un alto porcentaje de los estudiantes lograron conceptualizar el tema de propiedad distributiva, efecto que motivaría a mejorar las situaciones más adelante.

Durante el desarrollo de esta investigación se encontraron varios hallazgos que logran dar respuesta a la pregunta planteada:

¿Cómo posibilitar la conceptualización de *la propiedad* distributiva a través del vínculo álgebra - geometría mediado por un AGD?

El ambiente de Geometría Dinámica ofrece nuevas posibilidades que no se encuentran en un ambiente a lápiz y papel, gracias a la posibilidad de arrastre que ofrece el programa Cabri Geometry II Plus es posible identificar el factor común de cada una de las construcciones y visualizarlo como una variable, además aprender sobre la propiedad distributiva, ayudando a movilizar nuevos esquemas a través de la visualización y arrastre de las figuras geométricas.

Se reconoce el papel mediador de Cabri Geometry II Plus en el proceso de identificar el factor común de las figuras representadas y la aplicación de la propiedad

distributiva, además por medio de la producción escrita se conocieron los esquemas utilizados y las producciones operatorias y argumentativas de los estudiantes a la hora de dar respuesta a los interrogantes planteados.

En los Ambientes de Geometría Dinámica, se debe tener presente que las representaciones de las figuras geométricas en una situación de aprendizaje no permite en una primera instancia la apropiación del conocimiento. Cabri Geometry II Plus es un mediador potente para trabajar situaciones en contextos geométricos, pero el software por sí solo no genera conocimiento, se hace necesario las intervenciones del docente orientando la actividad y de un registro a lápiz y papel que dé cuenta de la producción de los estudiantes. Sin el apoyo del docente que guíe las situaciones de aprendizaje, no sería posible que los estudiantes se propongan metas para llegar a la solución, ya que es el profesor quien con sus preguntas brinda una alternativa al estudiante para que recuerde conceptos y ponga teoremas en acto para la solución de las cuestiones y así conceptualizar el tema tratado, luego esta conceptualización se convierte en esquemas para otras situaciones.

Por otro lado, para el diseño de la secuencia de situaciones no se abordó el tema de propiedad distributiva con expresiones negativas, debido a que el diseño de estas situaciones era un proceso experimental con el cual se quería describir los procesos observables en las producciones de los estudiantes de acuerdo a un marco teórico como el de los campos conceptuales. El enfoque de las situaciones con expresiones negativas es un proceso que aunque se tuvo en cuenta, no fue posible

realizar la construcción en Cabri Geometry II Plus para este tipo de situaciones, debido a que las macroconstrucciones realizadas previamente son basadas en segmentos iniciales, y se debe tener en cuenta que en las unidades de medida de longitudes se establece el valor absoluto, motivo que no permite tener una clara observación de longitudes negativas. Una posible solución que se podría tener en cuenta, para posteriores diseños, la idea de expresiones negativas como lo sustentan Soto, Mosquera y Gómez (2005, p.4) donde la utilización de los cuadrantes del plano cartesiano hacen posible la construcción de expresiones negativas a partir de figuras geométricas.

En cuanto la organización de la actividad al momento de ser aplicadas las secuencias encontramos que existen varios aspectos que se deben tener en cuenta si se está trabajando con AGD.

Uno de los aspectos referentes al docente es la familiarización que debe tener este con el programa: saber cómo funciona y poder dar respuesta a las inquietudes de los estudiantes, es importante que el docente oriente con preguntas pertinentes los esquemas que debe utilizar el estudiante porque así es posible que los participantes de la situación de aprendizaje enfoquen de manera organizada las tareas o submetas necesarias para la optima solución de las preguntas.

En el desarrollo de actividades que involucran AGD se puede constatar que todos los estudiantes no avanzan al mismo ritmo, este factor puede convertirse en una

restricción, por tal motivo la persona encargada de dirigir la actividad debe pasar por cada mesa de trabajo orientando la actividad, dando respuesta a las inquietudes individuales de los estudiantes.

BIBLIOGRAFÍA

- Arévalo, S. Chávez, S. Díaz, R. Garzón, L. Jiménez, J. López, M. Rangel, J. Perafán, B. Rodríguez, J. Silva, O. (2008) *Glifos Procesos Matemáticos 8*. Bogotá: Editorial Libros y Libros.
- Balacheff, N., Kaput, J. (1996), *Computer-Based Environments in Mathematics*, pp. 469-501. En *International Handbook of Mathematical Education*, Bishop, A. et al (eds), Kluwer Academic Publishers.
- Barais, A.W. and Vergnaud, G. (1990). Students' conceptions in physics and mathematics: biases and helps. In Caverni, J.P., Fabre, J.M. and González, M. (Eds.). (1990). *Cognitive biases*. North Holland: Elsevier Science Publishers. pp. 69-84.
- Brousseau, G. (1986) *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).
- Díaz, M. (1997). El Álgebra desde una Perspectiva Geométrica. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*, ISSN 1131-9321, (Nº 37), 39 - 56.
- Gutiérrez, A. (2006): La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría, en Flores, P.; Ruiz, F. & De la Fuente, M. (eds.), *Geometría para el siglo XXI*. (Federación Española de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales: Badajoz), pp. 13-58.
- Laborde, C & Capponi, B. (1994) “CABRI – GEOMETRE Constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure Géométrique”. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol 14. 12. La Pensée Sauvage Editions.

- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMIS Study*. (pp. 73-96). Boston: Kluwer.
- Ministerio De Educación Nacional. (1998) *Matemáticas: Lineamientos Curriculares. Serie lineamientos curriculares – Áreas obligatorias y fundamentales*. Santa fe de Bogotá: MEN.
- Ministerio De Educación Nacional (1999). *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas. Serie de Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia: MEN
- Mejía, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas*. Tesis de pregrado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Morales, Ignacio y Sepúlveda, Armando (2006) *Propuesta para la enseñanza de la factorización en el curso de álgebra*. (S.F). recuperado el día 11 de Agosto del 2006. [http://polya.dme.umich.mx/eventos/CXIVEP/Memorias/Memorias - XIV Encuentro 3.pdf](http://polya.dme.umich.mx/eventos/CXIVEP/Memorias/Memorias%20-%20XIV%20Encuentro%203.pdf)
- Moreno L (2002). *Instrumentos matemáticos computacionales*. MEN 2002. *Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Serie Memorias*.
- Moreno, L & Waldegg, G. (2002) *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas. Memorias del seminario Nacional. Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Ministerio de educación Nacional Serie Memorias.
- Sampieri, R.H.; Collado, C.F. & Lucio, P.B. (1991). *Metodología de la investigación* (Naucalpan de Juárez, McGraw - Hill Interamericana de México, S.A. de C.V.).

- Soto F., Mosquera S., Gómez C. (2005, Junio). La caja de polinomios. Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Volúmen XIII, número 001. Pp. 83-97.
- Vergnaud, G. (1983). Quelques problèmes théoriques de la didactique a propos d'un exemple: les structures additives. Atelier International d'Eté: Recherche en Didactique de la Physique. La Londe les Maures, Francia, 26 de junio a 13 de Julio.
- Vergnaud, G. (1990) "La Théorie des Champs Conceptuelles", Recherches en Didactique de Mathématiques, Vol 10, No. 2-3, pp. 133- 170. EN: "Didáctica de las Matemáticas. Escuela francesa"» DME-CINVESTAV, México, 1993. pp. 145-150.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (1994). (Eds.) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press. pp. 41-59.
- VERGNAUD, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. Perspectivas, 26(10): 195-207.
- VERGNAUD G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes e P. Bryant (Eds.), pp.5-28.
- VERGNAUD (2007). Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento. Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. ISBN 978-950-658-183-1. Tandil.

ANEXO A. ANÁLISIS CURRICULAR.

El análisis que se presenta se centra la estructuración conceptual en torno a uno de los casos de la factorización como es el caso de el factor común, como tema relacionado con el concepto de la propiedad distributiva, ya que es un proceso que muestra la forma de realizar una expresión de la forma $a(b + c)$ donde a es un valor común en la expresión.

Adicionalmente se señala la importancia que tienen los AGD en especial Cabri Geometry II Plus para el aprendizaje desde el punto de vista del proceso de la conceptualización teniendo en cuenta la teoría de los campos conceptuales, ya que este permite organizar los esquemas que representan el conocimiento operacional y organizan la adaptación progresiva de los esquemas en el sujeto (Vergnaud, 1997).

PRESENTACIÓN DEL CASO DE FACTOR COMÚN DESDE EL TEXTO ESCOLAR.

En textos escolares como Glifos 8 Guía del docente (Arévalo et al, 2008), se pudo observar que el tema de la factorización es presentado como un listado de reglas, las cuales se deben seguir, en el caso del factor común hallando el máximo común divisor entre los términos del polinomio dado. De esta forma se presentan dos situaciones de factor común; cuando el factor común es un monomio y cuando el factor común es un polinomio.

1.1 Factor común

¿Qué tienen en común los términos que componen el polinomio:

$$2x^3 + 5x^4y - 9ax - \frac{1}{2}abx?$$

Cada uno de los términos incluye la variable x . Se puede deducir entonces que este ha sido el resultado de aplicar la propiedad distributiva con el factor x ; es decir, corresponde al producto:

$$x(2x^2 + 5x^3y - 9a - \frac{1}{2}ab) \text{ en donde } x \text{ es factor común de la expresión } 2x^3 + 5x^4y - 9ax - \frac{1}{2}abx$$

El **factor común** es el máximo común divisor entre los términos de un polinomio.

Cuando todos los términos de un polinomio tienen un factor común puede ocurrir alguno de los siguientes casos:

Ilustración 39. Página 117 del libro Glifos 8. Guía del Docente.

Según la ilustración 39 los dos pasos a seguir para lograr la factorización, es buscar el factor común a cada uno de los términos del polinomio, luego, se reescribe nuevamente el polinomio, ahora como producto entre el factor común que es un monomio y otro factor que es un polinomio con el cual se obtendrá el polinomio original al ser comprobado usando la propiedad distributiva.

EL FACTOR COMÚN ES UN MONOMIO

1. Factoriza $ab^3 + 3ab^2 - ab$

a. Busca el factor común:

$$ab^3 + 3ab^2 - ab \text{ En este caso el factor común es el literal } ab$$

b. Exprésalo como producto:

$$ab^3 + 3ab^2 - ab = ab(ab^2 + 3b - 1) \text{ se puede comprobar usando la propiedad distributiva}$$

2. Factoriza $15x^4 + 20x^3 - 35x^2 + 45x$

a. Busca el factor común:

$$15x^4 + 20x^3 - 35x^2 + 45x \text{ El factor común es } 5x, \text{ pues el m.c.d. } (15, 20, 35, 45) = 5 \text{ y } x \text{ es el literal común con menor exponente.}$$

b. Exprésalo como producto:

$$15x^4 + 20x^3 - 35x^2 + 45x = 5x(3x^3 + 4x^2 - 7x + 9) \text{ se puede comprobar usando la propiedad distributiva}$$

Ilustración 40. Página 117 del libro Glifos 8. Guía del Docente.

EL FACTOR COMÚN ES UN POLINOMIO

1. Factoriza $a(b + 2) + 4(b + 2)$

a. Busca el factor común:

$$a(b + 2) + 4(b + 2) \quad \text{Los dos términos tienen como factor común el binomio } b + 2$$

b. Exprésalo como producto:

$$\frac{a(b + 2)}{(b + 2)} = a \quad \frac{4(b + 2)}{(b + 2)} = 4 \quad \text{se divide cada término entre el factor común } b + 2$$

$$a(b + 2) + 4(b + 2) = (b + 2)(a + 4) \quad \text{se puede comprobar usando la propiedad distributiva}$$

2. Factoriza $(b - a)(c + 2) - d(c + 2)$

a. Busca el factor común:

$$(b - a)(c + 2) + d(c + 2) \quad \text{El factor común de cada término es } c + 2$$

b. Exprésalo como producto:

$$\frac{(b - a)(c + 2)}{(c + 2)} = (b - a) \quad \frac{-d(c + 2)}{(c + 2)} = -d \quad \text{se divide cada término entre el factor común } c + 2$$

$$(b - a)(c + 2) - d(c + 2) = (c + 2)(b - a - d) \quad \text{se puede comprobar usando la propiedad distributiva}$$

Ilustración 41. Página 117 del libro Glifos 8. Guía del Docente.

En la anterior ilustración se mantiene el mismo orden de ideas para lograr la factorización en una expresión algebraica donde el factor común es ahora un polinomio.

En este texto se refuerza la presentación del contenido del caso de factor común a una serie de casos algorítmicos, sin relación entre sí y sin relación con otras representaciones fuera de la algebraica, por ejemplo utilizando las representaciones geométricas, y establecer las expresiones como suma o diferencia de áreas.

PROPUESTA CURRICULAR PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR.

La propuesta curricular que se ha desarrollado en este trabajo, ha tenido en cuenta las propuestas establecidas por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) con respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos, el pensamiento

espacial y sistemas geométricos y el impacto de las nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas en el aula de clase, además la importancia de la integración de dichos pensamientos en la construcción de expresiones algebraicas equivalentes aplicando la propiedad distributiva.

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS.

Los lineamientos curriculares (MEN, 1998) muestran una visión diferente al modelo tradicional de enseñanza con respecto al pensamiento variacional y los sistemas algebraicos conocidos con el nombre de álgebra. De este modo la propuesta curricular propone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y descontextualizados, el objetivo es establecer conexiones entre otros pensamientos enmarcados en el currículo de matemáticas con otras asignaturas en contextos significativos, permitiendo el dominio de un campo conceptual, que vincule conceptos y procedimientos que a su vez permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas en diversos escenarios.

La enseñanza del álgebra en el contexto escolar debe ir más allá del dominio de la aritmética y los algoritmos. El modelo tradicional de enseñanza limita el pensamiento variacional en las aulas de clase desde inicios de la Educación Básica Primaria a la transmisión mecanizada de los contenidos previos para abordar el álgebra desde la conceptualización de la propiedad distributiva, de manera particular la construcción de expresiones equivalentes en el dominio de temas como:

operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números con signo, términos semejantes, adición o sustracción de monomios y polinomios entre otros; estos métodos de enseñanza desarrollados en las aulas de clase son implementados tratando de dar cumplimiento a lo establecido en los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas, donde se reconoce que un aspecto importante en el aprendizaje del álgebra es la utilización con sentido y al estudio de los objetos algebraicos (variables, constantes, parámetros, términos, fórmulas y otras expresiones algebraicas como las ecuaciones e inecuaciones, los sistemas de ecuaciones o de inecuaciones, por ejemplo) para lo cual es necesario ampliar la notación del lenguaje aritmético y utilizar las propiedades características de los sistemas numéricos (como la conmutativa y la asociativa de la adición y la multiplicación y la distributiva de la multiplicación respecto de la adición, o el carácter simétrico y transitivo de la igualdad y el carácter antisimétrico y transitivo de la desigualdad). De esta manera, el cálculo algebraico surge como generalización del trabajo aritmético con modelos numéricos en situaciones de variación de los valores de las mediciones de cantidades relacionadas funcionalmente.

La propuesta de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas establece que el desarrollo de este pensamiento se inicia con el estudio de regularidades y la detección de los criterios que rigen esas regularidades o las reglas

de formación para identificar el patrón⁴ que se repite periódicamente. Las regularidades (entendidas como unidades de repetición) se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, uno detrás de otro en un orden fijado o de acuerdo a un patrón. De esta manera, la unidad que se repite con regularidad da lugar a un patrón. Al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula.

Lo fundamental es permitir al grupo de estudiantes la reflexión frente a lo que cambia, frente a lo que se conserva, y por ende, a las relaciones invariantes estructurales, pero fundamentalmente, permitirles que comuniquen lo que observan y que expliciten dichas relaciones, que las transformen, que las expresen de diferentes formas, que hagan conjeturas y por tanto, que formulen hipótesis sobre la situación que analizan.

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los

⁴Un PATRÓN es una propiedad, una regularidad, una cualidad invariante que expresa una relación estructural entre los elementos de una determinada configuración, disposición, composición, etc.

cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica.

Desde esta perspectiva se tiene en consideración la posición de Lins y Kaput, (2004), quienes afirman que lo que se debe hacer es fomentar cambios en la forma de pensar de los niños desde la Educación Primaria que les conduzcan al pensamiento algebraico y que estos pueden ser promovidos mediante el uso de ciertas herramientas, como notaciones, diagramas, gráficos o la misma tecnología, que les permitan realizar actividades que impliquen un nivel más elevado de generalidad.

EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LOS SISTEMAS GEOMÉTRICOS.

El pensamiento espacial, entendido como “... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” los Lineamientos Curriculares contemplan las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en

el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos y propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.

En un primer momento del pensamiento espacial no son importantes las mediciones ni los resultados numéricos de las medidas, sino las relaciones entre los objetos involucrados en el espacio, y la ubicación y relaciones del individuo con respecto a estos objetos y a este espacio.

Posteriormente, y a medida que se complejizan los sistemas de representación del espacio, en un segundo momento se hace necesaria la metrización, pues ya no es suficiente con decir que algo está cerca o lejos de algo, sino que es necesario determinar qué tan cerca o qué tan lejos está. Esto significa un salto de lo cualitativo a lo cuantitativo, lo cual hace aparecer nuevas propiedades y relaciones entre los objetos. De esta manera, la percepción geométrica se complejiza y ahora las propiedades de los objetos se deben no sólo a sus relaciones con los demás, sino también a sus medidas y a las relaciones entre ellas. El estudio de estas propiedades espaciales que involucran la métrica son las que, en un tercer momento, se convertirán en conocimientos formales de la geometría, en particular, en teoremas de la geometría euclidiana.

Lo anterior implica relacionar el estudio de la geometría con el arte y la decoración; con el diseño y construcción de objetos artesanales y tecnológicos; con la educación física, los deportes y la danza; con la observación y reproducción de patrones (por ejemplo en las plantas, animales u otros fenómenos de la naturaleza) y con otras formas de lectura y comprensión del espacio (elaboración e interpretación de mapas, representaciones a escala de sitios o regiones en dibujos y maquetas, etc.), entre otras muchas situaciones posibles muy enriquecedoras y motivadoras para el desarrollo del pensamiento espacial.

El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio. El trabajo con la geometría activa puede complementarse con distintos programas de computación que permiten representaciones y manipulaciones que eran imposibles con el dibujo tradicional.

EL PENSAMIENTO VARIACIONAL, EL PENSAMIENTO ESPACIAL Y LAS TECNOLOGÍAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

El pensamiento variacional se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación de procesos y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos. En particular la relación con otros pensamientos aparece con mucha frecuencia, porque la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos, de medidas y de datos y porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional.

El estudio de la variación es una base fundamental para acceder a los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos. En este sentido, el estudio de las propiedades de los números y sus operaciones y de la manera como varían sus resultados con el cambio de los argumentos u operandos, o de los objetos de la geometría y sus características y de la manera cómo cambian las medidas de las cantidades asociadas con las transformaciones de esos objetos, se proponen como

procesos de abstracción y generalización a partir del análisis de lo que es invariante en medio de los aspectos variables de un conjunto de situaciones. Muchos de los conceptos de la aritmética y la geometría se suelen presentar en forma estática, pero ganarían mucho en flexibilidad y generalidad y atraerían más el interés de los estudiantes si se presentan en forma dinámica y variacional.

A su vez el MEN afirma que las tecnologías han hecho más accesible e importante la educación matemática para los estudiantes, porque amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas (MEN, 1998). Teniendo en cuenta estas consideraciones se presenta 4 situaciones de aprendizaje que vinculan el pensamiento variacional y espacial mediado por un AGD como Cabri Geometry II Plus, para la enseñanza de el concepto de propiedad distributiva. Este nuevo ambiente de trabajo permite que a partir del arrastre el estudiante logre inferir sobre una serie de relaciones explícitas e implícitas favoreciendo el aprendizaje de el concepto de propiedad distributiva.

Considerando que la enseñanza del álgebra presentada por los textos escolares, aborda el tema referente a la propiedad distributiva a través de representaciones geométricas de figuras (cuadrados y rectángulos). Esta forma de introducir el álgebra, es una opción que ha permitido trabajar con material manipulable (caja de polinomios, fichas, figuras, etc.) y de manera particular la tecnología tradicional (lápiz y papel) en la solución de ejercicios.

Las investigaciones en entornos tecnológicos enfatizan que la inserción de los Programas de Cálculo Simbólico (PCS) en las clases de Álgebra no elimina las técnicas algebraicas de lápiz y papel, sino todo lo contrario, y que el uso de esta tecnología como herramienta didáctica generan discusiones matemáticas que generalmente no ocurren en estas clases cuando se trabaja únicamente con lápiz y papel, pero advierten, también, que en estas discusiones el papel del profesor es de crucial importancia. Desde esta perspectiva, este trabajo ha creado una serie de situaciones en contexto⁵significativo para la enseñanza de la construcción de expresiones equivalentes a partir de la conceptualización de la propiedad distributiva. en el grado octavo mediante la conexión de la geometría y el álgebra en Ambientes de Geometría Dinámica, atendiendo a los parámetros establecidos en los estándares básicos de competencias matemáticas haciendo énfasis al tipo de situaciones que promueven el aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas y el uso de recursos didácticos.

⁵La palabra contexto, tal como se utiliza en los Lineamientos Curriculares, se refiere tanto al contexto más amplio –al entorno sociocultural, al ambiente local, regional, nacional e internacional– como al contexto intermedio de la institución escolar –en donde se viven distintas situaciones y se estudian distintas áreas– y al contexto inmediato de aprendizaje preparado por el docente en el espacio del aula, con la creación de situaciones referidas a las matemáticas, a otras áreas, a la vida escolar y al mismo entorno sociocultural, etc., o a situaciones hipotéticas y aun fantásticas, a partir de las cuales los alumnos puedan pensar, formular, discutir, argumentar y construir conocimiento en forma significativa y comprensiva.

Las situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo en las matemáticas escolares son situaciones que superan el aprendizaje pasivo, gracias a que generan contextos accesibles a los intereses y a las capacidades intelectuales de los estudiantes y, por tanto, les permiten buscar y definir interpretaciones, modelos y problemas, formular estrategias de solución y usar productivamente materiales manipulativos, representativos y tecnológicos...

De este modo la vinculación del pensamiento variacional y el pensamiento espacial en ambientes de geometría dinámica, se presenta la geometría como un contexto significativo que permite trabajar el álgebra desde la conceptualización de la propiedad distributiva.

ANEXO B: HOJAS DE TRABAJO DE LA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Jaime Madrid

GRADO: octavo

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre *de rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$$A = \underline{5,37\text{cm} \cdot 7,74\text{cm}}$$

$$A = \underline{41,56\text{cm}^2} \quad \text{Área del rectángulo}$$

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura
- o Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.
3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

el área aumenta o disminuye, variando directamente proporcional a las magnitudes de los segmentos Base y Altura (Azul y Rojo)

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Jorge Ivan Lopez Garcia

GRADO: octavo

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre de *rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$$A = \underline{5,37 \cdot 7,74 = 42}$$

$$A = \underline{42} \quad \text{Área del rectángulo}$$

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura
 - Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.
- 3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

R// *varia el Resultado y se puede formar un cuadr.*

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Juan Felipe Librenos

GRADO: octavo

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

$$A = \text{base} \cdot \text{Altura}$$

1. Abrir el archivo con el nombre de rectángulo.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$$A = \underline{537\text{cm} \cdot 7,74\text{cm}} \quad (A = 41,5638)$$

$$A = \underline{41,5638\text{cm}} \quad \swarrow \text{Área del rectángulo}$$

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura
 - o Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.

$$47,43\text{cm}$$

3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

R// sucede que el área de la figura es el que reduce y aproxima.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Jose Alejandro Millan

GRADO: octavo

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre *de rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$$A = \underline{5,37\text{cm} \times 7,74\text{cm}}$$

$$A = \underline{41,5638} \quad \text{Área del rectángulo}$$

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura
 - o Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.
- 3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

El area aumenta o disminuye
dependiendo de como se mueben
las longitudes. ~~del~~

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Rosa Angelica Pareja

GRADO: octavo

Situación 1: Calcula el área del Rectángulo:

1. Abrir el archivo con el nombre de *rectángulo*.
2. ¿Calcula el área de tu rectángulo?

$$A = \underline{b \cdot h}$$

$$A = \underline{5,37 \times 7,74}$$

Área del rectángulo 41,5638

- Después de calcular el área de tu rectángulo, calcula el área en la ventana de trabajo de cabri. escribe la expresión del área de la figura
 - Con el puntero, da clic sobre los puntos extremos de los segmentos azul y rojo que establece la longitud de los lados del rectángulo y empieza a variar los valores de este.
- 3. ¿Qué sucede con el área de la figura cuando se varía las longitudes del rectángulo?

R/E) El área Varía

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE:

Jose Alejandro Millan

GRADO: octavo

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 6,20 \text{ cm} \times 4,00 \text{ cm}$	$A_2 = 13 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$
Resultado	$A_1 = 24 \text{ cm}$	$A_2 = 52 \text{ cm}$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$$A_t = A_1 + A_2$$

$$A_t = (6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}) + (13 \times 4 \text{ m}) = 76$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

$$4.00 \text{ cm}$$

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.

- Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.

- Observa los cambios en la figura.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$A_1 + A_2 = (x + y) \cdot z$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

z

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Jorge Ivan Lopez Garcia
GRADO: octavo

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

A = base · Altura

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 6,00 \text{ cm} \cdot 4,00 \text{ cm}$	$A_2 = 13,00 \cdot 4,00$
Resultado	$A_1 = 24,00 \text{ cm}^2$	$A_2 = 52,00$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$A_t =$

$$A_t = 24,00 \text{ cm}^2 + 52,00 \text{ cm}^2 = \cancel{108,00} \text{ cm}^2 = 76,00 \text{ cm}^2$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

que tienen el mismo valor de Altura

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.
 - Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.
 - Observa los cambios en la figura.
5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	y	z	$A = y \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$A = (x + y) \cdot z$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

El factor común es z

NOMBRE ESTUDIANTE: Rosa Angelica Paveja
GRADO: octavo

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 4,95 \times 5,95$	$A_2 = 14,05 \times 5,95$
Resultado	$A_1 = 29,45$	$A_2 = 83,60$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$$A_t = A_1 + A_2$$

$$A_t = 29,45 + 83,60 = 113,05$$

$$5,95 (4,95 + 14,05) = 113,05$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

Es el 5,95

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.

- Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.

- Observa los cambios en la figura.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	y	z	$A = y \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$A = z(x + y)$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Juan Felipe Libreros
GRADO: octavo

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos. $A = \text{base} \cdot \text{Altura}$.

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 6,00 \text{ cm} \cdot 4,00 \text{ cm}$	$A_2 = 13,00 \text{ cm} \cdot 4,00 \text{ cm}$
Resultado	$A_1 = 24 \text{ cm}$	$A_2 = 52 \text{ cm}$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

~~$(6,00 \cdot 7,00) + (13,00 \cdot 7,00)$~~ $A_t = A_1 + A_2$ ~~$(18,00)$~~

$A_t = (6,00 \text{ cm} \cdot 7,00 \text{ cm}) + (13,00 \text{ cm} \cdot 7,00 \text{ cm})$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

$A_t = 4,00 (6,00 + 13,00)$

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.

- Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.
- Observa los cambios en la figura.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	y	z	$A = y \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$z(x + y)$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

este sería la "z" sería la altura.

NOMBRE ESTUDIANTE: Jaime Madrid

GRADO: octavo

Situación 2. Propiedad distributiva con cuadriláteros en el conjunto de los números racionales positivos.

1. Calcula el área de cada rectángulo según los valores que obtengas en los cuadriláteros.

- Abrir el archivo con el nombre de Propiedad distributiva con cuadriláteros.
- Variar la longitud de las bases de los rectángulos.
- Variar la longitud de las alturas de los rectángulos.

Forma de expresión	Área rectángulo color azul	Área rectángulo color rojo
Expresión	$A_1 = 8,05 \cdot 3,42$	$A_2 = 10,95 \cdot 3,42$
Resultado	$A_1 = 27,531 \text{ cm}^2$	$A_2 = 37,449 \text{ cm}^2$

2. Establece la suma que resulta al unir las expresiones que determinan las áreas de los cuadriláteros azul y rojo.

$$A_t = (8,05 \cdot 3,42) + (10,95 \cdot 3,42)$$

3. ¿Cuál es el factor común entre los cuadriláteros azul y rojo?

$$3,42(8,05 + 10,95) = (8,05 \cdot 3,42) + (10,95 \cdot 3,42)$$

4. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza lo siguiente.

- Varía la longitud de la base y la altura de los rectángulos, desplazando los puntos A y B de cada segmento.

- Observa los cambios en la figura.

5. De acuerdo a las instrucciones anteriores, completa la siguiente tabla:

	Base	altura	Expresión en factores
Rectángulo A_1	x	z	$A = x \cdot z$
Rectángulo A_2	y	z	$A = y \cdot z$
Rectángulo $A_1 + A_2$	$x + y$	z	$A = z(x + y)$

6. ¿Cuál es el factor común de la expresión en factores de la suma de áreas de rectángulo $A_1 + A_2$?

$$z(x + y) = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE:

Rosa Angelica Pareja

GRADO: octavo

Situación 3. Producto de binomios con Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales positivos.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Variar la longitud de las bases y alturas de los rectángulos

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (A, B, D y D) de los segmentos.

Cuando se el segmento A se mueven las columnas A amarilla y rojo, cuando se mueve la B se mueven todos los que es la base, con la C se mueven 3 azul y verdes. y todas las áreas se cambia el tamaño

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	4,50	4,11	$A = 4,50 \times 4,11$
Rectángulo azul	3,53	2,84	$A = 3,53 \times 2,84$
Rectángulo rojo	3,53	4,11	$A = 3,53 \times 4,11$
Rectángulo verde	4,50	2,84	$A = 4,50 \times 2,84$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

Por que hay unas columnas que se mueven a la misma vez que mueve un segmento

4. Mueve los puntos A, R, V y W de un extremo a otro y observa los cambios.
5. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$(4,50 + 3,53 + 3,53 + 4,50) \times (4,11 + 2,84 + 4,11 + 2,84)$$

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	x	x	$A = x \cdot x$
Rectángulo azul	2	w	$A = 2 \cdot w$
Rectángulo rojo	2	x	$A = 2 \cdot x$
Rectángulo verde	y	w	$A = y \cdot w$

- Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$(x + 2 + 2 + y) \times (x + w + xw)$$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Juan Felipe Librenno
GRADO: octavo

Situación 3. Producto de binomios con Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales positivos.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Variar la longitud de las bases y alturas de los rectángulos

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (A, B, D y E) de los segmentos.

que con cada vez que uno movia los extremos de los rectángulos disminuía las variables de cada base y altura de cada figura.

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	2,95 cm	3,32 cm	$2,95 \text{ cm} \cdot 3,32 \text{ cm}$
Rectángulo azul	3,29 cm	3,32 cm	$3,29 \text{ cm} \cdot 3,32 \text{ cm}$
Rectángulo rojo	3,18 cm	3,32 cm	$3,18 \text{ cm} \cdot 3,32 \text{ cm}$
Rectángulo verde	3,32 cm	2,32 cm	$3,32 \text{ cm} \cdot 2,32 \text{ cm}$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

Porque tiene que haber varios valores repetidos para formar una figura.

4. Mueve los puntos A, R, V y W de un extremo a otro y observa los cambios.

84) 5. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar? (3.32)

Alaba de formar un Rectángulo.
 $(2,84 \text{ m} + 4,13 \text{ m}) \cdot (3,32 \text{ m} + 2,89 \text{ m})$

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	$y \cdot x$
Rectángulo azul	z	x	$z \cdot x$
Rectángulo rojo	z	x	$z \cdot x$
Rectángulo verde	y	w	$y \cdot w$

- Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$(w \cdot x) \cdot (y + z)$$

INSTITUCIÓN EDUCATIVA GIMNASIO LOS ALPES – ROLDANILLO

NOMBRE ESTUDIANTE: Jorge Ivan Lopez Garcia

GRADO: octavo

Situación 3. Producto de binomios con Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales positivos.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Variar la longitud de las bases y alturas de los rectángulos

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (A, B, D y D) de los segmentos.

Varian las longitudes de los rectángulos

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	3,79 cm	3,21 cm	$A = 3,79 \text{ cm} \cdot 3,21 \text{ cm}$
Rectángulo azul	4,00	1,74 cm	$A = 4,00 \text{ cm} \cdot 1,74 \text{ cm}$
Rectángulo rojo	4,00	3,21 cm	$A = 4,00 \text{ cm} \cdot 3,21 \text{ cm}$
Rectángulo verde	3,79	1,74 cm	$A = 3,79 \text{ cm} \cdot 1,74 \text{ cm}$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

hay un factor que es comun en ambos rectangulos

4. Mueve los puntos A, R, V y W de un extremo a otro y observa los cambios.
5. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$At = V \cdot 3,79 \text{ cm} + W \cdot 4,00 \text{ cm} = 1,74 \text{ cm}$$

$$At = 3,79 \text{ cm} + 4,00 \cdot 3,21 \text{ cm}$$

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	$A = y \cdot x$
Rectángulo azul	z	w	$A = z \cdot w$
Rectángulo rojo	z	x	$A = z \cdot x$
Rectángulo verde	y	w	$A = y \cdot w$

- Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$A_t = y + z \cdot x + w$$

$$A_t \leftarrow$$

NOMBRE ESTUDIANTE: Jaime MadridGRADO: octavo

Situación 3. Producto de binomios con Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales positivos.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Variar la longitud de las bases y alturas de los rectángulos

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (A, B, D y D) de los segmentos.

Cuando varían las magnitudes varían las bases y las alturas de varias de los rectángulos que comparten magnitudes

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	3,55cm	3,61cm	$A = 3,55 \cdot 3,61 \text{ cm}$
Rectángulo azul	3,53 cm	2,42cm	$A = 3,53 \cdot 2,42 \text{ cm}$
Rectángulo rojo	3,53cm	3,61cm	$A = 3,53 \cdot 3,61 \text{ cm}$
Rectángulo verde	3,63cm	2,42cm	$A = 3,63 \cdot 2,42 \text{ cm}$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

Porque hay rectángulos que comparten magnitudes o sea bases y Alturas.

4. Mueve los puntos A, R, V y W de un extremo a otro y observa los cambios.
5. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$A = (3,55 + 3,53) \cdot (3,61 + 2,42)$$

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	$A = y \cdot x$
Rectángulo azul	z	w	$A = z \cdot w$
Rectángulo rojo	z	x	$A = z \cdot x$
Rectángulo verde	y	w	$A = y \cdot w$

- Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$A = (y + z) \cdot (x + w)$$

NOMBRE ESTUDIANTE:

Jose Alejandro MillanGRADO: octavo

Situación 3. Producto de binomios con Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales positivos.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva*. Variar la longitud de las bases y alturas de los rectángulos
1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas los extremos (A, B, D y D) de los segmentos.

2. En la siguiente tabla realiza la expresión del cálculo de las áreas de los rectángulos.

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	4	3	$(4\text{ cm} \times 3\text{ cm})$
Rectángulo azul	5	2	$(5\text{ cm} \times 2\text{ cm})$
Rectángulo rojo	5	3	$(5\text{ cm} \times 3\text{ cm})$
Rectángulo verde	4	2	$(4\text{ cm} \times 2\text{ cm})$

3. ¿por qué crees que en las expresiones se repiten algunos valores?

Tienen el mismo factor común.

4. Mueve los puntos A, R, V y W de un extremo a otro y observa los cambios.
5. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$(4\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 4\text{ cm}) \times (3\text{ cm} + 2\text{ cm} + 3\text{ cm} + 2\text{ cm})$

6. Abre el archivo con el nombre de *multiplicación de binomios con propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo de cabri.
- Variar la longitud de la base del rectángulo

7. Registra en la siguiente tabla las expresiones del cálculo de las áreas de cada rectángulo

Rectángulo	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	y * x
Rectángulo azul	z	w	z * w
Rectángulo rojo	z	x	z * x
Rectángulo verde	x	w	y * w

- Mueve los puntos A, R, V y U de un extremo a otro y observa los cambios.

8. ¿Cuál es la expresión del área total de la figura que se acabó de formar?

$$(y + z) \cdot (x + w)$$

NOMBRE ESTUDIANTE: Jaime MadridGRADO: octavo**Situación 4. Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales.**

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *propiedad distributiva*.
- Variar la longitud de la altura de los rectángulos.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas un extremo de los segmentos de colores.

al variar las magnitudes "b", "c" y "d" varían las bases mientras que cuando varía la "a" varía la altura

2. Mueve los puntos U, R, V de un extremo a otro y observa los cambios. ¿Cuál crees que es el segmento que se debe considerar como el factor común en todas las áreas de los rectángulos? ¿Por qué?

el factor común es "a" (2,82cm) porque es la altura de todos rectángulos

3. Abre el archivo con el nombre de *propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.
- Unir los tres rectángulos en uno solo.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	π	$A = y \cdot \pi$
Rectángulo azul	z	π	$A = z \cdot \pi$
Rectángulo rojo	w	π	$A = w \cdot \pi$

5. De acuerdo con la anterior tabla, ¿cuál es el factor común de la expresión de la suma de las áreas de los rectángulos?

$$x(y + z + w) = (y \cdot x) + (z \cdot x) + (w \cdot x)$$

6. ¿Cuál es la expresión del área de la suma de los rectángulos?

$$At = x(x + z + w)$$

NOMBRE ESTUDIANTE: Rosa Angelica Pareja
GRADO: octavo

Situación 4. Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *propiedad distributiva*.
- Variar la longitud de la altura de los rectángulos.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas un extremo de los segmentos de colores.

Cuando se mueve el segmento A se mueven las 3 columnas hacia abajo y arriba en la B se mueve las tres de lado derecho y izquierdo cuando se mueve la C se mueven dos azul y rojo de lado cuando se mueve

2. Mueve los puntos U, R, V de un extremo a otro y observa los cambios. ¿Cuál crees que es el segmento que se debe considerar como el factor común en todas las áreas de los rectángulos? ¿Por qué?

El segmento A por que todos tienen la misma altura

d se mueve la columna roja de lado

3. Abre el archivo con el nombre de *propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.
- Unir los tres rectángulos en uno solo.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	$A = y \cdot x$
Rectángulo azul	2	x	$A = 2 \cdot x$
Rectángulo rojo	w	x	$A = w \cdot x$

5. De acuerdo con la anterior tabla, ¿cuál es el factor común de la expresión de la suma de las áreas de los rectángulos?

$$A = x(y + z + w)$$

6. ¿Cuál es la expresión del área de la suma de los rectángulos?

$$(x + z + w)(x)$$

NOMBRE ESTUDIANTE: Juan Felipe librenoGRADO: octavo**Situación 4. Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales.**

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *propiedad distributiva*.
- Variar la longitud de la altura de los rectángulos.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas un extremo de los segmentos de colores.

Ps que con cada vez que uno mueve un segmento el cambia de altura o de anchura, o sea q' cambia su forma.

2. Mueve los puntos U, R, V de un extremo a otro y observa los cambios. ¿Cuál crees que es el segmento que se debe considerar como el factor común en todas las áreas de los rectángulos? ¿Por qué?

Seria el valor de la altura, ya es el mismo valor en todas las figuras.

3. Abre el archivo con el nombre de *propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.
- Unir los tres rectángulos en uno solo.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	y	x	$y + x$
Rectángulo azul	z	x	$z + x$
Rectángulo rojo	w	x	$w + x$

$(-+x)$

5. De acuerdo con la anterior tabla, ¿cuál es el factor común de la expresión de la suma de las áreas de los rectángulos?

Sería la altura x que tiene la misma letra.

6. ¿Cuál es la expresión del área de la suma de los rectángulos?

$$A = x(y + z + w)$$

NOMBRE ESTUDIANTE: Jose Alejandro Millan
GRADO: octavo

Situación 4. Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales.

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *propiedad distributiva*.
- Variar la longitud de la altura de los rectángulos.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas un extremo de los segmentos de colores.

*Aumentan o disminuyen las longitudes
que se toman.*

2. Mueve los puntos U, R, V de un extremo a otro y observa los cambios. ¿Cuál crees que es el segmento que se debe considerar como el factor común en todas las áreas de los rectángulos? ¿Por qué?

*El segmento (d), porque cuando uno
desplaza ese punto, las alturas de los
rectángulos varían.*

3. Abre el archivo con el nombre de *propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.
- Unir los tres rectángulos en uno solo.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	<i>x</i>	<i>x</i>	<i>y x x</i>
Rectángulo azul	<i>z</i>	<i>x</i>	<i>z x x</i>
Rectángulo rojo	<i>w</i>	<i>x</i>	<i>w x x</i>

5. De acuerdo con la anterior tabla, ¿cuál es el factor común de la expresión de la suma de las áreas de los rectángulos?

$$R1 (-x)$$

6. ¿Cuál es la expresión del área de la suma de los rectángulos?

$$(y + z + w) \cdot (x)$$

NOMBRE ESTUDIANTE: Jorge Ivan Lopez GarciaGRADO: octavo**Situación 4. Propiedad distributiva en el conjunto de los números racionales.**

Sigue atentamente los pasos que te brindamos a continuación y luego responde las preguntas:

- Abrir el archivo con el nombre de *propiedad distributiva*.
- Variar la longitud de la altura de los rectángulos.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.

1. Explica con tus propias palabras que está sucediendo con las longitudes de los rectángulos cada vez que desplazas un extremo de los segmentos de colores.

al desplazar el punto "a" varia la altura
el de b el varia base

2. Mueve los puntos U, R, V de un extremo a otro y observa los cambios. ¿Cuál crees que es el segmento que se debe considerar como el factor común en todas las áreas de los rectángulos? ¿Por qué?

el de la altura porque sigue siendo igual

3. Abre el archivo con el nombre de *propiedad distributiva ejercicio* y realiza los siguientes pasos:

- Observación de la interface y la ventana de trabajo.
- Variar la longitud de la base del rectángulo.
- Unir los tres rectángulos en uno solo.

4. Completa la siguiente tabla después de observar la ventana de trabajo en cabri:

figura	base	altura	Expresión
Rectángulo amarillo	x	x	$A = y \cdot x$
Rectángulo azul	z	x	$A = z \cdot x$
Rectángulo rojo	w	x	$A = w \cdot x$

5. De acuerdo con la anterior tabla, ¿cuál es el factor común de la expresión de la suma de las áreas de los rectángulos?

el factor común es x

6. ¿Cuál es la expresión del área de la suma de los rectángulos?

$$A_T = y + z + w = x$$