

Relaciones de equivalencia con abiertos saturados

Lorenzo Acosta G.

Marcela Rubio P.

Recibido Sept. 2, 2005

Aceptado May. 17, 2006

Abstract

We characterize equivalence relations defined on topological spaces whose open sets are saturated. We observe that compactness and connectedness of quotient spaces obtained through these relations are equivalent to compactness and connectedness of the original spaces. We present a category, domain of two natural functors that are simple examples of categorical fibrations.

Keywords: Saturated sets, compactness, connectedness, categorical fibrations.

AMSC(2000): Primary: 54A05, Secondary: 54B30.

Resumen

Se caracterizan las relaciones de equivalencia definidas sobre un espacio topológico para las cuales los abiertos son conjuntos saturados. Se observa que la compacidad y la conexidad del espacio cociente obtenido con tales relaciones, es equivalente a la compacidad y la conexidad del espacio original. Con base en lo anterior se presenta una categoría, a partir de la cual se definen dos funtores naturales que resultan ser ejemplos sencillos de fibraciones categóricas.

Palabras y frases claves: Conjuntos saturados, compacidad, conexidad, fibraciones categóricas.

1 Introducción

En cursos básicos de teoría de conjuntos y topología general se estudian los espacios cocientes, los conjuntos saturados y la compacidad, pero en la literatura son escasos los resultados que relacionan estos tres conceptos. Presentamos al respecto un resultado en el cual las relaciones de equivalencia definidas sobre un espacio topológico, para las cuales los abiertos son saturados, juegan un papel especial para obtener una equivalencia entre la compacidad y la conexidad del espacio topológico y el espacio cociente obtenido con alguna de dichas relaciones.

Con estos resultados construimos una categoría $\mathfrak{C}$ y definimos dos funtores olvido naturales con dominio esta categoría. Estos funtores resultan ser ejemplos de fibraciones categóricas. Las condiciones bajo las cuales un funtor es una fibración categórica fueron definidas en [4], dicha definición fue motivada por el funtor olvido de *Top* en *Conj*.

Vamos a caracterizar las relaciones de equivalencia definidas sobre un espacio topológico para las cuales los abiertos son saturados.

Sea (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X . Consideremos el espacio cociente X/R con su topología cociente τ/R .

$$\tau/R = \{A \subseteq X/R \mid \theta^{-1}(A) \in \tau\}$$

donde $\theta : X \longrightarrow X/R : \theta(x) = \bar{x}$ es la función canónica al cociente. τ/R es la topología más fina sobre X/R que hace a θ continua.

Decimos que un subconjunto B de X es R -**saturado**ó simplemente saturado, (definición tomada de [3]), si $\theta^{-1}(\theta(B)) = B$, es decir,

$$(\forall y \in B)(y R x \implies x \in B).$$

Definición 1. En el espacio (X, τ) definimos la siguiente relación:

$$x \sim_{\tau} y \iff (x \in \text{adh}_{\tau}\{y\} \wedge y \in \text{adh}_{\tau}\{x\}),$$

donde $\text{adh}_{\tau}Z$ designa la adherencia de Z con respecto a la topología τ . Cuando no haya lugar a confusión notaremos la relación simplemente por $\sim$ y la llamaremos la relación identificación $\mathbf{T}_0$ en (X, τ) (Compare [5]).

Se tiene que $\sim$ es una relación de equivalencia en X , puesto que por definición $\sim$ es simétrica y por propiedades de la adherencia, resulta ser reflexiva y transitiva.

Proposición 1. Si $\tau \in \text{Top}(X)$ (la clase de las topologías sobre X), entonces los abiertos de τ son $\sim$ -saturados.

Proof. Sea $A \in \tau$. Basta probar que $\theta^{-1}(\theta(A)) \subseteq A$.

Si $x \in \theta^{-1}(\theta(A))$, existe $a \in A$ tal que $x \sim a$, entonces $a \in \text{adh}_{\tau}\{x\}$, y por lo tanto $x \in A$. $\square$

Proposición 2. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\sim$ la relación ya definida y R una relación de equivalencia sobre X . Los abiertos de X son R -saturados si y sólo si la identificación T_0 es más fina que R .

Proof. $\Rightarrow$) Sean $x, y \in X$ tales que $x R y$. Supongamos que $x \not\sim y$, es decir, $x \notin \text{adh}_{\tau}\{y\}$ ó $y \notin \text{adh}_{\tau}\{x\}$. Si $x \notin \text{adh}_{\tau}\{y\}$ entonces existe $A \in \tau$, $x \in A$ tal que $y \notin A$, pero como $x R y$, esto contradice que A es R -saturado. Luego, $x \sim y$ y $R \subseteq \sim$.

$\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$, $A \in \tau$.

$$(x \in A \wedge x R y) \implies (x \in A \wedge x \sim y) \implies$$

$$(y \in A, \text{ pues } A \text{ es } \sim\text{-saturado}) \implies A \text{ es } R\text{-saturado.} \quad \square$$

Nota. Si X es un espacio topológico T_0 y R es una relación de equivalencia sobre X tal que los abiertos de X son R -saturados, entonces $R = \Delta_X$. La igualdad es pues la única relación de equivalencia en X tal que, para toda topología T_0 , los abiertos son saturados.

2 Propiedades de los cocientes realizados con relaciones de identificación T_0 .

Presentaremos algunas de las propiedades que adquieren los espacios cociente, obtenidos a través de relaciones de equivalencia para las cuales los abiertos son saturados, así como las propiedades de la función canónica al cociente.

Proposición 3. Sean (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X . Si los abiertos de (X, τ) son saturados, entonces (X, τ) es compacto si y sólo si $(X/R, \tau/R)$ es compacto.

Proof. $\Rightarrow$) Como θ es una función continua, sobre, y (X, τ) es compacto entonces $(X/R, \tau/R)$ es compacto.

$\Leftarrow$) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento de X por abiertos de τ , es decir,
 $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Entonces $X/R = \theta(X) = \theta\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \theta(A_i)$.

$\theta(A_i)$ es abierto en X/R para cada $i \in I$, puesto que $\theta^{-1}(\theta(A_i)) = A_i$, ya que $A_i \in \tau$ y los abiertos de (X, τ) son saturados.

Así, $\{\theta(A_i)\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X/R y como $(X/R, \tau/R)$ es compacto existe $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$ tal que $X/R = \bigcup_{j=1}^n \theta(A_{i_j})$.

Veamos ahora que $X = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$:

$X = \theta^{-1}(X/R) = \theta^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^n \theta(A_{i_j})\right) = \bigcup_{j=1}^n \theta^{-1}(\theta(A_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$. Por lo tanto, (X, τ) es compacto. $\square$

De la demostración del teorema anterior se tiene el siguiente corolario.

Corolario 4. Si (X, τ) es un espacio topológico y R es una relación de equivalencia sobre X tal que la identificación T_0 es más fina que R , entonces $\theta : (X, \tau) \longrightarrow (X/R, \tau/R)$ es abierta.

Proposición 5. Sean (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X , tal que la identificación T_0 es más fina que R . (X, τ) es conexo si y sólo si $(X/R, \tau/R)$ es conexo.

Proof. $\Rightarrow$) Como θ es una función continua, sobre, y (X, τ) es conexo entonces $(X/R, \tau/R)$ es conexo.

$\Leftarrow$) Supongamos que (X, τ) es desconexo, es decir $X = A \cup B$ donde A y B son subconjuntos no vacíos de X , abiertos y disjuntos.

Entonces $X/R = \theta(X) = \theta(A \cup B) = \theta(A) \cup \theta(B)$, donde $\theta(A)$, $\theta(B)$ son elementos no vacíos de τ/R .

$\bar{y} \in \theta(A) \cap \theta(B) \implies y \in \theta^{-1}(\theta(A)) = A \wedge y \in \theta^{-1}(\theta(B)) = B$
 $\implies y \in A \cap B = \emptyset$.

Así, $\theta(A) \cap \theta(B) = \emptyset$ y $\{\theta(A), \theta(B)\}$ es una desconexión de $(X/R, \tau/R)$. $\square$

De los resultados anteriores obtenemos que la compacidad y la conexidad de un espacio topológico X son equivalentes respectivamente, a la compacidad y la conexidad del espacio cociente X/R , cuando los abiertos de X son R -saturados.

Proposición 6. *Sean (X, τ) un espacio topológico y R una relación de equivalencia sobre X tal que la identificación T_0 es más fina que R , entonces $\theta : (X, \tau) \longrightarrow (X/R, \tau/R)$ es una función cerrada.*

Proof. Sea C un subconjunto cerrado de X . Queremos ver que $\theta(C)$ es cerrado en X/R . Como $X \setminus C$ es abierto en X y θ es abierta, basta ver que $\theta(C) = X/R \setminus \theta(X \setminus C)$.

Si $\bar{x} \in \theta(C)$ entonces $\bar{x} = \bar{y}$ para algún $y \in C$. Tenemos que $\bar{x} = \bar{y}$, $y, \bar{y} \notin \theta(X \setminus C)$, pues los abiertos de τ son saturados, de modo que $\bar{x} \in X/R \setminus \theta(X \setminus C)$.

Por otra parte, si $\bar{x} \in X/R \setminus \theta(X \setminus C)$ entonces tenemos que $\bar{x} \in X/R$, y, $\bar{x} \notin \theta(X \setminus C)$, es decir, $\bar{x} \in X/R$, y, $x \notin \theta^{-1}(\theta(X \setminus C)) = X \setminus C$, luego $\bar{x} \in \theta(C)$. $\square$

Proposición 7. *Sean R una relación de equivalencia sobre X , tal que la identificación T_0 es más fina que R y $\theta : (X, \tau) \longrightarrow (X/R, \tau/R)$ es la función canónica al cociente. Si C es un subconjunto cerrado de X entonces $C = \theta^{-1}(\theta(C))$.*

Proof. Ya sabemos que $C \subseteq \theta^{-1}(\theta(C))$. Sea $x \in \theta^{-1}(\theta(C))$, entonces $\bar{x} \in \theta(C)$ de modo que $\bar{x} = \bar{y}$ para algún $y \in C$. Se tiene que $x \in C$ porque de lo contrario, como $X \setminus C$ es un abierto de X , el cual es saturado y $\bar{x} = \bar{y}$, se tendría que $y \in X \setminus C$. $\square$

Por lo anterior, se tiene que al considerar una relación de equivalencia sobre el espacio topológico X tal que los abiertos son saturados, los cerrados de X también resultan ser subconjuntos saturados y la función canónica al cociente es abierta y cerrada.

3 La categoría $\mathfrak{C}$ y dos fibraciones categóricas

Con base en lo discutido en las secciones anteriores podemos definir de manera natural la categoría $\mathfrak{C}$ que tiene por objetos triplas (X, τ, R) tales que $\tau \in Top(X)$ y R es una relación de equivalencia sobre X para la cual los abiertos de (X, τ) son R -saturados, es decir, $R \subseteq \sim_\tau$.

Los morfismos en $\mathfrak{C}$ son funciones $f : (X, \tau, R) \longrightarrow (Y, \mu, S)$ tales que:

- i) $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \mu)$ es continua, y
- ii) $f : (X, R) \longrightarrow (Y, S)$ respeta relaciones, es decir, $x R y$ implica $f(x) S f(y)$.

Es natural definir dos funtores olvido con dominio la categoría $\mathfrak{C}$, para los cuales mostraremos que son fibraciones categóricas. Para presentar la definición de fibración categórica y siendo $F : C \rightarrow D$ un funtor covariante, recordemos que:

- 1) F es fiel si $F|_{[\mathbb{X}, \mathbb{Y}]}$ es uno a uno, para cada $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in Ob(C)$.
- 2) F es fuertemente fiel si para todo $X \in Ob(D)$ y todo isomorfismo f en la fibra de X tal que $F(f) = 1_X$, se tiene que f es una identidad en C .
- 3) i) $f : X \rightarrow Y$ en D es apto para construir estructuras iniciales, si para todo $\mathbb{Y} \in Ob(C)$ tal que $F(\mathbb{Y}) = Y$, existe $\mathbb{X} \in Ob(C)$, con $F(\mathbb{X}) = X$ y un morfismo $\mathfrak{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ en C que cumpla la propiedad universal a izquierda, entonces $\mathbb{X}$ es una estructura inicial relativa a f y a Y .

$\mathfrak{f} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ cumple la propiedad universal a izquierda si para todo objeto $\mathbb{Z}$ de C , con $F(\mathbb{Z}) = Z$ y todo morfismo $g : Z \rightarrow X$ de D , para el cual exista un morfismo $\mathfrak{h} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $F(\mathfrak{h}) = f \circ g$, existe un morfismo $\mathfrak{g} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{X}$ tal que $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ y $F(\mathfrak{g}) = g$.

- ii) $f : Y \rightarrow X$ en D es apto para construir estructuras finales, si para todo $\mathbb{Y} \in Ob(C)$ tal que $F(\mathbb{Y}) = Y$, existe $\mathbb{X} \in Ob(C)$, con $F(\mathbb{X}) = X$ y un morfismo $\mathfrak{f} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ en C que cumpla la propiedad universal a derecha, entonces $\mathbb{X}$ es una estructura final relativa a f y a Y .

$\mathfrak{f} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ cumple la propiedad universal a derecha si para todo objeto $\mathbb{Z}$ de C , con $F(\mathbb{Z}) = Z$ y todo morfismo $g : X \rightarrow Z$ de D , para el cual exista un morfismo $\mathfrak{h} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $F(\mathfrak{h}) = g \circ f$, existe un morfismo $\mathfrak{g} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $\mathfrak{g} \circ \mathfrak{f} = \mathfrak{h}$ y $F(\mathfrak{g}) = g$.

Definición 2. Sea $F : C \rightarrow D$ un funtor covariante. Se dice que F es una fibración categórica (tomado de [4]), si F satisface las siguientes propiedades:

1. F es fiel.
2. F es fuertemente fiel.
3. Todo morfismo de D es apto para construir estructuras iniciales y finales.
4. Para cada objeto X de D , la fibra de $X : Fib_F(X)$ es un retículo completo.

Sea $U : \mathfrak{C} \rightarrow Top$ el funtor olvido de la estructura de la relación de equivalencia. Escribimos

$$Fib_U(X, \tau) = \{R \subseteq X \times X \mid R \text{ es de equivalencia y } R \subseteq \sim_\tau\}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} R \leq S &\Leftrightarrow 1_{(X, \tau)} : (X, \tau, R) \rightarrow (X, \tau, S) \text{ es un morfismo en } \mathfrak{C} \\ &\Leftrightarrow R \subseteq S. \end{aligned}$$

La siguiente proposición es evidente.

Proposición 8. $Fib_U(X, \tau)$ es un retículo completo con el orden $\subseteq$.

Observe que el mínimo en el retículo $(Fib_U(X, \tau), \subseteq)$ es la diagonal $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ y el máximo es la relación $\sim_\tau$.

Proposición 9. Todo morfismo de Top es apto para la construcción de estructuras iniciales.

Proof. Sea $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ un morfismo en Top . Consideremos S una relación de equivalencia arbitraria sobre Y tal que $S \subseteq \sim_\mu$ y definimos R sobre X por:

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid f(x) S f(y)\} \cap \sim_\tau.$$

R es una relación de equivalencia sobre X que satisface $R \subseteq \sim_\tau$.

Veamos ahora que $f : (X, \tau, R) \rightarrow (Y, \mu, S)$ cumple la propiedad universal a izquierda.

Sean $(Z, \eta, T) \in Ob(\mathfrak{C})$ tal que $g : (Z, \eta) \rightarrow (X, \tau)$ es una función continua, $h = f \circ g$ y $h : (Z, \eta, T) \rightarrow (Y, \mu, S)$ un morfismo en $\mathfrak{C}$. Queremos ver que $g : (Z, \eta, T) \rightarrow (X, \tau, R)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$. Basta ver que g respeta relaciones. $(m, n \in Z \wedge m T n) \implies (h(m) S h(n)) \implies (f(g(m)) S f(g(n)))$.

Por otra parte $g(m) \sim_\tau g(n)$, veamos:

$$(A \in \tau \wedge g(m) \in A) \implies (m \in g^{-1}(A) \in \eta) \implies (n \in g^{-1}(A)) \implies (g(n) \in A) \implies (g(m) \in adh_\tau \{g(n)\}).$$

Análogamente $g(n) \in adh_\tau \{g(m)\}$.

Luego, de las observaciones anteriores se obtiene que $g(m) R g(n)$. $\square$

Proposición 10. Todo morfismo de Top es apto para la construcción de estructuras finales.

Proof. Sea $f : (Y, \mu) \rightarrow (X, \tau)$ un morfismo en Top . Consideremos S una relación de equivalencia arbitraria sobre Y tal que $S \subseteq \sim_\mu$ y definimos R sobre X de la siguiente forma:

$$R = \Delta_X \cup \{(f(x), f(y)) \mid (x, y) \in S\}.$$

R es una relación de equivalencia. Veamos que $R \subseteq \sim_\tau$ mostrando que los abiertos de τ son R -saturados.

Sea $A \in \tau$, $m \in A \wedge m R n$. Queremos ver que $n \in A$.

i) Si $m = n$ entonces claramente $n \in A$.

ii) Si $m = f(x)$, $n = f(y)$ tales que $x S y$, entonces

$$(x \in f^{-1}(A) \in \mu) \implies (y \in f^{-1}(A)) \implies n = f(y) \in A.$$

Ahora veamos que $f : (Y, \mu, S) \rightarrow (X, \tau, R)$ cumple la propiedad universal a derecha.

Sean $(Z, \eta, T) \in Ob(\mathfrak{C})$ tal que $g : (X, \tau) \rightarrow (Z, \eta)$ es una función continua, $h = g \circ f$ y $h : (Y, \mu, S) \rightarrow (Z, \eta, T)$ un morfismo en $\mathfrak{C}$.

Veamos que $g : (X, \tau, R) \rightarrow (Z, \eta, T)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$. Basta mostrar que g respeta las relaciones. Consideremos $x, y \in X$ tales que $x R y$.

i) Si $x = y$ entonces $g(x) T g(y)$.

ii) Si $x = f(m)$, $y = f(n)$ tales que $m S n$ entonces

$$(h(m) T h(n)) \implies (g(f(m)) T g(f(n))) \implies g(x) T g(y) \quad \square$$

Corolario 11. U es una fibración categórica.

Llamamos EQ a la categoría que tiene por objetos los pares (X, R) donde R es una relación de equivalencia sobre X y morfismos, las funciones que respetan dichas relaciones.

Sea $V : \mathfrak{C} \rightarrow EQ$ el funtor olvido de la estructura topológica.

$Fib_V(X, R) = \{\tau \in Top(X) \mid R \subseteq \sim_\tau\}$ y se tiene que, en $Fib_V(X, R)$,

$$\begin{aligned} \tau \leq \mu &\iff 1_{(X, R)} : (X, \tau, R) \rightarrow (X, \mu, R) \text{ es un morfismo en } \mathfrak{C} \\ &\iff \tau \supseteq \mu. \end{aligned}$$

El siguiente lema será de utilidad.

Lema 12. Si $\tau, \mu \in Top(X)$ tales que $\tau \subseteq \mu$ entonces $\sim_\mu \subseteq \sim_\tau$.

Proposición 13. $Fib_V(X, R)$ es un retículo completo con el orden $\supseteq$.

Proof. Sea $\{\tau_i\}_{i \in I}$ una colección de elementos de $Fib_V(X, R)$, es decir, $\tau_i \in Top(X) \wedge R \subseteq \sim_{\tau_i}$ para cada $i \in I$.

Como $\bigvee_{i \in I} \tau_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} \tau_i \right\rangle \supseteq \tau_i$ para cada i se tiene que $\sim_{\bigvee_{i \in I} \tau_i} \subseteq \sim_{\tau_i}$ para cada i , entonces $\sim_{\bigvee_{i \in I} \tau_i} \subseteq \bigcap_{i \in I} \sim_{\tau_i}$.

Veamos que $\sim_{\bigvee_{i \in I} \tau_i} = \bigcap_{i \in I} \sim_{\tau_i}$:

Tomemos $(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \sim_{\tau_i}$ entonces $(x, y) \in \sim_{\tau_i}$ para cada $i \in I$.

Sea $A \in \bigvee_{i \in I} \tau_i$ tal que $x \in A$, es decir, $x \in A = \bigcup_{k \in K} \left(\bigcap_{j=1}^n B_{kj} \right)$ donde $B_{kj} \in \bigcup_{i \in I} \tau_i$ para $1 \leq j \leq n$, $k \in K$.

Entonces $x \in \bigcap_{j=1}^n B_{k_o j}$, donde $B_{k_o j} \in \bigcup_{i \in I} \tau_i$, para $1 \leq j \leq n$, de lo cual tenemos que $y \in \bigcap_{j=1}^n B_{k_o j}$, luego $y \in A$.

Así tenemos que $x \in adh_{\bigvee_{i \in I} \tau_i} \{y\} \wedge y \in adh_{\bigvee_{i \in I} \tau_i} \{x\}$ de modo que $(x, y) \in \sim_{\bigvee_{i \in I} \tau_i}$.

Luego, $R \subseteq \bigcap_{i \in I} \sim_{\tau_i} = \sim_{\bigvee_{i \in I} \tau_i}$ de modo que $\bigvee_{i \in I} \tau_i \in Fib_V(X, R)$, y es el extremo inferior de $\{\tau_i\}_{i \in I}$ en $(Fib_V(X, R), \supseteq)$. $\square$

Queremos ahora identificar los extremos en $(Fib_V(X, R), \supseteq)$. El mínimo corresponde a la topología más fina sobre X , digamos τ , tal que sus abiertos son R -saturados, es decir, para la cual $R \subseteq \sim_\tau$.

Es fácil demostrar la siguiente proposición.

Proposición 14. *Sea $(X, R) \in Ob(EQ)$. El mínimo de $(Fib_V(X, R), \supseteq)$ es la topología generada por las clases de equivalencia de la relación R , es decir, la topología más pequeña que tiene estas clases como abiertos.*

Nota. La topología τ de la proposición anterior depende de la relación R , por ello la notaremos $M(R)$.

Es claro que en $(Fib_V(X, R), \supseteq)$ el máximo es G_X , la topología grosera sobre X , puesto que es la menor topología sobre X para la cual se tiene $R \subseteq \sim_{G_X} = X \times X$.

Proposición 15. *Todo morfismo de EQ es apto para la construcción de estructuras iniciales.*

Proof. Sea $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ un morfismo en EQ . Tenemos μ una topología arbitraria sobre Y tal que $S \subseteq \sim_\mu$.

Definimos $\tau = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mu\}$, que es una topología sobre X .

Veamos que $R \subseteq \sim_\tau$, mostrando que los abiertos de τ son R -saturados:

Sean $f^{-1}(A) \in \tau$ y $x \in f^{-1}(A)$ tal que $x R y$, entonces

$f(x) S f(y)$, $f(x) \in A \in \mu$, de donde, $f(y) \in A$ y por tanto, $y \in f^{-1}(A)$.

Ahora veamos que $f : (X, \tau, R) \rightarrow (Y, \mu, S)$ cumple la propiedad universal a izquierda.

Sean $(Z, \eta, T) \in Ob(\mathfrak{C})$ tal que $g : (Z, T) \rightarrow (X, R)$ es un morfismo en EQ , $h = f \circ g$ y $h : (Z, \eta, T) \rightarrow (Y, \mu, S)$ un morfismo en $\mathfrak{C}$.

Veamos que $g : (Z, \eta, T) \rightarrow (X, \tau, R)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$. Basta ver que g es continua:

$$\begin{aligned} (B \in \tau) &\implies (B = f^{-1}(A) \text{ con } A \in \mu) \implies \\ &\left(g^{-1}(B) = g^{-1}(f^{-1}(A)) = (f \circ g)^{-1}(A) = h^{-1}(A) \in \eta \right) \implies \\ &(g^{-1}(B) \in \eta). \end{aligned} \quad \square$$

Proposición 16. *Todo morfismo de EQ es apto para la construcción de estructuras finales.*

Proof. Sea $f : (Y, S) \rightarrow (X, R)$ un morfismo en EQ . Considera-mos μ una topología arbitraria sobre Y tal que $S \subseteq \sim_\mu$ y definimos

$$\tau = \{B \subseteq X \mid f^{-1}(B) \in \mu \wedge \theta_R^{-1}(\theta_R(B)) = B\}$$

donde $\theta_R : X \rightarrow X/R$ es la función canónica al cociente.

Es fácil ver que τ es una topología sobre X y claramente $R \subseteq \sim_\tau$. Un ejercicio de rutina muestra que $f : (Y, \mu, S) \rightarrow (X, \tau, R)$ cumple la propiedad universal a derecha. $\square$

Corolario 17. *V es una fibración categórica.*

4 Algunas propiedades de las fibraciones categóricas

En [4] se muestra que:

- Si $F : C \rightarrow D$ es una fibración categórica, entonces F admite adjunto tanto a izquierda como a derecha.
- Sea $F : C \rightarrow D$ una fibración categórica. Si D es una categoría completa (o co-completa), entonces C es una categoría completa (o co-completa).

Así, por ser $U : \mathfrak{C} \rightarrow Top$ una fibración categórica y Top una categoría completa (co-completa) se obtiene que $\mathfrak{C}$ es una categoría completa (co-completa); en particular $\mathfrak{C}$ es una categoría con igualadores (co-igualadores) y productos (co-productos).

A continuación exhibiremos los adjuntos para cada uno de los funtores U y V .

Proposición 18. *Si $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)$ es un morfismo en Top entonces $f : (X, \tau, \sim_\tau) \rightarrow (Y, \mu, \sim_\mu)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$.*

Consideremos los funtores:

$D : Top \rightarrow \mathfrak{C}, (f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)) \mapsto (f : (X, \tau, \Delta_X) \rightarrow (Y, \mu, \Delta_Y)),$
determinado por Δ_X el mínimo en $(Fib_U(X, \tau), \subseteq)$ y

$E : Top \rightarrow \mathfrak{C}, (f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \mu)) \mapsto (f : (X, \tau, \sim_\tau) \rightarrow (Y, \mu, \sim_\mu)),$
determinado por el máximo $\sim_\tau$ en $(Fib_U(X, \tau), \subseteq)$.

Es un sencillo ejercicio demostrar las dos proposiciones siguientes.

Proposición 19. *D es adjunto a izquierda de U .*

Proposición 20. *E es adjunto a derecha de U .*

De manera similar definiremos dos funtores de EQ en $\mathfrak{C}$ utilizando los extremos del retículo $(Fib_V(X, R), \supseteq)$.

Proposición 21. *Si $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ es un morfismo en EQ entonces $f : (X, M(R), R) \rightarrow (Y, M(S), S)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$.*

Proof. Debemos probar que $f : (X, M(R)) \rightarrow (Y, M(S))$ es continua. Sea $[y]^S \in M(S)$.

$$x \in f^{-1}([y]^S) \iff f(x) \in [y]^S \iff f(x) S y.$$

Por otra parte veamos que $[x]^R \subseteq f^{-1}([y]^S)$:

$$(z \in [x]^R) \implies (z R x) \implies (f(z) S f(x)) \implies (f(z) S y) \implies$$

$$\left(f(z) \in [y]^S \right) \implies \left(z \in f^{-1}([y]^S) \right).$$

Así, si $x \in f^{-1}([y]^S)$, entonces $x \in [x]^R \subseteq f^{-1}([y]^S)$, donde $[x]^R \in M(R)$, es decir, $x \in \text{int}_{M(R)} f^{-1}([y]^S)$ y $f^{-1}([y]^S) \in M(R)$. $\square$

Definimos el funtor $M : EQ \longrightarrow \mathfrak{C}$, por

$M(f : (X, R) \rightarrow (Y, S)) = (f : (X, M(R), R) \rightarrow (Y, M(S), S))$, determinado por $M(R)$ el mínimo en $(\text{Fib}_V(X, R), \supseteq)$.

Proposición 22. *M es adjunto a izquierda de V.*

Proof. $[M(X, R), (Y, \mu, S)] \xrightarrow{\cong} [(X, R), V(Y, \mu, S)] : f \mapsto f$.

Es claro que si $f : (X, M(R), R) \rightarrow (Y, \mu, S)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$ entonces $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ es un morfismo en EQ .

Por otra parte, veamos que si $f : (X, R) \rightarrow (Y, S)$ es un morfismo en EQ entonces $f : (X, M(R), R) \rightarrow (Y, \mu, S)$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$. Basta con mostrar que $f : (X, M(R)) \rightarrow (Y, \mu)$ es una función continua. Sea $A \in \mu$, si $x \in f^{-1}(A)$, y, $x R z$ entonces $f(x) \in A$, y, $f(x) S f(z)$, de donde, $f(z) \in A$, luego $z \in f^{-1}(A)$.

Así $x \in [x]^R \subseteq f^{-1}(A)$ y por lo tanto $f^{-1}(A) \in M(R)$ $\square$

Por otra parte, definimos el funtor $G : EQ \longrightarrow \mathfrak{C}$, por

$G(f : (X, R) \rightarrow (Y, S)) = (f : (X, G_X, R) \rightarrow (Y, G_Y, S))$, determinado por el máximo G_X en $(\text{Fib}_V(X, R), \supseteq)$.

Es evidente además que se tiene la siguiente proposición.

Proposición 23. *G es adjunto a derecha de V.*

Como consecuencia de las adjunciones presentadas se tiene que U y V respetan límites y co-límites; D y M respetan co-límites; E y G respetan límites.

References

- [1] J. Adamek, H. Herrlich and G. Strecker, Abstract and concrete categories, John Wiley & Sons, New York, 1990.
- [2] N. Bourbaki, Elements of Mathematics, General Topology, Addison-Wesley, France, 1968.
- [3] N. Bourbaki, Elements of Mathematics, Theory of sets, Addison-Wesley, France, 1968.
- [4] J. R. Montañez, Fibraciones categóricas. Conservación de estructuras y construcciones, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1994.
- [5] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, New York, 1970.

Dirección de los autores: L. Acosta, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
lmacostag@unal.edu.co — M. Rubio, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
imrubiop@unal.edu.co