

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural



Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de educación básica

NATHALY VIAFARA IDROBO
CÓDIGO: 201661694

LORENA ANDREA MORENO RENDÓN
CÓDIGO: 201661683

UNIVERSIDAD DEL VALLE, SEDE NORTE DEL CAUCA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTANDER DE QUILICHAO

2021

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural



Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de educación básica

NATHALY VIAFARA IDROBO
CÓDIGO: 201661694

LORENA ANDREA MORENO RENDÓN
CÓDIGO: 201661683

Informe final como requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Directora

ADRIANA GARCÍA MORENO
Magister en Educación

UNIVERSIDAD DEL VALLE, SEDE NORTE DEL CAUCA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTANDER DE QUILICHAO

2021

Dedicatoria

A mi esposo e hijos por ser mi razón de ser.

Agradecimientos

Doy infinitas gracias a Dios por darme la oportunidad de terminar mis estudios para tener un logro más en mi vida y por darme todo su amor.

A mi esposo José Yaima por motivarme cada día a no rendirme, por todo su amor y comprensión, por ser mi compañero de vida y por estar conmigo tanto en los momentos alegres como difíciles.

A mis hijos Carolina, Juan y Felipe Yaima, por toda su paciencia, amor, apoyo y motivación.

A mis padres Fernando Moreno y Amparo Rendón, así como a mis hermanos; Carlos, Fredy y Melissa Moreno por brindarme su apoyo, amor y buenos consejos.

A mi compañera de pregrado Carolina Figueroa, a su señora madre y a los estudiantes que colaboraron de la mejor manera en la aplicación de las actividades.

A mi compañera de trabajo de grado Nathaly Viafara por todo su esfuerzo y dedicación, por su paciencia y por tener siempre la mejor disposición para culminar este proyecto de grado.

A Adriana García, tutora de este trabajo de grado, por su colaboración y contribución al desarrollo de esta investigación.

Y finalmente agradezco a los docentes, a todos los compañeros de pregrado, por su apoyo y compañía durante este largo proceso, especialmente a mi compañera Mayelly Andrea Mutiz por su colaboración y paciencia en el proceso de formación académica.

Lorena Andrea Moreno Rendón

Agradecimientos y Dedicatoria

Primero que todo quiero agradecer a Dios por haberme dado fuerzas para afrontar cada una de las etapas y permitirme llegar hasta el final de esta carrera tan bonita.

A mis padres Amalfi Idrobo y Luis Ángel Viafara, por estar a mi lado siempre, demostrando su amor y apoyo incondicional.

Mi hermano Elkin Viafara Idrobo, por ser mi razón de vivir y un motivo más para culminar esta carrera.

Mis abuelas Ana Débora Camacho y Transito Lucumi, que de una u otra forma se preocuparon por mi bienestar.

Mi compañero Andrés Benítez por motivarme cada día, por apoyo incondicional, por su paciencia, amor, su compañía y escucharme cuando más lo necesite.

A Lorena Andrea Moreno Rendon, amiga y compañera de trabajo de grado, por su esfuerzo, dedicación, apoyo incondicional, por escucharme y estar siempre dispuesta para dar lo mejor de sí misma.

A Adriana García Moreno, tutora de este trabajo de grado, por su compromiso, dedicación, colaboración y contribución al desarrollo de esta investigación.

A mi gran compañera Carolina Figueroa, por escucharme cuando lo necesitaba, por guiarme, por brindarme su apoyo incondicional y su humildad; a su señora madre, por su colaboración y disposición.

Finalmente agradezco a todos mis compañeros que me acompañaron en este hermoso proceso, en especial a Juan Sebastián Galindo, de quien obtuve muchas enseñanzas, quien fue un gran compañero; a Mayelly Andrea Mutiz y Paola Andrea Vivas, por su compañerismo, dedicación, bondad.

Nathaly Viafara Idrobo

Tabla de contenido

Tabla de contenido.....	5
Índice de tablas	7
Índice de figuras.....	8
Resumen.....	10
Resume.....	11
Introducción	12
1. Capítulo I	15
1.1 Antecedentes	15
1.1.1 Antecedentes Globales	16
1.1.2 Antecedentes Nacionales	17
1.2 Presentación del Problema.....	22
1.3 Objetivos	26
1.3.1 Objetivo General.....	26
1.3.2 Objetivos Específicos.....	26
1.4 Justificación	27
2. Capítulo II	34
Marco Teórico.....	34
2.1 Referente Histórico	35
2.1.1 Aproximación a la construcción de número	35
2.1.2 Primeras nociones de conteo realizadas por el hombre primitivo	36
2.1.3 Los griegos siglos VI al VII a.C.	41
2.1.4 La edad media Siglo V al XV	43
2.1.5 Etapa de la fundamentación Siglo XIX	45
2.1.5.1 Dedekind y los números naturales.....	45
2.1.5.2 Peano y los números naturales	47
2.1.5.3 Cantor y los números naturales	49
2.1.5.4 Frege y los números naturales	50
2.2 Referente matemático	52
2.2.1 Algunos axiomas y teoremas en la aritmética de Peano	53
2.2.2 Teoremas	54
2.3 Referente Curricular.....	55
2.3.1 Estándares Básicos de Competencia.....	57
2.3.2 Derechos Básicos de Aprendizaje.....	58

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

2.3.3 Contexto	59
2.4 Referente didáctico	60
2.4.1 Teoría de la Transposición Didáctica	62
2.4.2 Ingeniería didáctica	62
3. Capítulo III	63
Metodología	63
3.1 Desarrollo Metodológico	64
3.2 Contexto de trabajo y experimentación	65
3.2.1 Instrumentos para la recolección de información	66
3.3 Análisis de la aplicación del trabajo de campo	66
3.4 Estructura general de la Propuesta de aula	68
3.4.1 Descripción de la secuencia	68
3.4.2 Conocimientos previos por parte de los estudiantes	74
3.4.3 Análisis a priori de las situaciones	74
4. Capítulo IV	81
Análisis y consideraciones finales	81
4.1 Resultados y análisis de la implementación de la propuesta	81
4.2 Estrategias empleadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades	82
4.3 Confrontación del análisis A priori y análisis A posteriori	143
4.4 Recomendaciones acerca de la propuesta	156
4.5 Conclusiones	158
4.5.1 Referente al primer objetivo	159
4.5.2 Referente al segundo objetivo	161
4.5.3 Referente al tercer objetivo	162
4.6 Algunas ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de educación básica	165
4.6.1 Referente al objetivo general	165
Referencias Bibliográficas	171
Anexo 1. Propuesta de aula	177

Índice de tablas

Tabla 1. estructura general de la propuesta.....	71
Tabla 2. Análisis a priori de la situación I.	75
Tabla 3. Análisis a priori de la situación II.	75
Tabla 4. Análisis a priori de la situación III.....	76
Tabla 5. Análisis a priori de la situación IV.	77
Tabla 6. Análisis a priori de la situación V.....	78
Tabla 7. Análisis a priori de la situación VI.	78
Tabla 8. Análisis a priori de la situación VII.	79
Tabla 9. Análisis a priori de la situación VIII.....	80
Tabla 10. Análisis a priori de la situación IX.	80
Tabla 11. Análisis a posteriori situación I.	144
Tabla 12. Análisis a posteriori situación II.	145
Tabla 13. Análisis a posteriori situación III.....	146
Tabla 14. Análisis a posteriori situación IV.....	147
Tabla 15. Análisis a posteriori situación V.....	149
Tabla 16. Análisis a posteriori situación VI.....	150
Tabla 17. Análisis a posteriori situación VII.	151
Tabla 18. Análisis a posteriori situación VIII.....	153
Tabla 19. Análisis a posteriori situación VIII.....	154

Índice de figuras

Imagen 1. Respuesta- situación 1- actividad 1-tarea 1- estudiantes E2 y E3.	83
Imagen 2. Respuesta-Situación 1- actividad 1- tarea 2- estudiantes E1 y E4.....	84
Imagen 3. Respuesta- situación 1- actividad 1- tarea 3- estudiantes E1, E2 y E5	85
Imagen 4. Respuesta- situación 1- actividad 1- tarea 4	87
Imagen 5. Respuesta- situación 2- actividad 1- tarea 1- estudiantes E1, E4 y E5	89
Imagen 6. Respuesta- situación 2- actividad 1-tarea 1- estudiantes E2 y E3	90
Imagen 7. Respuesta- situación 2- actividad 1- tarea 2- estudiante E4	92
Imagen 8. Respuesta- situación 2- actividad 1- tarea 2- estudiantes E2 y E3	94
Imagen 9. Respuesta- situación 2- actividad 1- tarea 2- estudiantes E2 y E3	94
Imagen 10. Respuesta- situación 2- actividad 1- tarea 2- estudiantes E1 y E5	95
Imagen 11. Respuesta- situación 2- actividad 2 tarea 1.a- estudiante E1	97
Imagen 12. Respuesta- situación 2- actividad 2- tarea 1. b- estudiante E5	97
Imagen 13. Situación 2- actividad 2- tarea 1.c.....	99
Imagen 14. Situación 2- actividad 2- tarea 2	100
Imagen 15. Respuesta- situación 2- actividad 2- tarea 3- estudiantes E1 y E5	104
Imagen 16. Situación 3- actividad 1- tarea 1	106
Imagen 17. Situación 3- tarea 1- actividad 1.a.....	107
Imagen 18. Respuesta- situación 3- actividad 1- tarea 1.a.....	108
Imagen 19. Respuesta- situación 3- actividad 1- tarea 1.c- estudiante E4.....	109
Imagen 20. Respuesta- situación 4- actividad 1- tarea 1.a- estudiante E2.....	110
Imagen 21. Respuesta- situación 4- actividad 1- taREa 1.b- estudiante E3	110
Imagen 22. Respuesta- situación 4- actividad 2- tarea 1.a- estudiante E1.....	111
Imagen 23. Respuesta- situación 4- tarea 1.a- estudiante E2.....	111
Imagen 24. Respuesta- situación 4- actividad 2- tarea 1.b	112
Imagen 25. Respuesta- situación 4- actividad 2- tarea 2- estudiante E2	113
Imagen 26. Respuesta- situación 4- actividad 2- tarea 2- estudiante E5	113
Imagen 27. Respuesta- situación 4- actividad 3- tarea 1	116
Imagen 28. Respuesta- situación 4- actividad 3- tarea 1- estudiante E5	117
Imagen 29. Respuesta- situación 4- actividad 3- tarea 1- estudiante E3	117
Imagen 30. Interacción- Situación 5- actividad 1- tarea 1- estudiantes E1 y E5	120

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Imagen 31. Situación 5- actividad 1- tarea 1- estudiante E1	121
Imagen 32. Respuesta- situación 5- actividad 1- tarea 2- estudiante E4	122
Imagen 33. Respuesta- situación 5- actividad 1- tarea 3- estudiante E5	123
Imagen 34. Respuesta- situación 5- actividad 1- tarea 3- estudiante E4	124
Imagen 35. Situación 6- actividad 1- tarea 1	125
Imagen 36. Respuesta- situación 6- actividad 1- tarea 1- estudiante E5	125
Imagen 37. Respuesta- situación 6- actividad 1- tarea 1- estudiante E1	125
Imagen 38. Respuesta- situación 6- actividad 2- tarea 1- estudiante E2, E3 y E5.....	126
Imagen 39. Respuesta- situación 6- actividad 2- tarea 1- estudiantes E1 y E4	127
Imagen 40. Respuesta- situación 6- actividad 2- tarea 2- estudiante E1	128
Imagen 41. Respuesta- situación 6- actividad 2- tarea 2- estudiante E5	128
Imagen 42. Respuesta- situación 6- actividad 2- tarea 3	129
Imagen 43. Respuesta- situación 7- actividad 1- tarea 1- estudiante E4	130
Imagen 44. Respuesta- situación 7-actividad 1- tarea 1- estudiante E3.....	130
Imagen 45. Respuesta- situación 7- actividad 1- tarea 2- estudiante E2	131
Imagen 46. Respuesta- situación 7- actividad 1 tarea 3 y 4.....	132
Imagen 47. Respuesta- situación 7- actividad 1- tarea 3 y 4- estudiante E4	132
Imagen 48. Respuesta- situación 7- actividad 1- tarea 5- estudiante E3	133
Imagen 49. Respuesta- situación 7- actividad 2- tarea 1 y 2- estudiante E3	134
Imagen 50. Respuesta- situación 7- actividad 2- tarea 3- estudiante E1	135
Imagen 51. Respuesta- situación 7- actividad 2- tarea 3- estudiante 5.....	135
Imagen 52. Respuesta- situación 8- actividad 1- tarea 1- estudiante E2	136
Imagen 53. Situación 8- actividad 2- tarea 1- conteo con los dedos estudiante E1.....	137
Imagen 54. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 1- estudiante E5	138
Imagen 55. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 2	139
Imagen 56. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 3	140
Imagen 57. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 4	140
Imagen 58. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 5- estudiante E1 y E2.....	141
Imagen 59. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 6	142
Imagen 60. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 7- estudiante E3	142
Imagen 61. Respuesta- situación 9- actividad 1- tarea 7- estudiante E4	142

Resumen

En el presente trabajo se exponen las ventajas y limitaciones de la implementación de una propuesta de aula, aplicada a cinco estudiantes de grado primero de educación básica de Santander de Quilichao; con el propósito de que puedan hacer una aproximación a la noción del número natural a partir de la noción de unidad y el principio de correspondencia.

El diseño de esta propuesta tiene como referente una aproximación histórica y epistemológica relacionada con la construcción de los números naturales y sus propiedades, así como algunas de sus representaciones. Además de las orientaciones del Ministerio de Educación Nacional, expuestos en los Lineamientos Curriculares, Estándares Básicos de Competencias, Derechos Básicos de Aprendizaje y la Matriz de Referencia; en los que se introduce el concepto de número natural.

Seguidamente se realizó un análisis de los resultados obtenidos después de la implementación de la propuesta de aula; enmarcado en los planteamientos metodológicos de la micro-ingeniería didáctica; por último, se determinaron algunas conclusiones y recomendaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de los números naturales.

Se tiene la expectativa de que las conclusiones y recomendaciones de este trabajo; puedan orientar otras investigaciones a la vez que generen una reflexión sobre la concepción que se tiene acerca de la enseñanza del número natural; a partir de una representación desde lo concreto hasta lo abstracto, que no esté alejada de las construcciones formales.

Palabras clave: Números naturales, unidad, correspondencia uno a uno, conteo, ingeniería didáctica.

Resume

In this degree work, the implementation of a classroom proposal is exposed, applied to five first-grade students of basic education from Educational Institutions: La Milagrosa, Rafael Tello and Alto San Francisco, located in the city of Santander de Quilichao; with the purpose that they can make an approach to the notion of unity and the principle of correspondence.

The design of this proposal is based on a historical and epistemological approach related to the construction of natural numbers and their properties, as well as some of their representations. In addition to the guidelines of the Ministry of National Education, set forth in the Curricular Guidelines, Basic Competency Standards, Basic Learning Rights and the Reference Matrix; in which the concept of natural number is introduced.

Next, an analysis of the results obtained after the implementation of the classroom proposal was carried out; framed in the methodological approaches of didactic micro-engineering; finally, some conclusions and recommendations related to the teaching and learning of natural numbers were determined.

It is expected that the conclusions and recommendations of this work; They can guide other investigations at the same time that they generate a reflection on the conception that is had about the teaching of the natural number; from a representation from the concrete to the abstract, which is not far from formal constructions.

Keywords: Natural numbers, unit, one-to-one correspondence, counting, didactic engineering.

Introducción

Las investigaciones históricas y epistemológicas dan cuenta del proceso complejo por el cual se consolida el número natural como objeto matemático. Sus construcciones formales se vieron permeadas por diferentes procesos epistemológicos y por los aportes de matemáticos como Dedekind, Peano, Cantor, Frege, entre otros. En este proceso, se emplearon diferentes métodos¹ para superar las dificultades y obstáculos que dieron lugar a la formalización del número natural. Pero son estos métodos, los que pueden llegar a constituirse en un aporte significativo en la Educación Matemática en términos didácticos y pedagógicos.

Es así como en el marco de esta propuesta de investigación, se centra la atención en dichos métodos, con el objeto de emplearlos como elementos didácticos y pedagógicos para el diseño de una propuesta de aula que pretende hacer una aproximación al concepto de número natural, en los estudiantes de grado primero de Educación Básica, considerando además que éste es un eje fundamental para el desarrollo de pensamiento matemático en el estudiante

Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998), una comprensión apropiada del número y la numeración para el grado Primero de Primaria, inicia en la construcción del significado del número en diferentes contextos, tomando como base, el conteo, la agrupación y el valor posicional. Por otro lado, en las investigaciones que se han realizado en los campos de la Educación Matemática y la Historia de las Matemáticas, se puede evidenciar la presencia de obstáculos y dificultades que se presentan tanto en la enseñanza y el aprendizaje, como en la construcción formal del número natural. Lo que deja ver las problemáticas asociadas a: la enseñanza del principio de correspondencia, la noción de unidad, la falta de relación entre la numeración hablada (pronunciación) y la escritura de números, la cardinalidad, la ordinalidad, el conteo, la composición de cantidades, entre otras.

Para atender y documentar la problemática, en la investigación se recurre a referentes teóricos como: el histórico, el matemático, el curricular y el didáctico; de los que se pueden

¹ Dedekind lo emplea desde la perspectiva ordinal del número, por su parte Peano lo hace desde una fundamentación axiomática del número; Cantor por su parte lo realiza desde la perspectiva cardinal del número y el de Frege es considerado desde un desarrollo logicista del número.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural inferir los fundamentos teóricos y metodológicos para el diseño y el análisis de la implementación de una propuesta de aula; con el objetivo de fortalecer la enseñanza además del aprendizaje de la noción del número natural, tomando como soporte teórico la noción de unidad y el principio de correspondencia en estudiantes de primero de Básica Primaria.

Ahora bien, entre las investigaciones más recientes que abordan el objeto de estudio “la noción del número natural”, se pueden identificar trabajos como la tesis de Vásquez (2010), además de otros no tan recientes, pero sí fundamentales, como las formalizaciones hechas por Julius Wilhelm Richard Dedekind, Giuseppe Peano, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor y Friedrich Ludwig Gottlob Frege a finales del siglo XIX. Vásquez, hace un estudio de los procesos transpositivos en las diferentes formalizaciones del número natural y su proceso de construcción como objeto matemático.

Por su parte, Dedekind dentro de lo que él considera una teoría de los sistemas simplemente infinitos define los números naturales, las operaciones, transformaciones, equivalencias, homomorfismos, isomorfismos, orden total, operación del sucesor, inducción completa, conjunto infinito, ordinal. Por su parte, Peano es quien pretendió reducir las matemáticas a la formalización simbólica. Además, Cantor contribuyó con su teoría sobre los conjuntos para una nueva comprensión del número natural, también realizó su aporte sobre la noción de continuidad, donde dos conjuntos equivalentes poseen el mismo número cardinal. Finalmente, Frege centró su trabajo en la búsqueda de los fundamentos de la aritmética a partir de principios lógicos. En las definiciones que surgieron en la búsqueda de una conceptualización de número se logró obtener una noción de ordinalidad, cardinalidad y conjunto.

Es así como el desarrollo de este trabajo está enmarcado en las líneas de investigación de la Historia y la Didáctica de las Matemáticas; en las que se buscan elementos teóricos y metodológicos, para darle solución a la problemática planteada, con relación a la noción del número natural a partir de la noción de unidad y el principio de correspondencia en los estudiantes de grado Primero de Primaria. De acuerdo con ello, entre los referentes matemáticos que fundamentan la investigación, se han identificado la propuesta de Ifrah (1987), Anacona (2003), Paramo & Rosero (2016) y Klein (1992). Entre los didácticos, se tienen a Calderón (2014), Vásquez (2010) y la micro ingeniería didáctica de la teoría de situaciones didácticas de

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural Artigue; Douandy; & Moreno; (1995). Estos son el punto de partida para la selección de elementos que permitan diseñar las tareas, que serán implementadas a estudiantes de grado Primero de Primaria, en una zona rural de Santander de Quilichao llamada vereda “San Francisco” y será aplicada a cinco niños de grado primero de las siguientes Instituciones Educativas: La Milagrosa, Rafael Tello y Alto San Francisco.

En relación con lo mencionado anteriormente, este trabajo se desarrolla en cuatro momentos cruciales: se hace una aproximación historiográfica de la noción de número natural en diferentes etapas; primero con la noción de número en los griegos, luego con los aportes realizados en la edad media por Simón Stevin y finalmente los aportes realizados por Dedekind, Peano, Cantor y Frege. En el segundo momento se exponen los referentes teóricos que aportan elementos fundamentales para el diseño de la propuesta de aula. En un tercer momento se diseña e implementa la propuesta de aula. Por último, se analizan los resultados mediante la microingeniería didáctica para la identificación de las ventajas, así como las limitaciones de dicha propuesta en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural, a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de educación básica.

Para tal efecto se organiza la información recopilada en este trabajo de grado en cuatro capítulos. Primero se exponen los aspectos generales de la investigación: los antecedentes, la problemática, los objetivos y la justificación. Segundo, se describe una aproximación del marco teórico, desde los referentes: histórico, matemático, curricular y didáctico. Tercero, se da cuenta del método del trabajo y el diseño metodológico de la propuesta de aula. Y, por último, se expone el cronograma del informe final del trabajo de grado.

1. Capítulo I

En este capítulo se encuentran los apartados más relevantes, de la presente investigación; este consta de: antecedentes, en ellos se pueden encontrar las investigaciones realizadas por Vásquez, 2010; Vásquez, 2020; Gutiérrez, 2017; Paramo & Rosero, 2016; los documentos del MEN, entre otros, los cuales nos brindan información para el desarrollo de la investigación basada en la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad. Seguidamente se encuentra la problemática, en ella se presentan los aportes realizados por los autores anteriormente mencionados, que da cuenta de las investigaciones que se han realizado en los campos de la Educación y la Historia de las Matemáticas, en la cual se da a conocer la presencia de obstáculos y dificultades presentadas en la enseñanza-aprendizaje del concepto del número natural, lo que saca a la luz problemáticas asociadas tales como: la enseñanza del principio de correspondencia y la noción de unidad.

Posteriormente se muestra tanto el objetivo general como los específicos, los cuales son la parte central del presente trabajo y por último se encuentra la justificación en ella se verán planteados los motivos del porqué es importante enseñar el número natural en el grado primero, todo ello basado en investigaciones recientes y lo planteado por el MEN.

1.1 Antecedentes

En el siguiente apartado, se dan a conocer algunas investigaciones que dan cuenta del estado, así como la evolución de algunas propuestas nacionales y globales en el campo de la Educación Matemática, en relación con la enseñanza y el aprendizaje del número natural en los primeros grados de escolaridad. Gran parte de estas, están enfocadas en el campo de la Historia de las matemáticas, en las que se describe la evolución histórica de la noción de número natural, hasta constituirse como objeto matemático, en tres épocas trascendentales. Por otra parte, se dan a conocer algunas propuestas didácticas para su enseñanza y el aprendizaje en la Educación Básica Primaria y el ciclo de Educación Preescolar. Estas investigaciones dieron lugar a la elección del tema de investigación además de la consideración de los aspectos generales del mismo.

1.1.1 Antecedentes Globales

Si bien en la actualidad se han realizado investigaciones más recientes², Castro, Rico & Castro (1987) en su libro, *Números y Operaciones, Fundamentos Para Una Matemática Escolar*; mencionan que las problemáticas asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética siempre serán un objeto de estudio de la Educación Matemática. Esta investigación es un antecedente importante para cualquier investigador que quiera referirse a dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, desde las diferentes disciplinas, entre ellas, las matemáticas, la pedagogía y la didáctica. Los autores se refieren a la necesidad de seguir investigando desde el campo de la Educación Matemática, para entender ¿Por qué los estudiantes presentan dificultades al momento de comprender el número y las operaciones? De hecho, según Hans Freudenthal en 1981 (citado en Castro, Rico & Castro (1987)) “más que ninguna otra cosa, fracasar en aritmética puede significar fracasar en la escuela y en la vida” (p. 17). Es decir, las problemáticas presentes en la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética son y serán uno de los focos en la investigación en Educación Matemática; más aún cuando en los resultados de las pruebas nacionales como globales, se siguen evidenciando estas dificultades en los estudiantes.

A partir de la investigación realizada por Castro, Rico & Castro (1987), se pueden deducir varios aspectos alrededor de la enseñanza y el aprendizaje del número natural en la Educación Básica:

² Vásquez (2010) en su trabajo titulado “*Un ejercicio de transposición didáctica en torno al concepto de número natural en el preescolar y primer grado de educación básica*”.

Páramo & Rosero (2016), en su trabajo titulado *Caracterización de la noción de número natural desde una perspectiva logicista: el trabajo de Gottlob Frege*.

Cánovas (2016), en un estudio de caso sobre la construcción del concepto de número en el niño.

Gutiérrez (2017), a través de una propuesta de aula que involucra los conceptos de cardinal, orden y agrupación.

Vásquez (2020), titulada *Conocimiento didáctico para la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad y cardinalidad a través de la construcción de sentido numérico en la formación del docente de primer ciclo de educación básica primaria*.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- “Es posible reducir los números a la teoría de conjuntos y, por a la lógica” (Rico & Castro (1987), p.186); es decir, cualquier estudio que ha de referirse a los números naturales, necesariamente tendrá que considerar la teoría de conjuntos y la lógica.
- Por otro lado, si bien las nociones de cardinalidad y ordinalidad son fundamentales en la construcción de los números naturales; también lo son las clases, así como las relaciones de orden.
- La noción de contar y de secuencia numérica son necesarias a la hora de fundamentar axiomáticamente el concepto de número natural, que además puede formalizarse en la noción de sucesor en los axiomas de Peano.

De esta manera, la noción del número natural que los niños aprenden en los primeros grados de escolaridad no debe estar alejada de las formalizaciones de este concepto; puesto que el aprendizaje es secuencial y lo que los estudiantes aprenden en la Educación Básica, es esencial para todo el proceso de aprendizaje. Además, dichas formalizaciones no se constituyen de manera independiente, alejadas de la experiencia, pues son una construcción humana. En últimas la formalización favorece el desarrollo de pensamiento lógico matemático, el razonamiento y las habilidades para hacer deducciones, dejando claros la precisión, así como el significado de los conceptos matemáticos.

1.1.2 Antecedentes Nacionales

Para el desarrollo de la investigación, se tendrá en cuenta el trabajo de Vásquez (2010) titulado “*Un ejercicio de transposición didáctica en torno al concepto de número natural en el preescolar y primer grado de educación básica*” él realiza una investigación histórica relacionada con la construcción del concepto número natural a partir de las formalizaciones hechas por Dedekind, Peano, Cantor y Frege a finales del siglo XIX. En las definiciones que surgieron en la búsqueda de una conceptualización de número se logró obtener una noción de ordinalidad, cardinalidad y conjunto.

Con el trabajo de Vásquez (2010), queda un horizonte claro con respecto a la formalización del número natural en el transcurso de la historia, del que se puede deducir, cómo

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural fue tal proceso desde su inicio en algunas culturas como: los griegos, algunos aportes de la edad media, y la etapa de la fundamentación. Además, se da a conocer la necesidad de caracterizar y contrastar las diferentes formas de aproximación ontológica y epistemológica del concepto de número natural desde una perspectiva Piagetiana³ favorece la comprensión de los fenómenos, así como los problemas asociados a la construcción y desarrollo del pensamiento numérico.

Es así como esta autora, muestra que la enseñanza del número natural en la escuela atraviesa por una crisis, pues no se hace un análisis crítico desde la perspectiva Piagetiana, sino que además prevalece la falta de una organización curricular, que se fundamenta en la Teoría de Conjuntos, que busca la memorización de reglas además de algoritmos, donde no se reconoce otras formas ontológicas sistemáticas y conscientes en la constitución del número natural.

Por su parte, Gutiérrez (2017), a través de una propuesta de aula que involucra los conceptos de cardinal, orden y agrupación, se centra en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal, el desarrollo de las tareas, la comprensión del cardinal diez, la composición y descomposición de cantidades, el uso de cantidades superiores a diez, el conteo, el establecimiento de relaciones de orden, potenciando la realización de agrupamientos de diez. Con esta propuesta la autora quiere mostrar el desempeño de los estudiantes para la realización de un estudio de caso en el que identifica sus avances en el sistema de numeración decimal.

A partir de los resultados de esta investigación, se da a conocer que las disposiciones del Ministerio de Educación Nacional, MEN (2009), se quedan cortas al momento de brindar orientaciones sobre la enseñanza de las relaciones de orden en transición. Por lo que se plantea el desarrollo del Pensamiento Numérico, a través de la construcción de sentido numérico centrado en habilidades numéricas flexibles, más creativas que permitan resolver, proponer, argumentar, razonar sobre el sentido, significado de los números y la numeración.

En el proceso de aprendizaje del cardinal, del orden y la agrupación, los estudiantes presentan dificultades de correspondencia uno a uno “y “de secuencia numérica verbal, en la adquisición de los términos ordinales, en la composición, así como la descomposición de

³ Indica que el niño debe realizar procesos mentales en los que pueda comprender lo que es la correspondencia, conservación de la cantidad y posteriormente tener acceso a la noción de cantidad.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural cantidades, entre otros. Por lo que el ministerio propone a los docentes realizar tareas para que los estudiantes superen estas dificultades.

En investigaciones recientes como la de Vásquez (2020), titulada *Conocimiento didáctico para la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad y cardinalidad a través de la construcción de sentido numérico en la formación del docente de primer ciclo de educación básica primaria*, en la Institución Educativa Ateneo; el autor utiliza una entrevista semiestructurada aplicada a tres docentes, concluyendo que a las docentes les hace falta una mejor formación referente al conocimiento didáctico, acerca de la construcción del concepto del número natural. Además, en las reflexiones sobre el modelo curricular y didáctico que los profesores del primer ciclo de educación básica primaria emplean para enseñar el número natural y desarrollar sentido numérico, se solicita una atención a partir de su contexto local (Bedoya, 2002).

Se plantea también desarrollar estudios sobre el desarrollo de Unidades Didácticas Guía, que integren los referentes curriculares en relación con los desarrollos de la investigación actual, porque en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se presenta una propuesta de formación matemática, basada en el desarrollo del Pensamiento Numérico como parte del Pensamiento Matemático.

El desarrollo de esta investigación contribuye al reconocimiento de la importancia del trabajo en comunidades de formación, innovación e investigación, debido a que en las tutorías dentro del Programa Todos a Aprender, se requiere que las instituciones educativas cuenten con profesores que integren comunidades académicas que analizan, apliquen y valoren los conocimientos desarrollados en la comunidad de investigación en el campo de la educación. En este sentido, reconocemos que un foco de investigación pueden ser los conocimientos didácticos compartidos por comunidades de formación, innovación e investigación, además de la manera en que estos conocimientos se desarrollan mediante el estudio de propuestas innovadoras para la enseñanza de los números y la numeración.

Las investigaciones realizadas por las profesoras Páramo & Rosero (2016), en su trabajo titulado *Caracterización de la noción de número natural desde una perspectiva logicista: el*

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural *trabajo de Gottlob Frege*, realizan una interpretación respecto a la definición de los números naturales propuesta por Gottlob Frege, dada a conocer a finales del siglo XIX, como el intento más destacado en dar una definición estrictamente lógica de la noción de número, tratando de responder a la pregunta que articula el trabajo filosófico de Frege: ¿Qué son los números?

Dentro de esta investigación, se afirma que, en la definición de número natural de Frege, lo ontológico obedece a que los números naturales son objetos abstractos, pues estos son obtenidos mediante los conceptos y no de las cosas. En relación a lo epistemológico, se tiene que los números son definidos desde un principio de abstracción, identidad entre los conceptos (equinumerosidad), el cual permite acceder, en cierta forma, a la naturaleza de los objetos—número dando cuenta de la existencia de ellos.

De acuerdo con Paramo & Rosero, Para Frege, las leyes aritméticas tienen aplicabilidad en el mundo exterior pero no son propiedades de las cosas externas, ya que se fundamentan en la forma de validación de la prueba que es independiente del pensamiento del sujeto, y por tanto de las intuiciones.

...Estas aplicaciones que son explicadas en el mundo sensible, tienen fundamento pues se construyen a partir de elaboraciones lógicas de hechos observados; sin embargo, no se desconoce que aquí se evidencia un puente entre lo concreto y lo abstracto. (p.106).

En el mismo sentido, de acuerdo con Salas (2016), Frege propone que la aritmética se fundamenta en la lógica, es decir, en los conceptos, así como las leyes lógicas daban origen a las verdades aritméticas, siendo reductible a la lógica. Para Frege la aritmética es una disciplina analítica, no sintética, pues una disciplina sintética requiere algo más que solo lógica y las verdades aritméticas surgen desde las leyes y definiciones lógicas, pues esta se centra en demostrar su validez, por ello, es analítica.

De modo que Frege, para defender su postura respecto a que la aritmética es analítica debió en primer lugar, demostrar que esta es aplicable en todo, al igual que la lógica, puesto que todo puede contarse desde los números hasta las cosas; segundo que sus axiomas y teoremas no pueden negarse, pues no es posible negar por ejemplo que a partir del número 2 todo número natural tiene otro que lo sucede y lo antecede, de poder hacerlo dejarían de ser números

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural naturales. Estas dos razones, ligaban a la aritmética de la lógica constituyéndose en una ciencia analítica puramente lógica.

Para demostrarlo, Frege debió aclarar lo que hacía parte de la lógica como: los conceptos y las leyes, una tarea difícil para él pues en ese entonces la lógica de las matemáticas no estaba tan consolidada como ahora, pero fue precisamente, quién incluyó la noción de extensión de un concepto, donde la lógica se encarga de estudiar las verdades del objeto.

Según Frege, las verdades de la matemática son deducibles a partir de las verdades de la lógica. Por ello, estudiaremos los principios de la aritmética como principios derivados de la lógica, para realizar una aproximación a la noción del número natural a partir de la noción de unidad y el principio de correspondencia donde los estudiantes de grado primero presentan dificultades como: la correspondencia del número con los objetos cuando el niño cuenta los elementos y los relaciona con el conjunto, además, la correspondencia biunívoca que se da al cambiar el orden del objeto, siendo este el motivo por el cual los estudiantes se confunden al deducir si la cantidad permanece, debido a que para el niño es difícil imaginarse los objetos en la posición inicial después de haber alterado el orden.

Desde otro punto de vista, en el transcurso de la historia, cada cultura y cada época realizó sus aportes en la construcción del concepto de número natural, de acuerdo con la necesidad que se presentaba al momento como contar, ordenar y clasificar objetos, los cuales se diferenciaron teniendo en cuenta sus costumbres; de esta manera realizaremos un recorrido histórico para conocer los momentos más importantes de dicha construcción.

Los trabajos realizados por Vásquez (2010), Páramo & Rosero (2016), nos brindan elementos para esta investigación sobre el número natural en su noción de unidad y su relación con el principio de correspondencia, desde la parte lógica, ontológica y epistemológica. En cuanto a la lógica, Páramo & Rosero nos dan aportaciones en la parte formal, donde se tiene en cuenta la simbolización matemática; en lo ontológico tomaremos las aportaciones acerca de la caracterización de los objetos matemáticos, así como la manera en que se construye el concepto de número natural en la búsqueda de la apropiación del principio de correspondencia.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Como se observa los antecedentes brindan elementos importantes que servirán como base para esta investigación; estos dan cuenta de cómo las culturas y matemáticos importantes realizaron sus aportes a la construcción de la definición de número; por ejemplo, en la edad media se fue poco a poco mostrando esas características importantes que tenía la creación de la definición del número. Finalmente, estos aportes nos servirán para tomar una postura con respecto a la teoría de Frege y Piaget, en lo que respecta a lo abstracto, la intuición y cómo ésta es aplicada en la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de escolaridad.

1.2 Presentación del Problema

Con respecto a la enseñanza y aprendizaje de los números naturales en los primeros años de escolaridad, específicamente en el grado primero; se pueden evidenciar en las investigaciones de Vásquez, 2010; Gutiérrez, 2017; Vásquez, 2020; Páramo & Rosero, 2016, Castro, Rico & Castro 1995; Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez, 2008, que se han realizado en los campos de la Educación y la Historia de las Matemáticas, la presencia de obstáculos y dificultades presentadas en la enseñanza-aprendizaje del concepto del número natural, lo que saca a la luz problemáticas asociadas tales como: la enseñanza del principio de correspondencia, la noción de unidad, la falta de relación entre la numeración hablada (pronunciación) y la escritura de números, la cardinalidad, la ordinalidad, el conteo, la composición de cantidades, entre otras; mencionadas en los siguientes párrafos.

Una de las principales dificultades que se presentan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se da en la solución de problemas o algoritmos que implican hacer el paso de lo concreto a lo abstracto y viceversa. Referente a los números naturales Páramo & Rosero (2016), identifican a través de la historia, la complejidad del proceso evolutivo hasta constituirse como un objeto matemático, lo que sugiere que actualmente su abstracción no es inmediata a la experiencia. Por lo tanto, su relación con lo concreto es cada vez más lejana. Dicho esto, es necesario hacer una reflexión desde la Educación Matemática que posibilite hacer propuestas didácticas que atiendan esta problemática.

Otra dificultad tiene que ver con la formación docente, pues de acuerdo con el trabajo de investigación de Vásquez (2020), en un estudio de caso mediante una entrevista semiestructurada

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural con 3 docentes, concluye que los profesores encargados de enseñar el área de las matemáticas no tienen una formación profunda acerca del conocimiento didáctico en la construcción del concepto del número natural, lo que sugiere que es necesaria una formación adecuada, además de un conocimiento didáctico que les permita hacer uso de recursos para mejorar sus prácticas didácticas y pedagógicas.

A esto se le suma, que no todos los profesores cuentan con la misma formación en matemáticas, pues en un estudio de investigación realizado por Torrez (2015), para dar cuenta de lo que afecta la formación del docente en el aprendizaje de los estudiantes, se encontró que existen dos clases de profesores con formación inicial diferente. Por un lado, están los profesores que tienen una formación generalista con diplomado en magisterio, por otro lado, se encuentran los profesores especialistas formados como licenciados en matemáticas.

De acuerdo con Salazar (2005), la capacidad de enseñabilidad de cierto contenido, depende de la formación matemática del docente, del mismo modo señala que una disciplina es una construcción cultural. En coherencia con ello y con las propuestas de las investigaciones en Historia de las Matemáticas; la historia del número natural es una alternativa para la formación matemática del docente, en tanto que pone de manifiesto los obstáculos y dificultades que dieron lugar a dicho objeto matemático; por lo que estos elementos se constituyen en un punto de partida para que el docente tome decisiones didácticas y pedagógicas que permitan su movilización en el aula. En últimas, fortalece la capacidad del docente permitiéndole hacer enseñable un contenido.

Por su parte Vásquez (2010), propone que los docentes de matemáticas deben tener un conocimiento didáctico que les permita proponer actividades en el aula, que puedan transformar las diferentes formalizaciones del concepto de número natural para ser adaptadas al entorno escolar en sus diferentes sentidos; es decir, la transposición didáctica permite realizar una construcción de análisis didáctico, que dé cuenta de las transformaciones y reorganizaciones a que tiene lugar el saber matemático en un marco institucional.

Además, Vásquez, (2010), apoyada en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), manifiesta que una de las dificultades, es la falta de comprensión del número en sus diversos significados y representaciones, de manera que le permita al niño resolver problemas en

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural los que sea necesario emitir juicios de valor. Entre otras cosas, argumenta que trabajar con los estudiantes el significado del número permite el desarrollo del pensamiento lógico-matemático y este a su vez tener una comprensión de los objetos abstractos y razonar, comprender las relaciones entre ellos. Finalmente, el desarrollo del pensamiento numérico le permite resolver, proponer, argumentar, razonar sobre el significado y sentido de los números.

Otra problemática, según Vásquez, tiene que ver con que la enseñanza del número natural está pasando por una crisis, por varias razones. En primera medida, porque ésta se apoya en la trasposición de los fundamentos de la teoría piagetiana, pero a dicha transposición le hace falta un análisis riguroso que dé cuenta de manera explícita este proceso. En segunda instancia, en lo concerniente a lo curricular, se prioriza la rápida memorización de reglas y algoritmos, producto de que éste está fundamentado en la Teoría de Conjuntos. En tercer lugar, no se reconoce de manera consciente ni sistemática otras formas ontológicas en los procesos de constitución del número natural. Lo que permite inferir la importancia de considerar además de la Teoría de Conjuntos, otras propuestas para comprender el significado del número, con el fin de que esta noción no se reduzca a la mera solución de algoritmos.

En el mismo sentido, Gutiérrez (2017), menciona que las dificultades de la enseñanza-aprendizaje del sistema de numeración decimal están asociadas a varios aspectos. Por un lado, para introducir el objeto de estudio en los primeros años de escolaridad, no tienen en cuenta su relación con los conocimientos previos de los estudiantes. Por otro lado, también al momento de la enseñanza de este objeto matemático se le da relevancia a la escritura de símbolos, olvidando que es primordial la comprensión de los distintos significados del número cardinal, ordinal, entre otros.

Ahora, según la investigación de Cánovas (2016), en un estudio de caso sobre la construcción del concepto de número en el niño, durante la etapa de la educación infantil, una de las problemáticas que subyace es que se les dificulta hacer la correspondencia término a término, al igual que la correspondencia palabra-número. Sin embargo, para que un niño pueda hacer la correspondencia término a término, es necesario que sepa enumerar correctamente; es decir sin dejar elementos o contando varias veces. Finalmente, según Piaget (1991), (Citado en Chamorro, 2005) si el niño logra hacer la correspondencia término a término, al igual que la

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural correspondencia palabra-número es menos probable que se equivoque en determinar la equivalencia de dos colecciones, es decir, que logre hacer la conservación de la cantidad, entendiendo por conservación “la permanencia del objeto (número de elementos, sustancia sólida o líquida, etc.), frente a un grupo de transformaciones (deformaciones, fraccionamiento, desplazamientos, entre otros.)” (Chamorro 2005, p.146).

De esta manera, se evidencia que las dificultades de la enseñanza en el grado primero en lo que se refiere a la construcción del concepto de número natural; está asociada a la dificultad de la comprensión del niño de la noción de unidad, el principio de correspondencia uno a uno y del principio de la conservación de la cantidad. Siendo esta última, de acuerdo con la propuesta de Piaget, uno de los primeros pensamientos matemáticos en la educación infantil, pues para que se dé este principio es necesario cierta abstracción del número. Lo que deja ver finalmente que superar las dificultades del paso de lo concreto a lo abstracto, implica resolver estas problemáticas.

En coherencia con lo expuesto anteriormente, la capacidad que tiene un docente para lograr que un objeto matemático pueda ser enseñable, depende entre otros aspectos de la formación matemática y didáctica, esta formación debe ser permanente para que los métodos empleados en su enseñanza sean pertinentes, o lo que es lo mismo, esta realización de la transposición didáctica debe permitirle dar una explicación acertada a sus estudiantes. Es ahí donde se propone en este trabajo, de acuerdo con la investigación que se ha hecho en la línea de Historia de las Matemáticas, la necesidad de que un docente recurra o realice estudios históricos epistemológicos; en especial del objeto que nos ocupa.

Finalmente es necesario, caracterizar las ventajas y limitaciones de las diferentes posturas ontológicas y epistemológicas que fueron tomadas como objeto de estudio en la aproximación del número natural, que permitan tomar decisiones didácticas además de pedagógicas, para favorecer la enseñanza del número natural en el grado primero, pues este es el primer sistema numérico con el que el niño se enfrenta y da inicio, entre otras cosas, a su primer acercamiento con una de las nociones abstractas de la matemática. Además, de acuerdo con Páramo & Rosero (2016), la falta de profundización del concepto de número por parte de los docentes afecta su enseñanza.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Por todo lo anterior, se desprende la siguiente pregunta problema que da lugar a esta investigación:

¿Cuáles son las ventajas y limitaciones para la enseñanza y el aprendizaje que ofrece una propuesta de aula en la cual se pretende realizar una aproximación a la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de Educación Básica Primaria?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

- Identificar las ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de una propuesta de aula que permita hacer una aproximación a la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad en el grado primero de Educación Básica primaria.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Identificar los componentes más notables en la construcción del número natural a través de una revisión histórica, que comprende tres épocas fundamentales: los griegos en los siglos VI, VII a. C, la edad media comprendida entre el siglo V, el siglo XV y el periodo de fundamentación de las matemáticas en el siglo XIX.
- Articular los elementos identificados en los referentes históricos, los referentes curriculares y los referentes didácticos en el diseño de una propuesta de aula para favorecer la comprensión de la noción de unidad y el principio de correspondencia del número natural en el grado primero.
- Analizar los resultados de la implementación de la propuesta de aula, a luz de los referentes teóricos y el análisis a priori, de manera que se puedan identificar los elementos didácticos y pedagógicos que favorezcan la enseñanza-aprendizaje de los números naturales en el grado primero.

1.4 Justificación

Este trabajo de investigación centra la atención en el grado primero, considerando que es un punto de partida fundamental para la construcción de conocimiento en el niño.

Específicamente hace referencia a la importancia de la aproximación al concepto de número natural, como eje básico para el desarrollo de pensamiento matemático. Así, tal como está propuesto en los Lineamientos Curriculares MEN (1998), una comprensión apropiada del número y de la numeración, tiene como punto de partida la construcción de los significados del número en diferentes contextos, tomando como base el conteo, la agrupación y el valor posicional.

Por otro lado, Vásquez (2010), afirma que, en esta etapa, según las teorías piagetianas; el desarrollo de pensamiento lógico-matemático permite que el niño logre crear estructuras mentales a partir de la abstracción de acciones concretas, identifique diferencias, semejanzas, estableciendo relaciones de orden y de equivalencia. Así mismo, según las teorías antropológicas los procesos de contar y localizar son la base de la construcción de cualquier conocimiento matemático formal. Lo que indica que en definitiva la aproximación al concepto número, en el grado primero, es la base del edificio de la construcción del conocimiento matemático y, del desarrollo de pensamiento numérico.

El docente por su parte debe percatarse de estos conocimientos básicos que el estudiante debe aprender, para la construcción del concepto del número natural en los primeros grados de Educación Básica; de modo que, al momento de hacer la planeación, proponga un método que favorezca el aprendizaje de los estudiantes. Al formular dichos métodos, el docente regularmente acude a recursos como el juego, el uso de material manipulativo, los recursos tecnológicos, las propuestas de aula contextualizadas, entre otros; sin embargo, la historia de la matemática también aporta elementos importantes para la identificación y selección de estos métodos.

En concordancia con Anacona (2003), la importancia de la Historia de las Matemáticas en la formación del docente, así como el posible impacto en el aprendizaje de los estudiantes, radica en que brinda elementos conceptuales, metodológicos y epistemológicos, que el docente puede emplear en sus propuestas educativas.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Ahora bien, es claro que la construcción de los objetos matemáticos es compleja, no obstante, si el docente conoce las formas de construcción de estos; es decir, entiende que son una construcción humana, que ha evolucionado superando obstáculos y dificultades desde sus inicios hasta constituirse como objeto matemático; podrá entender su importancia, también su significado, que además le brindará fundamentos matemáticos, elementos didácticos y pedagógicos para diseñar propuestas de aula que permitan la construcción de dicho objeto matemático favoreciendo el aprendizaje en el aula.

Además, el estudio de los desarrollos históricos y epistemológicos de la construcción de un objeto matemático, no solamente aporta a la formación del maestro; sino que tienen incidencia en el aprendizaje de los estudiantes, puesto que las propuestas junto con los métodos didácticos del maestro resultarán más interesantes para ellos, en lo que se refiere al sentido y el significado de los contenidos, logrando así mayor interés para una mejor apropiación; entre otras cosas. En el caso de la historia del número natural, por ejemplo, mostrar cómo fue su proceso en otras culturas, genera una comprensión de la complejidad que emana de nociones que resultan ser enmarcadas en la trivialidad.

En el mismo sentido, Palenzuela (2017) hace referencia a que el conocimiento de la historia por parte de los estudiantes y profesores ayuda a tener una visión de las matemáticas que estos no tenían presente; esta historia, puede servir como herramienta didáctica, pues durante ese recorrido el profesor puede encontrar errores que le servirán de ejemplo para superar las dificultades que puedan presentarse en la enseñanza, así de paso sobrepasar los errores presentados en el aprendizaje de los estudiantes.

También al incluir la historia de las matemáticas en la enseñanza el docente puede identificar anticipadamente algunos de los errores que pueden cometer los estudiantes, seguidamente puede abordar las dificultades presentadas para finalmente tener a su disposición una gran variedad de fenómenos para la explicación de determinado objeto matemático. La historia de las matemáticas permite conocer los motivos por los cuales surgieron ciertos conceptos matemáticos y a qué tipo de dificultades daba solución.

Ahora bien, para el propósito de este trabajo, respecto a los desarrollos históricos, se mencionan tres épocas: los siglos VI y VII a. C que hace referencia a la cultura griega con sus

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural aportes a las matemáticas, la edad media comprendida entre el siglo V, el siglo XV, así como el siglo XIX conocido como el periodo de fundamentación de las matemáticas.

Los griegos alrededor de los siglos VI y VII, dotaron a las matemáticas de su carácter abstracto, estudiando los conceptos en sí mismos, sin colocarlos en referencia con problemas concretos como los conceptos de área, número pitagórico, sus problemas asociados a cuadraturas y teoría de números.

Más adelante, a finales del siglo XIX las matemáticas se fueron consolidando de manera formal. Uno de los principales ponentes, que es de interés de este trabajo es Friedrich Ludwig Gottlob Frege, quien según las investigaciones realizadas por Páramo & Rosero (2016), presentó una definición de número natural que ha sido la más acertada desde la lógica, tratando de dar respuesta a ¿qué son los números? debido a que solo a finales del siglo XIX empezaron a surgir nuevas teorías sobre su rigor y formalización. En relación con esto, Frege propone que los números de ninguna manera se pueden considerar como objetos externos, debido a que da pie a la asignación de varios números a un mismo objeto.

Desde otro punto de vista, la construcción de la definición de número ha tenido un largo camino en diferentes representaciones por parte de comunidades y culturas que con el paso del tiempo fueron dando matiz a este concepto, hasta llegar a las construcciones formales que conocemos. En ese proceso, se destaca la capacidad de abstracción del número como algo fundamental para su comprensión, puesto que, de no existir esta capacidad intelectual, los números se constituyen en nociones globales relativas tal y como lo menciona Ifrah (1987):

De ello se deduce que, según la expresión del filósofo alemán Schopenhauer, «todo número entero natural presupone que los anteriores son la causa de su existencia», Es decir que nuestro espíritu sólo puede concebir un número bajo el ángulo de la abstracción si ya ha asimilado los anteriores: si se carece de esa capacidad intelectual, los números se convierten en el espíritu del hombre en nociones globales bastante confusas. (Ifrah, 1987, p.29).

Según Ifrah (1987), aprender a contar de forma abstracta agrupando cualquier elemento, permite estimar y evaluar varias magnitudes como el peso, la longitud, el área, volumen y

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural capacidad. Con este proceso el hombre fue adquiriendo y concibiendo números grandes, pudo elaborar métodos para realizar cálculos mentales, concretos, finalmente escritos; luego logró elaborar los primeros esbozos de una aritmética que inicialmente sería práctica, luego se haría abstracta para más adelante conducirla al álgebra.

Desde otro punto de vista, el autor menciona que en la antigüedad se utilizaba el principio de correspondencia, por ejemplo, un caso podría ser cuando el hombre necesitaba acomodar sus ovejas pero quería saber si estaban completas, para ello recurre al truco de realizar una muesca cada que entraba una oveja, sin saberlo estaba realizando el principio de correspondencia uno a uno, por tanto llevaba un orden del conteo de sus ovejas, sin conocer con exactitud si en algún momento se le había perdido una.

Con lo anterior se deduce que para Ifrah (1987), la correspondencia término a término se basa en asociar los elementos de dos conjuntos de manera que puedan formar pares. Cuando el niño puede verificar que los elementos del conjunto coinciden sin que quede ninguno por fuera, este puede deducir que en los dos conjuntos hay igual cantidad de elementos, de lo contrario los conjuntos serán desiguales, pues no podrá establecerse una correspondencia término por término. La propiedad del emparejamiento suprime la distinción entre dos conjuntos, debido a la naturaleza de sus respectivos elementos por lo que su cálculo se basa en la percepción del conjunto como parte de un todo sin tener en cuenta la composición de los elementos.

Por otro lado, Páramo & Rosero, (2016) afirman que: “Frege deduce que el acto de contar es pertinente sólo cuando se tienen objetos que puedan distinguirse entre sí”. (p.49) En este apartado las autoras se refieren a que el número uno sin perder su noción de unidad debe tener la cualidad de ser diferenciado entre otros objetos, por lo que debe haber una clara diferencia entre unidad y uno, manteniendo así su igualdad y unicidad.

En términos ontológicos, en la definición de número natural de Frege, Páramo & Rosero, concluyen que los números naturales son objetos abstractos, pues estos son obtenidos mediante los conceptos más no de las cosas. En efecto, estos no pueden ser considerados como algo subjetivo, pues no son propiedades de las cosas, por tanto, no provienen del mundo exterior. De hecho, las leyes aritméticas quedarían sometidas a las representaciones mentales, por lo que perderían rigurosidad y validez.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Así mismo, el trabajo de Páramo & Rosero muestra una postura epistemológica, en el sentido de que los números son definidos desde un principio de abstracción; ocupándose de especificar las condiciones de verdad de un enunciado de identidad, conectando dos términos por medio del operador, en términos de la existencia de una relación de equivalencia entre las denotaciones de las expresiones, en las que se opera; es decir, que los números desde la lógica se le puede atribuir un valor de verdad donde se dispone de operadores lógicos como el bicondicional de dos proposiciones (p, q) (equinumerosidad). Por tanto sí existe una función de A en B , tal que para cada elemento y de B existe un elemento x de A , los conjuntos tienen el mismo cardinal, el cual permite acceder, en cierta forma, a la naturaleza de los objetos-número dando cuenta de la existencia de ellos; esta relación explica el vínculo filosófico e históricamente problemático entre el objeto matemático con origen funcional a partir de la cual se constituyen lo concreto causal o físico y lo abstracto no causal por similaridad o convención.

Desde otro punto de vista, Vásquez (2020), sugiere que los docentes deben de tener un conocimiento didáctico adecuado, además de eso, según, Consejo de Universidades, 2006 (citado por Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez 2008), deben tener conocimiento respecto a los contenidos curriculares, así como también conocimientos didácticos que favorezcan el proceso de enseñanza-aprendizaje, actualizándose constantemente puesto que las matemáticas son una ciencia que está en constante evolución, esto le permite al docente realizar una planificación, desarrollarla para posteriormente evaluar los respectivos procesos, que permitirán a los estudiantes adquirir competencias propias de acuerdo con la enseñanza recibida. Para llevarlo a cabo debe haber una colaboración de los docentes y personal del centro.

Por otro lado, los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998), proponen el desarrollo del Pensamiento Numérico de los escolares orientando el trabajo en el aula, a través del sistema de los números naturales, teniendo en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) los estudiantes de grado primero deben además de construir, representar conjuntos para establecer relaciones y cantidades en situaciones fenomenológicas, determinar la cantidad de elementos de una colección por medio de agrupaciones.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Como lo afirma Piaget, existe equivalencia mientras hay correspondencia visual u óptica, pero la igualdad no se conserva por correspondencia lógica: no hay en ello, pues, una operación racional, sino una simple intuición. Esta intuición es articulada y no global, pero sigue siendo aún intuitiva, es decir, sometida a la primacía de la percepción (Piaget, 1991, p.45).

De acuerdo con el párrafo anterior para Piaget el niño usa su intuición por medio de la percepción de esquemas sensoriomotores interiorizados en representaciones que el niño hace con imágenes que tiene de las cosas reales por medio de la experiencia que puede percibir en su entorno, en su mente, es decir, lo concreto y lo abstracto, pero todavía no son operaciones lógicas que este pueda generalizar ni combinar entre sí, pues lo hace primeramente por medio de la intuición.

Desde el punto de vista de López (SF), la intuición, es un concepto que presenta mucha controversia en los campos de la ciencia y la filosofía, es así como para algunos la intuición es una fuente de conocimiento verdadero, mientras que para otros esta es engañosa en cuanto a la búsqueda de la verdad, también es considerada como una fuente potencia del error. Esta es capaz de imponerse en el sujeto como absolutas y únicas representaciones. Es importante mencionar que para este autor la intuición simplemente es un obstáculo que impide realizar interpretaciones o adquirir conocimiento.

En las posturas de los autores se evidencia que por medio de la intuición se puede llegar a adquirir conocimiento, pero desde otro punto de vista esta puede convertirse en un verdadero obstáculo para el aprendizaje, de esta manera y para efectos de este trabajo, se toma la intuición como un elemento importante debido a que consideramos que por medio de esta se construye conocimiento matemático, que no es del todo formal, pero es una manera de llegar a la adquisición de un conocimiento matemático de esta categoría. Según se ha citado en las distintas teorías relacionadas con la correspondencia uno a uno y la noción de unidad se puede garantizar que, por medio de las representaciones gráficas y numéricas del número natural, el estudiante de grado primero de Básica Primaria puede por medio de la intuición construir algunas nociones del concepto del número natural que serán la base que más adelante le permitirán adquirir nuevos conocimientos.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Lo descrito hasta aquí, da cuenta de la existencia de unas dificultades que han manifestado los autores como el proceso de enseñanza para el aprendizaje del sistema de numeración decimal, la utilización de procesos mecánicos para la enseñanza, el conocimiento didáctico que tienen los docentes además de su respectiva formación, que manifiestan la necesidad de seguir investigando y el cómo la Historia de las Matemáticas puede generar aportes que permitan superar estas dificultades.

Por consiguiente, la importancia de este trabajo radica en la enseñanza del número natural, tomando como referentes las investigaciones que han documentado un problema latente en la formación de docentes, así como la manera en que la historia de las matemáticas puede aportar elementos a dicha formación, además que sugiere centrar la atención en el carácter intuitivo y abstracto del número natural, más lo que implica diseñar propuestas de aula que favorezcan la aproximación al número natural a partir de la correspondencia uno a uno y la noción de unidad, en el grado primero.

Diseñar propuestas de aula que tomen como punto de partida la construcción del número natural como un proceso de abstracción, le permite al niño desarrollar pensamiento lógico-matemático para construir los cimientos del cálculo abstracto. Además sugiere, que el educador matemático del grado primero de Educación Básica, incluya como aspectos fundamentales para dicha construcción, el principio de recurrencia y el principio de correspondencia, ya que de acuerdo con Ifrah, (1987), el principio de correspondencia unidad por unidad en el proceso de emparejamiento de los elementos de dos conjuntos, deja en un segundo plano las diferencias de la naturaleza de los objetos de cada uno de ellos poniendo de manifiesto algo común, es decir, el número en su carácter abstracto.

En este sentido, es tanto necesario como pertinente seguir investigando, haciendo propuestas de aula que favorezcan en los estudiantes la noción de unidad y el principio de correspondencia en el grado primero para que los estudiantes puedan desarrollar un pensamiento lógico, numérico que le permita comprender los objetos abstractos, razonar, comprender las relaciones entre estos objetos abstractos, a la vez que resolver, proponer, argumentar, razonar sobre el significado y sentido de los números naturales.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Para ello, en este trabajo se considera importante recurrir a estudios históricos y epistemológicos; que le brindan herramientas al maestro para realizar los procesos de transposición didáctica o como lo hemos mencionado, para desarrollar la capacidad de hacer un contenido matemático enseñable. Así, además de los trabajos propuestos por Piaget (1991), Vásquez (2010), Gutiérrez (2017), Vásquez (2020), éste tendrá como punto de partida el carácter histórico que favorece la formación matemática del docente, a partir de los aportes de los desarrollos históricos en las matemáticas; considerando también estudios recientes como el trabajo propuesto por Páramo & Rosero (2016), en la construcción de la noción del número natural de Frege, desde una postura logicista.

2. Capítulo II

Marco Teórico

En este capítulo se da cuenta de los referentes que fundamentan la problemática, los cuales permitirán inferir los fundamentos teóricos, metodológicos para el diseño y el análisis de la implementación de la propuesta de aula; con el objeto de fortalecer la enseñanza- aprendizaje de la noción del número natural a partir de la noción de unidad y el principio de correspondencia, en el grado primero de Educación Básica primaria.

Los referentes abordados en este capítulo son de tipo: histórico, matemático, curricular y didáctico. En el histórico se hace una presentación historiográfica de la noción de número natural, en tres épocas a saber: el aporte realizado por la cultura griega, los aportes de la edad media y finalmente la etapa de la fundamentación; esta última se decanta en el referente matemático con los aportes realizados por matemáticos como Dedekind, Peano, Cantor y Frege.

En el referente curricular se identifican las orientaciones teóricas, metodológicas propuestas por el Ministerio de Educación Nacional, en los que se evidencian la importancia del razonamiento matemático que tiene que ver estrechamente con las matemáticas y con otros procesos generales del pensamiento tales como la comunicación, la argumentación y el desarrollo de pensamiento en el tratamiento de los sistemas numéricos; así como el desarrollo de pensamiento lógico-matemático en el grado primero; para la aproximación al concepto de número natural. Por último, en el referente didáctico se hace una breve descripción de la micro-

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural
ingeniería didáctica como orientación metodológica para el diseño e implementación de la
propuesta de aula.

2.1 Referente Histórico

Anaconda (2003), afirma que las investigaciones históricas-epistemológicas de las matemáticas aportan de manera significativa a la comprensión de la construcción teórica de los objetos matemáticos, de manera que se pueda entender su evolución, así como los métodos empleados para superar las dificultades presentes en ese proceso. Es así como, la historia de las matemáticas se constituye en un aporte importante a la formación y a la práctica docente.

En el mismo sentido, en este apartado se hace una investigación historiográfica, en lo que respecta al concepto de número natural, en tres épocas significativas para su desarrollo y evolución, que según la investigación hecha por Vásquez (2010) son: los aportes de los griegos, los aportes de la edad media y los aportes realizados en la etapa de la fundamentación. Cada una de estas épocas, fue de suma importancia para la construcción de dicho concepto; por esta razón, en adelante se describen los principales aportes que darán lugar a un análisis desde el punto de vista pedagógico y didáctico, de acuerdo con el propósito de este trabajo.

Las investigaciones que fundamentan el desarrollo de este apartado son: Calderón, (2014); Ifrah, (1987), Vásquez, (2010); Páramo & Rosero, (2016); quienes describen la construcción histórica del número natural. A continuación, se exteriorizan los hechos más significativos según el propósito del trabajo, para la dicha construcción y algunas representaciones de este objeto.

2.1.1 Aproximación a la construcción de número

Calderón (2014), refiere que la noción de número aparece casi con el principio de la historia de la humanidad; una de las evidencias de esta afirmación es un hueso⁴ de aproximadamente el año 20.000 a.C., encontrado por el belga Jean de Heinzelin de Braucourt en

⁴ En la antigüedad, las culturas utilizaron diferentes métodos como el hueso para contar entre otras cosas: los animales, las fases de la luna, representar dinero y realizar rituales.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural el año 1.960, con unas muescas que representan el conteo y que dan cuenta de una vaga idea de número utilizado en la época. Lo que significa que en general el hombre primitivo, utilizó el número para satisfacer sus necesidades básicas, como el intercambio de productos, esta noción fue desplegando con la evolución histórica de la humanidad. Así mismo, Ifrah, (1987), afirma que las representaciones del número, que emplearon inicialmente como el hueso, atendían a necesidades básicas de supervivencia del hombre pues a medida que se fue organizando en las grandes ciudades, se recurre a la facultad abstracta de contar.

Por su parte los griegos en los siglos VI al VII a. C, tenían como legado fundamental la demostración⁵, para ellos era una forma particular de hacer matemáticas que surgió con el aporte de varios pensadores. La Edad Media se caracterizó por la reestructuración de la noción de número propuesta por Stevin, quien intentó reorganizar lo que para los griegos significaba cantidad, de este modo el número se convierte en una categoría de la cantidad de donde surge el sistema de numeración decimal.

2.1.2 Primeras nociones de conteo realizadas por el hombre primitivo

De acuerdo con Ifrah (1987), antiguamente el hombre en sus actividades diarias realizaba intercambios o trueques con productos y mercancías sin hacer uso del número, ni de la moneda. Con el paso del tiempo empezó a contar los objetos que hacían parte de su entorno, para suplir ciertas necesidades de superveniencia y organización, por ejemplo, conocer la cantidad de pertenencias, animales y otros elementos que tenía a su alrededor.

Para poder llevar a cabo dicho conteo, el hombre utilizó las partes del cuerpo, sucesos naturales y algunos objetos. Varios ejemplos de esto son: para poder celebrar fiestas religiosas crearon calendarios y tomaron como referente la salida del sol y la luna; de manera que cada vez que salía la luna, realizaban una muesca en un palo y al completarse los 30 días (tiempo en el cual la luna se oscurece) esperaban que esta nuevamente realizara su proceso de iluminación e

⁵ La demostración para los griegos buscaba construir una ciencia de manera que parta de unos principios dados y por el ejercicio de la razón a través de la implementación de la deducción de nuevos conocimientos al interior de esa ciencia como lo es la matemática; todo se demostraba a partir de unos principios, axiomas, nociones comunes. Los axiomas vistos como principios universales que constituyen la base de toda teoría científica.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural iniciaban el conteo nuevamente, pero para no volver a tomar otro palo, decidieron amarrar cada noche una cuerda en la muesca realizada anteriormente y así poder hacer un recuento.

Igual se hacía con las ovejas, al entrar al redil, con esta acción se logró conocer si la cantidad de animales que salieron en la mañana, regresaron al anochecer, y al momento en que el rebaño crecía solamente le aumentaban una muesca al palo, de esta manera se llevaba un control de ellas. Este fue el primer procedimiento aritmético llevado a cabo por el hombre; de esta manera y sin tener conocimiento se realizaba la correspondencia uno a uno. Gracias a este principio durante mucho tiempo el hombre primitivo pudo realizar su propia aritmética, aún sin ningún tipo de preparación matemática para ello. Así, gracias a las muescas que realizaban para contar sus objetos, unidad por unidad les fue posible continuar con su vida cotidiana, aunque el lenguaje, la memoria o el pensamiento abstracto no fueran los más apropiados.

Cuando el hombre puede emparejar uno a uno los elementos de una colección con los de otra colección, se adquiere un conocimiento de carácter abstracto, el cual es totalmente autónomo de la naturaleza de los objetos o seres en cuestión, que expresa una singularidad en las dos colecciones. Así, los conjuntos como el día y la noche, los gemelos, una pareja de animales, las alas de un pájaro o incluso los ojos, las orejas, los brazos, los pechos o las piernas de un ser humano, tienen una característica común y totalmente abstracta que es la de «ser dos».

En esta época, también fue determinante el conteo con los dedos de las manos, puesto que el hombre se valió de este recurso para contar hasta cinco y poco a poco este procedimiento se fue extendiendo hasta diez, mediante la utilización de los dedos de la otra mano y posteriormente utilizó las falanges de los dedos cuando estos no eran suficientes para realizar sus actividades de conteo, es así como, los seres humanos aprendieron a contar abstractamente. El conteo que realizaban utilizando esta parte del cuerpo les dio la oportunidad de crear unidades de carácter abstracto, las cuales se obtenían de manera consecutiva, es decir, que partían de una unidad y se le añadía otra unidad, de esta manera se obtenían cantidades más grandes. La mano también tomó los aspectos cardinal y ordinal, es decir, se levantan o se doblan simultáneamente los dedos utilizándose como un modelo cardinal, también, se levantan o se doblan sucesivamente los dedos utilizándose como un sistema ordinal.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Otros pueblos como los mayas y los aztecas, prefirieron adoptar una base vigesimal, desarrollaron la capacidad de agrupar por veintenas y potencias de veinte todo lo que se pudiera enumerar, su manera de contar tuvo origen antropomórfico de la siguiente manera: el lenguaje de la cultura azteca está relacionado con los nombres de los dedos de cada una de sus manos, y de cada uno de sus pies. Estas civilizaciones se valieron no solo de los dedos de las manos, sino que también utilizaron los dedos de sus pies, para así ampliar su sistema de numeración, de esta manera se podía realizar el conteo de soldados tanto muertos como vivos, identificando las pérdidas tanto propias como las de sus enemigos.

Más adelante, surgió el conteo en base doce, más conocido como conteo duodecimal, este fue más cómodo, ya que el número 12 puede dividirse por 2, 3, 4 y 6. Dicho sistema ha sido empleado en los métodos comerciales, cuyos indicios son entre nosotros la docena y las doce docenas, el cual seguimos manteniendo, por ejemplo: los huevos o las ostras, bebidas, cupcakes y las frutas. Por otro lado, los sumerios y los asirio-babilonios, le aportaron a esta base y a sus respectivos múltiplos y divisores un papel importante en cuanto a las superficies, volúmenes, capacidades y pesos.

Por otro lado, la sesentena o base sexagesimal, constituye una base muy elevada, la cual exige comprender las sesenta palabras o signos diferentes y así realizar la representación de los números del 1 al 60; los nombres de estos números son tantos que resulta difícil aprenderlos de memoria, de sumar o multiplicar. Es importante mencionar que en la actualidad se emplea el número 60 para identificar el tiempo en minutos, segundos, ángulos en grados, entre otros.

Con el paso del tiempo en la llegada de la civilización, el hombre se vio en la necesidad de contar una gran variedad de elementos, los cuales no podían memorizar por mucho tiempo, lo que se convertía en un problema, debido a que se les olvidaban las cantidades; atendiendo a esta problemática, decidieron utilizar métodos sintéticos que pudieran representar dichas cantidades, es aquí, cuando deciden representar los números mediante signos, de esta manera surgieron las cifras.

Las representaciones del número empleadas inicialmente como el hueso suplieron las necesidades que tenía el hombre de sobrevivir; luego con el paso del tiempo y la llegada de la civilización recurrieron al conteo abstracto.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Las necesidades que tenía la humanidad de saber cuántos soldados había, la cantidad de animales y alimentos que tenían en su poder, fueron un factor determinante para que el hombre aprendiera a contar, pues afortunadamente él ha sabido ampliar sus posibilidades, utilizando cierto número de procedimientos mentales. Procedimientos que resultarían fecundos, ya que iban a dar a la especie humana la posibilidad de descubrir la diversidad numérica.

El ser humano a la hora de realizar cálculos tiene la capacidad de percibir distintas cantidades, debido a esto, se ve en la necesidad de utilizar la memoria o la comparación y la agrupación. En otras palabras, el hombre se vale de la capacidad abstracta del conteo, es así como este se encuentra con la difícil situación de tomar conciencia de los verdaderos límites de nuestras propias aptitudes y capacidades al realizar el conteo. De esta manera el hombre:

Al aprender a contar de manera abstracta y agrupar todo tipo de elementos según el principio de la base, el hombre aprendió a estimar, evaluar y medir diversas magnitudes (peso, longitud, área, volumen, capacidad, etc.). Aprendió asimismo a alcanzar y a concebir números cada vez mayores, antes incluso de poder dominar la idea del infinito. (Ifrah, 1987, p.p 57).

De esta manera se crearon métodos para poder representar estas grandes cantidades, realizaron procesos mentales, cálculos exactos que eran imposibles guardarlos mentalmente y que debieron de representarlos mediante la escritura, es así como, se dan los primeros pasos de la creación de la aritmética práctica, la cual, pasado el tiempo se volvió abstracta y finalmente condujo al álgebra.

El número uno, es el punto de partida para la creación de los demás números naturales por medio de sucesiones, es decir, todo elemento en los números naturales se obtiene añadiendo una unidad al número anterior, lo que se llamó el principio de recurrencia. Según Schopenhauer, todo número debe su existencia a su antecesor, pues para el hombre es difícil suponer un concepto si antes no ha realizado un proceso de abstracción ayudando a deducir el siguiente, pues esta capacidad de abstracción le permite al niño avanzar en sus conocimientos.

Según el autor, el niño cumplido los 15 o 16 meses identifica el principio de correspondencia uno a uno, al momento en que este juega, si tiene que asignar un muñeco a una

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

silla o relacionar el vestuario que le corresponde a cada uno. Es así como la correspondencia es la asociación de los elementos de dos conjuntos, los cuales deben tener la misma cantidad de elementos, es decir, la formación de pares, sin que ninguno de estos quede por fuera o solitario, si esto no sucede los conjuntos pasaría a ser desiguales y no se le podría realizar la correspondencia término a término.

De esta manera, se dice que el niño entre los tres y cuatro años, ha aprendido a contar al momento en que este utiliza los dedos para la representación de unidades y poco a poco este conteo se vuelve abstracto; en esta edad, el niño adquiere una capacidad de aprendizaje de la aritmética, es decir, que cuando éste aprende a contar de forma abstracta hasta cinco, progresivamente aumenta la capacidad de conteo hasta diez y así amplía poco a poco la serie regular de los números a medida que va accediendo a lo abstracto. Este proceso de conteo se puede observar al momento en que el niño le asigna un valor entero a cada dedo, esto es evidente al momento en que él con la mano cerrada levanta cada dedo o con la mano abierta progresivamente va cerrando los dedos a medida que le asigna el valor, este conteo se puede realizar del pulgar al meñique o viceversa.

Finalmente, el hombre primitivo realizó un gran acercamiento en cuanto al conteo, el cual utilizó al momento que necesitó conocer la cantidad de objetos, animales y personas que tenía a su cargo o simplemente le pertenecía. Para conocer dichas cantidades se apoyó en el conteo mediante muescas realizadas en palos o conteo con las partes del cuerpo; de esta manera y sin saberlo realizaban la correspondencia término a término. Algunas culturas como los mayas, aztecas, los sumerios y los asirio-babilonios, decidieron utilizar el conteo mediante la utilización de las bases numéricas como: la base doce, la base diez y la base sexagesimal, todas ellas con el fin de poder facilitar el conteo mediante agrupación. Con el paso del tiempo, el conteo tomó el carácter abstracto, por lo tanto, el número fue adquiriendo dicho carácter y posteriormente empezaron a realizar cálculos abstractos. El hombre se vio en la necesidad de calcular grandes cantidades, por lo que recurrió a la representación del número mediante la utilización de símbolos. En esta época el hombre primitivo no le dio significado a lo que era la cantidad, no identificaron la ordinalidad y cardinalidad del número de una manera práctica y no definieron la unidad, pero sí se prefiguran algunas nociones al respecto.

2.1.3 Los griegos siglos VI al VII a.C.

De acuerdo con Vásquez (2010), esta cultura representa la cantidad como magnitudes continuas y el número unido a lo discreto. Identifican el uno como la unidad aritmética, así como el generador de los demás números, además, este no podía ser dividido en más partes. Es así como el número se definió a partir de un conjunto de objetos reales, tomándose de forma individual siendo relacionados cada uno con una única unidad abstracta.

De acuerdo con Recalde (SF), en aquella época Euclides plantea que las magnitudes son de carácter continuo y los números discretos, es decir, que las magnitudes son divisibles de forma infinita, mientras que los números solo se separan en cantidades de carácter finito. También se menciona que, los números se pueden dividir de una forma finita, pero no es adecuado mencionar que son un conjunto que contiene infinitos números. Para este autor.

Los números son infinitos porque son inagotables; es decir, dado un número determinado siempre es posible generar otro, a partir de la adición de la unidad. Igualmente, no existe una magnitud infinitamente pequeña. Las magnitudes se pueden dividir indefinidamente, pero nunca se llega a un final. En resumen, Euclides adhiere a la idea de que no existe el *infinito en acto* sino sólo en *potencia*. Destierra el *infinito actual* y acoge el *infinito potencial*. (p. 5).

Tomando como referente el pensamiento Platónico mencionado por Vásquez (2010), el estudio de la cantidad se realizaba en dos sentidos. Primero, la cantidad en sí misma, es decir, su naturaleza, así como los elementos que la componen como: ser par, impar, abundante, perfecto y deficiente. Segundo, la cantidad en relación con otra cantidad, dicho de otra manera, el estudio de las cantidades comparadas con otras, por ejemplo: por medio de razones, proporciones, operaciones o relaciones entre números. De acuerdo con lo anterior, inicialmente el número se consideraba de carácter aritmético, pues al considerarse de esta manera, la disciplina encargada de su estudio era la aritmética; luego este era considerado como numerador, por lo tanto, su disciplina de estudio era la logística.

La base de las matemáticas antiguas estaba encaminada sobre el concepto de cantidad, de esta manera para Aristóteles “las matemáticas conformaban la ciencia de la cantidad,

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural entendiendo por cantidad, aquello que es divisible en elementos constitutivos” (Recalde, S.F. p. 16.) De esta manera se pueden identificar dos clases de cantidades: los números y las magnitudes. Como se mencionó anteriormente los números son divisibles en partes no continuas, mientras que las magnitudes si son divisibles en partes continuas.

Ahora bien, una de las obras más importantes de la historia de las matemáticas en la que se sistematizan las propuestas de la cultura griega son los elementos de Euclides. Aquí se realiza una separación notable en cuanto a los números y las magnitudes, también se puede diferir los derroteros de homogeneidad planteados por Aristóteles, en relación a esto las longitudes son medibles mediante longitudes, áreas con áreas y ángulos con ángulos. Por su parte Euclides, consideraba el número natural como una expresión de cantidad, para él, el número es una multitud compuesta de unidades y cada cosa que existe es considerada como una. A continuación, se presentan dos definiciones realizadas por Euclides en su libro VII, (Recalde, S.F, p. 15).

Definición VII.1: *Unidad, es aquello en virtud de lo cual cada cosa que existe se llama uno.*

Definición VII.2: *Número, es una pluralidad compuesta de unidades.*

De esta manera se introducen los conceptos de unidad y número, es así como en la definición 1, se puede evidenciar que la unidad es indivisible, además, es el punto de partida para la definición 2, en la cual se logra identificar la aglomeración de unidades. Es así como los griegos conciben la aritmética desde dos puntos de vista, el primero como una relación entre el cálculo, así como sus respectivas operaciones, la segunda en relación con la naturaleza y la esencia del número.

Klein (citado por Vásquez, 2010) menciona que para Platón la aritmética era “el arte de los números”, siendo esta la ciencia que permite conocer la esencia, así como la destreza correcta del conteo. Mientras que, en la logística, el arte del conteo también era importante para la perfecta comprensión de la naturaleza del número, era indispensable conocer las operaciones y relaciones entre estos.

También, para esta cultura, el uno no era considerado como número, debido a que no tenía un componente de unidades, pero a su vez era importante porque se consideraba como la

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural esencia, de modo que, al ser la esencia no podía tener relación con los demás números o el mismo estatus. Es por ello que la unidad y el número eran considerados como elementos fundamentales, porque indican el carácter abstracto de la unidad, es decir, implicaba la presencia de lo uno, lo múltiple, lo divisible e indivisible.

Finalmente, es importante mencionar que su sistema de numeración era aditivo, con características multiplicativas. Al ser un sistema principalmente aditivo, un mismo número podía tener distintas representaciones simbólicas, sumado a esto sus operaciones eran bastantes largas y complejas, pero no fueron un impedimento para la correcta realización de cálculos.

2.1.4 La edad media Siglo V al XV

Para Vásquez, 2010, la edad media se caracterizó por la reestructuración de la noción de número, propuesta por Simón Stevin. A pesar de que los tiempos habían cambiado, los comerciantes utilizaban la definición de número griega, los cuales no consideraban el uno como un número, debido a que carecía de unidades por lo que no podía ser dividido, además, este era considerado como la esencia y sustancia, ya que era el punto de partida para la creación de los demás números.

En esta época, el comercio era fundamental para sus habitantes, por ende, este era realizado con frecuencia, ello implicaba utilizar diferentes cantidades para la realización de esta actividad; pero se empleaba el método griego, es decir, el conteo por unidades. Al encontrarse con grandes cantidades de elementos para comercializar, este método se convirtió en un obstáculo para la realización de cálculos, así como el adecuado funcionamiento del comercio. Al percatarse de esto Simón Stevin pone en práctica todos sus conocimientos e intenta reestructurar el trabajo realizado por los griegos. De acuerdo con lo propuesto por Klein (citado en Vásquez, 2010).

...Stevin consciente rompe con las formas tradicionales de la ciencia, y pone su experiencia “práctica” en el comercio, las finanzas y la ingeniería al servicio de su preocupación teórica y a la inversa su “teoría” es puesta al servicio de su “actividad práctica” ... (p.186).

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Stevin, atendiendo a las necesidades de la época, propuso unificar los procesos comerciales del peso y medida, pero sin dejar de lado soportes científicos que justificaran su investigación. Es así como creó dos escritos, el primero fue *L'Arithmétique* y *La Practique D'arithmétique*, que fueron publicados en 1585. Con el primero intentó fundamentar la aritmética convirtiéndose en una base para el segundo. Con uno de estos libros intentó unificar el sistema de medida que aplicara para cualquier magnitud, para utilizarse de la misma manera que la numeración decimal.

Para la realización de este proceso Simón Stevin necesitó reestructurar algunos componentes del número natural, es por ello que él intentó reorganizar lo que para los griegos significaba cantidad; es decir, los griegos dividieron la cantidad en dos componentes, el número y la magnitud, pero Stevin establece que el número es el resultado tanto de sumas de cantidades discretas, como de medición de magnitudes; debido a esto el número surge como una categoría que une tanto la cantidad como la magnitud, seguidamente surge el sistema de numeración decimal.

De acuerdo con Gómez (SF), Stevin realiza su propia definición de número, es decir, “Número es aquello, por lo cual se explica la cantidad de cada una de las cosas” Stevin, (1585, p. 1) (citado en Gómez (SF)); para él, el número ya no representaba una cantidad como tal, sino una forma de explicarla.

Según Gómez, Stevin realiza una serie de afirmaciones que le permiten dar validez a su teoría. Es decir que, para él la noción de unidad permitía asegurar que el uno no es un número, debido a que la singularidad no hace parte de la pluralidad; por ello, surgen otras operaciones algebraicas como las fracciones, los radicales, así como los negativos. También Stevin afirma que la unidad era divisible, de esta manera, el número pasó a ser infinitamente divisible y posteriormente pasó a ser indiferenciable de una magnitud continua. Con todo esto ya establecido, Stevin pasa a negar las cantidades que son de carácter discreto o discontinuas, para poder realizar una negación de la discretez de los números.

Finalmente es importante mencionar que los aportes realizados por Simón Stevin permitieron darle una nueva definición al número y a la unidad. A partir de sus aportes se concibe la unidad como algo divisible, por tanto, el número llega a ser infinitamente divisible, e

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural indiferenciable de una magnitud continuúa. No sólo la unidad es número, sino que también las otras formas que aparecen como resultados de otras operaciones algebraicas como las fracciones, radicales, así como los negativos. Además, reduce los métodos del cálculo con fracciones a los métodos del cálculo con números naturales, dando cuenta que los irracionales tienen las mismas propiedades operatorias que los naturales.

2.1.5 Etapa de la fundamentación Siglo XIX

En la edad media la aritmética avanzó significativamente en término de sus aplicaciones en el cálculo y otras ciencias, pero sólo fue hasta el siglo XIX se logra y se dan a conocer las formalizaciones del número natural, propuestas por autores como: Dedekind, Cantor, Peano y Frege, además de los fenómenos que dieron lugar a este hecho.

2.1.5.1 Dedekind y los números naturales

A finales del siglo XIX en la etapa de la fundamentación, en lo que respecta a la construcción del número natural, Dedekind se ocupó principalmente de la formulación de los fundamentos de la aritmética sobre la base de un conjunto de enunciados referentes a conceptos abstractos, es decir que para él estos principios al ser elevados al nivel de definiciones adquieren un estatus lógico, y les da el derecho de ser usados con todo rigor en los procesos constructivos. Ahora bien, Bares & Climent (1927), ponen de manifiesto su punto de vista, en relación con el conteo de conjuntos, así como las cantidades de las cosas, tal como se expone en el siguiente texto:

Si se sigue con precisión [Observando atentamente] lo que hacemos al contar un conjunto o una cantidad de cosas, se llega a la consideración de la capacidad del [que tiene el] espíritu de [relacionar cosas con cosas de] poner en correspondencia una cosa con otra cosa, o representar una cosa con otra cosa [o de hacer de una cosa la imagen de otra], facultad sin la cual no es posible ningún pensamiento en absoluto. Sobre este único, aunque también completamente imprescindible fundamento debe edificarse toda la ciencia de los números, según mi punto de vista, (p. 120-121).

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Según se ha citado anteriormente, Dedekind hace referencia a la correspondencia uno a uno en los conjuntos, también con este apartado se da a conocer que esta es la base de la creación del concepto de número natural.

De acuerdo con Vásquez (2010), Dedekind propone realizar demostraciones de todo lo que se pueda demostrar y que por muy evidente que fuera la verdad, es necesario que sea demostrada, es decir, para él no bastaba descubrir las cosas mediante la intuición, sino que necesariamente tienen que ser demostradas matemáticamente, de esta manera menciona que:

Lo que se puede demostrar, no debe en la ciencia ser creído sin demostración. A pesar de que este requisito parece tan evidente, no puede considerarse como cumplido, a lo que creo, en la fundamentación misma de la ciencia más simple, a saber, en aquella parte de la lógica que trata de la doctrina de los números, incluso según las representaciones más recientes... (Bares & Climent, 1927, p.120).

De esta manera, para Dedekind, la existencia del número natural se explica a partir de una teoría bien estructurada y edificada bajo el lenguaje de lógica; lejos de las ideas intuitivas y la experiencia inmediata. Cuyas propiedades, axiomas, teoremas, relaciones de orden, así como operaciones los define de manera implícita.

Después de realizado esto Dedekind se ocupa de definir operaciones, transformaciones, equivalencias, homomorfismos, isomorfismos, orden total, operación del sucesor, inducción completa (fundamental en el marco de la teoría desarrollada), conjunto infinito, ordinal, entre otras propiedades aritméticas importantes de lo que él considera una teoría general de un sistema numérico infinito simple bien ordenado.

Para Dedekind, la generación de un número natural se obtiene por medio de la adición de 1; de modo que, cada nuevo número natural es el sucesor de su predecesor, pues se construye sobre la base de éste. Así mismo, el significado del número se establecía en función de lo que se pudiera decir sobre él, en razón de las proposiciones que se pudieran formular, por lo tanto, el número natural tenía sentido en tanto que pertenecía a una estructura su definición quedaba implícita en esta y en las propiedades que se le puedan adjudicar. Así, el número natural se

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural estableció en lo siguiente como un objeto de la lógica, como una idea de la mente, alejado de la experiencia inmediata.

Según Vásquez (2010), con respecto a este autor se plantean dos elementos característicos referentes a los números naturales; primero la ordinalidad como el principio sobre el cual se construyen los números naturales como un sistema simple y ordenado, segundo la no definición de los números naturales a partir de los conjuntos, sino que asocia los números naturales con los sistemas. Los números naturales son una aplicación de su teoría general, porque su teoría general permite explicar casos especiales, como el de los números naturales.

Por otro lado, los aportes de Dedekind a la formalización de los números naturales, se puede resumir:

- La ordinalidad como principio básico de la construcción de los números naturales.
- No define los números naturales a partir de conjuntos, si no que los asocia con sistemas.

Finalmente, Dedekind no acepta que la existencia del número natural se dé a partir de la intuición y la experiencia inmediata, es así como plantea que esta solamente se puede dar a partir del lenguaje de la lógica; también propone demostrar todo lo que sea posible sin importar que este sea verdadero y considera que los números naturales se obtienen a partir de la adición del 1.

2.1.5.2 Peano y los números naturales

De acuerdo con Vásquez (2010), Giuseppe Peano en el siglo XIX, investigó las formas de expresión simbólica para liberar las matemáticas de las impresiones del lenguaje natural y permitir que los conceptos matemáticos tengan significados desde aspectos solamente matemáticos. También, intentó expresar a través de los símbolos las relaciones lógicas y matemáticas que se conocían hasta el momento, para explicar de manera directa las hipótesis, así como los significados de los conceptos matemáticos manipulados. Su intención era reducir la matemática al simbolismo formalizado Boyer (2001) (citado en Vásquez 2010).

En relación con lo anterior, Giuseppe Peano aparte de pertenecer al grupo de los matemáticos más reconocidos e importantes de aquella época, pudo solucionar las dificultades

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural con respecto al número natural mediante el planteamiento de su axiomática; a él “no le interesa qué es un número natural, sino la manera como ellos se relacionan entre sí, son las reglas del juego de sus interacciones las que determinan su naturaleza, no los objetos en sí.” (Luque, 2002, p. 46). Con ello, Peano realiza interpretaciones simbólicas que permitan entender el número natural desde un punto de vista matemático.

Con relación a la aritmética, en 1889 Peano realiza la publicación del libro *Arithmetices principia: nova methodo*, donde hace una exhaustiva presentación de la teoría de los números naturales, mediante la utilización de una forma axiomática, en la cual se evidencian cuatro conceptos primordiales: el “1” que significa unidad, “N” que representa el número entero positivo; “ $\alpha+1$ ” que indica una secuencia: primero se encuentra la α luego $\alpha+1$ y finalmente “=” que en aquella época significaba *ser lo mismo*. De esta manera logra estructurar un conjunto de 9 axiomas con los cuales estructura la teoría formal de los números naturales utilizando el método deductivo.

Vásquez (2010), menciona que, esta teoría presenta similitudes con el trabajo realizado por Dedekind, tales como: noción de sistema simplemente infinito bien ordenado, pero aquí se logra observar que para Dedekind este representaba un teorema y para Peano es una especie de aplicación de la noción de sucesor; otra de las similitudes presentadas se refiere a la estructura ordinal, con relación a esto indica que:

Igualmente, el énfasis en una estructura ordinal, basada en la noción de cadenas de clases (conjuntos) que se suceden unos a otros a partir de la operación, y por ende, el lugar central a la inducción como la condición o la propiedad que de un se transfiere a, para cualquier elemento de la cadena. p. 63.

Entre las diferencias se pueden enunciar, Grattan-Guinness, 2000, (citado en Vásquez, 2010):

1. Peano comprende el número como un primitivo, axiomatiza sus principales propiedades. Para Dedekind los números son una creación de la mente humana, y su trabajo fundamental es la formalización de este proceso creativo.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

2. Dedekind teoriza sobre el axioma de inducción, mientras que Peano lo formula como un axioma y lo presenta bajo una forma de principio de lógica de primer orden (sin el recurso de los cuantificadores).
3. Para Dedekind, la aritmética es parte de la lógica, mientras que en Peano hay distinción de la una a la otra: la lógica es una herramienta para fundamentar la otra. p. 63.

2.1.5.3 Cantor y los números naturales

Vásquez (2010), menciona que, en lo que respecta a los números naturales, Cantor no tuvo un interés explícito en la formalización de estos, pero sí resultó ser un factor determinante su teoría sobre los conjuntos para una nueva comprensión del número natural. Él se interesó principalmente por la comprensión de la naturaleza de los conjuntos continuos, buscando una comprensión adecuada de los números reales: la naturaleza de su continuidad. Lo primero que hace es ocuparse del estudio de las funciones, esencialmente lo relativo al conjunto de puntos de discontinuidad en un intervalo dado. Lo mencionado anteriormente llevó a pensar la numerabilidad de los conjuntos infinitos y formular la siguiente pregunta: ¿Cómo contar conjuntos infinitos?

En respuesta a esto, inicia por hacer uso del principio de equipotencia como una forma de definir la equivalencia entre conjuntos: relacionando un elemento de un conjunto con un elemento de otro conjunto, de manera que, solamente le corresponda un elemento a cada uno, basándose en esta definición de correspondencia define la igualdad del número cardinal, donde ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos siendo equivalentes. Después de esto define el orden entre números cardinales, así como las operaciones entre ellos, se interesa en demostrar que el producto de dos números no es interpretado como la repetición de la suma de dos sumandos iguales, sino que se da a partir del producto cartesiano de dos conjuntos, es decir, que se comportan como los números naturales.

Cantor toma las nociones precedentes sobre los números cardinales “para presentar de una manera natural, más corta, y rigurosa los fundamentos de la teoría de los números finitos [los números naturales]”, Cantor 1915, p. 98 (citado en Vásquez, 2010).

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

De esta manera, como lo señala Vásquez (2010), los aportes realizados por Cantor parten de los principios de los conjuntos finitos, teniendo en cuenta el concepto de potencia de un conjunto, construye los números naturales; en correspondencia biunívoca con el conjunto que tiene la propiedad de poseer ese cardinal. Principalmente se da relevancia al cardinal, el cual se define como el número de elementos de un conjunto dado; y entre sus aportes más importantes está lo que significa ser el número de un conjunto de cosas.

Los principios fundamentales en su teoría fueron: la correspondencia biunívoca, la cardinalidad, la ordinalidad como resultado de la secuencia de los cardinales y la noción de que cada cardinal incluye los anteriores.

2.1.5.4 Frege y los números naturales

A mediados del siglo XIX se realizan aportes al álgebra y se empieza a priorizar el rigor y formalización matemática; en esta misma época, se exige la demostración y definiciones precisas para delimitar su validez, lo que lleva posteriormente a definir las leyes básicas de la aritmética. Frege por su parte establece la naturaleza de las leyes de la aritmética y luego estudia la naturaleza de los números naturales.

En este apartado se mencionan algunos de los aportes realizados por Frege en lo que respecta al concepto del número natural. Es importante mencionar que el trabajo realizado por Frege con respecto a la fundamentación de la matemática se expone en sus tres libros (*Begriffsschrift*, publicado en 1879; luego en el año de 1884 publica *Die Grundlagen der Arithmetik* y por último dio a conocer *Grundgesetze der Arithmetik Begriff schriftlich Abgeleitet*); de esta manera y de acuerdo a los objetivos del presente trabajo nos enfocaremos en el libro *Die Grundlagen der Arithmetik* en el que expone y critica las concepciones empiristas, psicologistas y formalistas sobre los números (naturales) y las leyes aritméticas que hasta el momento se habían formulado. Su principal inquietud radica en investigar sobre la naturaleza de los números naturales para aclarar algunas inconsistencias sobre ello.

De acuerdo con Páramo & Rosero (2016), uno de los objetivos de las críticas consistió en mostrar la inexactitud en la forma de concebir los números y de esta manera encontrar una nueva postura que pudiera demostrar que la aritmética se reduce a la lógica, pues le dio fundamento a la

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural aritmética por medio de esta. En el siglo XIX Frege realiza aportes importantes al concepto del número natural, en el cual menciona que los números naturales son objetos abstractos, porque son obtenidos mediante conceptos más no de las cosas, pues no pueden ser considerados Desde la forma particular del pensar del sujeto, debido a que no son propiedades de las cosas. Por tal motivo no provienen del mundo exterior, en tanto que, las leyes de la aritmética serán sometidas a las representaciones netamente mentales y posteriormente pierden su rigurosidad y validez.

Además, Páramo & Rosero (2016), menciona que las fórmulas numéricas solamente se pueden obtener por las definiciones de los números. Él estableció las leyes de la aritmética y posteriormente, estudió la naturaleza de los números naturales. Considera que “definir los números como conjuntos o pluralidades de cosas no es favorable, pues con ello los números 0 y 1 se excluyen del concepto número” (Páramo & Rosero (2016). p. 47), a causa de que esto está más relacionado con agrupamiento de cosas, por lo que se debe precisar ¿Qué tipo de objetos son los que forman esos conjuntos? Esta pregunta, genera diferentes puntos de vista, “pues mientras algunos autores consideran que estos corresponden a cosas (como objetos causales), otros consideran que son unidades”, (Páramo & Rosero (2016). p. 47).

También, se debe precisar qué tipo de objetos son los que deben formar esos conjuntos, puesto que hay un desacuerdo en este aspecto. Mientras unos afirman que estos corresponden a cosas (como objetos causales), otros consideran que son unidades. Por tanto, para Frege con respecto a la primera afirmación los conjuntos de objetos no deben ser nombrados como se hace con los números, debido a que por ejemplo un conjunto de objetos de tres elementos, tres dedos, no permite obtener lo que significa el número tres. En cuanto a la segunda afirmación él considera necesario hacer una discusión más detallada para definir la noción de unidad.

Para él, el número uno debe ser diferente de los demás números, pero este no debe perder la noción de unidad, es decir, que existe una diferencia notable entre lo que significa la unidad y el uno, de esta manera, se aclara que el uno es un calificativo y la unidad son cosas que se deben contar, los cuales tiene sus propias características y que los hacen diferentes entre sí; con esta diferenciación es posible mantener la unicidad e igualdad entre el uno y la unidad.

Páramo & Rosero (2016) afirman que en Frege: “se debe establecer una diferencia entre unidad y uno: la unidad se refiere a las cosas que se deben contar, de modo que lleva inmerso la

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural diversidad de ellas; el uno es el nombre propio de un objeto en la investigación matemática, que hace referencia a sólo uno, es decir es único; por tanto, no admite lo plural. Cuando se hace la agrupación o unión de las cosas para pasar a la adición aritmética, la unidad se transforma en el nombre propio “uno”, con lo cual se puede mantener la unicidad del “1”, y por tanto su igualdad. En consecuencia, con la unidad, lo diverso llega a ser igual” (p.49).

Finalmente, dentro de los trabajos realizados por Frege es de gran importancia resaltar la parte donde las autoras afirman que, para él cada cosa que se cuenta es una unidad, al “uno” lo considera como calificativo, entonces la unidad es un objeto que se le asigna la propiedad de “uno”. Es decir, se diferencia entre la unidad y el uno. Siguiendo esta idea, para Frege el número no es una propiedad de las cosas y la unidad se refiere a las cosas que se deben contar y lleva inmersa la diversidad de ellas; pero el uno tiene su existencia matemática y es independiente de las cosas; lo anteriormente mencionado es fundamental para el diseño de una propuesta de aula que pretenda hacer una aproximación al número natural porque muestra la diferencia clara entre uno y unidad.

2.2 Referente matemático

En el siguiente apartado se pretende dar a conocer parte de los axiomas planteados por Giuseppe Peano para dar formalizar los números naturales, también se mostrarán algunos teoremas y demostraciones del número natural, adicional a esto se darán a conocer los símbolos para realizar las operaciones lógicas y matemáticas con los que intentos formalizar dichos números.

Antezana (2019) menciona que: “Contrariamente a Dedekind, Peano se encontraba empeñado en axiomatizar los números naturales desde la lógica formal, por eso Geiss y Barrios (2005, p. 1), sostenía que Dedekind "trataba el problema desde la perspectiva de la teoría de conjuntos mientras que otro lo abordaba desde la lógica matemática.” Peano inicialmente presentó nueve axiomas en su obra *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, que a continuación se presenta (Bedoya, 2003, p. 4)”:

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

El símbolo N significa número (entero positivo).

- El símbolo 1 significa unidad.
- El símbolo $a + 1$ significa el sucesor de a , o, a más 1.
- El símbolo $=$ significa es igual a .

En seguida se enuncian los “axiomas”. En esta presentación sólo se ha modificado la notación lógica.

1. $1 \in N$
2. Si $a \in N$ entonces: $a = a$
3. Si $a \in N$ entonces: $a = b$ si y sólo si $b = a$
4. Si $a, b, c \in N$ entonces: $a = b, b = c$ implica $a = c$
5. Si $a = b$ y $b \in N$ entonces: $a \in N$
6. Si $a \in N$ entonces: $a + 1 \in N$
7. Si $a \in N$ entonces: $a = b$ si y sólo si $a + 1 = b + 1$
8. Si $a \in N$ entonces: $a + 1 \neq 1$
9. Si k es una clase, $1 \in k$, y si para $x \in N$: $x \in k$ implica $x + 1 \in k$, entonces $N \subseteq k$.

Sin embargo, “después de un análisis más profundo por parte de otros matemáticos y de la eliminación de aquellos postulados que podían deducirse a través de los otros nos han llegado los cinco axiomas para los conceptos básicos N ; 0 y S que se utilizan hoy” (Geiss y Barrios, 2005, p. 1)”(p.3)

2.2.1 Algunos axiomas y teoremas en la aritmética de Peano

De acuerdo con Luque (2002), en el año de 1889 Giuseppe Peano, decide poner un punto final ante la discusión presentada en aquella época, por parte de Russell y Frege, acerca de lo que significaba el número natural, ellos decidieron definir el 3 como un adjetivo, es decir, especificar el significado de conjunto cuando este tenga 3 elementos, por último, se define el sustantivo en términos del adjetivo, es decir, $3+5=8$, en este punto el 3 ya no es adjetivo, sino un sustantivo.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

$$\exists(x, y, z \in S) \text{tales que } ((x \neq y, y \neq z, x \neq z)$$

$$(\forall \omega \in S)(\omega = x \text{ ó } \omega = y \text{ ó } \omega = z)$$

Según la planteado en la fórmula, esta alude a que en S existen solo 3 elementos distintos, pero Henri Poincare se muestra en desacuerdo con este planteamiento, para él, antes de realizar esta fórmula es necesario conocer la noción intuitiva aritmética de 3, y de esta manera, la noción lógica que se planteó tiene sentido. Es así como, si una persona no tuviera conocimientos acerca del conteo y no comprendiera que el conjunto $\{x, y, z\}$ contiene tres elementos, no sabría con certeza que la fórmula es o no correcta.

Los planteamientos anteriores llevaron a que Giuseppe Peano se cuestionara y posteriormente colocar un punto final a toda esta discusión, menciona que no le interesa en realidad el significado de número natural si no como estos se relacionan entre sí.

En el año 1889, Peano publicó un libro llamado *Arithmetices principia*, donde muestra sus primeras versiones del lenguaje simbólico de la axiomatización de las matemáticas, en el cual usa diferentes símbolos para las operaciones lógicas y matemáticas. Inicialmente presenta una lista de las nociones aritméticas iniciales (que él llama explicaciones): número, uno, sucesor y “es igual a”, para cada una de ellas dice respectivamente: el signo $\mathbb{N}$ significa número (entero positivo), el signo 1 significa Unidad, el signo $x + 1$ significa el sucesor de x o x más 1, el signo $=$ significa “igual a”. A continuación, se expone un teorema que hace referencia a la propiedad modulativa de los números naturales con su respectiva demostración para dar cuenta de la manera cómo se estructuran:

2.2.2 Teoremas ⁶

$$16. a, b \in N. a = b : \mathcal{D}. a + 1 = b + 1$$

⁶ Tomando directamente de Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo exposita*. Florentiae. E diderunt Fratres Bocca

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Si a es igual a b entonces cualquier número a sumado con 1 será igual al número b sumado con 1.

$$22. a, b, c \in N. \exists. a + b + c \in N$$

Si a, b, c son números que pertenecen a los naturales, entonces $a + b + c$ al ser colocados en una suma su resultado será un número que pertenece a los naturales.

En este teorema se puede observar que los números naturales se construyen a partir de la adición, es decir, que, si a cualquier número natural se le adiciona otro número de la misma categoría, se obtiene un número natural más grande que el anterior.

$$18. a, b \in N. \exists. a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

$$a \in N. \exists. \therefore a + 2 = a + (1 + 1) = (a + 1) + 1.$$

$$a \in N. \exists. \therefore a + 3 = a + (2 + 1) = (a + 2) + 1, etc$$

Se puede observar claramente la conmutatividad en las operaciones, es decir que, si se tiene $1+3=1+(2+1)$, el resultado es el mismo si se tiene $(1+2)+1$, el resultado no cambiará a pesar de que cambie la agrupación entre los números.

En la propuesta de aula que se presenta más adelante, se trabaja las operaciones de composición y descomposición, al igual que la función sucesor del número natural de forma sutil e indirectamente teniendo en cuenta la propuesta de Peano. Por esta razón, solo se presentaron en este apartado algunas propiedades de los números naturales, parte de su axiomática y la manera en cómo se realizó una aproximación a la definición del número natural. Es así como, solo se demostraron los teoremas 16, 22 y 18, donde se logra observar que los números naturales se construyen a partir de la adición de 1 y cómo mediante la agrupación el resultado de los números sigue siendo el mismo.

2.3 Referente Curricular

En los Lineamientos Curriculares de matemáticas MEN (1998) se menciona que el razonamiento matemático hace parte del proceso de aprendizaje del estudiante desde los

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural primeros años de escolaridad y este va evolucionando a través del tiempo. El niño debe realizar actividades en las que pueda justificar, para poder hacer sus propias elecciones empleando su razonamiento, de modo que al pasar al grado primero pueda observar secuencias propuestas por el profesor para resolverlas, así como formular una regla de formación ordenando de menor a mayor, comparando con el patrón anterior y el siguiente; estas actividades las realiza por ensayo y error de manera que este pueda percatarse de encontrar una respuesta acertada.

Teniendo en cuenta lo anterior, y lo mencionado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, para el grado primero se encuentra el desarrollo de pensamiento numérico, centrado en habilidades numéricas flexibles y creativas que permitan resolver, proponer, argumentar, razonar sobre el sentido, significado de los números y la numeración, puesto que, en este pensamiento se inscribe como objeto de enseñanza el número natural y para desarrollarlo se proponen tres aspectos básicos importantes tales como: la comprensión de los números así como la numeración, comprensión del concepto de las operaciones, cálculos con números, las aplicaciones de números y operaciones.

Principalmente se tendrá en cuenta la comprensión de los números y la numeración, puesto que hace parte del propósito de esta investigación. Es importante mencionar que cuando el docente plantea actividades para el desarrollo del pensamiento numérico y crea actividades donde se utilice el conteo, la agrupación, así como el uso del valor posicional; en el desarrollo del pensamiento numérico para la construcción del concepto de número, es necesario tener en cuenta los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998) puesto que recomiendan incluir el razonamiento matemático de la siguiente manera: “En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta de una parte, la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y, de otra, que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se reforma y amplía en los conjuntos de grados siguientes. Así mismo, se debe partir de los niveles informales del razonamiento en los conjuntos de grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento, en los conjuntos de grados superiores” (p.54).

El razonamiento matemático permite que el estudiante, dé cuenta del cómo y porqué de los procesos utilizados para llegar a una conclusión; justifique los procedimientos y estrategias empleadas para abordar dicho problema; plantear hipótesis, realizar conjeturas, predicciones,

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural realizar contraejemplos, utilizar hechos con los que se encuentre familiarizados, propiedades y las similitudes para explicar otros. También, que este pueda encontrar patrones y pueda expresarlos utilizando la matemática; utilizando sus propios argumentos para dar a conocer sus ideas. De esta manera comprende que las matemáticas no solamente son una memorización de reglas y algoritmos, sino que estas son lógicas y permiten desarrollar el pensamiento.

Para los Lineamientos Curriculares, los números tienen diferentes significados para los niños y este puede variar dependiendo del contexto en el que se desenvuelven, es decir: el número como secuencia verbal, el número como etiqueta, el número para contar, el número para expresar una cantidad de objetos o como el número cardinal, el número para medir, para marcar una posición como ordinal.

Como secuencia verbal, el niño utiliza los números para establecer un orden, de manera que aprenden a contar rápidamente por repetición; como etiqueta los usa para identificar clases como: números telefónicos, posiciones dentro de un equipo de fútbol entre otros. Cuando el niño usa los números para contar, lo hace con una correspondencia biunívoca donde asocia el número con el objeto y de manera ordinal lo hace para describir la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto totalmente ordenado, en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial. Al medir lo usa para describir una cantidad continua como el volumen, el peso entre otros. De acuerdo con lo anterior, la propuesta de aula para nuestro trabajo estará conformada por situaciones como: secuencia verbal, etiqueta, conteo utilizando la correspondencia biunívoca y de forma ordinal.

2.3.1 Estándares Básicos de Competencia

Los Estándares Básicos de competencia en matemáticas MEN (2006) tienen como propósito la formación de ciudadanos competentes en esta área, que sean capaces de comprender los fines en la educación actual. Dentro de estos estándares para el grado primero se pueden identificar los siguientes: El pensamiento numérico y sistemas numéricos

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.
- Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques multibase, etc.)
- Uso diferentes métodos de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas.
- Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables (p.80).

2.3.2 Derechos Básicos de Aprendizaje

Entre las habilidades que debe emplear el niño en el reconocimiento del significado del número los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (2016) menciona que:

En el grado primero el niño “Identifica los usos de los números (como código, cardinal, medida, ordinal) en contextos de juego, familiares, económicos, entre otros”. (p.8), donde puede alcanzar lo siguiente:

- Construye e interpreta representaciones pictóricas y diagramas para representar relaciones entre cantidades que se presentan en situaciones o fenómenos.
- Explica cómo y por qué es posible hacer una operación en relación con los usos de los números y el contexto en el cual se presentan.
- Reconoce en sus actuaciones cotidianas posibilidades de uso de los números y las operaciones.
- Interpreta y resuelve problemas de juntar, quitar y completar, que involucran la cantidad de elementos de una colección o la medida de magnitudes como longitud, peso, capacidad y duración.
- Utiliza las operaciones para representar el cambio en una cantidad. (p.8)

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Finalmente, en coherencia con los Derechos Básicos de Aprendizaje en matemáticas (2016), así como en el sistema ordinal el niño presenta la habilidad de realizar actividades concretas del número donde puede hacer comparaciones, contar, ordenar e identificar los números de la siguiente manera:

A partir de diversos materiales (recortes de periódico, revistas, facturas, noticias, etiquetas de productos alimenticios, la cuenta de servicios públicos, fotografías, placas de vehículos, números de documentos de identidad, entre otros) reconoce los números que aparecen allí.

Identifica con cuáles de esos números:

- Se puede conocer la cantidad de objetos de una colección.
- Pueden ordenar eventos u objetos.
- Pueden hacer operaciones.

Propone preguntas que para ser resueltas requieren calcular una suma o una resta.

Como se puede observar en los tres documentos anteriormente se mencionan las habilidades, así como los conocimientos que el niño de grado primero debe emplear para alcanzar el desarrollo del pensamiento numérico en los números naturales, desde su significado, las relaciones que establece entre el número y el objeto, comparaciones en conjuntos, así como relaciones de orden que poco a poco lo introducen en el arduo camino de las matemáticas.

2.3.3 Contexto

Es importante mencionar, que, para llevar a cabo el diseño de tareas, se tendrá en cuenta actividades enmarcadas dentro de contextos de la vida cotidiana que permitan al estudiante desarrollar el razonamiento matemático. De acuerdo con los Lineamientos Curriculares (1998), el razonamiento permite que el estudiante organice las ideas mentalmente y llegue a una conclusión; el razonamiento debe estar presente en todas las actividades matemáticas donde el estudiante mediante el ensayo y error pueda llegar a una solución.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Así mismo, los Estándares Básicos mencionan que el razonamiento empieza a desarrollarse desde los primeros grados de escolaridad basado en el contexto y la utilización de material tangible, los cuales permiten que el estudiante realice predicciones, justifique, dé explicaciones congruentes, razonables, que interprete y plantee respuesta con argumentos. Las actividades que se realicen deben de estar ambientadas con material físico, dibujos contextualizados, los cuales ayudan a comprender que en las matemáticas no solamente se memoriza las reglas y algoritmos, sino que también son lógicas, tienen sentido, permiten que el estudiante piense, analice y algo importante permiten que este se divierta.

2.4 Referente didáctico

Como se ha mencionado en el transcurso de este trabajo, el estudio de la historia de las matemáticas permite que el docente tenga a su disposición una cantidad considerable de métodos para implementar la enseñanza de determinado objeto matemático en el aula, además, con este estudio el docente puede prever los errores que se pueden presentar al momento de enseñar. También, si el docente emplea la historia de las matemáticas para el diseño de actividades, podrá captar con mayor facilidad el interés del estudiante, en otras palabras, la utilización de la historia de las matemáticas en la enseñanza permite que el docente identifique los errores que se pueden presentar en el aula y poder abordar las dificultades de manera precisa.

La realización de actividades debe estar inmersas en un contexto social, pues de acuerdo con Vásquez (2020), este contexto hace referencia al lugar donde el profesor lleva a cabo sus prácticas, así como la retroalimentación en el desarrollo de estas las cuales favorecen la formación del docente respecto a los contenidos de enseñanza, de manera que, este debe adaptar los contenidos a enseñar de acuerdo a las normas de la comunidad. Es por esto, que el proceso formativo del profesor de matemáticas se debe dar dentro del contexto en que este desarrolla sus prácticas permitiéndole analizar, contrastar y actuar acerca de los procesos de aprendizaje que enseñó a sus estudiantes y posteriormente dar una transformación a sus conocimientos didácticos donde podrá tomar decisiones al realizar la enseñanza de las matemáticas. Además, como lo expone Vásquez (2020):

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

La construcción de significados (sociales y personales) se origina cuando las comunidades o las personas contrastan el producto de su experiencia con las expectativas generadas durante este proceso (Gómez y Rico, 2002). Este proceso de reflexión/acción sobre la práctica, permite tanto a comunidades como a personas desarrollar sentido y significado de los objetos matemáticos que son enseñados a los escolares. (p.39)

Debido a lo mencionado anteriormente, los docentes en ejercicio deben tener en cuenta el contexto en que se desenvuelven para realizar sus prácticas educativas, este contexto, exige una formación docente especializada en el área de las matemáticas pero según investigaciones realizadas por Torres (2015), no todo los docentes tienen una formación matemática, de acuerdo a una investigación realizada por este mismo autor, se logró identificar dos clases de profesores, una conformada por docentes que han realizado diplomados en magisterio y otra integrada por docentes que tienen su título en licenciatura en matemáticas.

De acuerdo con Salazar (2005), la formación matemática de los docentes tiene mucho que ver con la enseñanza de un contenido matemático; es así como plantea que la historia del número natural es importante para la formación matemática del profesorado, por lo que pone en evidencia, los obstáculos y dificultades que se presentaron en la formación del tal objeto matemático, estos componentes se convierten en una base para que el docente pueda tomar decisiones de carácter didáctico y pedagógicas para hacer un concepto enseñable.

Por su parte Vásquez (2010), da a saber que los docentes al emplear la transposición didáctica, pueden construir un análisis didáctico para identificar, hacer una organización del saber matemático en un entorno institucional; de esta manera el docente pone en práctica el conocimiento didáctico en cuanto la elaboración de actividades escolares, estas deben de ser adaptadas al contexto escolar, y transformarse en diferentes formalizaciones del concepto de número natural de acuerdo al marco escolar.

Por último, cabe resaltar la importancia de la Historia de la Matemática en la formación docente, puesto que ésta le proporciona elementos para la realización de actividades de aula, además, le provee distintas maneras de enseñar un objeto matemático, a esto se le suma que es primordial conocer la transposición didáctica para el respectivo análisis y diseño de tareas.

2.4.1 Teoría de la Transposición Didáctica

Para el diseño de las actividades se tendrá presente la teoría de la transposición didáctica propuesta por Chevallard (1998). La transposición didáctica inicialmente es la selección de contenidos de saberes para poder ser enseñados, es así, como los contenidos seleccionados en ocasiones se convierten en diseños didácticos creados de acuerdo a las necesidades de la enseñanza; de esta manera un contenido “saber seleccionado” puede ser enseñado, pero primero pasa por un proceso de transformación, adaptándolo para que sea apto y así ocupe un lugar entre los objetos de enseñanza, por lo tanto, el proceso realizado para transformar un objeto de saber a enseñar a un objeto que va a hacer enseñado se le conoce como transposición didáctica; en otras palabras, la transposición didáctica es un conjunto de cambios que tiene un saber sabio para poder convertirse en un saber enseñado, para que este proceso suceda, el docente realiza la elección de los contenidos que se enseñarán, luego estos mismos contenidos empiezan a sufrir ciertos cambios para ser adaptados a las necesidades requeridas y posteriormente ser enseñados.

2.4.2 Ingeniería didáctica

De acuerdo con Artigue; Douandy; & Moreno, (1995), la ingeniería didáctica se caracteriza por la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza, la cual está compuesta por dos niveles de investigación: la macro-ingiería y la micro-ingiería, según sea el objeto de investigación. De acuerdo con las necesidades del trabajo se tomó la micro-ingiería didáctica, debido a que esta permite tener una recolección de los fenómenos y dificultades que se presentan en la clase en el momento de implementar la propuesta de aula.

Dentro de la ingeniería didáctica se tendrán en cuenta cuatro fases fundamentales a saber:

Fase 1. Para realizar esta fase de análisis preliminar se tendrá en cuenta los objetivos específicos de la investigación, así como el marco teórico didáctico, el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza y los conocimientos didácticos.

Fase 2. En esta fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas se debe prever las posibles dificultades que puedan presentarse en el aula de manera rápida para tener un manejo de la puesta en acto, de manera que pueda tomar decisiones acerca de las herramientas

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural que pueda utilizar, desarrollar los requerimientos adaptados a la noción de número natural y enseñar explícitamente métodos para el estudio cualitativo. Estas selecciones describen fase a fase la ingeniería donde se involucran las selecciones locales.

Fase 3. Se lleva a cabo la experimentación, análisis a priori y validación de la implementación de la propuesta de aula, donde se recogen los datos que se obtienen en el transcurso de la práctica, lo que se puede observar en la realización de las secuencias de enseñanza, también lo aprendido, así como lo puesto en práctica por los estudiantes.

Fase 4. En esta última se realiza el análisis a posteriori y la evaluación, donde se hace una comparación entre los resultados esperados y los obtenidos con la propuesta de aula, así como también los logros que obtuvieron los estudiantes en el proceso del aprendizaje.

3. Capítulo III

Metodología

El desarrollo de este trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo, pues de acuerdo con Hernández, Fernández & Baptista (2003) este estudio le aporta relevancia al análisis e interpretación de las experiencias de los estudiantes en el manejo de las situaciones, después de realizada la implementación de la propuesta de aula. Por otro lado, de acuerdo con Camargo (SF) este tipo de estudio cualitativo, se refiere al conjunto de métodos que se emplearán en el desarrollo de la investigación de manera local, identificando a través de la implementación de la propuesta de aula, las dificultades en los fenómenos de estudio y por medio de estos identificar resultados útiles, confiables que permitan atender a las necesidades en la enseñanza y aprendizaje de la noción de número natural por medio del principio de correspondencia y la noción de unidad.

Este tipo de investigación cualitativa se enfatiza en la naturaleza social, cultural de las matemáticas, de su enseñanza y aprendizaje, además nos permite ser partícipes de los fenómenos educativos que se presentan a diario en el aula de clase, de modo que involucran a profesores, estudiantes y agentes educativos que contribuyen en el desarrollo de la investigación, actuando de manera responsable para hacer posible la recolección de evidencias, herramientas analíticas

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural que sean creíbles y confiables. Es así como el investigador debe esforzarse por encontrar nuevos caminos que lo conduzcan a resolver sus inquietudes, además de buscar las posibles soluciones a los fenómenos de la enseñanza brindando la oportunidad de conocer a fondo el tema sin importar que tan evidente pueda ser, que puedan dar paso al desarrollo de nuevos métodos para solventar las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Dentro de este estudio cualitativo se tendrá en cuenta el método de estudio de caso, el cual para Camargo (SF) consiste en poder describir y caracterizar una situación individual que tenga un interés de carácter investigativo. Para ello se tomará como muestra estudiantes de las Instituciones Educativas Alto San Francisco, La Milagros y Rafael Tello, en el grado primero de educación básica, donde se examinará de manera exhaustiva las dificultades que puedan presentarse en la enseñanza y aprendizaje del número natural, esto con el fin de lograr una comprensión más profunda del fenómeno que muestra una evidente complejidad.

Para el diseño de las actividades se toma como referente el método de la ingeniería didáctica, principalmente el nivel de la micro-ingeniería didáctica, debido a que este permite tener presente el enfoque local relacionado con las dificultades de los fenómenos presentados en clase. Para efectos de este trabajo, se tendrá presente las cuatro fases que se presentaron en el marco metodológico mencionado anteriormente.

3.1 Desarrollo Metodológico

En este apartado se encuentra la explicación de las fases para la implementación de la propuesta de aula, como también el contexto de experimentación, los elementos utilizados para la recolección de evidencias, la estructura de la propuesta y su respectivo análisis.

Fase 1. Análisis preliminar: En esta fase se refleja la problemática de estudio, con respecto al aprendizaje y enseñanza del concepto de número natural en el grado primero de Básica Primaria. Para plantear la pregunta problematizadora se tomó como referentes algunas investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática, que dan cuenta del problema latente que abarca este objeto de estudio. Para complementar y ampliar esta propuesta, se tomaron como referentes los antecedentes, objetivos, justificación y marco teórico, además, en este marco se encuentra la parte histórica, la cual nos brinda elementos importantes para el

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural diseño de las actividades, de igual forma, en los referentes curriculares se mencionan elementos importantes para poder identificar qué aspectos son relevantes para la enseñanza en este grado, y así poder fortalecer el diseño.

Fase 2. *Análisis a priori*: Con este análisis se pretende identificar los elementos importantes para la realización de cada tarea a partir de la articulación de los referentes teóricos. En esta etapa se buscará en la historia del número natural y los referentes teóricos en general, elementos importantes para realizar el diseño de las tareas; vale la pena recalcar, que estos diseños serán contextualizados y diseñados partiendo de cero. Este se realiza con el fin de que el estudiante identifique los números en sus diferentes representaciones, reconocer el significado de este e identificar y resolver problemas en diferentes situaciones, entre otras.

Fase 3. *Experimentación*: Se realiza la implementación de la propuesta de aula a cinco estudiantes de grado primero de Básica Primaria de las Instituciones Educativas⁷ La Milagrosa, Rafael Tello y Alto San Francisco, de la ciudad de Santander de Quilichao, Cauca.

Fase 4. *Análisis a posteriori y validación*: En esta última fase se realiza un análisis exhaustivo entre el análisis a priori, es decir, antes de la implementación y el análisis a posteriori, después de la implementación, así como identificar las dificultades, errores, ventajas y limitaciones relacionadas con la concepción del significado del número natural, específicamente en la correspondencia uno a uno y la noción de unidad por parte de los estudiantes del grado primero de Básica Primaria.

3.2 Contexto de trabajo y experimentación

Para la implementación de la propuesta y posterior análisis se escogió como población de estudio a estudiantes de grado primero de Educación Básica Primaria de distintas Instituciones Educativas como: La milagrosa, Rafael Tello y Alto San Francisco ubicadas en la ciudad de

⁷ Se seleccionaron estas instituciones por motivo de la pandemia del covid-19, se escogieron 5 estudiantes de forma aleatoria, debido a esto fue necesario desplazarnos a una zona rural, ya que en las instituciones de la ciudad no fue posible la realización.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Santander de Quilichao del Departamento del Cauca, esta última se encuentra ubicada en una zona rural del municipio anteriormente mencionado, los estudiantes que integran el grado primero tienen edades entre los 6 y 8 años; al tener este rango de edades, los estudiantes son imperativos, demuestran interés por las matemáticas, demuestran respeto entre ellos y sus superiores, poseen conocimientos relacionados con la temática que propone la propuesta de aula, son autónomos, críticos y humildes.

3.2.1 Instrumentos para la recolección de información

Como se ha mencionado, la implementación de esta propuesta se realiza mediante un estudio de caso. Las evidencias de dicho estudio se recolectan mediante grabaciones y evidencias escritas; éstas se caracterizan por la presencia que realiza el implementador en el lugar de la prueba. Para la recolección de la información se utilizan:

- ***Grabaciones de audio y video***

Por medio de este instrumento se obtiene evidencia de las interacciones de los estudiantes con sus pares y con las investigadoras, en el transcurso de la prueba.

- ***Evidencias escritas por parte de los estudiantes***

Mediante este instrumento se tendrá evidencia escrita de las respuestas, los argumentos, las heurísticas y los diferentes procedimientos que realizaron los estudiantes ante las tareas propuestas en el transcurso de la implementación, y así a través de esta poder tener elementos para el respectivo análisis.

3.3 Análisis de la aplicación del trabajo de campo

El análisis sobre las actividades propuestas, en relación a las ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de educación básica, se llevó a cabo, como ya se mencionó, en una zona rural de Santander de Quilichao llamada vereda “San Francisco” y fue aplicada a cinco niños de grado primero de Instituciones Educativas como: La Milagrosa, Rafael Tello y Alto San Francisco, en jornada completa mañana y tarde. A

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural
continuación, mostraremos algunos diálogos relevantes realizados por los niños durante la aplicación de la prueba, las practicantes se mencionan como P1 y P2 los estudiantes serán mencionados como E1, E2, E3, E4 Y E5 respectivamente.

- Preguntamos a los niños cómo ven actualmente sus clases y ellos manifiestan que para ver sus clases se utilizan diferentes estrategias así:

P1: ¿Están viendo clases virtuales? y ¿tienen computador en la casa o por el celular? ¿Cómo hacen?

E4: lo que tengo yo es tablet, esta tablet chatarra no sirve para nada.

P1: E1, ¿usted cómo hace?

E1: nos mandan tareas.

P1: ¿así en hojitas? y E5

E5: a mí me mandan tareas y también me dan por el celular.

E4: igual que a mi

E5: a mí también, hasta me mandan las tareas por el celular.

P1: hummmm

E3: es igualito a estas hojas, pero lo hacen para que quede para uno abrirlas así.

P1: y E2 ¿cómo ve las clases?

E2: en el celular.

Como se menciona en el diálogo anterior, debido al confinamiento por el covid-19 los estudiantes manifiestan que para seguir con sus clases escolares los profesores utilizan estrategias como: ver las clases de manera virtual por medio de computadores, tablet o celular, así como también de trabajos que los docentes envían a los estudiantes en fotocopias para que puedan realizarlos en casa y devolverlos en determinado tiempo.

3.4 Estructura general de la Propuesta de aula

En la selección de las actividades, para la realización de la propuesta de aula se tuvo en cuenta el libro de Ifrah (1987) “*las cifras, una gran invención*”, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas MEN (1998), los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), el trabajo de Norma Lorena Vásquez, (2010) y Encarnación Castro, Luis Rico y Enrique Castro (1987), en su libro, *Números y Operaciones Fundamentos para una aritmética escolar*.

Dentro del desarrollo de la propuesta de aula se encuentran una serie de actividades que pretenden dar un acercamiento a la noción de unidad y el principio de correspondencia para el grado Primero de Educación Básica.

3.4.1 Descripción de la secuencia

La siguiente propuesta de aula a través de una serie de actividades que se pueden observar en los anexos, en ella se pretende hacer una aproximación al número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad, en estudiantes de grado primero de Educación Básica, considerando además que éste es un eje fundamental para el desarrollo de pensamiento matemático en el niño, es así como esta propuesta está conformada por nueve situaciones didácticas denominadas de la siguiente manera:

- **Situación I.** Conteo prehistórico utilizando representaciones.
- **Situación II.** Correspondencia entre la cantidad de elementos de un conjunto y los números.
- **Situación III.** Conservación de la cantidad.
- **Situación IV.** La unidad.
- **Situación V.** El sucesor de un número natural.
- **Situación VI.** Conteo y agrupación.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- **Situación VII.** Conteo de dos en dos, tres en tres hasta el número 30.
- **Situación VIII.** Vamos a formar el número 10.
- **Situación IX.** Vamos a ordenar.

En las situaciones a desarrollar se parte de la construcción de los significados del número natural en diferentes contextos, tomando como base el conteo, la agrupación, el principio de correspondencia, la noción de unidad y el orden posicional hasta llegar a una aproximación de la construcción formal del número natural a partir de la abstracción del número.

En la primera situación se pretende que los estudiantes comprendan cómo realizaban el conteo nuestros antepasados y cómo éste fue evolucionando de representaciones pictóricas, hasta las representaciones numéricas; en la segunda situación se busca que los estudiantes identifiquen la relación existente entre el número y la cantidad de elementos en un conjunto; en la tercera situación se busca que los estudiantes comprendan que a pesar del tamaño y espacio ocupado por las figuras en un conjunto estas tienen una misma cantidad de elementos, es decir, que trabajen el principio de conservación de la cantidad; en la cuarta situación se quiere que el estudiante identifique los objetos o elementos que representan una unidad; en la quinta situación se espera que los estudiantes identifiquen el sucesor y antecesor de ciertos números naturales.

En la sexta situación se busca que el estudiante realice el conteo de uno en uno de forma ascendente, descendente y mediante este conteo complete los espacios con los números que faltan; en la séptima situación se espera que el estudiante realice el conteo de dos en dos y tres en tres hasta el número treinta, de forma ascendente y descendente; en la octava situación se realiza un cambio de contexto en relación con lo que se venía trabajando, aquí se busca agrupar y desagrupar los números que se indican; en la novena situación se quiere que los estudiantes ordenen objetos de acuerdo a los tamaños (del más grande al más pequeño y del más pequeño al más grande).

Es decir, con estas situaciones propuestas, el objetivo es realizar una aproximación con los números del 1 al 10 a la noción de unidad y el principio de correspondencia a través del conteo (de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres de forma ascendente y descendente), la correspondencia uno a uno, la cardinalidad de un conjunto, el principio de conservación de la

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural cantidad, la función sucesor, la agrupación y desagrupación y el orden; las cuales de acuerdo con la propuesta de Peano (1889) son nociones fundamentales para hacer una aproximación a la formalidad del número natural.

La propuesta está conformada con actividades como: ayuda a nuestros antepasados a contar las ovejas, une con una línea el número que represente la cantidad de objetos y representa las unidades. Las actividades fueron aplicadas por medio de ejercicios de conteo, comparación, agrupación, preguntas orientadoras, justificar, relacionar, completar, reunir, ordenar, entre otros. Algunas explicaciones que se hacen en las actividades ayudan al estudiante a tener en cuenta el desarrollo de la actividad de una manera más adecuada. Además de recordarles algunos conceptos previos dentro del contexto de la actividad cuando sea necesario.

Teniendo en cuenta el interés de este trabajo de investigación, las situaciones que se implementaron comprenden actividades fundamentales que son de interés para caracterizar las ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad.

En la siguiente tabla, se relaciona la estructura general de la propuesta y las nueve partes que la conforman, con el número de situaciones, el número de actividades por situación, el nombre de cada actividad y las tareas por cada actividad.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

TABLA 1. ESTRUCTURA GENERAL DE LA PROPUESTA

Situaciones	Número de Actividades	Nombre de la actividad	Número de tareas
Situación 1: Conteo prehistórico utilizando representaciones.		Actividad 1: Conteo mediante representación gráfica y numérica.	Cuatro
Situación 2: Correspondencia entre objetos y número	Dos actividades	Actividad 1: Vamos a relacionar los objetos con los números.	Dos
		Actividad 2: Correspondencia biunívoca.	Cinco
Situación 3: Conservación de la cantidad	Una actividad	Actividad 1: Identifiquemos cantidades.	Tres

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Situaciones	Número de Actividades	Nombre de la actividad	Número de tareas
Situación 4: La unidad	Tres actividades	Actividad 1: Observa los objetos u elementos del conjunto	Dos
		Actividad 2: Diferencia el número uno (1) de la unidad.	Dos
		Actividad 3: Identificando el número como una pluralidad de unidades.	Once
Situación 5: El sucesor	Una actividad	Actividad 1: identificando el sucesor	Tres
Situación 6: Conteo y agrupación	Dos actividades	Actividad 1: Conteo.	Uno
		Actividad 2: Conteo hacia atrás y hacia adelante.	Tres

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Situaciones	Número de Actividades	Nombre de la actividad	Número de tareas
Situación 7: Conteo de dos en dos, tres en tres hasta el número 30.	Dos actividades	Actividad 1: Vamos a contar de 2 en 2 hasta el número 10 y 20.	Cinco
		Actividad 2: Avanza de 3 en 3.	Tres
Situación 8: Vamos a formar el número 10	Dos actividades	Actividad 1: Agrupar.	Una
		Actividad 2: Desagrupar.	Dos
Situación 9: Vamos a ordenar	Una actividad	Actividad 1: El orden y el número	Seis

3.4.2 Conocimientos previos por parte de los estudiantes

Es importante aclarar que los estudiantes son de primer grado, fueron seleccionados al azar, se encontraban iniciando el año escolar en zona rural. Por estas razones, en el desarrollo de las clases virtuales, los estudiantes no logran apropiarse de conceptos fundamentales, no obstante, se espera que tengan claros los siguientes conceptos previos:

- Conocimiento de los números hasta el 51.
- Conteo de 2 en 2 y 3 en 3.
- Conteo de forma ascendente y descendente.
- Correspondencia entre objetos.
- Ordenar objetos de acuerdo con el tamaño.
- Cardinalidad.
- El sucesor.

3.4.3 Análisis a priori de las situaciones

En las siguientes tablas se darán a conocer las nueve situaciones que componen la propuesta de aula (ver anexo 1), además se da cuenta del propósito de cada una junto con sus respectivas actividades, contenido matemático y las expectativas de desempeño que se espera de los estudiantes.

TABLA 2. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN I.

Situación 1. Conteo prehistórico utilizando representaciones.		
Propósito: Lograr que los estudiantes realicen el conteo a partir del número 1 hasta el número 10 utilizando la representación gráfica.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1: Conteo mediante representación gráfica.	• Representación pictórica. • Conjuntos. • Representación de cantidades. • Representación numérica del 1 al 10.	• Construir e interpretar las representaciones de la cantidad a través de conjuntos. • Representar de manera pictórica y simbólica los números del 1 al 10. • Completar la secuencia numérica de los conjuntos. • Conteo de 1 en 1.

TABLA 3. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN II.

Situación II: Correspondencia entre la cantidad de elementos de un conjunto y los números.		
Propósito: lograr que el niño establezca una relación de correspondencia entre los números naturales del 1 al 10 y la cantidad de elementos de cada conjunto.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1: Correspondencia entre objeto y número.	• Representación pictórica. • Conjuntos. • Números naturales del 1 al 10. • Correspondencia.	• Identificar correctamente los números del 1 al 10 mediante la asignación de un conjunto. • Identificar la cantidad de elementos que tienen los conjuntos.

Actividad 2. Correspondencia biunívoca.	• Conjuntos. • Relación entre elementos de dos conjuntos. • Orden entre objetos de acuerdo a su tamaño. • Correspondencia biunívoca.	• Relacionar correctamente los elementos de un conjunto con otro conjunto. • Ordenar correctamente los elementos de un conjunto de acuerdo a su tamaño (del más pequeño al más grande utilizando los números del 1 al 10).
--	---	---

TABLA 4. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN III.

Situación III: Conservación de la cantidad.		
Propósito: Lograr que los estudiantes identifiquen la conservación de las cantidades sin importar el tamaño y color		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1. Identifiquemos cantidades	• Conjuntos. • Identificación de cantidades numéricas. • Conteo de números naturales. • Conservación de cantidades.	• Identificar correctamente las cantidades entre 2 conjuntos.

TABLA 5. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN IV.

Situación IV: La unidad.		
Propósito: Lograr que el estudiante identifique el objeto u elemento que caracteriza la noción de unidad.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1. Observa los objetos u elementos del conjunto.	• Significado de unidad.	• Identificar el significado de la unidad y el número.
	• Conjuntos.	
Actividad 2: Diferencia el número uno (1) de la unidad.	• La unidad.	• Identificar la diferencia entre la unidad y el uno.
	• El número uno.	
	• Igualdad.	
	• Unicidad.	
Actividad 3: Identificando el número como una pluralidad de unidades.	• Conjuntos.	• Identificar correctamente la cantidad de unidades que conforman los conjuntos.
	• Unidad.	
	• Pluralidad.	
	• Función sucesor.	

TABLA 6. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN V.

Situación V: El sucesor Propósito: lograr que el estudiante identifique que cada número natural tiene un sucesor partiendo desde el número uno.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1: identificando el sucesor	• Conteo de números naturales.	• Identificar el sucesor de un número natural.
	• Adición de números naturales.	
	• Sucesor de un número natural.	

TABLA 7. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN VI.

Situación VI: Conteo y agrupación Propósito: Lograr que el estudiante realice una construcción del número en diferentes contextos.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1. Conteo	• Números naturales.	• Realizar el conteo de uno en uno para llegar a una respuesta.
	• Conteo de uno en uno.	
	• Adición de números naturales.	

Actividad 2. Conteo hacia atrás y hacia adelante.	• Números naturales. • Adición de números naturales. • Resta de números naturales. • Conteo de números naturales.	• Identificar la cantidad de objetos que representa cada número. • Contar y completar los espacios de forma ascendente y descendente. • Realizar el conteo de 1 en 1 hacia atrás y hacia adelante.
--	--	--

TABLA 8. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN VII.

Situación VII: Conteo de dos en dos, tres en tres hasta el número 30. Propósito: lograr que el estudiante realice el conteo de dos en dos de forma ascendente y descendente hasta el número 20 y 30.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1: Vamos a contar de 2 en 2 hasta el número 10 y 20	• Conteo ascendente y descendente de números naturales. • Adición de números naturales.	• Realizar conteos de 2 en 2. • Completar la secuencia numérica iniciando en 2 de forma ascendente. • Completar la secuencia de 2 en 2 de forma descendente.
Actividad 2. Avanza de 3 en 3, desde el número 3 hasta el número 30.	• Conteo ascendente y descendente de números naturales. • Adición de números naturales.	• Realizar el conteo de 3 en 3. • Completar la secuencia numérica contando de 3 en 3, de forma ascendente y descendente.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

TABLA 9. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN VIII.

Situación VIII. Vamos a formar el número 10 con diferentes números.		
Propósito: Lograr que el estudiante identifique los números con los cuales se puede componer y descomponer el número 10.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño
Actividad 1. Agrupar	• Adición de números naturales. • Conteo de números naturales. • Composición de números naturales.	• Identificar los números del 1 al 9 que pueden componer el número 10.
Actividad 2 Desagrupar	• Adición de números naturales. • Conteo de números naturales. • Descomposición de números naturales.	• Identificar los números del 1 al 9 que pueden componer los números 10, 8, 6, y 4.

TABLA 10. ANÁLISIS A PRIORI DE LA SITUACIÓN IX.

Situación IX. Vamos a ordenar		
Propósito: Lograr que el estudiante identifique el orden y el significado del número.		
Actividades	Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño

Actividad 1. El orden y el número.

- Ordinalidad.
- Números naturales.
- Posición.
- Secuencia numérica de números naturales.
- Orden.
- Utilizar los números ordinales para indicar la posición y orden de los objetos.
- Ordenar correctamente los números de mayor a menor y de menor a mayor.

En las anteriores tablas se muestra cada una de las situaciones con el nombre de cada actividad, los contenidos matemáticos y las expectativas de desempeño que tiene la propuesta de aula.

4. Capítulo IV

Análisis y consideraciones finales

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos en la implementación de la propuesta de aula, junto con los análisis y conclusiones asociadas. Para el desarrollo de la propuesta de aula se implementaron las nueve situaciones debido a que cada una de ellas hace un acercamiento al objetivo de esta propuesta.

4.1 Resultados y análisis de la implementación de la propuesta

En la aplicación de la propuesta de aula, participaron cinco estudiantes de la zona rural. El desarrollo de la propuesta se llevó a cabo de forma individual, en la que se realizaba una retroalimentación al inicio de cada actividad, con explicaciones y preguntas previas al desarrollo de la misma. En el transcurso de la prueba se recopilaron diversos registros como: fotografías, videos en los que se evidencian algunas interacciones entre los estudiantes y en otros el trabajo individual, material escrito con las respuestas de los estudiantes y descripciones escritas de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver las actividades.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

4.2 Estrategias empleadas por los estudiantes en el desarrollo de las actividades

En este apartado se evidencian algunas de las estrategias empleadas por los estudiantes en el desarrollo de las situaciones 1, 2, 3 y 4 de la propuesta de aula, que alude a la noción de correspondencia y a la noción de unidad de los números naturales en Grado Primero de las Instituciones Educativas La Milagrosa, La Tello y Bajo San Francisco.

Situación I. Conteo prehistórico utilizando representaciones.

Actividad 1. Conteo mediante representación gráfica y numérica.

Tarea 1. Dibuja las ovejas dentro de los conjuntos, de acuerdo con la cantidad de rayas que aparece en la parte inferior de cada conjunto:

En esta tarea el estudiante tenía que dibujar una cantidad de ovejas de acuerdo a las rayas indicadas debajo de cada diagrama.

En esta tarea se pudo evidenciar, como se muestra en la imagen 1, que los estudiantes E2 y E3 realizaban el conteo marcando cada raya con el lápiz por medio de un punto cada vez que dibujaban una oveja.

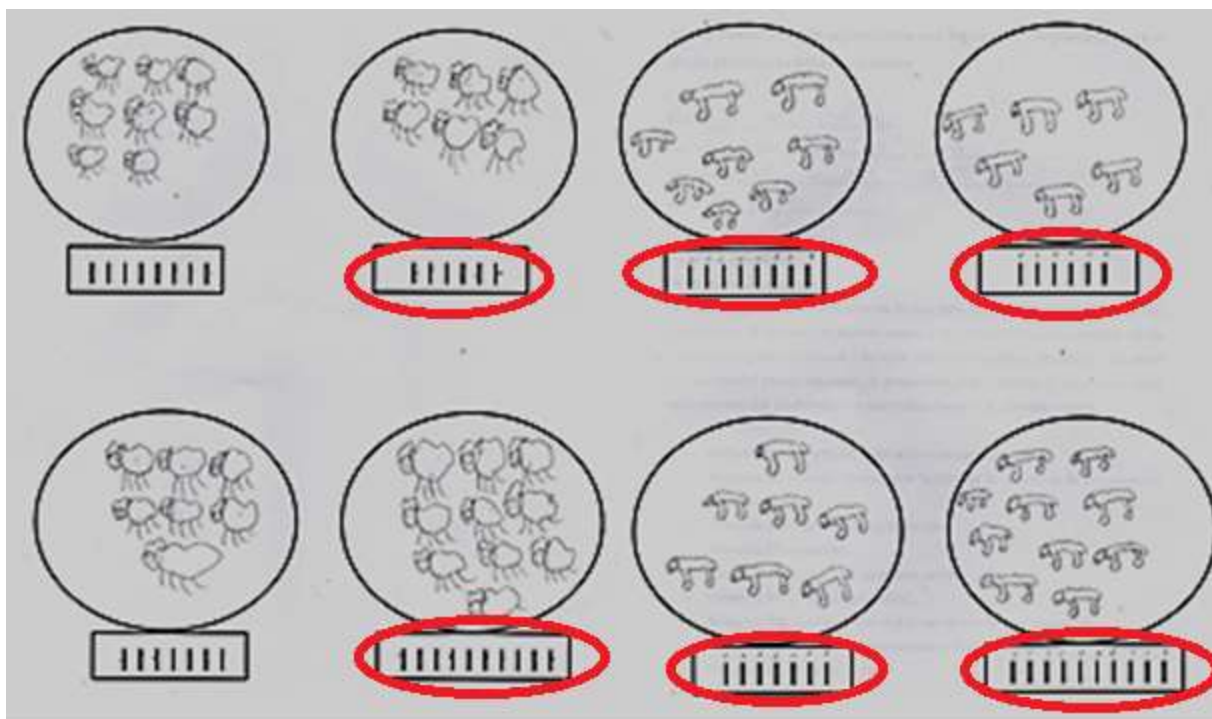


IMAGEN 1. RESPUESTA- SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 1-TAREA 1- ESTUDIANTES E2 Y E3.

Cuando el estudiante E1 llegó al conjunto en el que tenía que dibujar las 6, 7, 8, 9 y 10 ovejas, se evidenció que, al llegar a 7 ovejas, perdía constantemente la cuenta, por lo que cada que dibujaba una, realizaba el conteo de todas las que había dibujado, de esta manera no se pasaba de la cuenta.

Para el caso de los estudiantes E4 y E5 realizaban el conteo en voz alta, pero como todos contaban diferentes cantidades se confunden, para poder realizar su actividad un estudiante decidió esperar que su compañera del lado terminara su conteo y así poder continuar con el suyo.

En ese orden, se puede evidenciar que en los casos de los estudiantes E2 y E3 utilizan el principio de correspondencia uno a uno relacionando cada rayita con cada oveja, pero la necesidad de marcar con un punto, y para el caso del estudiante E1 que debía volver a contar, significa que aún no se han apropiado del principio de conservación de la cantidad.

Para los casos de E4 y E5, al hacer la correspondencia de manera oral se evidencia una dificultad para representar las cantidades utilizando representaciones gráficas. De manera que E1 alcanzó el propósito de la actividad y E4 y E5 se les dificulta utilizar una representación gráfica de la cantidad para realizar el conteo.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Tarea 2. Representa la cantidad de ovejas que ves en las imágenes utilizando rayas y dibújalas en los recuadros.

En esta tarea se le solicita al estudiante que de acuerdo a la cantidad de ovejas que hay en el conjunto, dibuje las rayitas.

Aquí se identificó que el estudiante E4, al hacer el conteo de cantidades más grandes de ovejas, se le dificulta hacer la correspondencia uno a uno entre cada oveja y su representación pictórica (raya), de manera que al finalizar le sobraron rayas, ante eso el estudiante hacía un recuento y borraba las rayas que le sobraban.

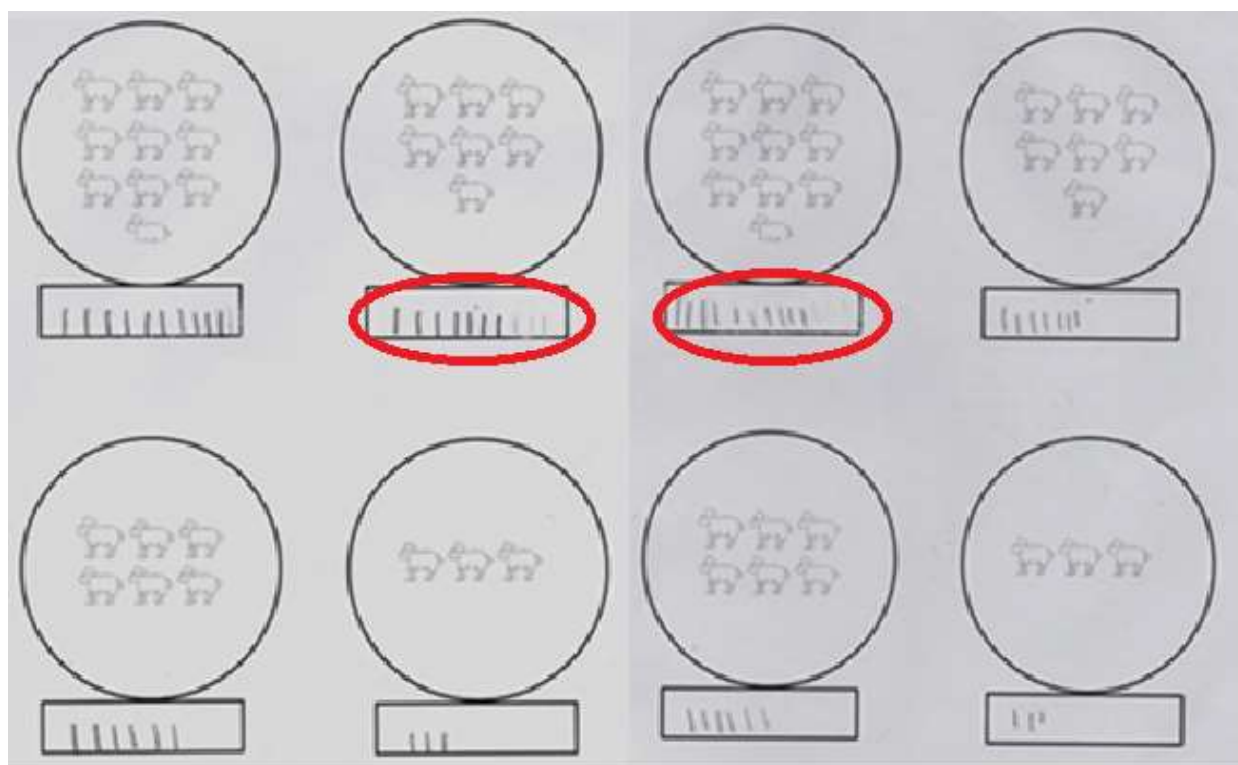


IMAGEN 2. RESPUESTA-SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTES E1 Y E4

Ahora bien, detallando esta situación se pueden inferir varias cosas. El estudiante E1 y E4 empezó a realizar esta tarea, contando las ovejas para poder representar la cantidad utilizando rayas; en esta acción se pudo observar que en las cantidades grandes como 8, 9 y 10, realizaban un recuento de ovejas y rayitas, es decir que, cuando las cantidades eran pequeñas no presentaba problema alguno, mientras que cuando estas aumentaban recurría al recuento, dibujando una

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural
cantidad de rayas determinadas, luego contaba las ovejas y si su conteo era mayor al de las rayas, procedía a dibujarlas, pero si la cantidad de rayas era mayor las borraba.

Los demás estudiantes contaban las ovejas y procedían a dibujar las rayas sin ninguna dificultad, estos utilizaban el principio de correspondencia uno a uno, relacionado cada oveja con cada rayita; para el caso de los estudiantes E1 y E4, se puede decir que se les dificulta retener mentalmente las cantidades grandes, por lo tanto, no tiene una apropiación del principio de conservación de la cantidad.

De esta manera, se puede decir que los estudiantes E2, E3 y E5 lograron a través del principio de correspondencia, hacer la representación pictórica de la cantidad de elementos de un conjunto de 10 elementos que no necesariamente estaba ordenado. Y que los estudiantes E1 y E4 también lo logran, pero haciendo el recuento, lo que significa que requiere afianzar el principio de correspondencia uno a uno y el principio de conservación de la cantidad.

Tarea 3. Dibuja las rayas de acuerdo con el número y escribe el número de acuerdo con la cantidad de rayas.

En esta tarea el estudiante debe identificar la cantidad de rayas que hay en el conjunto y escribirlos mediante la representación numérica.

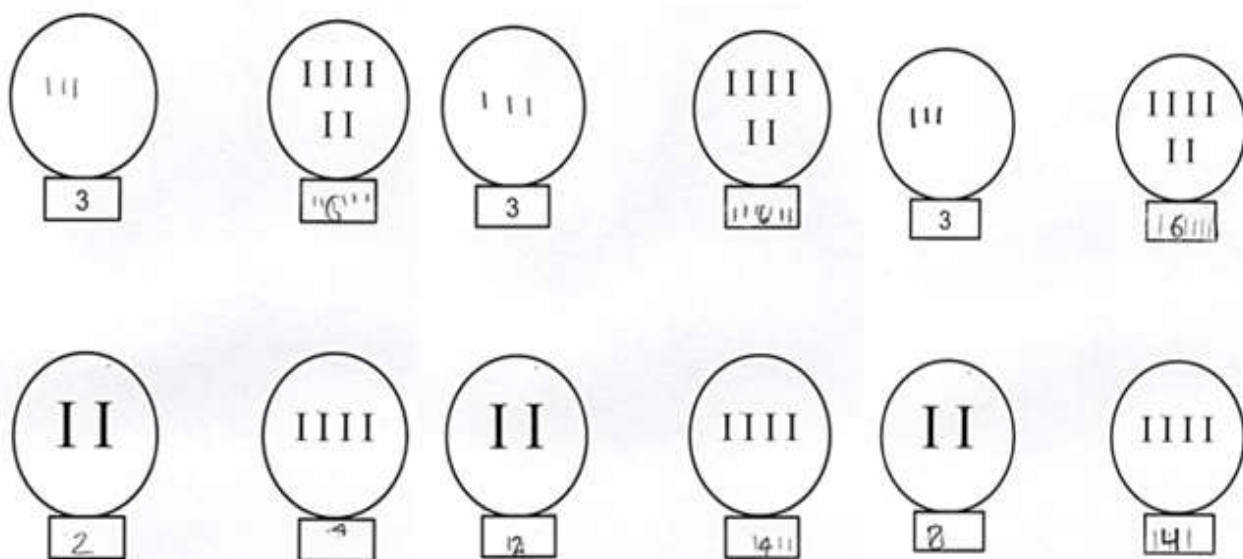


IMAGEN 3. RESPUESTA- SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 1- TAREA 3- ESTUDIANTES E1, E2 Y E5

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Aquí se evidenció que los estudiantes E1, E4 y E5, cuando iniciaron la tarea en la que tenían que escribir el número de acuerdo con la cantidad de rayas en el rectángulo ubicado en la parte inferior de cada conjunto, dibujaron la misma cantidad de rayas que se encontraban en éste, como se observa en la imagen 3, es decir con la representación del conjunto de las seis rayas, el estudiante dibujó nuevamente las seis rayas. Esto significa que el estudiante intentó utilizar la estrategia del ejercicio anterior y se le dificulta el paso de la representación pictórica a la numérica. No obstante, al resolver los otros puntos de esta tarea, E1, E4 y E5 caen en cuenta que es necesario hacer la representación numérica, entonces, borran y escriben el número seis.

Los estudiantes E2 y E3, no presentaron dificultades en la realización de la tarea, de acuerdo con lo anterior se puede afirmar que éstos estudiantes logran avanzar de la representación pictórica de una cantidad a la representación numérica, en la que se evidencia la posibilidad de que el estudiante pueda hacer el paso de lo pictórico a lo abstracto, a través de la representación numérica de la cantidad; mientras que los estudiantes E1, E4 y E5 inicialmente no comprendieron el propósito de la tarea, pero finalmente lo lograron.

Tarea 4. Completa la secuencia con el número que falta.

En esta tarea se le solicita al estudiante que realice la secuencia completando los números que hacen falta.

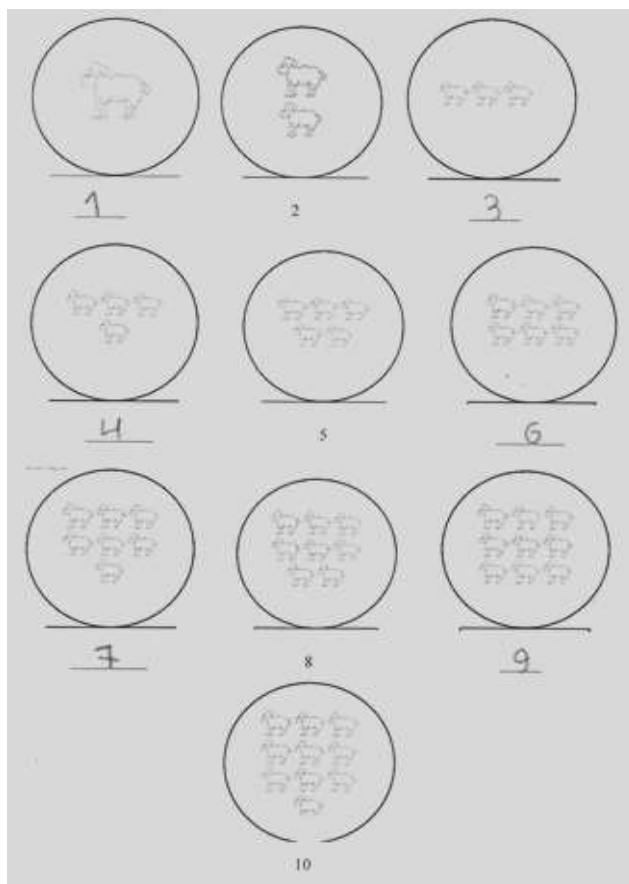


IMAGEN 4. RESPUESTA- SITUACIÓN 1- ACTIVIDAD 1- TAREA 4

Aquí se pudo evidenciar que los estudiantes no presentaron ningún tipo de dificultades para la realización de la tarea, pues lograron identificar qué número corresponde a la cantidad de elementos de cada conjunto de ovejas, de esta manera se puede afirmar que los estudiantes pueden hacer el paso de lo concreto a lo abstracto a través de la representación numérica de la cantidad, es decir hacen un acercamiento a la noción de número como una representación de la cantidad y al número como cardinal de un conjunto.

Situación II. Correspondencia entre la cantidad de elementos de un conjunto y los números.

Actividad 1: Relacionando el número con el objeto.

En las tareas 1 y 2 de esta actividad se le pide al estudiante que realice una relación entre la cantidad de objetos que observa y el número que le corresponde, para dar paso a la correspondencia biunívoca en la actividad número 2.

Relación del número con el objeto

En el desarrollo de esta tarea, cuando el estudiante debe identificar una relación entre el número y los elementos de los conjuntos que se proponen en esta, se observaron los siguientes resultados:

Tarea 1. Cada hongo tiene una cantidad determinada de bolitas azules, una con una línea el número que represente la cantidad de bolitas en cada hongo. A continuación, se describe un fragmento de la tarea en la que interactúan el docente y los estudiantes:

P2: ¿Qué creen ustedes que hay que hacer aquí?

E4: ¡Unir!

P2: ¿Unir qué?

E4: Los números con esto, (señala con el dedo) con estas bolitas azules.

P1: ¿Y por qué cree que hay que unir?

E4: Porque acá (toca la hoja y explica) están los números y acá tenemos que contar.

E3: (Dice a E4) diga “diga aquí está digamos el 3 y ahí el 3”

E4: (Muestra con el dedo) digamos que aquí hay 3 y acá está el 3.

E5: Toca hacer así (mueve la mano de lado a lado) una línea por donde está arriba.

P1: Eso es lo que se llama correspondencia, lo que yo les explicaba con los colores, si tengo 5 niños y 5 colores a cada uno le corresponde un color. Acá sí tengo una bolita y el número 1, al número 1 le corresponde una bolita. ¿Al número 4 cuántas le corresponden?

E1: Al 4 cuatro aquí (muestra con el dedo).

E3: Aquí (toca con el dedo) cuatro bolitas.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

P1: Unimos el hongo con la cantidad de bolitas que le corresponde.

Todos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ... (cuentan en voz baja, para relacionar las bolitas con el número).

En este fragmento de la tarea que describe la interacción de los estudiantes y el profesor, se pudo observar que la mayoría de los estudiantes logran identificar al número como una representación de los elementos de un conjunto y hacer la correspondencia biunívoca, pero sólo cuando se trata de cantidades pequeñas (del 1 al 5), pues a medida que el número de objetos aumenta hasta el número 10 presentan dificultades. Una de las razones puede ser que, en la tarea propuesta, tanto los números como los objetos (bolitas azules de los hongos) se encuentran de manera desordenada; sin embargo, a pesar de ello también se logró identificar que algunos estudiantes, iniciaron el conteo en voz alta de forma ordenada 1, 2, 3... y así sucesivamente fueron relacionado desde el número menor hasta el número mayor con la cantidad de bolitas azules.



IMAGEN 5. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTES E1, E4 Y E5



IMAGEN 6. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1-TAREA 1- ESTUDIANTES E2 Y E3

En el caso de las estudiantes E1y E3 al establecer una relación de correspondencia entre el número y el objeto, primero cuentan señalando con el dedo (haciendo una correspondencia) las bolitas azules dibujadas en cada hongo y luego buscan el número correspondiente a esa cantidad; es decir como el primer óvalo tiene 8 bolitas, después de contarlas buscan el número 8 dibujado en el hongo, para posteriormente relacionarlos con una línea (correspondencia entre en número y la cantidad de bolitas azules). Realizan la tarea de acuerdo con el orden propuesto hasta terminar, lo que significa que pasaron por alto el orden de los números naturales del 1 al 10 y, por otro lado, al indicar contando las bolitas azules y luego identificándolas con el número y no al contrario como estaba propuesto en la tarea; significa que naturalmente los estudiantes E1y E3 pueden pasar de lo concreto a lo abstracto, pero se les dificulta ir de lo abstracto a lo concreto debido a que, al realizar la tarea para ellos resultó más fácil contar primero lo concreto (las bolitas azules) y de acuerdo con la cantidad encontrada proceden a buscar la parte abstracta, es decir, el número correspondiente. Contrariamente al realizar la tarea iniciando desde lo abstracto (el número) para llegar a lo concreto (las bolitas azules en este caso) los estudiantes mencionados anteriormente presentan dificultad debido a que no logran establecer una relación de correspondencia entre el número y el objeto.

Para el caso de E5, realiza el conteo de las bolitas de manera aleatoria, y busca el número correspondiente para unir con una línea la relación entre éstos, por lo que en determinado momento cuando realiza el conteo del óvalo que tiene 4 bolitas, como ya le quedan pocas opciones para relacionarlas, en su afán de terminar cuenta en lugar de 4, 5 bolitas y las relaciona

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural con el número 5, pero al momento de asignar un número al óvalo que tiene 5 bolitas, se percata de que tuvo un error y decide volver a contar exclamando: ¡ay me equivoqué! y corrige la tarea. Aquí se puede evidenciar que E5 no tiene una apropiación del orden de manera que al realizar la tarea de manera aleatoria presenta dificultades en el conteo, la correspondencia, la cardinalidad de un conjunto, por tanto, se confunde al relacionar el número con el objeto.

Los estudiantes E2 y E4 realizan el conteo siguiendo el orden de los números y no del objeto, puesto que primero buscan el número más pequeño empezando por el hongo que tiene el número 1 y luego buscan el óvalo con una bolita para hacer la relación, para E2 es fácil realizar la relación cumpliendo con el propósito de la situación, estableciendo una relación de orden del número con el objeto, pero E4 deja sin relacionar el óvalo que tiene 3 bolitas y el hongo que tiene el número 7. Aquí se pudo evidenciar que E4 no tiene una correcta apropiación del conteo, motivo por el cual decide revisar el ejercicio y se da cuenta de que confundió una relación donde unió el hongo con el número 3 y el óvalo con 7 bolitas, es allí donde se percata de su error y acomoda la tarea.

Tarea 2: Marca con una x el número que represente la cantidad de objetos que componen cada conjunto y colorea los dibujos.

En el proceso de la realización de esta tarea, cuando el estudiante debe hacer la relación entre el número y el objeto, en algunos casos se observaron los siguientes resultados:

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

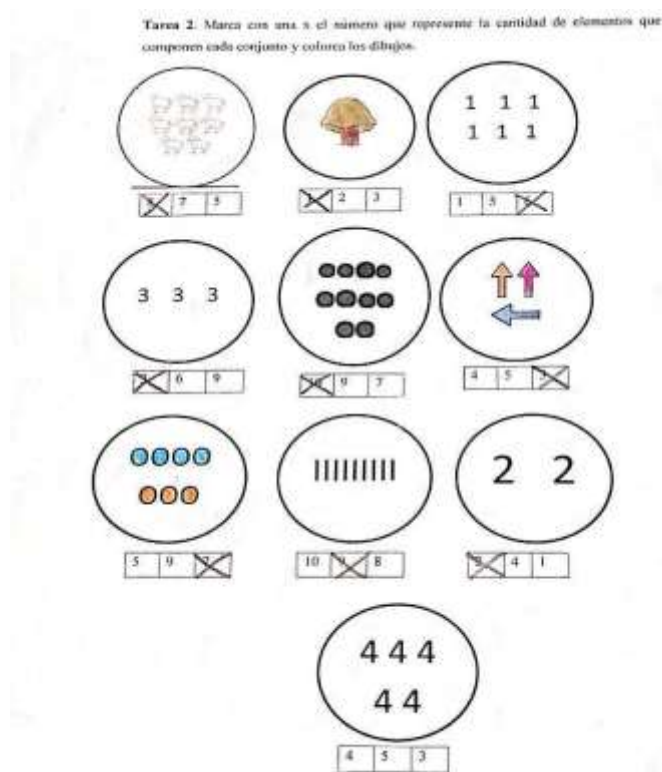


IMAGEN 7. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTE E4

En el siguiente fragmento se puede observar las evidencias de la aplicación de la actividad.

P2: ¿Qué creen ustedes que hay que hacer aquí? según lo que observan.

P1: Levantan la mano ¿a ver quién quiere hablar?

E2:(Levanta la mano, se pone de pie y dice) lo que hay que hacer aquí, es que por ejemplo depende ¿cuántos objetos hay acá? entonces acá hay 3 (señala con el dedo el conjunto que tiene tres elementos), entonces así con una x y así con los demás, acá hay 1,2,3,4, acá hay 8 más 2, 10, entonces tacha con una x el 10 y así.

P1: ¿Y ustedes qué creen que hay que hacer?

Todos: ¡Lo mismo!

P1: ¿Están de acuerdo?

E3: Porque digamos que ahí hay 3 y toca que tacharle 3, aquí (señala con los dedos el conjunto)

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E4: Entonces como ahí hay 4, entonces acomodaría el número 4 y como acá hay (señala con el dedo) ...4, 5, 6, 7 y 8 ¡ahí hay 16! Pero no está en las respuestas.

P1: ¿Dónde?

P2: Es que él está contando 4, 8, 12...

E3: ¡Ah, pero no es así !

P1: ¿Por qué?

E3: Porque no depende de cuántos hay aquí digamos $4+4=8$ ¡no!, tiene que contar 1,2,3,4,5 y aquí está el 5.

E2: Tiene que contar cuántos números cuatro hay.

En la tarea anterior al momento en que los estudiantes debían relacionar la cantidad de objetos con el número correcto, se pudo observar que todos los estudiantes pueden identificar los elementos de un conjunto para representarlos con números del 1 al 10 haciendo una correspondencia entre el número y el objeto, pero cuando se involucran números dentro de un conjunto para ser contados como elementos, como en el caso de los números 2, 3 y 4, el estudiante E4 los suma, porque para él el número representa una cantidad y no identifica el número como un elemento de un conjunto.

Además, cuando el número se repite varias veces (como el 4 que está 5 veces dentro del conjunto), el estudiante E4 empieza a contar los números a partir del cuatro (4,5,6,7,8,9...16) sumándolos; es decir, en lugar de identificar que el cuatro es un elemento del conjunto y que se repite cinco veces, hace una suma de estos elementos y el resultado de la suma es 16, pero este resultado además de ser incorrecto, porque sería 20, no está dentro de las opciones de respuesta.

Por otro lado, aunque el objetivo de la actividad no era que los estudiantes sumaran los números, se observa un error en el resultado de la suma que realizó el estudiante E4, debido a que el estudiante cuenta solo 4 veces el cuatro y no cinco, lo que evidencia que no tiene una apropiación del principio de conservación de la cantidad, además se le dificulta la posibilidad del conteo por agrupación de términos, en este caso contar de cuatro en cuatro hacia adelante.



IMAGEN 8. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTES E2 Y E3

En la imagen anterior se muestra que la estudiante E3, mientras señala con el dedo menciona que no deben sumarse los 5 números cuatro dentro del conjunto porque, según él no depende de cuántos hay aquí, digamos $4+4=8$ ¡no!, tiene que contar 1,2,3,4,5 y aquí está el 5”, o lo que E2 dice a E4: Tiene que contar cuántos cuatro hay. De ello puede decirse que E2 y E3 identifican el número 4 como elemento de un conjunto.

Ante esto el estudiante E4 prefiere no responder el ejercicio. Pero la estudiante E2, le explica que no hay que sumar los números, sino que hay que contar cuántos hay, en este caso hay cinco cuatros y marcar en las opciones de respuesta. Por último, se puede identificar que el estudiante E4 presenta una dificultad para identificar la cantidad de elementos que tienen los conjuntos, es decir para identificar el cardinal de un conjunto.



IMAGEN 9. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTES E2 Y E3



IMAGEN 10. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTES E1 Y E5

En el caso de las estudiantes E1 y E3 para realizar el conteo de los objetos lo hacen utilizando la punta del lápiz para contar cada objeto y no perder la cuenta haciendo la correspondencia con el número, sobre todo cuando se trata de objetos pequeños en tamaño (como las líneas) pero que son grandes en cantidad, lo que deja ver que tienen una dificultad en la conservación de la cantidad, pero aun así identifican la cantidad de objetos que tiene un conjunto, estableciendo una relación de correspondencia entre el número y el objeto.

Para el caso de los estudiantes E2 y E5 al realizar el conteo de los objetos, lo hacen en voz alta contando los objetos uno a uno para llevar bien la cuenta y marcar el número correspondiente, marcando con una equis el número que representa la cantidad de elementos que compone cada conjunto, mostrando una correcta apropiación en la correspondencia del objeto y el número, es decir la correspondencia entre el número y los elementos de un conjunto.

Actividad 2 correspondencia biunívoca

En esta actividad se realizan 3 tareas. En la primera tarea, los estudiantes deben relacionar los elementos del conjunto 1 con los del conjunto 2, en la tarea 2 los estudiantes deben observar los objetos que están acomodados de menor a mayor y de mayor a menor; en la tarea 3 deben relacionar los objetos (velas de diferentes tamaños) ubicadas en diferente orden de acuerdo con el número que le corresponde.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- En las dos primeras tareas los estudiantes no presentaron ninguna dificultad. A continuación, presentamos el siguiente diálogo como evidencia:

Tarea 1.a y 1.b. Relaciona con una línea cada objeto del óvalo 1 con el objeto de que le corresponda en el óvalo 2.

P1: ¿Qué es la correspondencia?

E4: La correspondencia es que está un perro ¡no! y tiene 5 perros y tenemos 5 galletas y a cada uno le damos una galleta.

P1: ¡Eso! y no sobra nada ¿o sí?

E4: No

E3: No sobra.

P1: ¿Cómo creen que podemos relacionar los objetos?

E4: El pescado va en el lago (señala con el dedo), el lápiz va con el cuaderno...

P1: ¿Al pez le corresponde el libro?

E4: ¡No!

P1: ¿Por qué?

E4: Porque él es un pez y el libro tiene hojas, no tiene agua.

E3: Si tuviera agua se hubiera mojado.

P1: ¿y por qué agua?

E2: porque ahí viven los peces.

E3: ¡Muy fácil!

E4: En la que sigue es color con color.



IMAGEN 11. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2 TAREA 1.A- ESTUDIANTE E1

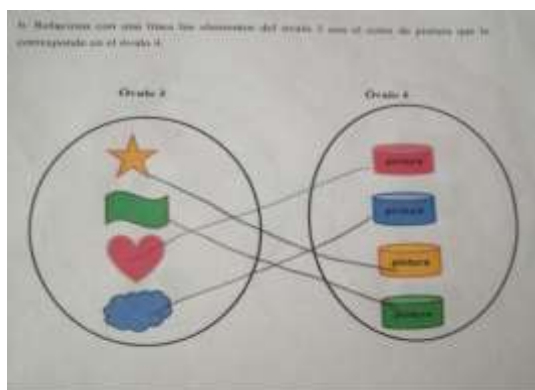


IMAGEN 12. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2- TAREA 1. B- ESTUDIANTE E5

En ambas tareas los estudiantes realizan la correspondencia biunívoca de forma correcta, estableciendo una relación de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos. Los estudiantes realizan una relación de los objetos del primer óvalo con los del segundo, de acuerdo con el contexto que emplean en la vida cotidiana, pues ellos hacen referencia a que el pez pertenece al agua, la cuchara se relaciona con el plato de comida y el lápiz sirve para escribir en el cuaderno. Los estudiantes relacionan los objetos del óvalo 3 con los objetos del óvalo 4 de acuerdo con cada color correspondiente, donde se puede observar que todos los estudiantes logran establecer una relación de correspondencia biunívoca entre los objetos de ambos conjuntos.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Tarea 1.c. Identifica dentro del círculo las manzanas que tienen el mismo color, recórtalas y ubícalas pegándolas dentro del árbol de manzano que le corresponde.

Antes de desarrollar la tarea se hizo un diálogo para identificar los conocimientos previos del estudiante, como se muestra a continuación:

P1: ¿Qué colores de manzanas hay?

Todos: verde, rojas y amarillas.

P1: Aquí seguimos trabajando la correspondencia, entonces en el árbol de manzano verde ¿qué debo hacer allí?

E2: Recortar las manzanas y pegar las verdes.

E3: Sí

P1: Acá dice árbol de manzano amarillo.

E3: Sí, entonces pegamos las amarillas.

P1: y un árbol de manzano rojo.

E2: Entonces hay que pegar las rojas.

P2: ¿Cuántas manzanas amarillas hay?

Todos: 5

P2: ¿y verdes?

Todos: 4

P2: ¿y rojas?

Todos: 6

P1: ¿Quién tiene más manzanas?

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E2: El rojo

Los demás: El rojo

P1: ¿Quién tiene menos manzanas?

E2: El verde

E3: Cuatro y el 5 es intermedio.



IMAGEN 13. SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2- TAREA 1.C

En esta actividad los estudiantes observan las manzanas que hay dentro del conjunto, cuentan cuántas hay y posteriormente las ubican en el árbol correspondiente, de acuerdo con cada color. De esta manera, se evidencia que los estudiantes realizan una correspondencia biunívoca entre los elementos de cada conjunto. También se evidencia que identifican una relación de orden entre los elementos de cada conjunto, esto se puede ver en las respuestas de los estudiantes E2 y E3 como se muestra a continuación:

P1: ¿Quién tiene más manzanas?

E2: El rojo

Los demás: El rojo

P1: ¿Quién tiene menos manzanas?

E2: El verde

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E3: Cuatro y el 5 es intermedio.

Ante la pregunta ¿quién tiene más y menos manzanas?, voluntariamente la estudiante E3 afirma que el árbol de manzano amarillo es intermedio porque no tiene más ni menos manzanas que los demás árboles, debido a que tiene 5 manzanas. De acuerdo con esta afirmación, la estudiante E3 no tiene en cuenta que el árbol amarillo tiene más manzanas que el árbol verde y menos que el árbol rojo. Aquí nos damos cuenta de que la estudiante E3 presenta una dificultad para ordenar una cantidad en comparación con otras dos cantidades. Finalmente, la palabra intermedio que usa la estudiante alude la relación de “separar” dos cantidades y no de ser mayor que y menor que, es decir la relación “estar entre”.

En la siguiente tarea se realizó un diálogo con los estudiantes en el que ellos identifican el orden de los objetos y el número que le corresponde.

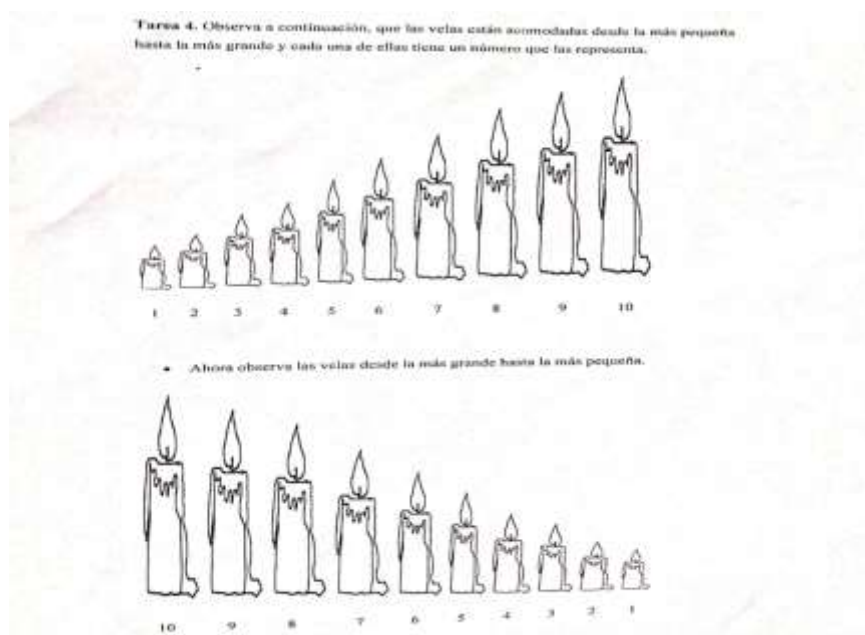


IMAGEN 14. SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2- TAREA 2

Tarea 2. Observa a continuación, que las velas están acomodadas desde la más pequeña hasta la más grande y cada una de ellas tiene un número que las representa.

A continuación, se muestra un fragmento de la interacción con los estudiantes en la que se explica la imagen 14.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

P1: ¿Qué observan aquí? (Señalando la imagen 14)

E5: Uno pequeño, uno mediano y uno grande.

Los demás: mmmmmmm

E2: Del más pequeño, del más pequeño al más grande y del más pequeño al más grande. Del más pequeño al más grande y del más grande al más pequeño.

E3: ¡Ahhhh! entonces, el grande va con el chiquito, este va con este, y así.

P1: Ahora vamos a trabajar la correspondencia y el orden, entonces como en el colegio que les hacen fila, cuando van a entrar a clases.

Varios: ¡Ahh! sí, sí.

P1: Les dicen, se van a formar del más pequeñito al más grande, por orden de estatura, así están las velas, vea de la más pequeña hasta la más alta, la más grande, entonces cada velita tiene un número debajo.

E3: Uno

Todos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

E4: Los primeros van adelante y los más grandes van más atrás ¿cierto?

P1: ¡Eso sí! muy bien, entonces acá dice: observa las velas que están acomodadas desde la más pequeña hasta la más grande y cada una tiene un número que la representa; la más pequeña tiene el número 1, la que le sigue el número 2, la que le sigue 3 y así hasta el 10, y aquí es al contrario desde la más grande hasta la más pequeña.

E4: Hasta la más pequeña.

P1: Hasta la más pequeña, la más grande tiene el número 10 porque ella es la más grande, así como acá mire (señala en la hoja la vela grande). Así como acá la más pequeñita tiene el número 1, sino que están desde la más grande hasta la más pequeña. Entonces acá si vamos a trabajar, entonces acá dice: Escribe en la casilla - ¿Ustedes saben que es una casilla?

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Varios: No.

E2: Un cuadro.

P1: Eso, estos cuadritos que están acá. Escribe en la casilla debajo de cada vela el número que le corresponde de acuerdo con su tamaño. Entonces ¿cuál llevaría el más pequeño?

E3 y E2: número uno (señalan en la hoja la vela más pequeña).

P1: Esperen yo le pregunto a E4, ¿Cuál llevaría el número 10?

E4: (Señala con el dedo la más grande), Esta

P1: ¿Por qué?

E4: Porque es la más grande

P1: ¿Cuál sería la número 2?

E4: Esta (señala con el dedo)

P1: ¿Por qué esa?

E4: Porque es la más mediana.

Varios: No, no, esta de aquí (señalan con los lápices).

P1: ¿Por qué ésta, E5?

E5: Porque essss un poquito grande.

P1: Porque es un poquito más grande que el número uno, entonces esta que vendría siendo (señala la vela 3).

E5: La número tres.

P1: ¿Y esta?

E5: ¿La número cuatro?

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

P1: Si, muy bien, entonces vamos a mirar desde la más pequeña y las vamos a enumerar.

E3: (señala) uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.

P1: Bueno

E3: ¿Entonces toca que colocar los numeritos donde están las velas?

P2: Debajo de cada velita.

E1: ¿Va así cierto?

P1: ¿Después de esta sigue esta?

E1: Ujummm

P1: ¿Esta velita es más pequeña que esta o más grande? (compara las velas)

E1: Más grande

P1: ¿Entonces cuál va primero?

E1: Esta (señala)

P1: ¿Después de esta, cual es más pequeña, después de esta cuál es más grande?

E1: Esta (señala la vela número 2)

P1: Entonces esta (vela número 2) es la que le sigue, esta ya es más grande (vela número 3)

E4: ¿Así?

P2: ¿Para ti cuál es la más pequeña?

E4: Esta (vela número 5)

P2: ¿Después de esta?(vela número 4)

E4: Esta (vela número 5)

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

P2: ¿Cuál está más grandecita que esta? (señala con el dedo vela número 4)

E4: Ésta, (señala vela número 5) aaaaa ya entendí, ósea que esta malo (borra).

P1: ¿Por qué hay un 4 aquí, y aquí hay otro?

E3: ¡Ah! no aquí es un ocho.

P1: Mira esta velita y esta ¿Cuál es más grande esta o esta?

E1: Esta (compara velas 5 y 6)

P1: ¿Entonces cuál es más pequeña de las 2?

E1: Esta (señala vela número 5)

P1: Entonces ¿Cuál va primero?

E1: Esta (señala vela número 5)

P1: Ujummm.

Tarea 3. Escribe en la casilla debajo de cada vela el número que le corresponde de acuerdo con su tamaño.

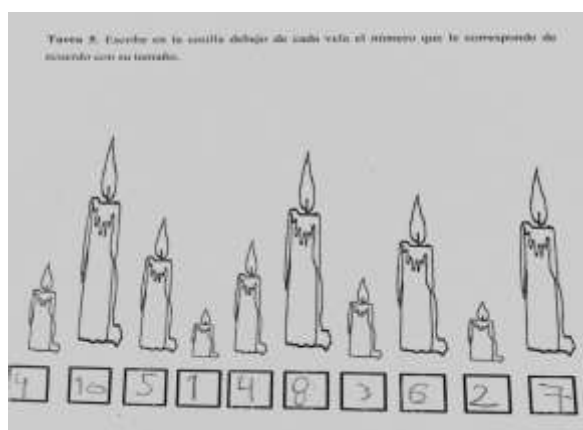


IMAGEN 15. RESPUESTA- SITUACIÓN 2- ACTIVIDAD 2- TAREA 3- ESTUDIANTES E1 Y E5

Ahora bien, cuando los objetos no están ubicados de manera ordenada como se presenta en la imagen 14 y se presentan de manera aleatoria como se muestra en la imagen 15 de la tarea

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

3, de este modo algunos estudiantes presentan dificultades. Por ejemplo, E1 y E5 no lograron hacer la correspondencia de manera correcta, dado que confundieron la ubicación de los números, esto significa que a los estudiantes se les dificulta ordenar correctamente objetos de acuerdo con su tamaño, del más pequeño al más grande utilizando los números del 1 al 10.

En el caso del estudiante E2, para realizar la correspondencia del número con el objeto, empieza a comparar desde la vela más pequeña asignándole el número 1 y sigue comparando las velas para ver cuál es la siguiente, ordenando correctamente los elementos de acuerdo con el tamaño, del más pequeño al más grande utilizando los números del 1 al 10. Lo que evidencia que tiene una apropiación adecuada del principio de orden de los números naturales del 1 al 10.

Para los estudiantes E1, E3 y E5 cuando empiezan a comparar las velas confunden algunos tamaños de manera que la correspondencia del número con el objeto se les dificulta en algunas ocasiones, lo que deja ver que los estudiantes no tienen una adecuada apropiación del orden de los objetos de acuerdo con su tamaño y por ende de la correspondencia del número y el objeto.

Por su parte E4 al realizar la correspondencia, utiliza como estrategia asignar el número 1 a la vela más pequeña y el número 10 a la vela más grande para ordenar los objetos de menor a mayor; pero de ahí en adelante solamente logra ordenar los números que corresponden al tamaño de los objetos hasta el número 4, como se muestra en la imagen 15; de ahí en adelante confunde la correspondencia biunívoca y asigna nuevamente el número cuatro a otro objeto que para él tienen un tamaño similar y así sucesivamente se confunde en las siguientes casillas. Esto evidencia que el estudiante puede identificar el orden de los objetos según su tamaño en los que la diferencia entre ellos es notable, pero para aquellos en los que la diferencia es pequeña, se le dificulta identificar cuál es el más grande y cuál es el más pequeño.

Situación III. Conservación de la cantidad.

Actividad 1. Identifiquemos cantidades

Tarea1. a. Observa los rectángulos 1 y 2 ¿tienen igual cantidad de velas?, si es así pinta las velas de ambos rectángulos del mismo color, si no es así píntalas de diferentes colores.

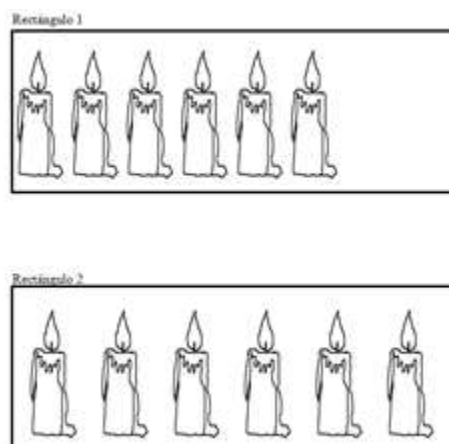


IMAGEN 16. SITUACIÓN 3- ACTIVIDAD 1- TAREA 1

En esta tarea se puede observar que algunos estudiantes presentan dificultades al momento de identificar la conservación de la cantidad en las tareas propuestas, una evidencia de ello se puede observar en la siguiente conversación:

P1: ¿Los rectángulos 1 y 2 tienen igual cantidad de velas?

E4: ¡No! porque, es que el de abajo tiene...está ocupado no tiene más espacio y el de arriba tiene menos porque si tiene un poquito de espacio.

P1: ¿Qué dice E3?

E3: Estos están separados, por eso es por lo que esto está más junto y por eso es que tiene más espacio.

P2: Pero la cantidad que ¿es la misma o es diferente?

E3: (El estudiante cuenta con los dedos) 1,2,3,4,5,6... 1,2,3,4,5,6... son los mismos.

P1: A ver ¿qué dice E1? ¿Dónde hay más?

E1: ummm ¿abajo?

P1: ¿Por qué? pero sin contar, ¿por qué hay más?

E1: Porque el de arriba tiene 5 y el de abajo tiene 6.

P1: Qué dice E5 ¿dónde hay más?

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E5: Acá abajo (señala con el dedo)

P1: ¿Por qué?

E5: Porque... ¿el de arriba? ¿5?

P1: A ver cuente yo miro si hay 5.

E5: 1, 2,3,4,5,6... ahhh 6.

P1: Y el de abajo ¿Cuántos tiene?

E5: Umm 6.

P1: ¿Dónde hay más?

E5: ¿En el de abajo?

P1: ¿Por qué en el de abajo?

E5 Está lo mismo.

P1: ¿Qué dice E2?

E2: En ninguno de los dos porque tienen la misma cantidad, solo que esta está un poquito más separada y esta está más junta, pero en realidad está la misma cantidad en ambos rectángulos.



IMAGEN 17. SITUACIÓN 3- TAREA 1- ACTIVIDAD 1.A

En la conversación anterior se evidencia que a los estudiantes E1, E4 y E5, no se han apropiado del principio de la conservación de la cantidad. Es decir, para E1, el rectángulo 1 tiene

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural menos elementos que en el 2; para E4 y E5 el hecho de que el rectángulo 2 no tenga espacio porque las velas están más separadas significa que hay más elementos.

De acuerdo con la conversación anterior se puede identificar que los estudiantes E2 y E3 no presentan dificultades al momento de la identificación de estas, primeramente, ellos realizaron un conteo e identificaron que los rectángulos 1 y 2 contienen las mismas cantidades de elementos; por lo tanto, se cumplió el propósito de esta tarea.

Finalmente, la comunicación realizada en ese momento sirvió para que los estudiantes que no tenían presente este concepto pudieran aclarar sus dudas y comprendieran que era lo que realmente estaba pasando en aquella tarea.

Tarea 1. b. Cuenta los objetos del conjunto **A** y los objetos del conjunto **B**, responde en cada casilla debajo de los conjuntos ¿cuántos objetos hay?

Conjunto A

Conjunto B

3

3

Compara el conjunto A y el conjunto B y marca con una x la respuesta correcta

El conjunto A tiene más objetos

El conjunto B tiene menos objetos

El conjunto A y B tienen igual cantidad de objetos

IMAGEN 18. RESPUESTA- SITUACIÓN 3- ACTIVIDAD 1- TAREA 1.A

En esta tarea se puede observar que los estudiantes no presentaron dificultades al momento de identificar la conservación de cantidades; pues se logró identificar la cantidad de objetos presentes en los conjuntos, es decir, presentan una apropiación en cuanto a la conservación de la cantidad, de esta manera se puede identificar que realizan el paso de lo concreto a lo abstracto por medio de la representación numérica, por lo tanto realizan un acercamiento a la noción de número mediante la representación de la cantidad.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Tarea 1. c. Observa los conjuntos **C** y **D**, responde en la casilla debajo de cada conjunto ¿cuántos objetos hay?

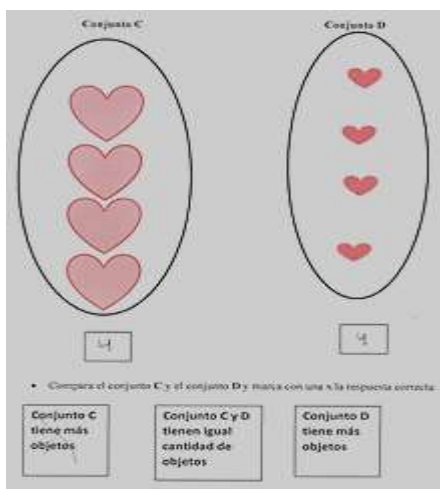


IMAGEN 19. RESPUESTA- SITUACIÓN 3- ACTIVIDAD 1- TAREA 1.C- ESTUDIANTE E4

En esta tarea el estudiante E4 a pesar de que identificó las cantidades correctamente, se equivocó en la respuesta. De esta manera, se puede observar que la estudiante no tiene una apropiación adecuada de la conservación de la cantidad, pues si bien logra identificar la cantidad de elementos, su respuesta depende de la naturaleza del objeto que se está contando, es decir no puede abandonar la idea de que la cantidad de objetos del conjunto C es mayor que los del conjunto D, ya que eso no le permite entender que el número como cardinal de dichos conjuntos no depende de la naturaleza de los mismos y por tanto es igual; además esto implica que aún es necesario trabajar sobre la abstracción del concepto. Para el caso de los demás estudiantes se puede mencionar que presentan aproximación en cuanto a la conservación de la cantidad en conjuntos determinados.

Situación IV. La unidad.

Actividad 1. Observa los objetos u elementos del conjunto.

En esta actividad los estudiantes observan los elementos del conjunto e identifican los que representan una unidad marcándose con una equis. Realizan el conteo de los elementos por colores, lo que les facilita la identificación de la unidad. Excepto la estudiante E3 quien presenta dificultades con el conteo como se muestra en la imagen 21.

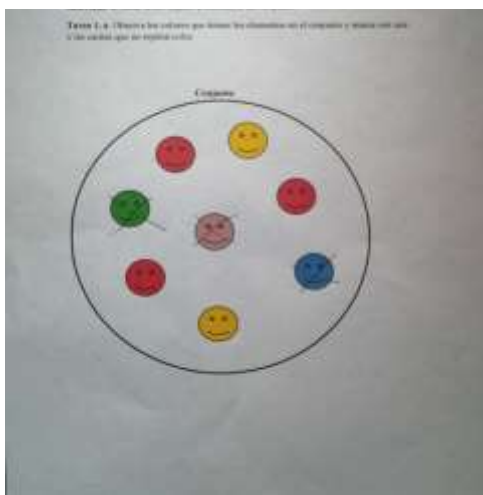


IMAGEN 20. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 1- TAREA 1.A- ESTUDIANTE E2

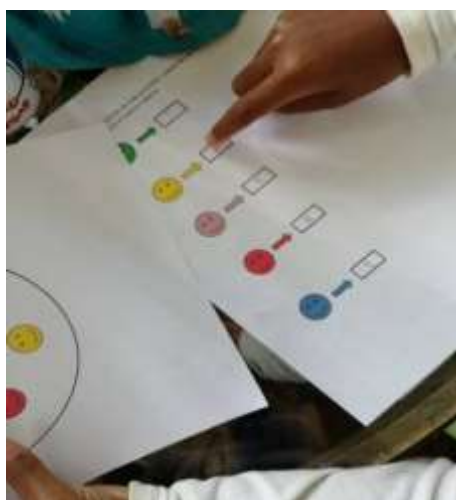


IMAGEN 21. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 1- TAREA 1.B- ESTUDIANTE E3

Para el caso de los estudiantes E1, E2, E4 y E5 en la tarea 1. A como se muestra en la imagen 20, observan los objetos del conjunto, los cuentan uno por uno identificando los colores y marcan con una equis los que no se repiten, esto facilita la posibilidad de hacer el conteo de la tarea b, pues significa que los que no se repiten representan una unidad y los que sí se repiten representan varias unidades. Luego en la tarea 1. B los estudiantes escriben en las casillas el número que representa la cantidad de objetos (Unidades) dentro del conjunto, de acuerdo con cada color.

En el caso de la estudiante E3 en la tarea 1. A realiza la observación de los elementos del conjunto, identifica los colores de los elementos del conjunto, identifica los objetos que caracterizan la noción de unidad, pero al realizar la tarea 1. B dónde debe contar los elementos

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural del conjunto representando con un número la cantidad correspondiente, presenta una dificultad en el conteo de los objetos y en lugar de tres objetos rojos cuenta dos, como lo vemos en la imagen 21. Con lo que se puede evidenciar que a E3 se le dificulta el conteo.

Los estudiantes, logran con esta tarea identificar primero las unidades y posteriormente que los conjuntos están compuestos de unidades, aproximándose a la noción de unidad.

Actividad 2. Diferencia al número uno (1) de la unidad.

Tarea 1. Para hacer una diferencia entre la unidad y el número 1 los estudiantes realizan el conteo de cada unidad y representan las unidades faltantes como veremos a continuación:

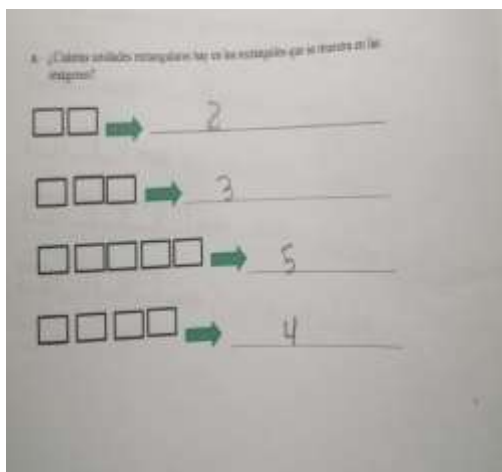


IMAGEN 22. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 2- TAREA 1.A- ESTUDIANTE E1

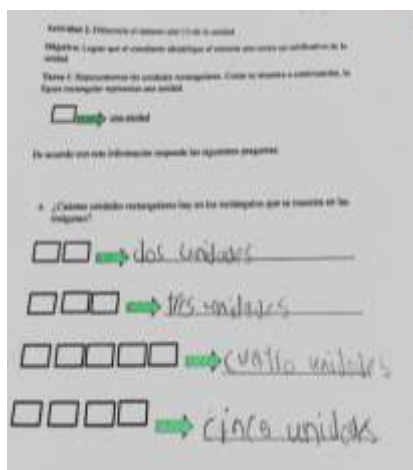


IMAGEN 23. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- TAREA 1.A- ESTUDIANTE E2

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

En esta actividad en la tarea 1. A los estudiantes cuentan con los dedos cada unidad rectangular de manera que pueden diferenciar la cantidad de éstas en cada tarea y así representar las cantidades con el número correspondiente.

Los estudiantes E1, E3, E4 y E5 representan la cantidad de unidades rectangulares con números. Pero como podemos ver en la imagen 23 el estudiante E2 escribe la cantidad de unidades con palabras, siguiendo el ejemplo mencionado al inicio de la tarea; de modo que se puede evidenciar que los estudiantes utilizan dos formas para representar las cantidades, estableciendo una diferencia entre la unidad y el número identificándolo como un calificativo de la unidad.

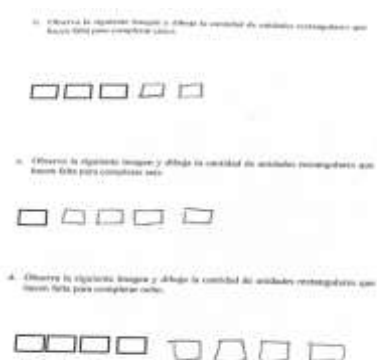


IMAGEN 24. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 2- TAREA 1.B

En la tarea 1.b, 1.c y 1.d los estudiantes cuentan las unidades que se han dado y según la cantidad correspondiente en cada ejercicio, deben completar dibujando las unidades faltantes. Para realizar la tarea los estudiantes cada vez que dibujan una unidad hacen un recuento, para no pasarse de la cuenta, lo que evidencia que los estudiantes no tienen una apropiación de la conservación de la cantidad, pero sí identifican la diferencia entre la unidad y el número logrando completar las unidades faltantes.

Tarea 2. Identifica las unidades.



IMAGEN 25. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 2- TAREA 2- ESTUDIANTE E2



IMAGEN 26. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 2- TAREA 2- ESTUDIANTE E5

En esta actividad los estudiantes colorean las unidades rectangulares que se indica en el ejercicio, en ello se pudo observar que no colorean cada unidad, sino que primero cuentan las unidades una a una según corresponda, marcando cada una con un punto y después de esto las colorean al tiempo todas, como podemos ver en la imagen 25 y 26.

En esta tarea se puede evidenciar que para los estudiantes es importante contar cada unidad para poder asegurarse de las unidades que deben colorear, es decir utilizan el principio de correspondencia uno a uno; de esta manera identifican las unidades, relacionándolas con las cantidades correspondientes, para reconocer el número como un calificativo de la unidad y establecer una diferencia entre la unidad y el uno.

Actividad 3. Identificando el número como una pluralidad de unidades.

Tarea 1. Responde las siguientes preguntas.

Antes de que los estudiantes desarrollan la tarea, se plantearon algunas preguntas introductorias para recordar algunas nociones que son necesarias para resolver la tarea, lo cual se expone en el siguiente diálogo:

P1: ¿Qué es un conjunto?

E4: Un conjunto es cuántos objetos tiene, que se representa que con un con por este entonces... un conjunto digamos que aquí tiene unos 5 animales ¿o no? entonces le colocamos el conjunto A.

P2: El conjunto A ¿de qué? de los...

E4: De los animales.

P2: Ujummm y ¿cuántos puede haber uno, muchos?

E4: ¡Eh! pues, puede haber como 5, o 4, o 1, porque si hay una es una unidad.

P2: Ujummm y si hay 5 ¿cuántas unidades?

Todos: 1, 2, 3, 4, 5.

E3: Sí, 5 unidades.

P1: Denme un ejemplo de un conjunto.

E4: ¿Un conjunto? digamos que aquí está el circulito (dibuja un círculo imaginario con el dedo) ¿no? Aquí tenemos un conjunto de lapiceros.

P1: ¡Eso lapiceros!

E4: Lapiceros, y si le colocamos ¡una ega! no quedaría un conjunto (mueve la cabeza) porque tiene que colocar lo mismo.

E3: Sí o sí no, no.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E4: O si no no queda como un conjunto.

P1: Debe tener las mismas características.

E4: Sí.

P1: Entonces, ¿estos son conjuntos? (Señala los conjuntos de la tarea 1)

E4: Sí porque tiene lo mismo.

P1: ¿Qué tienen?

E4: Tienen lunas, ladrillos, banderas y sol.

P1: ¿Todos son iguales?

E4: No. Y en cambio porque aquí sí aquí hay un... Lunas ¿o no? y si quitamos un ladrillo y lo pasamos acá no quedaría como un conjunto.

P1: Exacto.

E4: Porque él tiene que quedar como ladrillos con los conjuntos de ladrillos.

P1: Y, ¿si yo junto las banderas y las lunas?

E4: No quedaría como un conjunto, porque son diferentes cosas.

P1: ¡Ah ya!

E3: Sí, tienen que ser igualitas cosas.

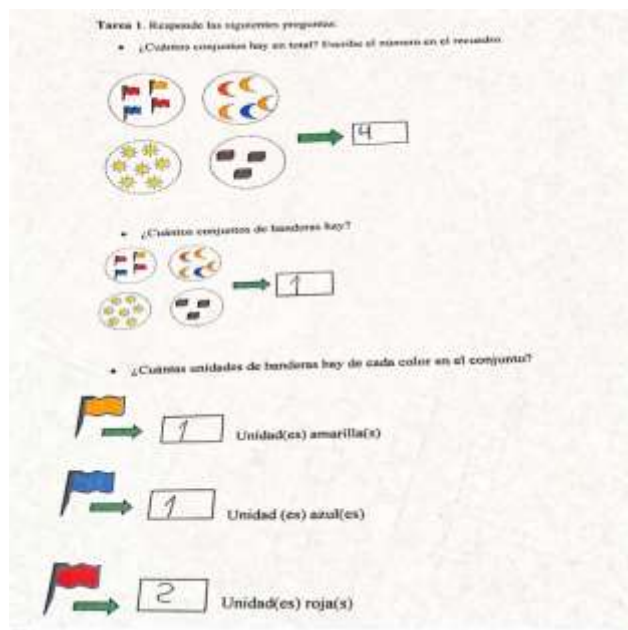


IMAGEN 27. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 3- TAREA 1

Como se observa en la imagen 27 los estudiantes realizan la tarea correctamente, contando los conjuntos en total para representarlos con un número, luego se interroga por cada uno de ellos de manera específica para que el estudiante logre identificar el elemento que caracteriza la noción de unidad; de manera que deben representar con un número cuántos conjuntos de banderas hay y posteriormente puedan reconocer cuántos elementos hay dentro del conjunto de acuerdo con el color que le corresponde. En este caso se puede observar que los estudiantes logran identificar correctamente la cantidad de unidades que conforman los conjuntos.

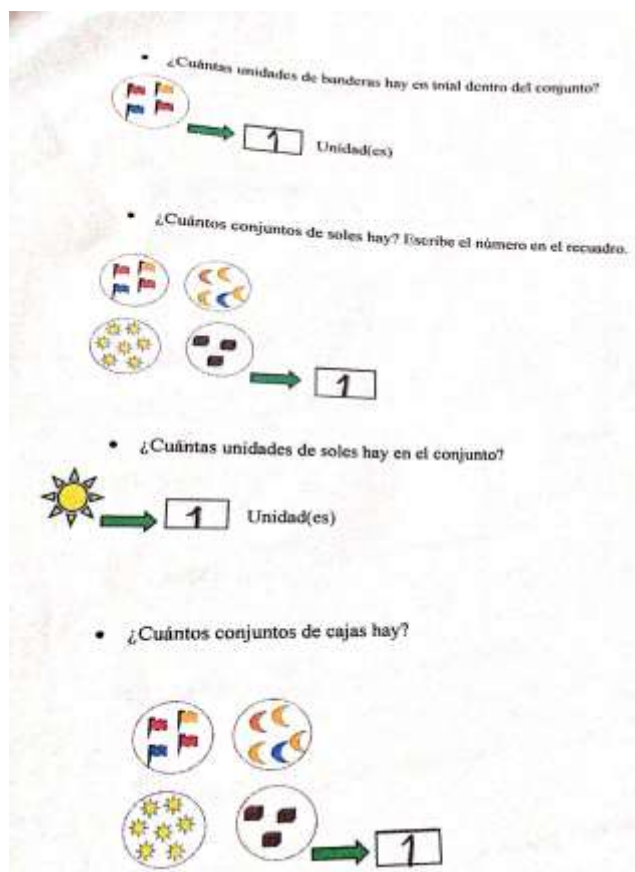


IMAGEN 28. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 3- TAREA 1- ESTUDIANTE E5

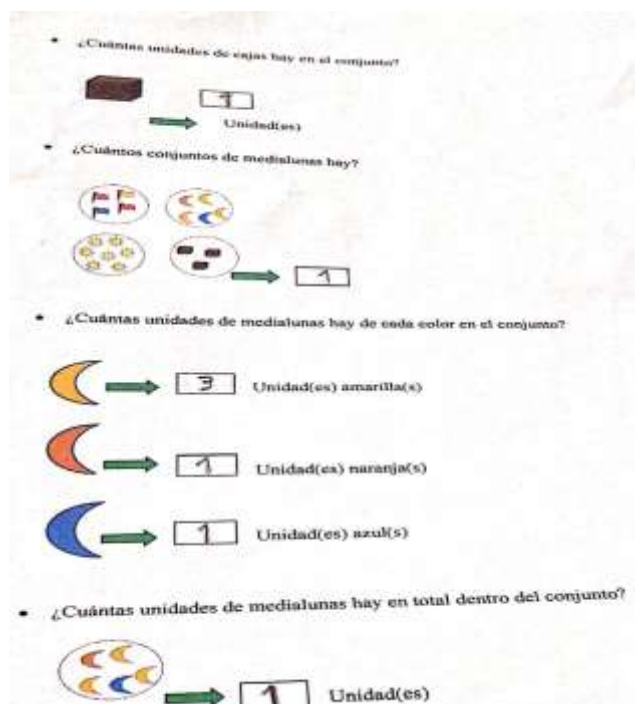


IMAGEN 29. RESPUESTA- SITUACIÓN 4- ACTIVIDAD 3- TAREA 1- ESTUDIANTE E3

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

En la siguiente tarea, los estudiantes E1, E3, E4, y E5 no logran identificar la unidad como una noción relativa, porque al preguntarles ¿cuántas unidades hay dentro del conjunto?, respondieron una unidad. Por ejemplo, en la imagen 28, en la pregunta ¿cuántas unidades de soles hay en el conjunto? El estudiante responde una; en este caso es posible que él identifique al conjunto como el único conjunto de soles de los que se presentan en la tarea y no como un conjunto que contiene cierto número de elementos (soles). Es decir, les causa dificultad relativizar la unidad e imaginar que ese conjunto que es una unidad puede contener otras unidades, dejando entrever que la unidad para ellos es indivisible.

Por otro lado, en el caso de los estudiantes E3 y E4 presentan una dificultad para reconocer cuántas unidades de soles hay dentro del conjunto, puesto que en lugar de 7 responden uno, de modo que están confundiendo el conjunto como tal con la cantidad de unidades que hay dentro del conjunto, evidenciándose la falta de apropiación en la diferenciación entre un conjunto y las unidades que forman los conjuntos, como podemos ver en las imágenes 28 y 29 y así en todas las tareas siguen presentando el mismo error, de manera que confunden el conjunto como parte de un todo con las unidades que conforman el conjunto.

Ahora bien, en respuesta a la pregunta ¿cuántos conjuntos de cajas hay en total? Los estudiantes se refieren a las cajas como “ladrillos” es posible que esto suceda porque para interpretar las preguntas y entenderlas necesitan hacer una asociación con lo concreto, lo tangible y lo manipulativo lo inmediato a su experiencia; en este caso sus viviendas están construidas con este material.

Finalmente, el estudiante E2 realiza las tareas correctamente lo que permite evidenciar que pudo apropiarse del significado de conjunto e identificar correctamente la cantidad de unidades que lo conforman.

Situación V: El sucesor de un número natural.

Actividad 1: identificando el sucesor.

Tarea 1 Escribe el número que hace falta en cada espacio para formar el sucesor.

En el desarrollo de la actividad se formó el siguiente diálogo entre dos estudiantes:

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E1: Ahí queda el 7 y nada más.

E5: Porque toca que colocar el número ahí E1.

E1: ¿Aquí el 7?

E5: El que le da, el número que le da.

E1: Porque es que solo está el 7.

E5: ¡Mire! ¿Aquí no? aquí dice $6 + 1$, $7 \dots 7 + 1$, le da 8.

E1: ¿Aquí?

E5: Sí, coloque el 1.

E1: ¡El uno!, 6...

E5: Aquí tiene (señala con el lápiz el número 8); diga 8!

E1: 8

E5: ¿Y para llegar a 9?

E1: 1.

E5: ¡No!, no va a colocar el 1 aquí, tiene que colocar el mismo que está acá (señala con el lápiz el número 8)

E1: El 8.

E5: Ujummm

E1: 8.

E5: ¡No! como le dije ahorita, tiene 9.

E1: Ummm 9

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

E5: Lo que hizo ahorita.

E1: ¿Más 8?

E5: Ayyy, E1, (señala con el lápiz el número 1) el número que lo hizo ahorita, ¡vea! si tiene 9 para llegar a 10 ¿cuál número va ahí?

E1: 9... 1.

E5: Entonces, coloque el número 1 ahí.

E1: Acabe, ¡estos de aquí dan puros unos!

E5: ¡Jaaa le enseñé jaja! por fin le enseñé y que no entendía, yo también quiero ser profesora.



IMAGEN 30. INTERACCIÓN- SITUACIÓN 5- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTES E1 Y E5



IMAGEN 31. SITUACIÓN 5- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E1

En la imagen anterior se puede observar que la estudiante E5 le explica a la estudiante E1 la manera en que debe realizar el ejercicio, debido a que la estudiante E1 presentó dificultades para encontrar el sucesor del número correspondiente. Se pudo encontrar que la estudiante E5 claramente pudo identificar el sucesor de un número natural, porque al realizar la tarea para encontrar el número faltante explica que “se pone el número que le da”, con ello quiere decir, por ejemplo, que para encontrar el sucesor del número 7 se le debe sumar un uno ($7+1$) y obtener el 8, realizando así el conteo y la adición del número uno para encontrar el sucesor de un número natural.

Para el caso de la estudiante E1, al realizar el conteo puede identificar el sucesor sólo cuando se trata de cantidades pequeñas (del 1 al 5), pues a medida que los números van aumentando hasta el 10, presenta dificultades; una de las razones puede ser que en la tarea propuesta los espacios a completar no siempre se refieren a un todo sino también a la parte. Sin embargo, a pesar de ello se pudo observar que a partir del número 5 con las explicaciones brindadas por E5, E1 logra llegar hasta el número 10.

Finalmente, la estudiante E1 luego de terminar de llenar los espacios para formar el sucesor de los números naturales del número 1 hasta el 10 propuestos en la tarea, observa la columna que está ubicada a la derecha del signo “+” y dice “acá dan puros unos”. Con ello se puede inferir que, a pesar de las dificultades presentadas, la estudiante E1 en su debido momento

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural logra identificar que para encontrar el sucesor de un número natural es necesario sumar el número 1 y que siempre que se realice esta acción tendrá como resultado el siguiente número natural.

Los estudiantes E2, E3 y E4 por su parte en la realización de la tarea, identificaron el sucesor de los números naturales del número 1 hasta el 10; pues mientras la desarrollaban encontraron que cada vez que se le suma el número 1 a un número natural resulta el siguiente número o sucesor, de manera que en la columna que está ubicada a la derecha del signo “+” se encuentra siempre el número uno y a la izquierda del signo (+) se encontraban los números del 1 al 9 de forma ordenada y, a la derecha del signo (=) los números del 2 al 10, igualmente de forma ordenada, por lo que llegaron a la conclusión de que siempre que se le sume el número 1 a un número natural se obtendrá el número siguiente o sucesor.

Tarea 2. Escribe en la figura corazón el sucesor correspondiente a cada número.

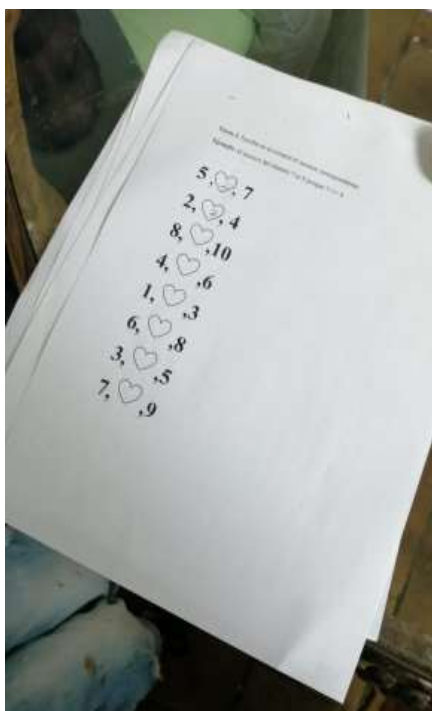


IMAGEN 32. RESPUESTA- SITUACIÓN 5- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTE E4

Al realizar esta tarea el estudiante E4 escribe el número 2 en la figura corazón, como se observa en la imagen 32, puesto que él entendió que debía escribir en lugar del número sucesor el número que le faltaba a cada número de la columna izquierda para llegar al siguiente, ubicado en la columna derecha. Una de las razones de esta interpretación, puede ser que el estudiante con

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

la tarea anterior no logró comprender el significado de un sucesor; otra puede ser que en la tarea anterior lo logró hacer porque estaba explícita la operación que debía realizar, es decir que debía sumar (+) el número 1, pero en esta sólo se le daba la información de que debía identificar el sucesor, dejando de manera implícita la acción sumar el número 1.

En el caso de la estudiante E1 al realizar la tarea empezó a mirar lo que hacían sus compañeros, puesto que aún no tenía claro lo que significa un número sucesor, e interpretó al principio lo mismo que E4; pero la estudiante E5 le explicó y logró resolver la tarea. Con ello, se puede inferir que los estudiantes E1 y E4 presentan dificultades al identificar el sucesor de un número natural, sobre todo cuando no está explícita la acción de la forma $n+1$, en particular para los números naturales del 5 hasta el 10.

Para el caso de los estudiantes E2, E3 y E5 en la tarea logran identificar el sucesor de un número natural, realizan la adición del número uno a cada número natural indicado en la tarea, y encuentran el sucesor que hace falta para llenar los espacios vacíos sin ninguna dificultad.

Tarea 3. Sigue las flechas y escribe en las casillas el número que hace falta para llegar a la meta.

En esta tarea los estudiantes completan los espacios vacíos desde el número 1 hasta el veinte siguiendo las flechas azules que van de derecha a izquierda, de izquierda a derecha y de arriba a abajo hasta llegar a la meta.



IMAGEN 33. RESPUESTA- SITUACIÓN 5- ACTIVIDAD 1- TAREA 3- ESTUDIANTE E5



IMAGEN 34. RESPUESTA- SITUACIÓN 5- ACTIVIDAD 1- TAREA 3- ESTUDIANTE E4

Los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 realizan la tarea sin inconvenientes, puesto que los números van en orden ascendente desde el número 1 hasta el número 20, hacen el conteo usando los dedos de las manos, siguiendo la secuencia de los números guiados por las flechas identificando el sucesor de cada uno de los números naturales del 1 al 20.

Finalmente, realizan esta tarea sin dificultades, utilizando el conteo y la adición para identificar el sucesor del número natural. Por todo lo anterior, se puede inferir que si la tarea implica seguir una secuencia que involucra el conteo hacia adelante, los estudiantes logran resolver la actividad sin inconvenientes.

Situación VI. Conteo y agrupación.

Actividad 1. Conteo.

Tarea 1. Observa y cuenta el número de arañas que cuelgan de la pared.

En esta actividad el estudiante debe de realizar el conteo de uno en uno, de acuerdo a la cantidad indicada.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

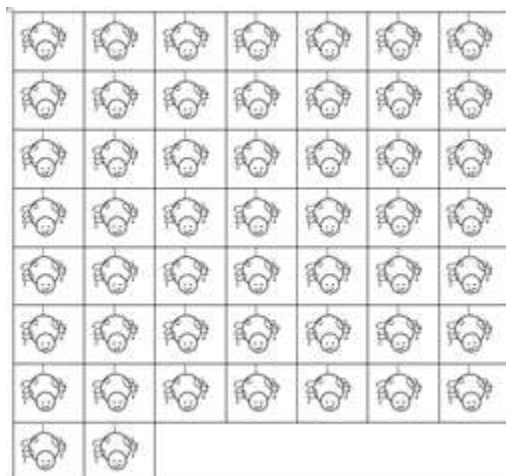


IMAGEN 35. SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 1- TAREA 1

Escribe en recuadro cuántas arañas cuelgan de la pared:

46

IMAGEN 36. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E5

Escribe en recuadro cuántas arañas cuelgan de la pared:

23

IMAGEN 37. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E1

En el siguiente fragmento se puede observar el conteo realizado por una estudiante.

E5: 27, 28, 29, 20, 21, 22, 23..... 44, 45, 46.

P2: ¿46?

E5: Sí

P2: Cuente usted E4.

E5: Yo olvidé cuánto iba.

Cuando la estudiante E5 desarrolla la tarea, se puede observar que no cuenta correctamente la cantidad de arañas que indica la tarea; esto se debe a que se le dificulta realizar el conteo de cantidades mayores que 31, como se muestra en la imagen 36. Para el caso de la estudiante E1, se puede observar en la imagen 37 que presenta dificultades para contar cantidades mayores que 20 y se le dificulta realizar la correspondencia uno a uno. En cuanto a los estudiantes E2, E3 y E4 presentan una apropiación del principio de correspondencia, al

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural momento de asignar un número que representa la cantidad de arañas, pues han desarrollado el principio de la conservación de la cantidad y saben contar hasta el número 51.

Actividad 2. Conteo hacia adelante y hacia atrás.

Tarea 1. Recorta y pega las arañas que hay en la pared, ubicándolas al frente de cada número, como lo muestra el ejemplo.

Aquí el estudiante debe recortar y pegar las arañas de acuerdo con el número indicado en cada cuadro.

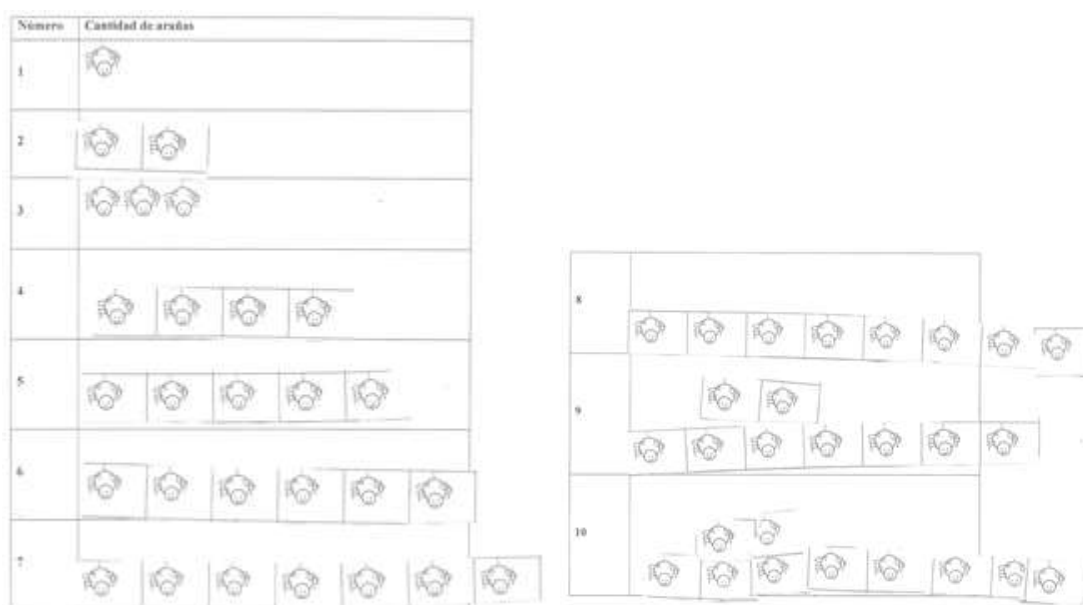


IMAGEN 38. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 2- TAREA 1- ESTUDIANTE E2, E3 Y E5

En el caso de los estudiantes E1, E2 y E5, se pudo observar que recortaban y pegaban las arañas de acuerdo al número que correspondía; es decir, si se pedía pegar 2 arañas ellos recortaron dos y las pegaban, si se pedía recortar 4 arañas recortaron las cuatro arañas en un solo corte y así sucesivamente hasta llegar al número 7, todo debido a que las hileras de arañas llegaban hasta 7 (como se muestra en la imagen 38), pero cuando llegaron a los número 8, 9 y 10, recortaron en un solo corte las 7 arañas y en otro corte u otros cortes recortaron las que hacían falta. Estos estudiantes, realizan un conteo que evidencia el principio de conservación de la cantidad, pues no recortan de una en una cada araña, sino que las cuentan en su totalidad y luego recortan. También se evidencia en esta acción la representación del número como el cardinal de un conjunto.

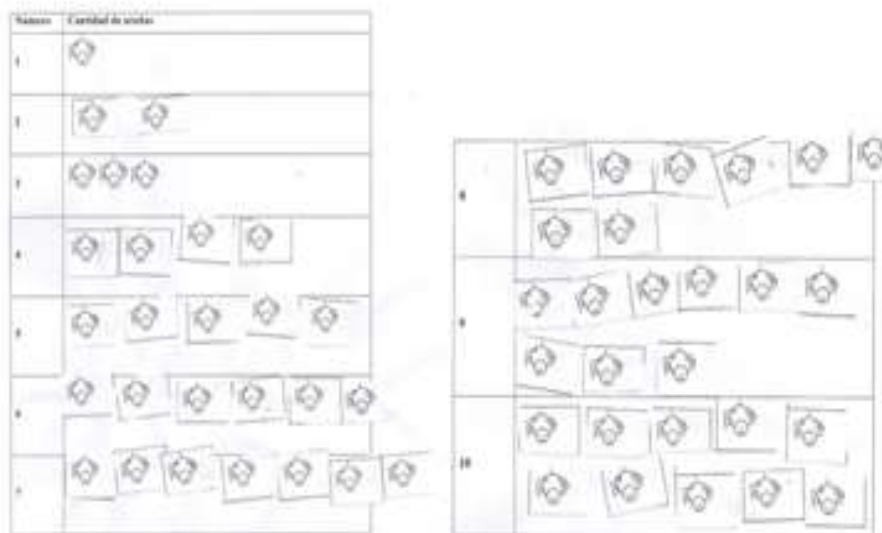


IMAGEN 39. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 2- TAREA 1- ESTUDIANTES E1 Y E4

Los estudiantes E3 y E4 recortaron las arañas de una en una, tomando más tiempo que los demás estudiantes para realizar la actividad. En este caso, los estudiantes hacen el conteo y la correspondencia de uno en uno, sin embargo, esto evidencia que aún presentan dificultades de conservación de la cantidad. Finalmente, se puede inferir que los estudiantes logran hacer el conteo hacia adelante, algunos de uno en uno y otros de dos sin ninguna dificultad.

Tarea 2. Dibuja la cantidad de arañas frente a cada número como lo indica el ejemplo.

En esta tarea el estudiante debe dibujar las arañas de forma descendente de acuerdo con el número indicado.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Número	Cantidad de arañas
10	
9	
8	
7	
6	
5	

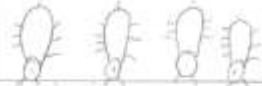
Número	Cantidad de arañas
4	
3	
2	
1	

IMAGEN 40. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 2- TAREA 2- ESTUDIANTE E1

Número	Cantidad de arañas
10	
9	
8	
7	
6	
5	

IMAGEN 41. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 2- TAREA 2- ESTUDIANTE E5

Como se puede observar en las imágenes 40 y 41, los estudiantes E1 y E5 presentaron una dificultad al momento de realizar el conteo; E1 en lugar de dibujar 7 arañas dibujó 6; mientras que el estudiante E5 en lugar de dibujar 8 arañas, dibujó 9. De esta manera, se puede observar que los estudiantes no memorizaron los números para poder dibujar la cantidad correcta y aunque esto ocurre una sola vez puede reflejar dificultades del principio de conservación de la cantidad o de la representación del número como el cardinal de un conjunto.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Los estudiantes E2, E3 y E4 no presentaron problemas al momento de dibujar las arañas de acuerdo con el número indicado. Lo que indica que no presentan dificultades para contar hacia atrás de uno en uno números naturales del 1 al 10.

Tarea 3. Recorta y pega la cantidad de casas al frente de cada número, según se indica a continuación:

En esta tarea los estudiantes deben recortar y pegar las casas y llenar los rectángulos de acuerdo a los números indicados.

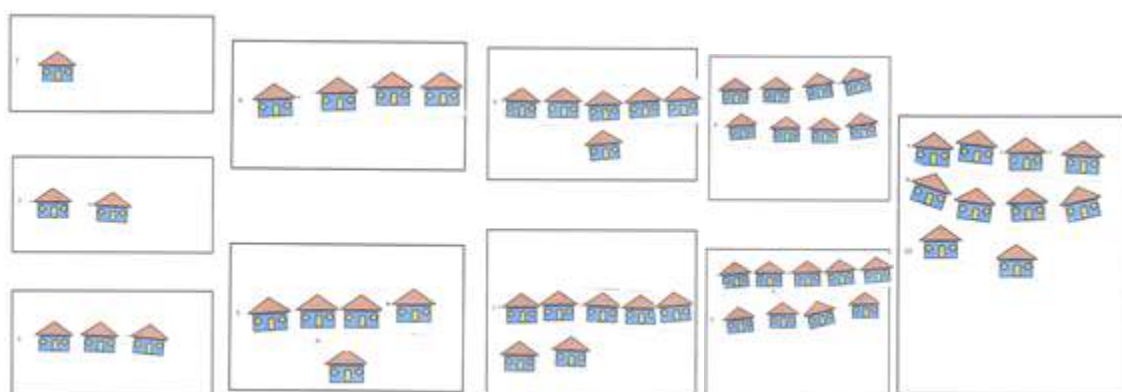


IMAGEN 42. RESPUESTA- SITUACIÓN 6- ACTIVIDAD 2- TAREA 3

En esta tarea los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 no presentan dificultades al momento de realizar las actividades, pero al momento en que aumentaban las cantidades realizaban un recuento de las imágenes que pegaban para conocer si la cantidad pegada era la correcta. De acuerdo con lo anterior se puede decir que los estudiantes realizan una correspondencia uno a uno de cada objeto con el número correspondiente, pero al hacer el recuento se evidencia que hay una dificultad en reconocer al número como el cardinal de un conjunto. Para este caso se cumplió con el objetivo de la tarea.

Situación VII. Conteo de dos en dos, tres en tres hasta el número 20 y 30.

Actividad 1. Vamos a contar de 2 en 2 hasta el número 10 y 20.

Tarea 1: Escribe en la raya la cantidad que representan los objetos.

En esta tarea los estudiantes cuentan la cantidad de objetos que observan y posteriormente representan estas cantidades con un número natural contando de 2 en 2.

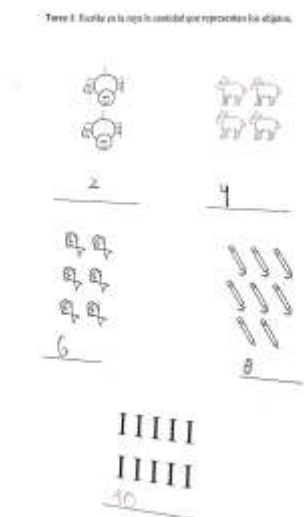


IMAGEN 43. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E4

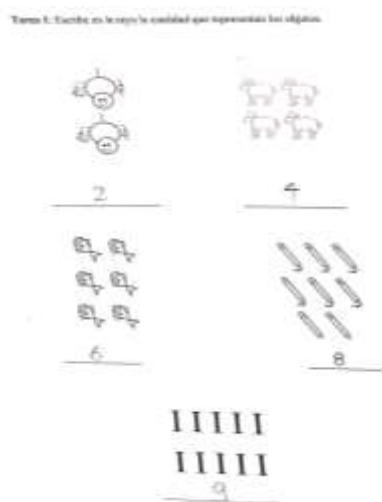


IMAGEN 44. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E3

Para el caso de los estudiantes E1, E2, E4 y E5 al realizar la tarea empiezan contando los objetos de 1 en 1 y luego realizan el conteo de 2 en 2 completando la secuencia numérica, comparando los objetos que están ordenados de 2 en 2 iniciando en 2 de forma ascendente hasta el número 10. Al principio se les dificulta iniciar el conteo a partir del número 2, por eso cuentan de 1 en 1, pero luego de terminar la tarea observan las agrupaciones y hacen el conteo de 2 en 2; esta acción permite comprender que si bien los estudiantes no hacen el conteo de inmediato de dos en dos (lo cual es natural porque hasta el momento lo han hecho de uno en uno) se percatan de las agrupaciones y de que es posible hacerlo y lo hacen logrando el propósito de la actividad.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

En el caso de la estudiante E3 como se puede observar en la imagen 44 logra hacer el conteo de dos en dos hasta el número 8, pero al realizar el conteo, cuando cuenta las líneas en lugar de 10 cuenta 9, presentando dificultad en el conteo de 2 en 2 hasta el número 10 hacia adelante.

Tarea 2. Conteo de 2 en 2 de forma ascendente

- Recorta y pega las tortugas de acuerdo a la cantidad indicada en cada recuadro:

En la tarea 2 recorten y peguen la cantidad de objetos de acuerdo con el número.

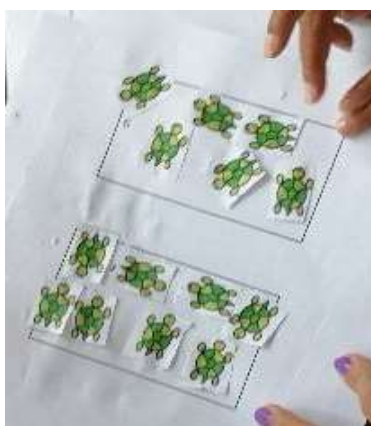


IMAGEN 45. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 1- TAREA 2- ESTUDIANTE E2

Aquí se pudo observar que los estudiantes en algunas ocasiones pegaban más objetos de lo indicado y cada vez que pegaban un objeto contaban cuántas debían pegar, pero al ver que les faltaban objetos para llenar los recuadros volvían a realizar el conteo de 1 en 1 y luego de 2 en 2.

Se puede observar que los estudiantes al realizar el conteo lo realizan de manera ascendente, de 1 en 1 para posteriormente realizar el conteo de 2 en 2 y llenar los espacios de la secuencia. Cabe resaltar que, aunque para ellos es necesario contar desde uno en forma ordenada, pueden identificar el conteo de 2 en 2.

Tarea 3 y 4. Cuenta de 2 en 2 del 2 al 20 de forma ascendente y descendente llenando los espacios.

Los estudiantes en la tarea 3 realizan el conteo de 2 en 2 hasta el 20 y en la tarea 4 de manera regresiva del 20 al 2. En la tarea se llenan los espacios contando de 2 en 2. En el

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural
 siguiente fragmento se muestra que los estudiantes no tienen una buena apropiación del conteo de 2 en 2.

E3: 10, 11, 12, 13, 14, 15...

E4: hasta el 15

P2: Estamos contando de 2 en 2.

E5: ¿24?

P2: $20 + 2$

E5: 20, 21, 22... ¿22?



IMAGEN 46. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 1 TAREA 3 Y 4

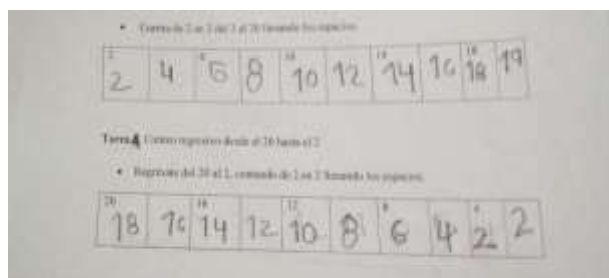


IMAGEN 47. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 1- TAREA 3 Y 4- ESTUDIANTE E4

Como se puede observar en la imagen 47 el estudiante E4 en la tarea 3 hace el conteo hacia adelante de dos en dos hasta el número 18 sin dificultades, pero cuando realiza el conteo de manera regresiva de dos en dos se confunde; una de las razones es porque está acostumbrado a

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural contar hacia adelante y en general en su vida cotidiana está familiarizado con acciones que implican añadir, pero el conteo hacia atrás es menos frecuente en su vida cotidiana y en la escuela lo que implica la dificultad en actividades en las que se requiera disminuir cantidades. De manera que E4, en lugar de contar de dos en dos del 20 al 2, no inicia el conteo con el número 20, sino que se va a la última casilla e inicia el conteo de forma ascendente desde el número 2 hasta el 20. Lo que permite evidenciar que E4 tiene dificultades para completar la secuencia realizando el conteo regresivo de 2 en 2 a partir del número 20.

Para el caso de los estudiantes E1, E2, E3 y E5 se pudo observar que en el conteo ascendente de 2 en 2 lograron identificar los números correspondientes en cada casilla realizando el conteo progresivo de dos en dos; mientras que en el conteo regresivo los estudiantes completaron la secuencia a partir del número 20, identificando que para hacer el conteo hacia atrás en lugar de agregar debían quitar números, lo que les dificulta la tarea debido a que lo hacían más despacio y contando con los dedos.

Tarea 5. Cuenta las arañas de 2 en 2 llenando los espacios vacíos.

En esta tarea los estudiantes cuentan las arañas de 2 en 2 llenando los espacios vacíos de forma ascendente iniciando desde el número 2 hasta el número 20.

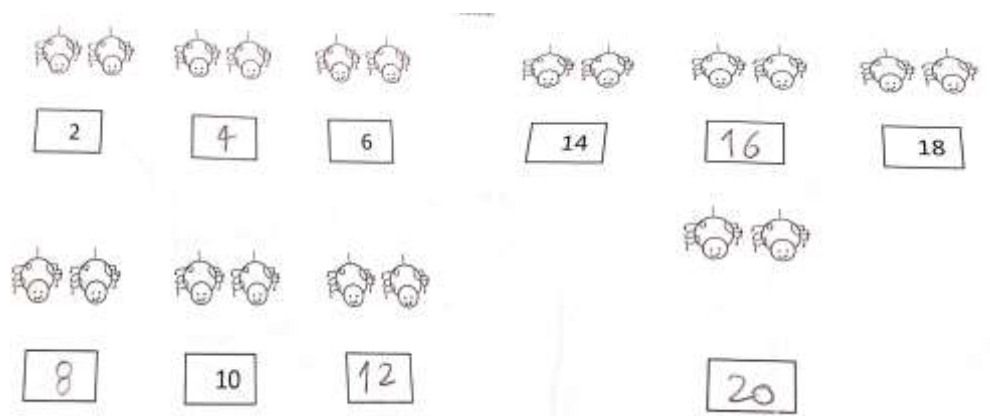


IMAGEN 48. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 1- TAREA 5- ESTUDIANTE E3

Para realizar esta tarea los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 como en las tareas anteriores cuentan los objetos iniciando desde el 1 de manera ordenada para posteriormente identificar que los objetos se encuentran agrupados de 2 en 2.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Se puede observar que cuando los estudiantes realizan el conteo de manera ascendente y ordenada no presentan dificultades para adicionar correctamente si se tratan de números pequeños (del 1 al 5), pero cuando lo hacen a partir del 5 hasta el 20 utilizan ayudas tales como: realizar un recuento iniciando desde el número uno, utilizan los dedos, cuentan en voz alta, para luego hacer un reconocimiento del conteo de 2 en 2 completando la secuencia numérica, llenando los espacios vacíos. Pero cuando el conteo debe realizarse de forma descendente se pudo evidenciar que la dificultad es mayor, puesto que en este caso los estudiantes deben quitar cantidades en lugar de adicionar.

Actividad 2. Avanza de 3 en 3, desde el número 3 hasta el número 30.

En esta tarea los estudiantes cuentan las arañas de 3 en 3, llenando los espacios vacíos de forma ascendente y descendente, iniciando desde el número 3 hasta el número 30 y del 30 al 3.

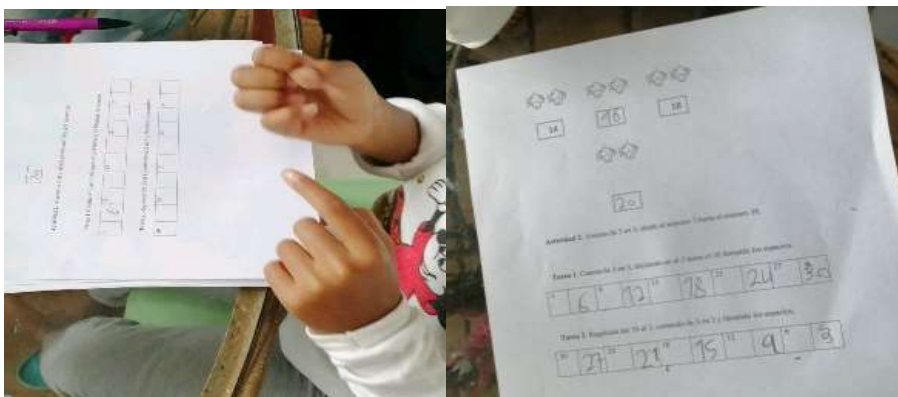


IMAGEN 49. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 2- TAREA 1 Y 2- ESTUDIANTE E3

Como se puede observar en la imagen 49, los estudiantes hacen uso de los dedos de las manos para realizar el conteo, se sigue presentando la dificultad del conteo regresivo. En esta tarea se pudo observar que cuando los estudiantes cuentan de manera secuencial y ascendente no tienen dificultades y son ágiles, pero cuando realizan el conteo de manera regresiva se confunden y lo hacen despacio. Por ejemplo, al regresar del 30 al 3 hacían el conteo con los dedos o iniciaban el conteo del 1 al 30 de izquierda a derecha. Esto permite evidenciar que tienen dificultades para completar la secuencia realizando el conteo regresivo de 3 en 3 a partir del número 30.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

En los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5, se pudo observar que en el conteo ascendente de 3 en 3 lograron identificar los números correspondientes en cada casilla, mientras que, en el conteo regresivo, los estudiantes lo hicieron a partir del número 30 identificando que para regresar debían en lugar de agregar quitar números, lo que les dificulta la tarea debido a que lo hacían más despacio y contando con los dedos

Tarea 1. Cuenta las telarañas de 3 en 3, llenando los cuadros vacíos.



IMAGEN 50. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 2- TAREA 3- ESTUDIANTE E1



IMAGEN 51. RESPUESTA- SITUACIÓN 7- ACTIVIDAD 2- TAREA 3- ESTUDIANTE 5

Al momento de realizar esta tarea los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 cuentan los objetos iniciando desde el 1 de manera ordenada para posteriormente identificar que los objetos se encuentran agrupados de 3 en 3.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Se pudo observar que la dificultad presentada con el conteo anterior de 2 en 2 persiste en esta tarea de 3 en 3, porque cuando los estudiantes realizan el conteo de manera ascendente y secuencial no presentan dificultades para adicionar correctamente si se tratan de números pequeños (del 1 al 5), pero cuando lo hacen a partir del 5 hasta el 30, nuevamente utilizan ayudas tales como: realizar un recuento iniciando desde el número uno, utilizan los dedos y cuentan en voz alta para luego hacer un reconocimiento del conteo de 3 en 3, completando la secuencia numérica llenando los espacios vacíos. Por otro lado, cuando el conteo debe realizarse de forma descendente se pudo evidenciar que la dificultad es mayor, puesto que en este caso los estudiantes deben quitar cantidades en lugar de adicionar, pero ahora es con el número 3 y no están acostumbrados a este tipo de ejercicios.

Situación VIII. Vamos a formar el número 10 con diferentes números.

Actividad 1 y 2. Agrupar y desagrupar.



IMAGEN 52. RESPUESTA- SITUACIÓN 8- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E2



IMAGEN 53. SITUACIÓN 8- ACTIVIDAD 2- TAREA 1- CONTEO CON LOS DEDOS ESTUDIANTE E1

Como se puede observar en las imágenes 52 y 53, en la actividad 1 los estudiantes forman el número 10 con la suma de dos números que puedan representarlo, en la actividad 2 deben encontrar el resultado de sumar dos números.

En la primera actividad los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 al realizar la tarea primero identifican los números del 1 al 9 con los cuales se puede componer el número 10 haciendo un conteo, de manera que al adicionar los números puedan formar el número 10 utilizando diferentes números.

En la actividad 2 los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 descomponen los números 10, 8, 6 y 4 escribiendo el resultado de la suma en el óvalo del gusano y posteriormente identifican los números que al unirlos puedan formar cada número representado por el gusano.

La dificultad que se pudo observar en estas actividades se evidenció cuando los estudiantes debían encontrar diferentes números que formarían el número 10 y los números 6, 8 y 4 respectivamente; puesto que sólo encontraron una opción para formar estos números y para buscar otras maneras de formarlo, debían sumar varias veces diferentes números para que pudieran identificar los números que los conforman. Por ejemplo, suman aleatoriamente el 4 con el 3, el 7 con el 2 hasta lograr identificar una pareja de números que les diera 10, por esa razón solamente lograron encontrar una pareja de números naturales cuya suma fuera 10. También se encontró que los estudiantes tienen dificultades de conteo y para desagrupar los números naturales del 1 al 10.

Situación IX. Vamos a ordenar**Actividad 1.** El orden y el número.

Tarea 1. Dibuja el número de crías que tiene cada araña, según la posición que ocupa como lo muestra el ejemplo. Ten en cuenta que la primera araña tiene una cría, la segunda tiene dos, la tercera tiene tres crías y así sucesivamente.

En esta tarea el estudiante debe dibujar las crías de las arañas de acuerdo a su posición.

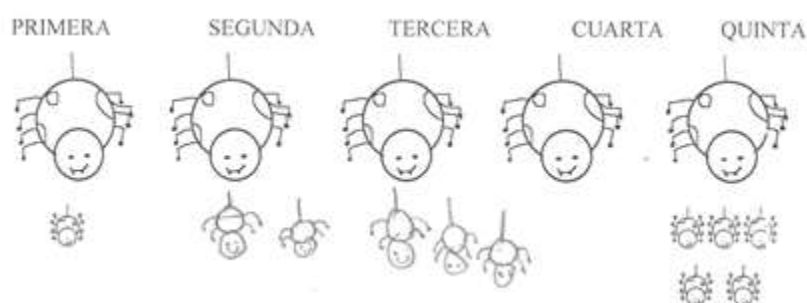


IMAGEN 54. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 1- ESTUDIANTE E5

Antes de iniciar la actividad fue necesario explicar a los estudiantes cada una de estas posiciones, se trató de relacionar cada palabra con un número, es decir, la primera tiene una cría, luego la segunda con dos, la tercera con tres, la cuarta con cuatro y así sucesivamente.

Aquí se puede observar que el estudiante E5 presentó dificultades para dibujar la cantidad de arañas requeridas, no pudo identificar a qué se refería la que estaba en la cuarta posición, además de esto la tarea debió tener más espacio entre arañas, los demás estudiantes E1, E2, E3 y E4 no presentaron dificultades al momento de realizar la actividad.

De lo anterior se puede deducir que el estudiante E5 presenta dificultades en cuanto a la identificación del orden y número; por otro lado, en cuanto a las estudiantes E1, E2, E3 y E4 tienen presente el orden y el número, de esta manera se puede concluir que si se cumplió el objetivo de la actividad.

Tarea 2. Colorea la araña de acuerdo con las siguientes indicaciones:

- Colorea de color café la mamá araña que va en décimo lugar.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- Colorea de color amarillo la mamá araña que va en noveno lugar.
- Colorea de verde la mamá araña que va en octavo lugar.
- Colorea de morado la mamá araña que va en séptimo lugar.
- Colorea de naranja la mamá araña que va en sexto lugar.



IMAGEN 55. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 2

En esta tarea al igual que la anterior fue necesario realizar una explicación del significado de cada posición, es decir, que la sexta debía de tener una cantidad de 6 crías, la séptima debía tener siete y así hasta llegar a la décima.

En esta tarea los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 no presentaron ningún tipo de dificultad, es importante mencionar que contaban las arañitas señalando con el dedo y de esta manera identificaban la cantidad de crías que había y luego procedían a colorearlas. Por lo anterior se puede decir que los estudiantes logran identificar el orden y la correspondencia uno a uno para los números naturales del 1 hasta el 10.

Tarea 3. Recorta las palabras (primero, segundo, tercero...) y pégalas en el lugar que corresponde, debajo de cada mamá araña, empezando por quien va en primer lugar, hasta llegar al décimo lugar, según el número de crías que tiene cada una, como en el ejemplo que se muestra a continuación.

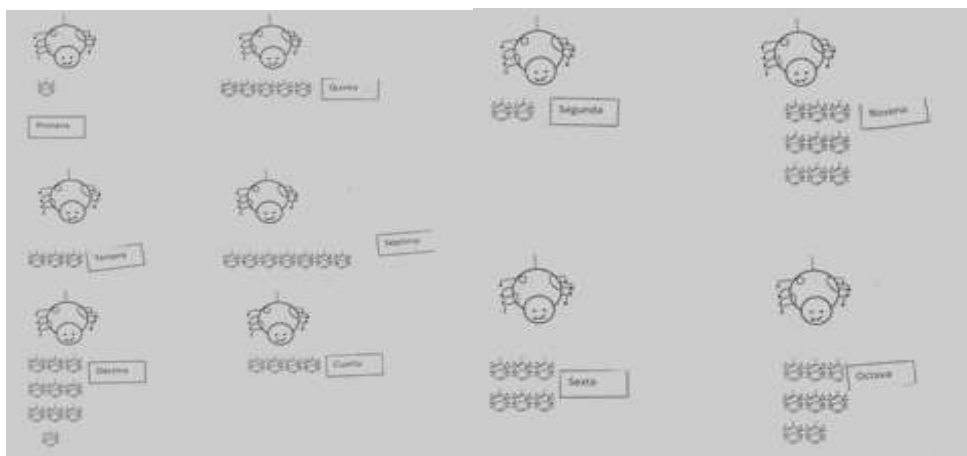


IMAGEN 56. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 3

En esta tarea se hace un recuento de las tareas anteriores (1,2) para recordar qué lugar ocupa la araña según el número de crías que tenga. En este caso los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 contaban señalando con el dedo, luego trataban de relacionar las cantidades con los nombres. Esta tarea les tomó más tiempo realizarla debido a que los estudiantes no retenían en su mente el número que contaban, además tenían que recortar, pero a pesar de que fue una tarea un poco larga los estudiantes lograron realizarla correctamente, se puede decir que alcanzaron a identificar el orden de las figuras de acuerdo con la cantidad de crías.

Tarea 4. Ubica la posición que tiene cada elemento en la fila.

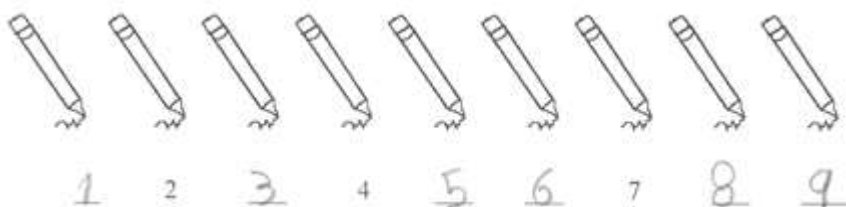


IMAGEN 57. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 4

En esta tarea los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 no presentaron ningún tipo de dificultad al momento de realizar la tarea, por lo anterior, se puede identificar que los estudiantes asignan fácilmente el número correspondiente a cada figura, debido a que los objetos se encuentran ubicados de manera secuencial en orden ascendente, una de las razones puede ser que este tipo de conteo se relaciona más con la experiencia inmediata del estudiante en su vida cotidiana.

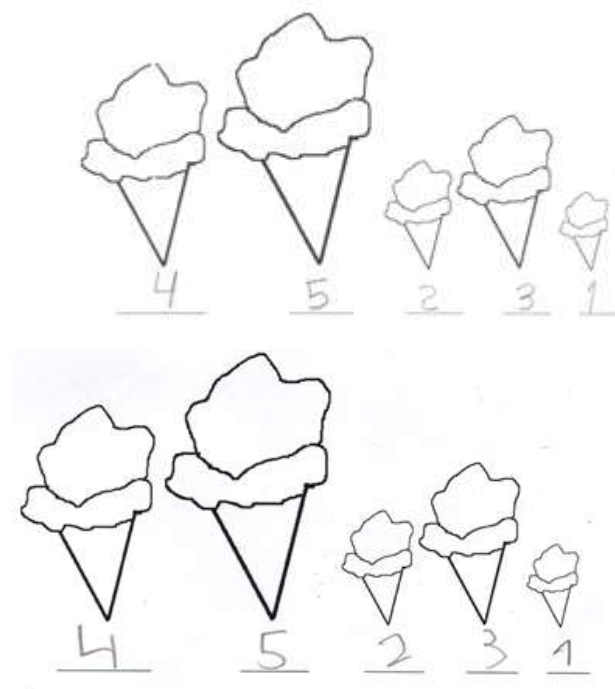
Tarea 5. Ordena de mayor a menor según el tamaño.

IMAGEN 58. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 5- ESTUDIANTE E1 Y E2

En esta tarea los estudiantes E1 y E2 organizaron los helados del más pequeño al más grande como se observa en la imagen 58, no hubo una buena comprensión de la actividad a realizar, ya que, para E1 y E2 en primer lugar debía llevar el helado más pequeño. Los estudiantes E3, E4 y E5 no presentaron dificultades al momento de realizar la tarea.

De esta manera, se puede mencionar que los estudiantes E1 y E2 en lugar de ordenar de mayor a menor los números naturales del 1 al 10 según el tamaño del cono, lo ordenan de menor a mayor. Esto refleja las mismas dificultades expuestas en los argumentos de las tareas anteriores, en las que se presentó una dificultad para el conteo regresivo de estos números. Mientras que los estudiantes E3, E4 y E5 no presentaron dificultades, por tanto, se infiere que tienen una comprensión del concepto del orden y la correspondencia.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Tarea 6. Ordena de menor a mayor según el tamaño.

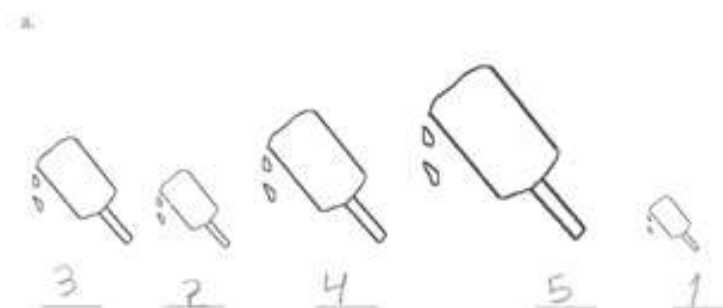


IMAGEN 59. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 6

Aquí se pudo evidenciar que los estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 no presentaron dificultades al momento de desarrollar la tarea pues lograron ordenar correctamente, se puede decir que, hay una buena correspondencia al momento de asignar una posición entre el número y la figura.

Tarea 7. Ordena de menor a mayor según el tamaño.

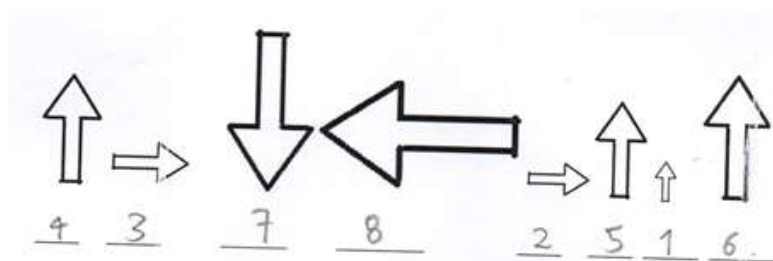


IMAGEN 60. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 7- ESTUDIANTE E3

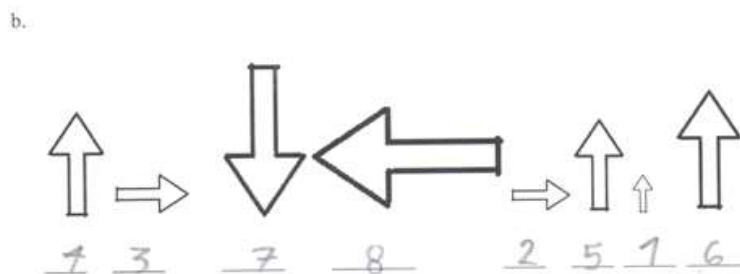


IMAGEN 61. RESPUESTA- SITUACIÓN 9- ACTIVIDAD 1- TAREA 7- ESTUDIANTE E4

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

En esta tarea los estudiantes E3 y E4 presentaron una confusión en los tamaños de las flechas a las que les corresponden el cuarto y el quinto lugar, pues no identifican cuál de las 2 flechas es la más grande. También se evidenció, que como los objetos están en desorden, estos estudiantes no logran realizar la correspondencia de manera correcta. Para el caso de los estudiantes E1, E2 y E5 no presentaron dificultades al momento de ordenar las flechas según su tamaño.

4.3 Confrontación del análisis A priori y análisis A posteriori

En este apartado se realiza la confrontación del análisis a priori con el análisis a posteriori, el cual estuvo guiado por elementos teóricos tomados de las aproximaciones históricas y matemáticas de la construcción del número natural.

En la siguiente tabla se describe cada una de las partes que integran la propuesta, su respectivo nombre, propósito, y por último el título de las actividades. En la primera columna se especifican los contenidos matemáticos que se trabajaron en cada una de las actividades, en la segunda columna se detalla las expectativas de desempeño (análisis a priori) y finalmente en la tercera columna se precisa lo que los estudiantes alcanzaron (análisis a posteriori) con la implementación de dicha propuesta.

Situación I. Conteo prehistórico utilizando representaciones.

Propósito: Lograr que los estudiantes realicen el conteo a partir del número 1 hasta el número 10 utilizando la representación gráfica.

TABLA 11. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN I.

Análisis de la Actividad 1: Conteo mediante representación gráfica.		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Representación pictórica. • Conjuntos. • Representación de cantidades. • Representación numérica del 1 al 10.	• Construir e interpretar las representaciones de los conjuntos y así poder representar las relaciones entre cantidades. • Representar de manera pictórica y simbólica los números del 1 al 10. • Completar la secuencia numérica de los conjuntos. Conteo de 1 en 1.	Durante los procesos realizados se identificaron algunos factores importantes como el uso del principio de correspondencia y la representación numérica de cantidades; no obstante, algunos optaron por utilizar el recuento de objetos en cada conjunto. A Pesar de que los estudiantes realizaban el recuento les permitía identificar sus errores y así poder realizar la respectiva corrección. En caso de las tareas que hacían parte de la actividad se logró lo esperado.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Situación II: Correspondencia entre la cantidad de elementos de un conjunto y los números naturales del 1 al 10.

Propósito: Lograr que el niño establezca una relación correspondencia entre los números naturales del 1 al 10 y la cantidad de elementos de cada conjunto.

TABLA 12. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN II.

Análisis de la Actividad 1: Correspondencia entre objetos y número.		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Representación pictórica. • Conjuntos. • Números naturales del 1 al 10. • Correspondencia.	• Identificar correctamente los números del 1 al 10 mediante la asignación de un conjunto. • Identificar la cantidad de elementos que tienen los conjuntos.	Para el desarrollo de esta actividad los estudiantes utilizaron la correspondencia biunívoca en cantidades del 1 al 5, pero al momento en que las cantidades aumentaban (6 a 10) presentaron algunas dificultades, otros estudiantes utilizaron el orden de los números (1 al 10) y así lograban el propósito de la tarea, esto para el caso de la primera tarea; para la segunda uno de los estudiantes presenta dificultades al momento de interpretar al número como etiqueta, realizando la suma de sus cifras sin ser esa la instrucción.
Análisis de la Actividad 2: Correspondencia biunívoca.		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Conjuntos • Relación entre elementos de dos conjuntos. • Objetos. • Orden entre objetos de acuerdo al tamaño. • Correspondencia biunívoca | <ul style="list-style-type: none"> • Relacionar correctamente los elementos de un conjunto con otro conjunto. • Ordenar correctamente los elementos de acuerdo al tamaño de la figura (más pequeño al más grande utilizando los números del 1 al 10). |
|---|---|

Durante el desarrollo de las tres tareas los estudiantes relacionaron correctamente los elementos entre dos conjuntos; para el caso de la segunda tarea un estudiante presenta una confusión en relación con el orden de las velas, en los otros casos se observa que realizan correctamente la tarea; es importante mencionar que en el momento en que los objetos se encuentran ordenados como en la imagen 12, no se presenta ninguna dificultad para relacionar los elementos entre dos conjuntos y asignar los respectivos números a cada elemento.

Situación III: Conservación de la cantidad.

Propósito: Lograr que los estudiantes identifiquen la conservación de las cantidades sin importar el tamaño y color.

TABLA 13. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN III.

Análisis de la Actividad 1: Identifiquemos cantidades		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Conjuntos	• Identificar correctamente las	Para el desarrollo de esta actividad algunos estudiantes presentan dificultades para identificar la cantidad de velas como se muestra en la imagen

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

• Identificación de cantidades numéricas. • Conteo • Conservación de cantidades	cantidades entre 2 conjuntos.	16, en esta tarea se identifica la importancia del conteo y la correspondencia como elementos fundamentales para fortalecer el principio de conservación de la cantidad, además de ello la comunicación entre los estudiantes permite aclarar conceptos entre ellos. Para la tarea 2, los estudiantes realizan una correcta identificación de las cantidades entre los conjuntos. En el caso de la tercera tarea una de las estudiantes a pesar de que identifica las cantidades correctamente no logró apropiarse del principio de la conservación de la cantidad.
---	--------------------------------------	---

Situación IV: La unidad.

Propósito: Lograr que el estudiante identifique el objeto u elemento que caracteriza la noción de unidad.

TABLA 14. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN IV

Análisis de la Actividad 1. Observa los objetos u elementos del conjunto.		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Significado de unidad • Conjuntos	• Identificar el significado de la unidad y el número.	En esta actividad uno de los estudiantes presenta dificultad en la realización del conteo de unidades como se muestra en la imagen 21. El conteo mediante la correspondencia se convierte en un factor importante para alcanzar el propósito de la actividad; de manera que en términos generales los estudiantes logran identificar la unidad y al número como una pluralidad de unidades dentro de un conjunto de elementos.

Análisis de la Actividad 2: Diferencia el número uno (1) de la unidad.

Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• La unidad • El número uno • Igualdad • Unicidad	• Identificar la diferencia entre la unidad y el uno.	Para esta tarea los estudiantes utilizan diferentes formas de representar cantidades como: rectángulos, banderas, soles, entre otros; también los estudiantes adquieren algunas intuiciones con las tareas propuestas que les permite hacer una aproximación a la diferencia entre la unidad y el número. En cuanto a la segunda tarea los estudiantes logran identificar esta diferencia sin ningún inconveniente, solo que utilizan una única estrategia la cual corresponde a contar las unidades, finalmente las colorean todas como se observa en la imagen 25.

Análisis de la Actividad 3: Identificando el número como una pluralidad de unidades.

Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Conjuntos. • Unidad. • Pluralidad. • Función sucesora.	• Identificar correctamente la cantidad de unidades que conforman los conjuntos.	En esta actividad las preguntas y ejemplos planteados permitieron que los estudiantes afianzaran sus conocimientos en la primera tarea, logrando de esta manera que identifiquen correctamente la cantidad de unidades que conforman un conjunto. Para el caso de las demás tareas los estudiantes no logran hacer esta identificación correctamente, pues confunden el conjunto con la cantidad de unidades que lo conforman.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Situación V: El sucesor

Propósito: Lograr que el estudiante identifique que cada número tiene un sucesor partiendo desde el número uno.

TABLA 15. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN V.

Análisis de la Actividad 1: Identificando el sucesor		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Conteo • Adición • Sucesor de un número natural.	• Identificar el sucesor de un número natural.	En la tarea uno, los estudiantes logran identificar el sucesor de un número natural, pues encontraron que cada vez que se le suma el número 1 a un número natural resulta el siguiente número o sucesor. En la tarea dos, los estudiantes alcanzaron el propósito de esta, pero uno de ellos presentó una dificultad, entendió que debía escribir en lugar del número sucesor el número que le faltaba a cada número de la columna izquierda para llegar al siguiente, ubicado en la columna derecha. Para el caso de la tarea tres los estudiantes encuentran el sucesor de un número natural completando la secuencia del 1 al 20 como se muestra en la imagen 32.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Situación VI: Conteo y agrupación

Propósito: Lograr que el estudiante realice una construcción del número en diferentes contextos.

TABLA 16. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN VI.

Análisis de la Actividad 1: Conteo		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
- Números - Conteo de uno en uno. - Adición de números naturales.	Realizar el conteo de uno en uno para llegar a una respuesta.	Para esta tarea algunos estudiantes logran contar hasta el número 51 (total de arañas a contar), posteriormente unos cuentan hasta el 23 y otro hasta el 46, se puede identificar que la mayoría de ellos no tienen una apropiación del principio de conservación de la cantidad para cantidades mayores a 20 y se les dificulta realizar la correspondencia uno a uno para cantidades del mismo tipo. De manera que olvidan constantemente el último número que cuentan y por tanto hacen un recuento a partir del número 1.
Análisis de la Actividad 2. Conteo hacia atrás y hacia adelante.		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- | | | |
|---|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Números • Adición • Resta • Conteo | <ul style="list-style-type: none"> • Identificar la cantidad de objetos que representa cada número. • Contar y completar los espacios de forma ascendente y descendente. • Realizar el conteo de 1 en 1 hacia atrás y hacia adelante. | <p>En la primera tarea los estudiantes logran hacer el conteo hacia adelante, algunos de uno en uno y otros de dos en dos, sin ninguna dificultad. En la segunda tarea en la que se debe realizar un conteo regresivo los estudiantes no memorizaron los números para lograr dibujar la cantidad correcta, lo que refleja dificultades del principio de conservación de la cantidad o de la representación del número. En la tercera tarea realizaron la correspondencia uno a uno de cada objeto con el número correspondiente, haciendo un recuento, en este proceso se observa que presentan una dificultad al momento de reconocer al número como el cardinal de un conjunto. Pero a pesar de ello se logra cumplir el propósito de la tarea.</p> |
|---|--|---|

Situación VII: Conteo de dos en dos, tres en tres hasta el número 30.

Propósito: Lograr que el estudiante realice el conteo de dos en dos de forma ascendente y descendente hasta el número 20 y 30.

TABLA 17. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN VII.

Análisis de la Actividad 1: Vamos a contar de 2 en 2 hasta el número 10 y 20.

Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
------------------------	---------------------------	-----------

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

• Conteo ascendente y descendente	• Realizar conteos de 2 en 2.	Para la tarea uno, los estudiantes se encuentran el nivel de la cadena irrompible, es decir cuentan de uno en uno antes de pasar al conteo de dos en dos, uno de los estudiantes logra realizar el conteo hasta el número ocho, por lo que en lugar de contar diez números solo cuenta nueve.
• Adición.	• Completar la secuencia numérica iniciando en 2 de forma ascendente.	Para el caso de la tarea dos inician el conteo con la misma estrategia de la anterior. En el caso de las tareas tres y cuatro los estudiantes lograron identificar el conteo progresivo de dos en dos; mientras que en el conteo regresivo completaron la secuencia a partir del número 20, pero se les dificulta la tarea debido a que lo hacían más despacio y contando con los dedos.
	• Completar la secuencia de 2 en 2 de forma descendente.	En la tarea cinco los estudiantes identifican que los objetos se encuentran agrupados, además cuando estos se encuentran ubicados de forma ascendente se les facilita la realización del conteo. Con lo mencionado anteriormente y como se observa en la imagen 46, los estudiantes realizan el conteo levantando los dedos al momento en que mencionaba un número, en la acción realizada. En ello se logra identificar lo mencionado por Ifrah (1987), en el cual dice que el hombre primitivo al momento de realizar el conteo inicialmente tenía la mano cerrada y levantaba los dedos para poder contar. Finalmente se cumple el propósito de la tarea.

Análisis de la Actividad 2: Avanza de 3 en 3, desde el número 3 hasta el número 30.

Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Conteo ascendente y descendente	• Realizar el conteo de 3 en 3	En la tarea uno y dos los estudiantes presentan dificultades en el conteo partiendo del número 3, pues al iniciar el conteo no lo hacen de tres en tres sino desde el uno. Una de las estrategias más utilizadas para contar son los dedos como se muestra en la imagen 49, en esta acción realizada por ellos se logra identificar lo

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- | | | |
|---|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Adición | <ul style="list-style-type: none"> • Completar la secuencia numérica contando de 3 en 3, de forma ascendente y descendente. | <p>mencionado por Ifrah (1987), en el cual menciona que el hombre primitivo utilizó los dedos para poder realizar su conteo. En cuanto a la tarea tres, los estudiantes cuentan de uno en uno, es decir, que todavía se encuentran en el nivel de la cadena irrompible, para este caso los estudiantes utilizan estrategias como contar con los dedos, conteo en voz alta y el recuento, y de esta manera verificar si los números escritos son los correctos. Cabe señalar que persiste el inconveniente en el conteo regresivo.</p> |
|---|--|---|

Situación VIII. Vamos a formar el número 10 con diferentes números.

Propósito: Lograr que el estudiante identifique los números con los cuales se puede componer y descomponer el número 10.

TABLA 18. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN VIII.

Análisis de la Actividad 1: Agrupar		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño
• Adición • Conteo	• Identificar los números del 1 al 9 que pueden conformar el número 10.	En la primera tarea, los estudiantes identifican los números del 1 al 9 con los cuales se puede componer el número 10, realizan un conteo En el cual al adicionar los números pueden formar el número 10 utilizando diferentes números. En la segunda tarea los estudiantes tienen dificultades de conteo y la desagrupación de los números naturales del 1 al 10; por lo que en la segunda tarea no se logró el propósito de esta. Finalmente, y como se observa en la imagen 53, se logra identificar cómo los

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- | | | |
|--|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Composición y descomposición de números naturales. | <ul style="list-style-type: none"> • Identificar los números del 1 al 9 que pueden conformar los números 10, 8, 6, y 4 | <p>estudiantes utilizan los dedos para realizar el conteo, es así como esta acción se encuentra estrechamente relacionada con lo que menciona Ifrah (1987), en donde el hombre realizaba su conteo utilizando esta misma técnica, inicialmente la mano cerrada levantando los dedos progresivamente.</p> |
|--|---|--|

Situación IX. Vamos a ordenar

Propósito: Lograr que el estudiante identifique el orden y el significado del número.

TABLA 19. ANÁLISIS A POSTERIORI SITUACIÓN VIII.

Análisis de la Actividad 1: El orden y el número.		
Contenidos matemáticos	Expectativas de desempeño	Desempeño

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

-
- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> ● Número ● Posición ● Secuencia numérica. ● Orden | <ul style="list-style-type: none"> ● Utilizar los números ordinales para indicar la posición y orden de los objetos. ● Ordenar correctamente de mayor a menor y de menor a mayor, utilizando los números. conformar el número 10. ● Identificar los números del 1 al 9 que pueden conformar los números 10, 8,6, y 4 |
|--|---|
-

Para la primera tarea algunos estudiantes presentan dificultades en cuanto a la identificación del orden y número. En la tarea dos la mayoría de los estudiantes logran identificar el orden y la correspondencia uno a uno para los números naturales del 1 hasta el 10. La tarea tres por su parte, se logra realizar correctamente, por lo que alcanzaron a identificar el orden de las figuras de acuerdo con la cantidad. En la tarea cuatro los estudiantes realizan correctamente la correspondencia uno a uno.

En la tarea cinco algunos estudiantes presentaron dificultades en el conteo hacia atrás; mientras que otros estudiantes no presentaron dificultades, mostrando una comprensión del concepto del orden y la correspondencia, al igual que en la tarea seis. Por último, algunos estudiantes presentaron una confusión en los tamaños de las flechas a las que les corresponden el cuarto y el quinto lugar, pues no identifican cuál de las 2 flechas es la más grande.

4.4 Recomendaciones acerca de la propuesta

La propuesta de aula diseñada, consta de 9 situaciones con sus respectivos propósitos y actividades, siendo esta de gran ayuda a los docentes en ejercicio y formación, ya que le brinda una variedad de ejercicios que permiten enseñar a los estudiantes la noción de unidad y principio de correspondencia de los números naturales. En relación con lo anterior, las actividades diseñadas fueron encaminadas de acuerdo a los propósitos del presente trabajo, además se implementó para conocer su impacto en relación con el principio de correspondencia y la noción de unidad. Cada una de las situaciones fueron seleccionadas y encaminadas de acuerdo a los referentes teóricos matemáticos e históricos.

Para realizar la aplicación de la propuesta de aula, teniendo en cuenta la situación actual que enfrenta el mundo por el virus del covid-19, se presentó un inconveniente y por ende, no se pudo realizar la implementación en una sola institución, es por esto que se reunieron estudiantes de diferentes instituciones educativas, razón por la cual no fue posible realizar la propuesta de aula en diferentes secciones en tanto que, representaba un riesgo para los estudiantes que fueron objeto de este estudio, debido a esto se optó por implementar las actividades en una sola jornada mañana y tarde. Por este motivo se recomienda desarrollar las actividades en varias secciones puesto que las actividades demandan bastante tiempo. A continuación, se mencionan algunas recomendaciones para el diseño e implementación de la propuesta

Se considera importante que la propuesta se implemente en un tiempo estimado de 8 sesiones cada una de dos horas. Además de lo anterior se recomiendan actividades donde el estudiante pueda representar una cantidad de objetos de manera pictórica mediante gráficos como rayas, puntos, dibujos, entre otros tal como se iniciaron los procesos de conteo en la historia de la humanidad, esto con el fin de favorecer el proceso del paso de lo concreto a lo abstracto.

En la situación 1, se recomienda antes de dar la instrucción de representar cantidades de forma pictórica, presentar un ejemplo como orientación, esto facilita la realización de la tarea y la construcción de la noción del número natural de forma significativa, realizando el paso de lo concreto a lo abstracto.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Se recomienda una actividad donde los estudiantes puedan reforzar el conteo, especialmente a partir del número 5, de modo que tenga más agilidad mental al realizar el conteo de manera ascendente, descendente y aleatoriamente. También realizar más tareas que permitan el manejo del orden descendente debido a la dificultad presentada de forma reiterada por los estudiantes mediante la implementación.

Se recomienda diseñar más tareas donde se pueda trabajar el principio de conservación de la cantidad, puesto que en la situación 3-tarea 1, algunos estudiantes no pueden abandonar la idea de que en el conjunto C los objetos tienen mayor tamaño que los del conjunto D y eso no le permite entender que el número como cardinal de dichos conjuntos no depende de la naturaleza de los mismos y por tanto es igual; además esto implica que aún es necesario estudiar a fondo los procesos de abstracción que experimenta un sujeto causal para llegar a la comprensión de los conceptos.

El número uno, es el punto de partida para la creación de los demás números naturales por medio de sucesiones, es decir, todo elemento en los números naturales se obtiene añadiendo una unidad al número anterior, lo que se llamó el principio de recurrencia; según Schopenhauer, todo número debe su existencia a su antecesor, pues para el hombre es difícil suponer un concepto si antes no ha realizado un proceso de abstracción ayudando a deducir el siguiente, pues esta capacidad de abstracción le permite al niño avanzar en sus conocimientos. Por lo anterior, es recomendable trabajar con los estudiantes el sucesor y el antecesor de un número natural de manera conjunta, para que puedan identificar que al sumarle el número uno a un número natural se obtiene otro número sucesor, de manera que pueda percatarse de que existe un sucesor y un antecesor, por lo que al completar un espacio entre dos sucesores en una secuencia encuentre que cada número tiene un sucesor partiendo desde el número 1.

Es menester mencionar la importancia que tienen las actividades orales para afianzar el conteo regresivo, partiendo de cualquier número natural (2 en 2, 3 en 3) entre otros. Además, es necesario realizar tareas introductorias con respecto al orden, de menor a mayor y de mayor a menor con diferentes ejemplos, donde pueda utilizarse material manipulativo para una buena apropiación de este concepto.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Se recomienda realizar en lugar de dos tareas de orden ascendente, tareas que permitan el manejo del orden descendente debido a la dificultad presentada por los estudiantes en esta tarea.

Para la situación nueve en la tarea 5, donde los conos de helado van ubicados de manera aleatoria y se le pide al estudiante que sean ordenados de mayor a menor, se recomienda aclarar que el cono más grande es el que lleva el número uno dado que es el más grande, puesto que serán ubicados de mayor a menor, debido a que vienen manejando el orden desde el más pequeño al más grande.

4.5 Conclusiones

El presente trabajo permitió caracterizar algunas ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero. Para llevar a cabo la realización de la caracterización se tomó como referente las actividades que conformaron la propuesta de aula, es importante mencionar que en el transcurso de este proceso se identificó que al momento de implementar la propuesta de aula, se identificó que esta debe ser articulada de forma coherente con los propósitos, contenidos matemáticos, el contexto, los aspectos metodológicos, es decir que el docente debe considerar los conocimientos previos de los estudiantes.

De acuerdo con lo anterior, el referente histórico permitió identificar cómo a través de la historia el hombre primitivo aprendió a realizar el conteo utilizando objetos de su entorno y cómo a través de este se le dio una definición formal al número. Esto permitió diseñar actividades en las que se realizará una representación de esos sucesos históricos.

En cuanto al referente matemático, facilitó algunos elementos teóricos que permitieron comprender la noción del número natural desde algunas posturas logicistas y conjuntistas; el referente didáctico proporcionó elementos para el diseño de la metodología del desarrollo del trabajo. Finalmente, el referente curricular proporcionó las orientaciones educativas nacionales del concepto del número natural para grado primero.

Los referentes anteriores dan cuenta de los objetivos específicos, estos permitieron la elección de actividades e implementación de la propuesta de aula. A continuación, se mencionan

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural las conclusiones por cada uno de los objetivos específicos y finalmente se caracterizan algunas ventajas y limitaciones a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad del número natural.

4.5.1 Referente al primer objetivo

Identificar los componentes más notables en la construcción del número natural a través de una revisión histórica, que comprende tres épocas fundamentales para dicha construcción: los griegos en los siglos VI, VII a. C, la edad media comprendida entre el siglo V, el siglo XV y el periodo de la fundamentación de las matemáticas en el siglo XIX.

- Los desarrollos históricos de las matemáticas presentados en la construcción del número natural aportan elementos fundamentales en la formación del docente, así como al aprendizaje de los estudiantes, pues brinda elementos conceptuales, metodológicos y epistemológicos, que el docente puede emplear en sus propuestas educativas para la educación matemática, ya que estos desarrollos le ofrece al maestro herramientas que puede utilizar en el proceso de transposición didáctica, de manera que pueda hacer un contenido matemático enseñable.
- Las investigaciones realizadas referente a la construcción del número natural a través de la historia por parte de los griegos en los siglos VI, VII a. C, la edad media comprendida entre el siglo V, el siglo XV y el periodo de fundamentación de las matemáticas en el siglo XIX, permitieron identificar los aportes importantes que se dieron en el transcurso de aquella época para la conceptualización del número natural, tales como las definiciones numéricas, la ordinalidad, la cardinalidad, la medida y los conjuntos.
- Adicional a lo anterior, esta revisión permitió comprender que las matemáticas son un constructo sociocultural, que surge mediante las necesidades presentadas en cada una de las épocas y que en la actualidad sigue evolucionando. En ese sentido, dicha revisión dio lugar a identificar estrategias que permitieron que los estudiantes se apropien de una noción de número natural a partir de una construcción que inicia con lo concreto, pasa por lo pictórico hasta llegar a lo numérico.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- De acuerdo con Ifrah (1987), el hombre atendiendo a sus necesidades básicas de supervivencia utilizó como primera medida el hueso como representación del número y a medida que fue organizándose recurre a la habilidad abstracta de contar, para luego a partir del elemento base aprender a estimar, evaluar y medir diferentes magnitudes. De manera que los estudiantes utilizan los dedos en primera instancia, para contar cantidades pequeñas y posteriormente a medida que avanzan en el conteo lo hacen de manera abstracta y con ello aprenden a estimar, evaluar y medir diferentes magnitudes.
- En este caso el niño identifica la unidad con cada uno de los elementos que puede contar siguiendo un orden, pero cuando esto cambia presenta dificultades, puesto que para el niño deducir si la cantidad permanece al cambiar el orden de los elementos le resulta una tarea difícil puesto que no puede recordar su orden inicial. En cuanto al principio de correspondencia ocurre cuando el niño cuenta los elementos y posteriormente los relaciona con un conjunto de elementos.
- De acuerdo con Vásquez (2010), la ordinalidad, es el principio sobre el que se construyen los números naturales como un sistema simple y ordenado, además define los números naturales en tanto que pertenecen a una estructura en la que quedan claras las propiedades, las operaciones y las relaciones de orden.
- El número se constituye como un objeto de la lógica debido a la estructura que se creó en torno a él en lo que se refiere a las propiedades que le fueron adjudicadas y las proposiciones que pudieron formularse lo que le otorgó sentido, es por esto que la existencia del número natural puede explicarse a partir de una teoría estructurada desde la lógica alejada de la experiencia inmediata y la intuición.
- En cuanto Frege, la diferencia entre unidad y uno se refiere a que el uno es un calificativo de la unidad y la unidad son cosas que deben contarse, las cuales tienen sus propias características que los diferencian; Dedekind afirma que la correspondencia uno a uno en los conjuntos es la base de la creación del concepto del número natural; para Giuseppe Peano no es importante el significado de número natural si no como estos se relacionan entre sí.

4.5.2 Referente al segundo objetivo

Articular los elementos identificados en los referentes históricos, referentes curriculares y referentes didácticos en el diseño de una propuesta de aula para favorecer la comprensión de la noción de unidad y el principio de correspondencia del número natural en el grado primero.

- Para el diseño de la propuesta de aula, fue necesario conocer el aporte de los referentes como lo son: el referente histórico, el referente curricular y el referente didáctico; cada uno de estos permitió conocer la pertinencia de cada una de las actividades planteadas. Cada una de las etapas anteriormente mencionadas permitió darle una definición al número natural, por ello se diseñó una secuencia en la que se consideran como elementos fundamentales el paso de lo pictórico a lo numérico, la correspondencia uno a uno, correspondencia biunívoca, el orden, la unidad y cardinalidad.
- El análisis del referente curricular permitió identificar orientaciones para el diseño de cada una de las actividades como: los conocimientos básicos que deben adquirir los estudiantes en el grado primero, la importancia del sistema de los números naturales en el desarrollo de pensamiento numérico, centrado en habilidades numéricas flexibles y creativas que permitan resolver, proponer, argumentar, razonar sobre el sentido, significado de los números naturales y la numeración. Además, se proponen tres aspectos básicos importantes: la comprensión de los números, la numeración, comprensión del concepto de las operaciones, los cálculos con números, las aplicaciones de números y operaciones, los procesos como por ejemplo: el contexto y el razonamiento que fue de gran importancia en este trabajo, puesto que para el desarrollo de la propuesta de aula fue necesario tener presente la edad de los estudiantes y el nivel escolar de desarrollo en el que se encuentran; por lo que se partió desde lo pictórico para posteriormente dar el paso a lo numérico, de manera que los estudiantes realizarán actividades informales para que pudieran avanzar en su razonamiento matemático mediante el desarrollo de actividades hacia la noción del número natural.
- En cuanto al referente didáctico permitió conocer la pertinencia de cada una de las actividades planteadas y posteriormente diseñar actividades que estén contextualizadas,

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

según Vásquez (2020), adaptar contenidos de acuerdo a la comunidad con la que se pretende trabajar; siguiendo esta línea de argumentación Vásquez (2010), menciona que se deben realizar transposiciones didácticas de contenido matemático.

Luego de la realización de la implementación de la propuesta de aula, la cual contenía elementos teóricos importantes propuestos por Ifrah, Dedekind, Cantor, Peano y Frege, en cuanto a la noción del número natural, se logró evidenciar que los estudiantes se apropiaron o recordaron conceptos; sin embargo, se identificaron algunas ventajas y limitaciones, las cuales se mencionan más adelante.

4.5.3 Referente al tercer objetivo

Analizar los resultados de la implementación de la propuesta de aula, a luz de los referentes teóricos y el análisis a priori, de manera que se puedan identificar los elementos didácticos y pedagógicos que favorezcan la enseñanza-aprendizaje de los números naturales en el grado primero.

Al realizar el análisis de cada una de las situaciones, se observó que estas son pertinentes para el grado primero; a continuación, se mencionan los resultados obtenidos después del análisis a priori.

- Las actividades realizadas en la propuesta de aula de acuerdo con la correspondencia uno a uno son de gran importancia, debido a que desde los primeros años el niño identifica este principio de correspondencia al relacionar objetos por ejemplo: entre un grupo y otro de igual cantidad de elementos, como, 5 muñecos y 5 sillas, al momento en que el niño asigna a cada muñeco una silla que le corresponda, sin que quede ningún elemento sin relacionarse otro, está realizando la correspondencia de manera que después puede relacionar elementos de dos conjuntos con la misma cantidad formando pares.
- En la realización de las actividades se identificó que la comunicación es importante porque permite a los estudiantes adquieran conocimientos y construyan vínculos en relación con las nociones informales e intuitivas, además del lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas. Por otro lado, menciona que la comunicación matemática

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

resulta del trabajo cooperativo cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando puede construir, explicar desde su mundo real un fenómeno como la representación gráfica.

- Los estudiantes frecuentemente utilizan estrategias individuales para la realización de las tareas tales como; la realización del recuento, el conteo en voz alta, el conteo utilizando los dedos, este último se encuentra estrechamente relacionado con lo mencionado por Ifrah (1987), el cual menciona que el hombre primitivo utilizaba los dedos para realizar el conteo, para ello era necesario tener la mano cerrada o abierta e ir levantando o cerrando los dedos de forma consecutiva.
- Trabajar el principio de correspondencia uno a uno es importante para que el estudiante aprenda a identificar las unidades, relacionándolas con las cantidades correspondientes, de manera que pueda reconocer el número como un calificativo de la unidad, estableciendo una diferencia entre la unidad y el uno para que pueda hacer una apropiada conservación de la cantidad.
- El principio de correspondencia uno a uno en el proceso de emparejamiento cuando se relacionan elementos de dos conjuntos deja de lado la naturaleza del objeto; es decir, no tiene en cuenta las características físicas del objeto, sino su condición con respecto al número.
- En la asignación de un cardinal a un conjunto, los estudiantes pueden hacer el paso de lo concreto a lo abstracto a través de la representación numérica de la cantidad, es decir, realizan un acercamiento a la noción de número como una representación de la cantidad y al número como cardinal de un conjunto.
- Las actividades donde se trabaja el número como sucesor, permiten ver cómo están conformados los números naturales de la forma $n + 1$, debido a que el estudiante puede identificar que para encontrar el sucesor de un número natural es necesario sumar el número 1 y que siempre al realizar esta acción tendrá como resultado el siguiente número natural.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- Realizar actividades de juego, que tiene como propósito identificar los números faltantes que se encuentran siguiendo flechas en distintas ubicaciones y direcciones por ejemplo: de derecha a izquierda, de izquierda a derecha, de arriba a abajo y no en una sola dirección es de gran importancia, puesto que permite al estudiante realizar el conteo siguiendo una secuencia ascendente con respecto al número, pero en diferentes direcciones, es decir, de derecha a izquierda como un acercamiento al conteo regresivo .
- Se evidencio una dificultad en el conteo regresivo de 2 en 2 y de 3 en 3, puesto que los estudiantes en este caso identifican que para hacer el conteo hacia atrás en el lugar de agregar cantidades debían quitarlas, lo que les dificultó la tarea de modo que lo hacían más despacio, realizando un recuento con los dedos iniciando desde el número uno.
- Las tareas donde se trabaja el orden del objeto de acuerdo con el tamaño son adecuadas para trabajar la correspondencia biunívoca, pues a simple vista el niño puede identificar la correspondencia del orden de menor a mayor. Contrariamente cuando los objetos se ubican de manera aleatoria confunden la ubicación utilizando los números del 1 al 10.
- Aunque la propuesta de aula está enfocada principalmente en el conteo del 1 al 10, para los estudiantes realizar el conteo abstracto hasta el número cinco les surge de manera natural, esto les ayuda a que de manera progresiva aumenten su capacidad de conteo hasta el diez y pueda progresar en el conteo abstracto. Sin embargo, debido a que el niño en su vida cotidiana está acostumbrado a añadir cantidades contando de manera ascendente, se le dificulta el conteo regresivo.
- A partir de la base 10 es necesario realizar agrupaciones uniando los elementos de 10 en 10 formando centenas, donde cada una puede obtenerse con 10 decenas unidas, lo que le permite al niño acceder al conteo de cantidades más grandes.

Teniendo presente lo mencionado en los objetivos específicos, se considera pertinente enseñar los conceptos de correspondencia uno a uno, correspondencia biunívoca, cardinalidad, orden, sucesor, conteo de forma ascendente y descendente, conteo a partir de un término; esto con el fin de que el estudiante se aproxime a la construcción de elementos fundamentales relacionados con la noción del número natural.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

4.6 Algunas ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad para el grado primero de educación básica

4.6.1 Referente al objetivo general

Identificar las ventajas y limitaciones para la enseñanza y el aprendizaje que permita hacer una aproximación a la noción de número natural a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad en el grado primero de Educación Básica primaria.

La implementación de la propuesta permitió identificar algunas ventajas y limitaciones, las cuales permiten realizar ajustes a las actividades para una nueva implementación.

De acuerdo con las necesidades del trabajo para determinar las ventajas y limitaciones encontradas en la implementación se tomó como base la micro-ingeniería didáctica, debido a que esta permitió hacer una recolección de los fenómenos y dificultades que se presentaron en la clase en el momento de implementar la propuesta de aula.

Dentro de la ingeniería didáctica se tuvo en cuenta los objetivos específicos de la investigación, así como el marco teórico didáctico, el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza y los conocimientos didácticos. Posteriormente en la concepción y análisis a posteriori de las situaciones didácticas durante la investigación de la implementación del trabajo de aula, se identificaron las dificultades presentadas por los estudiantes, donde se realizó la puesta en acto, de manera que se dieron las orientaciones precisas sobre los diferentes conceptos a manejar para que el estudiante pudiera contextualizarse, además de identificar algunas estrategias utilizadas en el desarrollo, según los requerimientos adaptados a la noción de número natural.

Se llevó a cabo la experimentación, análisis a priori y validación de la implementación de la propuesta de aula, donde se recogieron los datos obtenidos en el transcurso de la práctica, lo observado en la realización de las secuencias de enseñanza, también lo aprendido, así como lo puesto en práctica por los estudiantes.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Luego de implementar las actividades de la propuesta, se caracterizaron las ventajas y limitaciones a partir del principio de correspondencia y la noción de unidad en la constitución del número natural, que permitieron tomar decisiones didácticas además de pedagógicas para favorecer la enseñanza del número natural en el grado primero, pues este es el primer sistema numérico con el que el niño se enfrenta al iniciar el conteo, entre otras cosas, su primer acercamiento con una de las nociones abstractas de la matemática. A continuación, se presentan las ventajas y limitaciones de la propuesta, conforme a los objetivos específicos propuestos para atender a la problemática:

Ventajas:

- De acuerdo con Ifrah (1987), en la antigüedad el hombre sin estar consciente de ello utilizaba el principio de correspondencia para el conteo de sus ovejas y como estrategia para no perder ninguna. De manera que la apropiación de este principio, por parte de los estudiantes permite relacionar los objetos con diferentes representaciones pictóricas como por ejemplo las rayas, esta es una estrategia que puede ser utilizada por el docente para que los estudiantes logren pasar a las representaciones abstractas como los números; logrando el paso de lo concreto a lo abstracto con la ayuda del paso de lo pictórico a lo numérico.
- El principio de correspondencia uno a uno permite que los estudiantes en la situación I, tarea 1 y 2, simulen las muescas realizadas en la antigüedad por el hombre primitivo para el conteo; de acuerdo con lo anterior y lo mencionado por Ifrah (1987) el estudiante al realizar este emparejamiento se aproxima a una noción abstracta. El hecho de involucrar a los estudiantes en situaciones similares a las que ocurrieron históricamente en la construcción del concepto del número natural permite otra forma de acercamiento a dicho concepto, entendiendo que el número fue constituido a través de la historia como una necesidad del hombre de organización y subsistencia.
- Una de las ventajas a través del principio de correspondencia, para los estudiantes fue que lograron hacer la representación pictórica de la cantidad de elementos de un conjunto de 10 elementos ubicados de manera aleatoria. También conduce a la aproximación de otros conceptos matemáticos, pues al momento de presentarle a los estudiantes los conjuntos

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

con objetos donde deben realizar una representación por medio de rayas y más adelante con números, puede hacer el paso de lo pictórico a lo abstracto a través de la representación numérica de la cantidad, identificando el cardinal de un conjunto.

- La correspondencia biunívoca, tiene como ventaja que los estudiantes logren identificar al número como una representación de los elementos de un conjunto, especialmente cuando se trata de cantidades pequeñas (del 1 al 5), aunque la tarea consistía en identificar los números del 1 al 10, donde se conserva el principio de la cantidad. Además, permite que el niño pueda identificar el número como la representación de una cantidad de elementos de un conjunto y de manera ordinal, lo ayuda a describir la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto totalmente ordenado, en el que se ha tomado uno de los elementos como inicial.
- La presentación de unidades dentro de un conjunto permite que los estudiantes logren con la tarea 1, identificar la unidad en un conjunto de elementos como pluralidad de unidades y a los números naturales del 1 al 3, propuestos en la tarea. Allí se observa que identifican el uno como un calificativo de la unidad, en este caso las caritas son cosas que se deben contar, además estas poseen las mismas características, pero a la vez son diferentes entre sí, (en este caso los colores), siendo la unidad un objeto al cual se le asigna la propiedad de uno.
- Una ventaja de trabajar la unidad con los estudiantes, es que permite utilizar el principio de correspondencia uno a uno; de esta manera identifican las unidades, relacionándolas con las cantidades correspondientes, para reconocer el número como un calificativo de la unidad estableciendo una diferencia entre la unidad y el uno, debido a que para los estudiantes es importante contar cada unidad y finalmente colorearlas de forma conjunta como es el caso de la situación IV.
- En la función sucesor del número natural cuando se presenta de la forma $n + 1$, permite que el estudiante logre identificar que para encontrar el sucesor de un número natural es necesario sumar el número 1 y que siempre que se realice esta acción tendrá como resultado el siguiente número natural.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- El principio de conservación de la cantidad de acuerdo con la propuesta de Piaget es uno de los primeros pensamientos matemáticos del niño y para que este se dé, el niño debe hacer una abstracción del número, es así como trabajar tareas que posibiliten el desarrollo de este principio permitió que los estudiantes realizarán el conteo con cantidades pequeñas sin hacer un recuento.

Limitaciones

- Una de las limitaciones presentadas en la realización de la propuesta de aula en la primera situación ocurre en el paso de lo pictórico a lo numérico, puesto que a medida que aumenta el número de objetos como, por ejemplo, cuando contaban 7 ovejas, perdían constantemente la cuenta, por lo que cada que dibujaban una, realizaban el conteo de todas las que habían dibujado, para no pasarse de la cuenta.
- Otra de las limitaciones, se presentó en la situación 2 actividad 1 tarea 2, cuando un estudiante en lugar de identificar el número como etiqueta dentro de un conjunto realiza la suma de los números, presentándose además un error en el resultado de la suma debido a que el estudiante cuenta solo 4 veces el cuatro y no cinco, lo que evidencia que no tiene una apropiación del principio de conservación de la cantidad. Además, se le dificulta el conteo por agrupación de términos, es así como uno de los estudiantes realizó un conteo del número que se encontraba dentro del conjunto, el estudiante no identificó los números como etiqueta, por tanto, procede a sumarlos.
- En la situación 3 en la tarea relacionada con la conservación de la cantidad, fue evidente lo planteado por Piaget, puesto que algunos estudiantes presentaron dificultades al momento de identificar si ambos rectángulos tenían la misma cantidad o número de elementos, pues en uno de ellos las velas estaban separadas y no quedaba espacio, mientras que en el otro las velas estaban juntas y sobraba espacio, para ellos, el hecho de que en uno de los rectángulos tenga más espacio indica que tiene menor número de velas, mientras que al estar distribuidas ocupando todo el espacio indica que tiene más elementos; de acuerdo con lo mencionado anteriormente, la limitación que presenta la propuesta se debe a la falta de explicación y ejercicios que permitieran al estudiante comprender el concepto de conservación de la cantidad.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- Una de las limitaciones para los estudiantes en cuanto a la unidad se refiere a la identificación de unidades dentro de un conjunto, puesto que, les causa dificultad relativizar la unidad e imaginar que ese conjunto que es una unidad puede contener otras unidades, dejando entrever que la unidad para ellos es indivisible.
- Desde una postura logicista de acuerdo con Frege, una limitación para los estudiantes de grado primero se presentó en la conservación de la cantidad cuando el objeto se encuentra en diferentes posiciones, es decir, no está de forma ascendente ni de forma descendente, siendo este el motivo por el cual los estudiantes se confunden al deducir si la cantidad permanece, debido a que para el niño es difícil imaginarse los objetos en la posición inicial después de haberle cambiado la secuencia.
- En la correspondencia biunívoca, se presentó una limitación al momento en que algunos estudiantes no logran identificar al número como una representación de los elementos de un conjunto, cuando se trata de cantidades mayores a 5 hasta 10, donde no conservan el principio de la cantidad.
- Una de las limitaciones presentadas en la situación 6, actividad 1, tarea 1 es que a los estudiantes se les dificulta contar hasta el número 51, puesto que presentan dificultades para contar cantidades mayores que 20 y 29, por consiguiente, se le dificulta realizar la correspondencia uno a uno. En la realización de la actividad perdían constantemente la cuenta e iniciaban nuevamente desde el número uno, algunos solamente alcanzaron a llegar hasta el 23 y 46. Debido a lo anterior se considera importante realizar una prueba diagnóstica que permita identificar qué números conocen los estudiantes.
- En la situación 7, donde el conteo iniciaba de 2 en 2 y 3 en 3, los estudiantes todavía se encuentran en el nivel de la cadena irrompible, puesto que, para poder iniciar el conteo en alguno de estos dos números, primero debía iniciar en el número uno, después de ello lograban mediante el conteo con los dedos identificar los números de forma ascendente; también fue evidente que los estudiantes no lograron realizar el conteo de forma regresiva.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

- Referente a la situación 9, en la actividad 1, en la cual se debía ordenar, fue necesario explicar a los estudiantes las características de cada una de las posiciones, (primera, segunda, tercera, entre otras) debido a que este era un tema nuevo, finalmente y gracias a la intervención se logró que los estudiantes realizarán las tareas. En esta actividad también se observó que los tamaños de algunos gráficos no eran diferenciables a simple vista en cuanto a su tamaño lo que confundió a los estudiantes, por tal motivo se presentó una dificultad en cuanto a la identificación de los tamaños de estos.
- En la descomposición de los números, a los estudiantes se les presentó una limitación al identificar números que al descomponerlos dieran como resultado 10, 8, 6 y 4, en tal caso sólo encontraban una opción para formar estos números, ya que, para buscar otras maneras de formarlo, debían sumar varias veces diferentes números para identificarlos, pero no lo lograron. Es así como se evidencio que los estudiantes tienen dificultades para desagrupar números naturales del 1 al 10.

Referencias Bibliográficas

Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *EMA*, (8), p. 30-46.

Antezana, R. (2019), *Demostración de teoremas de números naturales en el sistema axiomático de Giuseppe Peano*. Recuperado de:

<http://portal.amelica.org/ameli/jatsRepo/59/59584009/59584009.pdf>

Artigue, M; Douandy, R; & Moreno, L.; (1995), ingeniería didáctica en educación matemática.

Ed. Pedro Gómez. D. R. © 1995 una empresa docente ® & Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Bares, J. & Climent, J. (1927). *Continuidad y números irracionales*, Quinta edición 1927.

Traducción provisional y comentarios por J. Bares y J. Climent. Tomado de:

<https://www.uv.es/jkliment/Documentos/Dedekind.pc.pdf>

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras*. (Tesis doctoral) no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

Bedoya, L. (2003). Peano, Lawvere, Peirce: Tres axiomatizaciones de los números naturales. Tesis. Universidad del Tolima Facultad y Ciencias. Ibagué

Boyer, C. (2001) *Historia de la matemática*. Madrid: cast.: Alianza Editorial, S.A.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Calderón, N. (2014). *Diferentes construcciones del número real*. Trabajo de maestría. Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.

Camargo, L. (SF). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática Recursos para la captura de información y el análisis*.

Cánovas, D. (2016). La construcción del concepto de número en el niño durante la etapa de Educación Infantil (tesis de pregrado). Universidad de Alicante, España. Tomado de: https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/56069/1/La_construccion_del_concepto_de_numero_en_el_nino_CANOVAS_IBANEZ_DAMARIS.pdf

Cantor, G. (1915). Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers (P. Jourdain, Trans. 1 ed) New York: Dover Publications, INC.

Castro, E.; Rico, L; & Castro, E. (1987). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. España: Síntesis.

Chamorro, M.C. (2005). Didáctica de las matemáticas. Madrid: Pearson Prentice Hall. Tomado de: <https://unmundodeoportunidadesblog.files.wordpress.com/2016/02/didactica-matematicas-en-infantil.pdf>.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado*. La transposition didactique. Du savior savant au savior enseigné (traducción Claudia Gilman, tercera edición). Buenos Aires, Argentina. Aique, grupo editor S.A.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Grattan-Guinness, I. (2000). *The search for mathematical roots, 1870-1940: logics, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel* (1 ed.). New Jersey: Princeton University Press.

Geiss, C. y Barrios, F. (2005). *Álgebra Superior II. Algunas propiedades de los números naturales*. Rojo, A. (1986). *Álgebra*. Lima: Ateneo

Gómez, B. (SF). *Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud*. Universidad de Valencia, España.

Gutiérrez, L. (2017). *Construyendo algunos fundamentos del concepto de número y el sistema de numeración decimal, en estudiantes de transición, a través de una propuesta de aula que involucra los conceptos de cardinal, orden y agrupación*, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación, sexta edición*. México Ed. Mc Graw Hill.

Ifrah, G. (1987). *Las Cifras, Historia de una gran invención*. España: Alianza.

Klein, J. (1992). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). New York: Dover Publications, Inc.

López, C. (SF). *La intuición y la matemática*.

<http://www.palermo.edu/ingenieria/downloads/CyT6/6CyT%2004.pdf>

Luque, C. (julio, 2002). *Concepto de número natural según Giuseppe Peano*. En: Caicedo, c. y otros (comité organizador), *Encuentro de geometría y sus aplicaciones*. Ponencia llevada

- Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural a cabo en el XIII Encuentro de Geometría y I de Aritmética, (pp. 45-85). Bogotá, Colombia
- MEN, Ministerio de Educación Nacional, República de Colombia (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas. <http://www.mineducación.gov.co>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de competencias. Bogotá: <http://www.mineducacion.gov.co>
- Palenzuela, H. (2017). *¿Por qué incluir la historia de la matemática en el aula?* Almería, España.
- Páramo, L. & Rosero, A. (2016). *Caracterización de la noción de número natural desde una perspectiva logicista: el trabajo de Gottlob Frege*, Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova método expósita*. Florentiae. Ediderunt Fratres Bocca. Tomado de: <https://archive.org/details/arithmeticespri00peangoog/page/n6/mode/2up>
- Piaget, J. (1991). Seis estudios de psicología. *Six Etudes de Psychologie*. Editorial Labor, S.A. Barcelona.
- Recalde, L. (S.F). *Lecturas de historia de las matemáticas*, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Rico, Marín, Lupiáñez & Gómez (junio 2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma + 58*. (1), pp. 7-23.

Salas, B. (2016). *Frege esencial, la aritmética es lógica*. España: Montesinos.

Salazar (2005, diciembre 12). El conocimiento pedagógico del contenido como categoría de estudio de la formación docente. *Actualidades Investigativas en Educación*. Tomado de: [file:///C:/Users/xx/Downloads/9139-Texto%20del%20art%C3%ADculo-36922-1-10-20150112%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/xx/Downloads/9139-Texto%20del%20art%C3%ADculo-36922-1-10-20150112%20(2).pdf)

Stevin, S. (1964). Les oeuvres mathématiques de Simón Stevin de Burgues. Tomado de:

<https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/mpiwg/online/permanent/library/NUA55ZF4/index.meta&pn=7&ws=3&mode=txttool&start=1>

Stevin, S. (1585). *Libro de Aritmética. Las definiciones*. 1ª Ed. en Francés, editor Girard Leyden, 1625.

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad*. Barcelona, España. Tomado de:

<https://www.tesisenred.net/bitstream/handle/10803/290741/etm1de1.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Vásquez, J. L. (2020). *Conocimiento didáctico para la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida a través de la construcción de sentido*

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural
numérico en la formación del docente de primer ciclo de educación básica primaria.
Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Vásquez, N. (2010). *Un ejercicio de transposición didáctica en torno al concepto de número natural en el preescolar y el primer grado de educación básica primaria.* Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Ventajas y limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de la noción del número natural

Anexo 1. Propuesta de aula

[Diseño secuencia para los niños de grado 1° .pdf](#)