



**NIVELES DE MATEMATIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS ARITMÉTICOS MIXTOS ADITIVOS (PAMA)**



**LIC. LUZ PIEDAD COQUE SAAVEDRA
ESP. PAOLA ANDREA MORALES ROJAS**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES
TULUÁ – VALLE DEL CAUCA
2018**



**NIVELES DE MATEMATIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE
PROBLEMAS ARITMÉTICOS MIXTOS ADITIVOS (PAMA)**



**LIC. LUZ PIEDAD COQUE SAAVEDRA
ESP. PAOLA ANDREA MORALES ROJAS**

**Tesis de Maestría para optar al título de Magister en Educación
Énfasis Educación Matemática y Ciencias Experimentales**

**DIRECTORA:
MG. DEISY ZEMANATE CUELLAR**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y
CIENCIAS EXPERIMENTALES
TULUÁ – VALLE DEL CAUCA
2018**

**NIVELES DE MATEMATIZACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ARITMÉTICOS MIXTOS ADITIVOS (PAMA)**

NOTA DE ACEPTACIÓN

JURADO 1

JURADO 2

TUTORA

Mg. DEISY ZEMANATE CUELLAR

AGRADECIMIENTOS

A nuestro Padre Celestial por darnos Su luz y bondad, por darnos Su mano en este importante recorrido que un día emprendimos en nuestra vida profesional.

A la Universidad del Valle por abrírnos las puertas de sus aulas para que nos formemos académicamente en aras de una sociedad mejor.

Al Gobierno de Colombia en cabeza del señor presidente Dr. Juan Manuel Santos y al Ministerio de Educación Nacional, por permitir que a través del programa Becas para la Excelencia, pudiéramos acceder a estudios posgraduales que nos dieran la posibilidad de cualificarnos profesionalmente.

A nuestros maestros por entregarnos su calidez humana y lo mejor de sus conocimientos, en especial a la Magister Deisy Zemanate Cuéllar quien con su paciencia, sabiduría y don de gentes ha orientado acertadamente este proceso investigativo.

A la Institución Educativa La Moralia, en cabeza del Señor rector, Lic. Oswaldo Castro Ortiz por permitirnos desarrollar este proceso investigativo en su comunidad y con ello sembrar una semilla que propenda por una mejor calidad de educación matemática en sus estudiantes.

A nuestras familias por todo el amor y paciencia que nos han otorgado, pues en ocasiones no hemos compartido espacios ni momentos juntos por intentar dar lo mejor de nosotras en este difícil pero satisfactorio camino.

A todos los compañeros y compañeras por los momentos compartidos, por las sonrisas y el buen humor que siempre han sido un aliciente para no claudicar.

A todos aquellos que de una u otra manera se han comprometido con nuestra carrera y formación. A todos ellos, un enorme y eterno ¡GRACIAS!

RESUMEN

Esta investigación se enmarca desde la didáctica de las matemáticas, en la línea del aprendizaje y se sitúa en el contexto de los estudiantes. Dado que el objetivo es determinar el nivel de matematización que alcanzan los estudiantes de grado tercero al desarrollar una secuencia didáctica abordando la resolución de Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA), se toman como referentes la Teoría de la Educación Matemática Realista de Freudenthal, y el Campo Conceptual Aditivo de Vergnaud. De la misma manera, para la construcción, ejecución y análisis de la Secuencia Didáctica se estudian los documentos curriculares del Ministerio de Educación, tales como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Estándares Básicos de Competencia y los Derechos Básicos de Aprendizaje; los aspectos matemáticos y didácticos que buscan el desarrollo de competencias matemáticas con relación al objeto en mención. Esta investigación se llevó a cabo mediante un enfoque cualitativo de tipo descriptivo y se tomaron como instrumentos de análisis: rejillas, videos y fotografías. Resultó de gran importancia para los educandos, presentar problemas contextualizados, en tanto que, no sólo les permitió reflexionar sobre su realidad, sino que además se logró el alcance del objetivo propuesto.

Palabras claves: Resolución de problemas, niveles de matematización, problemas aritméticos mixtos (PAMA), campo aditivo.

ABSTRACT

This research is framed from the didactics of mathematics, in the line of learning and is placed in the context of students. Given that the objective is to determine the level of mathematization reached by third grade students when developing a didactic sequence addressing the solution of additive mixed arithmetic problems, they are taken as references the Freudenthal Realistic Mathematical Education, and the Theory Additive Conceptual Field of Vergnaud. In the same way, for the construction, execution and analysis of the Didactic Sequence the curricular documents of the Ministry of Education are studied, such as the Mathematics Curriculum Guidelines, Basic Standards of Competence and the Basic Rights of Learning; the mathematical and didactic aspects that seek the development of mathematical competences in relation to the object in question. This research was carried out through a qualitative approach of descriptive type and were

taken as analysis tools: grids, videos and photographs. It was of great importance for the learners to present contextualized problems, while not only allowing them to reflect on their reality, but also the achievement of the proposed objective was achieved.

Keywords: Problem solving, mathematics levels, mixed arithmetic problems, additive field.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO 1.....	5
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	5
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	5
1.2 OBJETIVOS.....	11
1.2.1 Objetivo general.....	11
1.2.2 Objetivos específicos.....	11
1.3 JUSTIFICACIÓN.....	11
1.4 ANTECEDENTES.....	14
CAPÍTULO 2.....	27
2. MARCO CONCEPTUAL.....	27
2.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR).....	27
La didáctica desde la EMR.....	34
2.2 LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS MIXTOS ADITIVOS (PAMA).....	35
¿Qué es resolver un problema?.....	35
Perspectiva matemática.....	42
Perspectiva didáctica.....	46
Perspectiva curricular.....	51
CAPÍTULO 3.....	56
3. MARCO METODOLÓGICO.....	56
3.1 METODOLOGÍA.....	56
3.2 ASPECTOS CONTEXTUALES.....	58

CAPÍTULO 4.....	73
4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	73
4.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS.....	73
4.2 CONCLUSIONES.....	119
4.2.1 Con respecto al objetivo 1.....	119
4.2.2 Con respecto al objetivo 2.....	120
4.2.3 Con respecto al objetivo 3.....	120
4.2.4 Con respecto al objetivo general.....	122
4.3 RECOMENDACIONES.....	123
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	124
ANEXOS.....	127
Situación 1: La mora, fruta que enamora.....	128
Situación 2: Una semilla de café, una historia por conocer.....	141
Situación 3: “... Y nos fuimos de fiesta”.....	151
Momento para reflexionar.....	166

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Resultados prueba SABER grado tercero en matemáticas. Competencia: Razonamiento.....	8
2. Resultados pruebas SABER grado tercero en matemáticas. Competencia: Resolución de problemas.....	9
3. Niveles de matematización.....	32
4. Ejemplo de función biyectiva en dos conjuntos finitos.....	45
5. Rejilla de aspectos curriculares.....	59
6. Rejilla de relación de los aspectos curriculares, disciplinares y didácticos	62
7. Rejilla de estructura semántica de los problemas de la secuencia didáctica.....	65
8. Rejilla que asocia las estructuras semánticas de las situaciones con los niveles de matematización.....	71
9. Tabulado de los resultados de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica.....	73

ÍNDICE DE FOTOS

1. Ejemplo de estudiante que omite las unidades de primer orden.....	93
2. Ejemplo de estudiante que elige las operaciones correctas con dificultad al desagrupar en la resta.....	97
3 y 4. Estudiante que hace conteo con los dedos.....	98
5. Planteamiento esperado.....	101
6. Planteamiento propuesto por un estudiante.....	101
7 y 8. Uso de los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$).....	102
9 y 10. Representación de las cantidades a través de billetes y monedas.....	105
11. Ejemplo de estudiante que usó más de dos operaciones en la resolución del problema creado por él mismo.....	109
12. Ejemplo de estudiante que usa cantidades hasta de 7 cifras sin dificultad.....	110
13. Ejemplo de problema planteado con incoherencia.....	112
14. Ejemplo de problema planteado y resuelto con coherencia.....	113
15, 16 y 17. Ejemplo de problemas planteados y resueltos con coherencia.....	115
18 y 19. Ejemplo de aplicación correcta de operaciones, desarrollo eficiente de algoritmos y respuesta coherente.....	117

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado, se inscribe en la línea de investigación denominada Didáctica de las Matemáticas, en tanto que pretende brindar herramientas curriculares, disciplinares y didácticas que contribuyan al desarrollo del pensamiento numérico de niños y niñas del grado tercero en el campo de los Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA).

Dada la importancia de las matemáticas en el desarrollo cognitivo de los seres humanos, lo que implica, entre otras cosas, la necesidad de aprender a resolver problemas, la investigación que sobre este tema se presenta, se aborda desde cuatro capítulos, a saber:

En el capítulo uno, se explica la naturaleza del problema; allí se plantean las situaciones que preocupan al equipo investigador quien tiene en cuenta los procesos y pensamientos matemáticos como pilar de la actividad en el aula, también se enuncian las principales dificultades a las cuales se enfrentan cotidianamente maestros y estudiantes cuando se trabaja en el campo anteriormente mencionado.

En este orden de ideas, las situaciones que se describen en el planteamiento del problema, conducen a la formulación de una pregunta problematizadora y a un objetivo general y tres específicos que esperan, con la aplicación, análisis y reflexión de una serie de tareas organizadas y sistemáticas, contribuir a la respuesta de dicha pregunta.

De igual manera, en el capítulo uno, se explica también la necesidad de abordar el problema de investigación, esto se enmarca en la importancia que tiene para el individuo, para la familia y para la sociedad, el desarrollo de competencias matemáticas en la resolución de problemas, específicamente Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA). También, se hace un breve resumen de cómo ha sido el papel de los estudiantes colombianos en las pruebas PISA, cuál ha sido el papel de la Institución Educativa La Moralia en ese proceso, y cómo el conocimiento empírico del estudiante y la actividad del docente se constituyen en la base para empezar a marcar un derrotero de acción que oriente cuáles son los elementos necesarios para llevar a cabo, con éxito, la resolución de problemas, que no es otra cosa, sino el eje orientador de la actividad matemática.

Otra pieza fundamental, que orienta la presente investigación, es el registro de antecedentes locales, nacionales e internacionales, que a nivel de Licenciatura, Maestría

o Doctorado, también han abordado la temática trabajada desde las principales categorías de análisis como son: la *matematización*, y *Los Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA)* tomando en cuenta lo expuesto por diferentes autores tan importantes como Polya, Freudenthal, Vergnaud, Castro et al, National Council Teaching Mathematics (NCTM), entre otros, haciendo énfasis en la necesidad de desarrollar competencias que conduzcan a los estudiantes a una buena interpretación de los problemas aritméticos donde a través de diferentes heurísticas, ellos puedan dar solución coherente a éstos en su contexto y en la contundencia que tiene desarrollar procesos metacognitivos.

En el capítulo dos, se exponen las bases conceptuales que direccionan la presente investigación. En él, se encuentra en primer lugar, lo relacionado con la Educación Matemática Realista (EMR), cuáles son sus orígenes, se explica qué es la matematización y cómo se da ésta en forma horizontal y vertical; se describen los principios que sustentan la EMR, haciendo especial énfasis en el *principio de niveles*, y por último, también se aclara cuál es la perspectiva didáctica de esta teoría desarrollada por Freudenthal.

Además de ello, se conceptualiza qué es un problema y los pasos propuestos por Polya para la resolución de problemas. Se hace hincapié en la importancia de desarrollar un buen sentido numérico por parte del estudiante, antes de que éste se enfrente a situaciones problémicas de carácter simple y posteriormente, compuestos. Por supuesto, se hace claridad en cómo se entienden cada uno de ellos desde el punto de vista de diferentes autores, especialmente desde el Campo Conceptual Aditivo expuesto por Vergnaud. Finalmente, se define qué se entiende por Problema Aritmético Mixto Aditivo (PAMA) por parte del equipo investigador y los elementos que se deben tener en cuenta a la hora de resolver este tipo de problemas.

En este capítulo, se enuncia la perspectiva matemática de los números naturales: sus relaciones y propiedades de la adición desde la axiomática de Peano, así como lo propuesto por Godino en este dominio y los aspectos didácticos en cuanto a las dificultades, obstáculos y errores en la enseñanza de las matemáticas que propone Socas.

Este capítulo, finaliza poniendo de manifiesto los aspectos curriculares que enmarcan el interés del presente trabajo de investigación, a saber: *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*, *Estándares Básicos de Competencia (EBC)* y *Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)*, pues a través de ellos, se expresan las expectativas que el

gobierno de Colombia, a través del Ministerio de Educación Nacional (MEN) espera alcanzar en todos los estudiantes del país, en este caso específico, para el grado tercero de primaria.

Este compendio de elementos conceptuales, serán tenidos en cuenta en el diseño, ejecución y análisis de los desempeños de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Se avanza entonces al capítulo tres, en el cual el lector podrá encontrar el marco metodológico. Allí se explica cuáles son las características de una investigación con enfoque descriptivo de tipo cualitativo y por qué éstas serán el sustento de la actividad investigadora. En este punto, se detallan cuáles son las fases en las que se ha desarrollado el presente trabajo de grado y a cuáles de los objetivos están vinculados cada una de ellas.

Por otra parte, se enuncian cuáles son los instrumentos utilizados para el desarrollo de las diferentes tareas investigadoras, así como la utilidad de cada uno de ellos en el alcance de los objetivos trazados en el capítulo uno. En este apartado, se encuentran en forma detallada cuatro rejillas. En la primera de ellas, se presenta una rejilla que enuncia los aspectos curriculares que dan origen a los objetivos que orientan la secuencia didáctica; en la segunda, se condensan los elementos curriculares, disciplinares y didácticos, que articulados entre sí, entregan la información necesaria que conduce al alcance del objetivo general, en la tercera de ellas, se pueden apreciar las estructuras semánticas de los Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA) que se diseñaron para los estudiantes, así como las operaciones que ellas implican en cada caso, la incógnita a despejar y como se dijo antes, las posibles dificultades y obstáculos que se podrían encontrar en el desarrollo de ellos; y en la cuarta, se evidencia con claridad las situaciones, las actividades, los problemas, la estructura semántica y la operatoria, asociando todos ellos con los niveles de matematización.

Por supuesto, en el tercer capítulo, se tiene en cuenta además los aspectos contextuales de la Institución Educativa La Moralia, las características generales de la población objeto de estudio y de la región en sí misma, haciendo énfasis en tres de los aspectos más destacados: *el cultivo de la mora, el cultivo del café y las fiestas del campesino*, pues con ello, se realizó el diseño de la secuencia didáctica a partir de información suministrada por la misma comunidad.

El cuarto capítulo realiza una presentación de los resultados obtenidos, una vez finalizada la aplicación de la secuencia didáctica. En primera instancia, por medio de un tabulado, se describen los diferentes tipos de respuestas emitidas por los estudiantes a cada una de las preguntas formuladas en los diferentes momentos del trabajo; en segundo lugar, y con base en la tabla, se presenta el análisis del desempeño de los educandos apoyado con fotografías y diálogos extraídos de las grabaciones en videos, haciendo observancia de las estructuras semánticas de cada problema, de las operaciones tenidas en cuenta en cada caso, el desarrollo de los algoritmos y la lógica y coherencia de las respuestas dadas en cada pregunta.

En el capítulo cuatro, se expresan además, las conclusiones que nacen del mencionado análisis desde cada uno de los objetivos propuestos, así mismo, el equipo investigador enuncia algunas recomendaciones que pueden servir de bitácora a futuras investigaciones que aborden una temática similar y a la Educación Matemática, en tanto que pueden resultar útiles para avanzar en este tópico.

En último lugar, no menos importante, se encuentra la secuencia didáctica que enriquece el presente trabajo de grado. Este material, puede ser insumo o ejemplo para otras investigaciones, ya que en él se tuvieron en cuenta aspectos contextuales, curriculares, disciplinares y didácticos en su diseño que contribuyen a determinar lo establecido en el objetivo general.

CAPÍTULO 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Las matemáticas son esenciales para el desarrollo cognitivo de los seres humanos, pues les ayudan a desarrollar procesos de pensamiento lógico, a realizar raciocinios de manera ordenada y a avanzar en sus habilidades para la comprensión de los entes abstractos y las relaciones entre ellos.

Históricamente, las matemáticas han sido un instrumento supremamente importante para investigadores de otras ciencias como las naturales y las sociales puesto que les permite la comprensión del mundo, ya que se convierten en un lenguaje preciso que interpreta los diferentes fenómenos que han inquietado al hombre en todos los tiempos y lugares, constituyéndose así, en una ciencia fundamental que vincula inexorablemente un conocimiento conceptual con uno procedimental que conlleva a ser matemáticamente competente en la medida en que se aprende a plantear y resolver problemas, así como el uso de un lenguaje específico para comunicar, razonar y modelar situaciones de la vida, la ciencia y la matemática misma con la posibilidad de acceder a la reflexión y a la metacognición.

Por otra parte, es importante que desde la niñez, las personas desarrollen una actitud favorable y consciente al entablar acciones que conduzcan a una solución efectiva de los problemas que afrontan en la vida cotidiana; y es allí donde las matemáticas juegan un papel muy relevante, dado que tener una fundamentación teórica y unas habilidades prácticas bien consolidadas, genera confianza en los resultados a los cuales se llega en las tareas emprendidas.

Lo anterior, permite inferir que no resulta fácil pensar en una actividad de la vida diaria que no traiga consigo la necesidad e importancia de las matemáticas, ellas están presentes en casi todas las actividades humanas; sin embargo, las personas normalmente las encuentran (casi de manera exclusiva) en las cuatro operaciones básicas, pues se imaginan que con ellas basta para “defenderse en la vida”.

No obstante, en la escuela, el niño o niña descubre que si bien, los procedimientos algorítmicos son herramientas muy útiles para llevar a cabo diferentes tareas, también lo es, desarrollar otras habilidades propias del pensamiento numérico. Es por lo anterior, que por muchos años, los docentes han prestado especial interés a este dominio, apoyándose en los documentos ministeriales. Así por ejemplo, los lineamientos curriculares (MEN, 1998) hacen énfasis en que:

“Otras situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hacen referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes interpretaciones y representaciones, a la utilización de su poder descriptivo, al reconocimiento del valor (tamaño) absoluto y relativo de los números, a la apreciación del efecto de las distintas operaciones, al desarrollo de puntos de referencia para considerar números. En general estos puntos de referencia son valores que se derivan del contexto y evolucionan a través de la experiencia escolar y extraescolar de los estudiantes. Otro indicador valioso del pensamiento numérico es la utilización de las operaciones y de los números en la formulación y resolución de problemas y la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario, lo que da pistas para determinar si la solución debe ser exacta o aproximada y también si los resultados a la luz de los datos del problema son o no razonables” (p. 43).

Los Estándares Básicos de Competencia de matemáticas (MEN, 2006) se fundamentan en los Lineamientos Curriculares y afirman que en el caso de los números naturales, las acciones de conteo generan una acción en el concepto de número; y refuerzan además la idea de por qué es importante la formación en matemáticas con la siguiente afirmación:

“La Educación Matemática debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos” (p.46);

Lo que permite concluir que las matemáticas son necesarias para el progreso y desarrollo de la sociedad desde los actos creativos de la humanidad.

El conocimiento de estos fundamentos no es ajeno a la experiencia pedagógica que se tiene en el aula, y los docentes hacen un gran y valioso esfuerzo por conseguirlo; sin embargo, con los estudiantes de grado tercero de la Institución Educativa La Moralia, quienes oscilan entre los 8 y 9 años de edad, se ha evidenciado que presentan dificultad al momento de resolver problemas de diferentes aspectos de tipo aditivo, ya que no identifican el tipo de operación que deben aplicar para encontrar una solución, tienen pocas habilidades de lectura matemática lo que les impide interpretar las situaciones planteadas e identificar los datos que las componen, ya sea por el formato que se les presenta, por la posición de la incógnita, que no necesariamente está al final o porque asumen que palabras como “más” o “menos” indican suma o resta respectivamente, por otra parte se recurre casi siempre a las mismas técnicas de resolución y además les cuesta trabajo enunciar la respuesta a la pregunta dada, en tanto que en grados anteriores, no se tiene en cuenta la unidad de la que se habla. Otro aspecto que causa dificultad, es que el docente no le presenta al estudiante dichas operaciones como un todo, ni los problemas a partir de las experiencias de su contexto; además que, generalmente las situaciones planteadas son simples, es decir, que requieren de una sola operación para su resolución; indicando esto, que los Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA) (objeto del presente estudio) prácticamente no son tenidos en cuenta en la actividad del aula.

Los factores anteriormente descritos, han sido reportados en otras investigaciones, lo que indica que no son ajenos a otros contextos y por tal motivo, han sido materia de preocupación en diferentes latitudes; por lo cual, en el subcapítulo denominado “*antecedentes*”, se ampliará sobre ellos, para dar cuenta de algunos investigadores que los han planteado y qué han hecho al respecto para avanzar en estos procesos. Así mismo, es importante destacar que dichos factores son procesos requeridos para alcanzar diferentes niveles de matematización, concepto que se estudiará ampliamente en el capítulo dos cuando se hable de la Educación Matemática Realista.

El nivel de exigencia que caracteriza el estudio de las matemáticas ha generado una aversión infundada hacia esta ciencia, lo cual se ha visto reflejado también en los resultados de las pruebas SABER de años anteriores (2014 y 2015), razón por la cual los estudiantes de la institución educativa en mención de los grados tercero y quinto han presentado un desempeño inferior en los procesos de pensamiento numérico, puesto que dicho examen no evalúa ejercicios algorítmicos ni exige hacer gala de buena memoria, lo

cual pone en tela de juicio la calidad de la educación y del trabajo desarrollado en el aula por algunos docentes colombianos en el área de matemáticas, quienes son objeto de los señalamientos de la sociedad debido a los bajos resultados. Dicho esto, al hacer análisis de los resultados de las pruebas SABER de matemáticas del 2016 del grado tercero de la Institución Educativa, es posible afirmar que en la competencia de “Razonamiento” uno de los aprendizajes por mejorar, es el uso de operaciones y propiedades de los números naturales, dado que el 55% de los estudiantes no logra establecer relaciones entre ellas en situaciones específicas y además en la competencia “Resolución de problemas” se evidencia que el 43 % de los estudiantes no resuelve problemas aditivos rutinarios de composición y transformación, y tampoco interpretan condiciones necesarias para su solución, lo cual exige que se haga un especial énfasis en estos aprendizajes y se implementen acciones pedagógicas de mejoramiento que permitan un avance en el desarrollo de estas competencias.

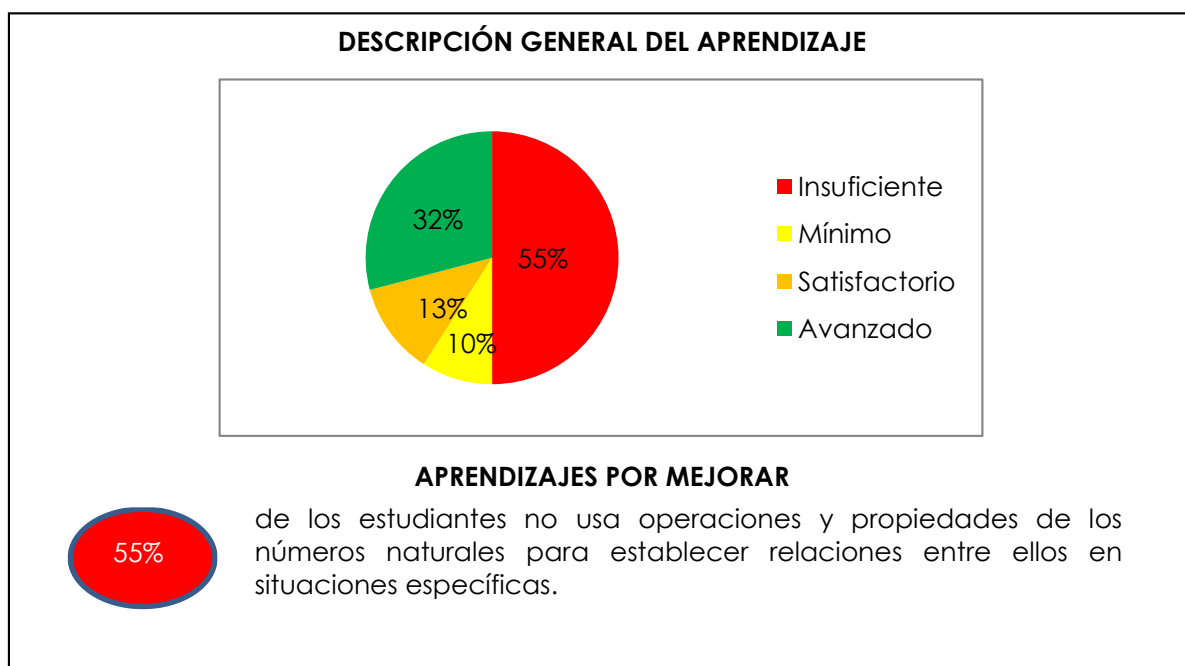


Figura 1. Resultado prueba SABER grado tercero en matemáticas Institución Educativa La Moralia. Competencia: Razonamiento.

Fuente: Material Día E que reposa en la institución educativa.

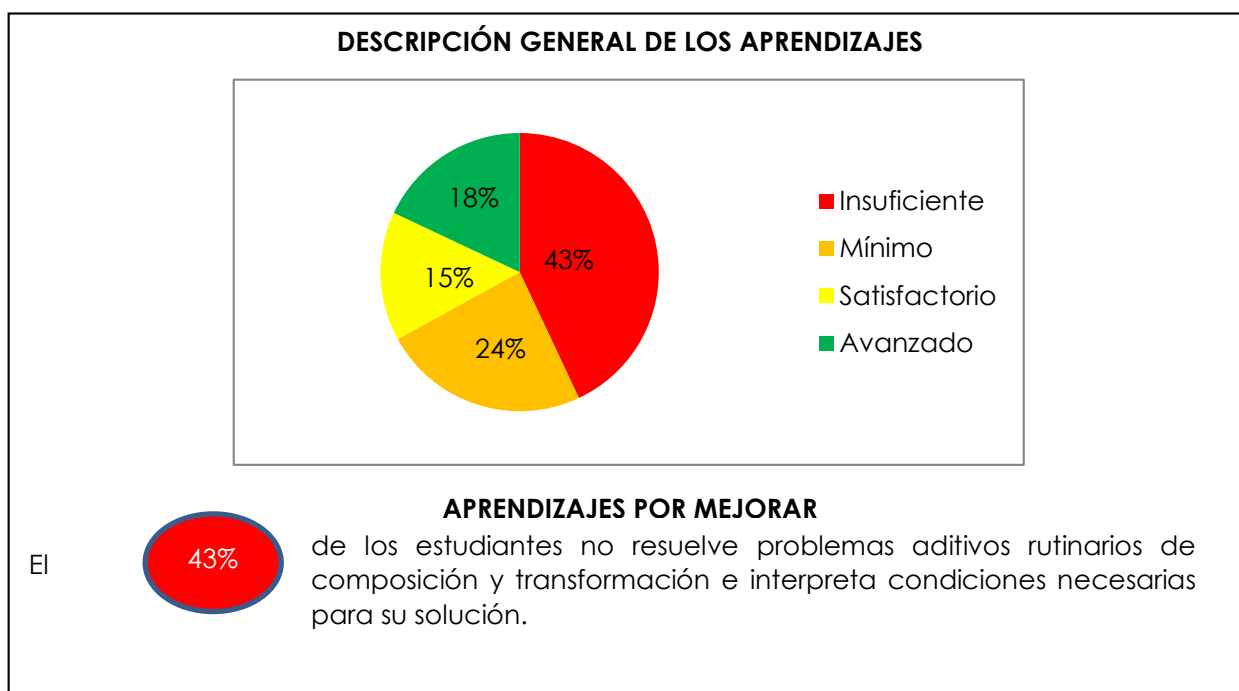


Figura 2. Resultado prueba SABER grado tercero en matemáticas Institución Educativa La Moralia. Competencia: Resolución de problemas.

Fuente: Material Día E que reposa en la institución educativa

En conversaciones espontáneas con los docentes de la institución educativa, éstos observan con preocupación el poco o casi nulo acompañamiento que tienen los niños en casa con sus deberes escolares, ya sea porque sus padres carecen de los conocimientos necesarios para ayudarles en sus tareas y repastos o por la falta de interés de los adultos en que los niños y niñas avancen en sus procesos cognitivos (esto porque a muchos los envían a la escuela para obtener los beneficios del gobierno, tales como el subsidio de Familias en Acción o la alimentación escolar). Otra de las razones posibles es que algunos docentes, tienen los textos de apoyo como bitácora exclusiva de trabajo, dejando de lado, la necesidad de aplicar otras estrategias pedagógicas que favorezcan la construcción del pensamiento matemático, lo que puede conducir a que el estudiante reciba la clase impartida con desinterés y desgano; y consecuentemente no desarrolle las competencias que le exige el mundo actual, especialmente cuando en él, la resolución de problemas ocupa un lugar de privilegio, puesto que es una habilidad necesaria en diferentes aspectos de la vida cotidiana; en el caso de que no se logre fortalecer el pensamiento numérico de los niños y niñas, en este dominio, es muy posible que ellos, en el futuro, no sean personas que se desenvuelvan competentemente en la vida cotidiana y en el mundo laboral, ya que la adición y la sustracción son habilidades matemáticas requeridas para actividades

prácticas tales como el conteo de cantidades discretas o el manejo del dinero; por lo cual, se hace necesario conducir a los estudiantes a alcanzar los diferentes niveles de matematización a través de una secuencia didáctica que encuentre en la resolución de problemas un instrumento que dote de significado a las operaciones y que no sólo medie entre el conocimiento conceptual y el procedimental, puesto que se necesita que contribuya al desarrollo de los conceptos y habilidades matemáticas formales, dado que como se dijo antes, ésta es una habilidad ligada íntimamente a las competencias matemáticas que tiene relevancia en otros campos del conocimiento; siempre y cuando, desde la escuela se desarrolle como una actividad ligada a las experiencias cotidianas.

Por lo anterior, es importante tener en cuenta que en este sentido, los lineamientos curriculares para las matemáticas (MEN, 1998), sostienen que:

“El enfoque de estos lineamientos está orientado a la conceptualización por parte de los estudiantes, a la comprensión de sus posibilidades y al desarrollo de competencias que les permitan afrontar los retos actuales como son la complejidad de la vida y del trabajo, el tratamiento de conflictos, el manejo de la incertidumbre y el tratamiento de la cultura para conseguir una vida sana” (p 17).

Las situaciones descritas anteriormente, son motivo de preocupación para el presente equipo investigador quien pretende indagar acerca de

¿Qué nivel de matematización alcanzan los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa la Moralia cuando desarrollan una secuencia didáctica con Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA)?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GENERAL.

Establecer el nivel de matematización que alcanzan los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa La Moralia cuando desarrollan una secuencia didáctica con Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA).

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- ❖ Determinar algunos referentes curriculares, disciplinares y didácticos que posibiliten la matematización de Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA).
- ❖ Articular los referentes curriculares, disciplinares y didácticos para el diseño de una secuencia didáctica que posibilite la matematización.
- ❖ Analizar los resultados obtenidos durante la aplicación de la secuencia didáctica y vincularlos con los niveles de matematización de Freudenthal.

1.3 JUSTIFICACIÓN

El aprendizaje de las matemáticas ha sido una inquietud permanente en el contexto educativo, que ha preocupado a las políticas de Estado, investigadores, la comunidad de docentes de matemáticas y padres de familia en todos los tiempos y en todas las épocas de la historia, dado que su conocimiento ha sugerido el éxito laboral para las personas que hacen uso de ellas en diferentes campos profesionales, tales como la ingeniería, la administración, la contaduría, entre otros.

Además, para los gobiernos del mundo actual, un buen dominio de las habilidades matemáticas, científicas y lingüísticas por parte de sus estudiantes de educación básica y media, es en buena medida, la carta de presentación ante la comunidad internacional. Así por ejemplo, el pasado 25 de mayo de 2018, el gobierno nacional logró el ingreso de Colombia a la OCDE (Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico), ya que a este organismo pertenecen los países con mayor desarrollo económico, y uno de los criterios que tiene dicha organización para que un país sea miembro, es que demuestre eficiencia y calidad en sus sistemas educativos y esto lo evalúa a través de pruebas como PISA (Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos). En el año 2015, Colombia ocupó la posición 57 de 66 países que se presentaron; evidenciándose una

notable mejoría en las tres áreas evaluadas, pero todavía sigue estando por debajo del promedio internacional que actualmente es de 493 puntos para ciencias y lenguaje y de 490 puntos para matemática. Al observar los resultados de la prueba PISA del 2015, este organismo los analiza con respecto al 2012, y con base en ello, se puede decir que nuestro país obtuvo 425 puntos en lectura, ascendiendo cuatro posiciones del ranking mundial; en el área de ciencias, Colombia se ubicó tres puestos por encima con respecto al último resultado, ya que obtuvo 416 puntos y finalmente en matemáticas también hubo un avance en tanto que se obtuvieron 390 puntos, lo que permitió escalar una posición con relación al año 2012.

A pesar de que se ha avanzado en los resultados obtenidos en dichas pruebas, se continúa evidenciando poco desarrollo de los procesos de pensamiento en los estudiantes, que les permita ser más competentes en situaciones cotidianas y que a la vez satisfaga las necesidades que les presenta el mundo actual.

Por lo anterior, desde hace algunos años, los diferentes gobiernos de Colombia a través de sus sistemas políticos, vienen haciendo algunos esfuerzos enfocados en la formación de docentes, con el fin de generar nuevas prácticas de aula que lleven a la transformación de los procesos de aprendizaje que permitan desarrollar en los educandos competencias y habilidades matemáticas a través de diferentes estrategias, pues esta área del conocimiento siempre ha despertado la apatía de muchas personas por su complejidad y precisión, ya que en el imaginario colectivo, una persona se considera “inteligente” si tiene un desempeño excelente en matemáticas, olvidando que las personas pueden tener diferentes talentos o habilidades, tal como lo propone Howard Gardner en su investigación sobre inteligencias múltiples (citado por Regader s.f).

En la Institución Educativa La Moralia se pone de manifiesto que los estudiantes no poseen las bases para llevar a cabo la resolución de problemas aritméticos, en tanto que esto implica la interpretación de los mismos, la identificación de los datos relevantes, el uso de diversas técnicas para la solución, así como el tomar en consideración la pregunta a responder; consecuencia esto de que las operaciones de suma y resta se han enseñado como entes separados sin establecer conexión entre ellas, siendo esto un error conceptual y didáctico de los docentes, situación que se ha visto reflejada en los bajos resultados de las pruebas Saber y en las prácticas de aula. Asimismo se les coarta la

posibilidad de enfrentar situaciones de su cotidianidad dado que sólo se trabaja la parte operatoria sin tener en cuenta los contextos que dan significado a la resolución de problemas y que esta competencia favorece la toma de decisiones.

Además, en el contexto rural de la Institución Educativa La Moralia, los niños, niñas y jóvenes han adquirido unos conocimientos matemáticos de carácter empírico, dado que deben ayudar a sus padres en las labores del campo, lo que amerita que lo enseñado en el aula de clase se fortalezca y represente utilidad no sólo para obtener buenas calificaciones en tareas y evaluaciones, sino que trascienda al contexto socio-cultural, siendo esto, que las matemáticas de la escuela cobren relevancia en las actividades ganaderas y agrícolas de la población campesina, dado que los padres están interesados en el relevo generacional en cuanto a que, la administración de sus fincas y parcelas, por las que tanto han luchado, queden en manos de sus hijos y no de personas ajenas a ellos.

Pero el papel preponderante que tomarán los conocimientos matemáticos y sobre todo el desarrollo de pensamiento numérico en la resolución de problemas en los aspectos de la estructura aditiva, no se dará de manera gratuita o improvisada, se requiere que el docente sea un sujeto activo, comprometido y reflexivo de su práctica pedagógica, que desarrolle su labor con una actitud motivadora y le ofrezca una práctica innovadora a sus estudiantes para que se produzca en ellos el entusiasmo por aprender más y mejor. Si el docente es consciente de que su desempeño profesional es fundamental para obtener cambios significativos en la eficiencia de las matemáticas, se podrá erradicar la idea de que son una ciencia molesta a pesar de su complejidad y empezará a disfrutarse como un valioso conocimiento que contribuye a la comprensión del universo y los fenómenos sociales.

De acuerdo con lo anteriormente descrito, es importante identificar los niveles de matematización que poseen los estudiantes para que a través del desarrollo de una secuencia didáctica, se avance significativamente de los procesos memorísticos que han caracterizado al sistema educativo, a procesos en los cuales el educando tenga mayores posibilidades de mejorar en sus procesos cognitivos.

Con base en estas reflexiones, se desarrolla y aplica una Secuencia Didáctica que permite movilizar los diferentes niveles de matematización a partir de la resolución de los PAMA en los estudiantes, aportando a la Educación Matemática un estudio que sirva

como insumo a otras investigaciones que aborden al mismo objeto matemático, pues como lo dicen los Lineamientos Curriculares de matemáticas:

“En la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas, van desarrollando una mente inquisitiva y perseverante, van aumentando su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel” (p. 75).

1.4 ANTECEDENTES

Haciendo una revisión de los antecedentes que rodean la importancia y la necesidad de desarrollar procesos de pensamiento matemático, es necesario indagar acerca de lo reportado en investigaciones anteriores acerca de las diferentes categorías de análisis que son el interés de la presente investigación, a saber: *matematización y resolución de problemas* enfocándose en la estructura aditiva. Los autores de las investigaciones que son objeto de revisión y que se presentan a continuación, se apoyan en referentes de gran reconocimiento internacional, que garantizan la calidad de las mismas.

Estos aportes resultan de gran importancia para documentar el interés de este trabajo y a la vez, permiten inferir que esta inquietud no es exclusiva del ámbito pedagógico y tampoco es nueva, también ha sido materia de investigación por parte de psicólogos, sociólogos y matemáticos; y por lo tanto, merece toda la atención.

Con relación a la matematización, se encontró el trabajo de Irene Estrena Martínez (2014), para la Universidad de Granada – España, quien en su proyecto de investigación de maestría, titulado “Aprender a matematizar. Matematización como un medio y no como un fin”, pone de manifiesto la necesidad de reconocer que las matemáticas hacen parte de la cotidianidad de todas las personas, por lo que propone diferentes actividades que conduzcan a procesos de modelización a partir de diferentes estrategias que favorezcan el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes.

Estrena (2014) explica que el proceso de matematización se da de forma horizontal de modo que el mundo real es traducido al mundo matemático; y que se da de forma vertical cuando dicha traducción es aplicada a conceptos y destrezas matemáticas (p. 14)

Por otra parte, Freudenthal (citado en Estrena 2014) explica que:

“La enseñanza de la matemática debe llevarse a cabo mediante un proceso en el que los alumnos re-inventan ideas y herramientas matemáticas a partir de organizar o estructurar situaciones problemáticas en interacción con sus pares y bajo la guía del docente” (p.16).

Con base en lo anterior, la autora propone que el docente debe presentar al estudiante actividades que conduzcan a la matematización para que de este modo se dé la formalización de conceptos por parte de ellos mismos, situación contraria a la que ha ofrecido la educación tradicional por años: primero, la presentación de contenidos formales y posteriormente el desarrollo de ejercicios de aplicación.

En el trabajo de investigación de Estrena (2014), se llevaron a cabo tres proyectos denominados: “El centro comercial”, “el parque” y “el polideportivo”, en ellos, los estudiantes registraron diferentes situaciones convencionales, que luego fueron expresando (con apoyo del docente) en situaciones matemáticas, bajo la convicción de que no se están formando futuros matemáticos, sino a futuros ciudadanos usuarios de las matemáticas con sentido crítico.

Entre las principales conclusiones encontradas en el documento de Estrena, se pueden enunciar las siguientes:

- La educación por competencias es fundamental en la realidad actual, ya que permite la adaptación de las personas a las nuevas condiciones personales, sociales y económicas que presenta el mundo globalizado.
- La Educación Matemática debe dar un vuelco de la transmisión rígida de conocimientos, al carácter útil y social de las matemáticas a partir del desarrollo de las competencias matemáticas.
- El dominio instrumental en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas es importante, pero lo es más, el proceso de matematización.
- Acercar los contextos reales y cotidianos del estudiante al aula de clase es primordial para iniciar de la actividad matemática a la formalización de conceptos y no al revés.

Otro antecedente a tomar en cuenta es el titulado “Los contextos ‘‘Realistas’’ en la Resolución de problemas de matemáticas: una experiencia para capacitadores, docentes y estudiantes”.

En este trabajo, María Luz Martínez et al. (2000) pone de manifiesto, la brecha que hay entre la escuela y la realidad cotidiana a través de un curso dictado en 1999 y 2000 para docentes de Nivel Inicial y Educación General Básica. Se toma como referencia una experiencia didáctica de dos docentes, una de castellano y una de inglés, con estudiantes de 5º grado, en una escuela pública de gestión privada de la ciudad de San Carlos de Bariloche (Argentina) en el año 2000. Las docentes solían utilizar en sus clases problemas extraídos de libros de textos, teniendo en cuenta las necesidades de su planificación, sin tener en cuenta los contextos y las situaciones que enmarcaban los problemas a trabajar. Además la evaluación de las soluciones la orientaban desde el punto de vista de la operatoria convencional y la obtención de respuestas correctas y unívocas, la cual no tenía participación por parte de los estudiantes. A partir de los cursos, las docentes se propusieron basar su práctica en la interacción socio- cognitiva de estudiantes y docentes, desempeñar un papel proactivo en la guía de aprendizajes y darle relevancia a los contextos en la resolución de problemas.

Los objetivos estuvieron centrados en el interés de los docentes en lograr que los estudiantes consideraran los contextos específicos y dieran solución a los problemas con base en el conocimiento que tienen de ellos; por otro lado el diseño y la puesta en acción de una experiencia didáctica destinada a hacer uso del sentido común de los estudiantes en relación con su modo de interpretar los problemas de matemática.

Al finalizar se presentan las siguientes conclusiones:

Trabajar con experiencias didácticas permite capacitar a los estudiantes para que en el futuro puedan analizar críticamente y con gran profundidad las formas de pensamiento matemático que se usan en la vida diaria, en la ciencia y la tecnología.

Debe haber un cambio radical a nivel de la cultura en el aula, donde el docente sea un mediador entre el saber informal de los estudiantes y la matemática formal, donde haya conexión entre el discurso pedagógico y la negociación conduciendo con esto a la autonomía, interacción, cooperación y el respeto por el razonamiento ajeno.

Cuando, la matemática funciona como medio o herramienta para conseguir lo que se busca y no como disciplina escolar y campo del conocimiento, limita las oportunidades para que los estudiantes aprendan a matematizar en el eje vertical, esto es, a operar dentro del ámbito mismo de la matemática. De lo que se trata es de incorporar al aula un modo de trabajo en el cual la pregunta por el sentido de la actividad matemática tenga lugar, donde haya espacio para que los alumnos contribuyan a las discusiones, no sólo acerca de sus estrategias y las soluciones, sino también y sobre todo en lo que respecta a interpretación de las situaciones problemáticas mismas y a reconocer modos de trabajo matemático diferente según los espacios en que se den y las metas propuestas. (Meira, 2000).

Con respecto a la resolución de problemas, se encontró la investigación realizada en la Universidad Pedagógica Experimental de Caracas – Venezuela, por Yenny Pérez y Raquel Ramírez (2008), quienes llevaron a cabo su trabajo bajo el título de “Estrategias de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos”. En él, las autoras hacen un estudio descriptivo de los fundamentos teóricos de la resolución de problemas matemáticos y estrategias para su enseñanza, e indagan documentalmente sobre el estado del arte de investigaciones realizadas por varios autores en esta área. Citan por ejemplo lo expresado respecto a este tema por el currículo de Venezuela (1997), por Beyer (2000), por el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de las Ciencias (CENAMEC, 1998), y por Polya (1984), para finalmente, establecer una definición propia, sobre la resolución de problemas: “es una estrategia globalizadora en sí misma debido a que permite ser trabajada en todas las asignaturas y además el tópico que se plantea en cada problema puede referirse a cualquier contenido o disciplina” (pág. 171), lo que pone de manifiesto que la resolución de problemas no es un asunto exclusivo de las matemáticas.

En este documento, las autoras hacen especial énfasis en las situaciones de adición y sustracción, afirmando que los problemas que implican estas operaciones, tienen en esencia las mismas características estructurales y recurren a la clasificación que hacen de éstos Carpenter y Moser (1984): cambio, combinación, comparación e igualdad.

Finalmente, Pérez y Ramírez (2008) concluyen que:

“Es importante que los docentes conozcan lo que representa realmente un problema, las taxonomías que existen al respecto, sus características, etapas de resolución, así como también sobre las estrategias para su enseñanza, de manera que puedan crear enunciados creativos, originales y variados que constituyan un reto para los estudiantes e impliquen un esfuerzo cognoscitivo al resolverlos” (pág. 191).

Por otra parte, en la Conferencia titulada “Estructuras Aditivas” de la Universidad de La Laguna (Tenerife - España) por Alicia Bruno (s.f); los objetivos de su exposición estuvieron centrados en la integración de aspectos del aprendizaje matemático que son diferentes como son los algoritmos de la suma y la resta, los problemas aditivos, o bien, las representaciones de los mismos.

Esta investigadora afirma que: “Las estructuras aditivas modelan situaciones cotidianas e implican la resolución de problemas aditivos, tanto con números positivos como negativos” (pag.1).

Divide su conferencia en seis partes, donde primero expone ideas sobre el aprendizaje numérico, ya que las estructuras aditivas forman parte del aprendizaje numérico que adquieren los estudiantes en su escolaridad obligatoria. En la segunda parte hace una clasificación de las situaciones numéricas y de los problemas aditivos donde cita las estructuras más usuales en la enseñanza de los problemas aditivos conocidos tradicionalmente como combinación, cambio, comparación, igualación (Carpenter y Moser, 1982; Ryley y otros, 1983) (p.7). Sin embargo, utiliza en su discurso otra clasificación de los problemas adaptada de la de Vergnaud (1982), y que amplía en Bruno y Martín (1997) los cuales refieren situaciones numéricas e historias aditivas y problemas aditivos, en estos los tipos de problemas son: cambio, combinación, comparación y dos cambios. En la tercera y cuarta parte, habla sobre la resolución de problemas con números positivos y negativos, exponiendo algunas estrategias y dificultades de los estudiantes. En la quinta parte, pone de manifiesto, la “Metodología Redactor”, consistente en que los alumnos redactaran los enunciados de las historias y los problemas, los clasificaran según las estructuras y, por último, los resolvieran. Dicha metodología fue trabajada en las investigaciones de Rudnitsky et al. (1995), y con ella se abordaron problemas aditivos simples de números positivos, con las estructuras de combinación, cambio y comparación; en Bruno (2000), autora de la citada conferencia,

proponen una investigación similar a la descrita anteriormente pero sobre problemas aditivos de números negativos; añadiendo además la estructura de dos cambios.

Termina su conferencia con las siguientes conclusiones:

-La enseñanza y la investigación en el tema de estructuras aditivas presenta dificultades y estrategias en la resolución de problemas aditivos, tanto con números positivos como negativos, por lo cual es necesario un esfuerzo de conexión, dado que la resolución de problemas aditivos es un elemento unificador del aprendizaje numérico. Específicamente, en lo que se refiere a la resolución de problemas con números positivos, la principal dificultad hallada nace de la forma en la cual se redactan los problemas, puesto que el orden de las proposiciones y el formato de presentación impiden que el estudiante identifique fácilmente la posición de la incógnita; así mismo, el tipo de números podría generar confusión dado que al niño le resulta más fácil trabajar con números terminados en cinco en tanto que le alcanzan los dedos.

-Los problemas aditivos deben dar significado a la operatoria; por tanto se debe comenzar desde la educación infantil utilizando problemas para dar significado a la suma y a la resta, utilizando metodologías que propicien, sobre todo, la comprensión del enunciado del problema. Además, las situaciones deben unirse con diferentes tipos de representaciones a saber: sucesos del mundo real y dramatizaciones, manipulativos, gráficos y dibujos, lenguaje hablado y símbolos escritos y por último la escritura de las sentencias numéricas abstractas.

-En los libros de texto y en ocasiones, en propuestas curriculares predominan los problemas de combinación (con incógnita el conjunto total) y los de cambio (con incógnita el estado final). Por otra parte, utilizan estructuras de problemas para la suma que posteriormente no se usan para la resta.

-Lo importante, afirma Bruno, es la coherencia que se haga en el tratamiento de la resolución de problemas, lo cual debe entenderse de la siguiente manera:

“-Realizar traducciones frecuentes entre lo abstracto, las representaciones y los contextos.

-Usar representaciones adecuadas para los problemas

- Resolver problemas de estructuras similares para las dos operaciones.

- Utilizar una variedad de problemas con diferentes estructuras, con el fin de que los niños desarrollen un “esquema de los problemas”. (p. 42,43).

Por su parte, la Universidad de Granada, España, cuenta con la tesis doctoral realizada por María Fernanda Ayllón Blanco en 2012, la cual llevó el título de “Invención – resolución de problemas por alumnos de educación primaria”. El interés principal de esta investigación, se centró en la necesidad de que los estudiantes logran inventar y resolver problemas ya que ambas habilidades trabajadas conjuntamente logran espacios para la reflexión compleja y el razonamiento que conlleva, sin lugar a dudas, a la construcción de conocimiento matemático.

Con base en lo anterior, el objetivo general planteado por Ayllón (2012) para dicho trabajo de investigación fue: “Estudiar el proceso de invención/resolución de problemas que realizan los estudiantes de educación primaria” (p.22). En el alcance de dicho objetivo, la autora presenta tres perspectivas, a saber:

➤ La primera, con base en la literatura referida a la investigación en la educación matemática, Polya (1965), Freudenthal (1973) y Kilpatrick (1987) (citados por Ayllón, 2012), destacan la importancia de resolver problemas, reconociendo en esta competencia diferentes funciones en el aprendizaje de las matemáticas, ya que se hacen indispensables como metodología de enseñanza y como contenido de aprendizaje en sí mismo, permitiendo con esto, la construcción del conocimiento matemático significativo.

➤ En segundo lugar, Ayllón (2012), centra su atención en los aspectos de tipo curricular. Para ello, toma en consideración los Estándares Curriculares de la NCTM (National Council of Teaching of Mathematics) (1989, 2000),¹ en donde se da lugar no sólo a la resolución de problemas, sino también a la invención de los mismos, sosteniendo que “los estudiantes deberían tener alguna experiencia reconociendo y formulando sus propios problemas, una actividad que es el corazón de hacer matemáticas” (p.18).

➤ La tercera perspectiva corresponde al grupo de investigación del cual hace parte la autora en la Universidad de Granada, el cual indaga por la “Didáctica de las matemáticas. Pensamiento numérico”. Dicho grupo tuvo origen en los años 80 y respecto

¹ NCTM (National Council Teaching Mathematic) Consejo Nacional para la Enseñanza de las Matemáticas. (1998, 2000).

a la resolución de problemas, han explicado que éstos deben estar basados en las experiencias y contextos reales de los educandos.

Por otra parte, la autora explica lo que se entiende por problema y ofrece algunas definiciones a partir de la lingüística, la filosofía, la ciencia, la tecnología y desde la matemática, a quien por supuesto, le dedica especial interés, tomando como referente a Polya (1962) entre otros autores. Así mismo, presenta diferentes tipos de problemas y sus características desde el punto de vista psicológico y matemático, haciendo en éste último una distinción entre “ejercicios” (tareas rutinarias y memorísticas) y “problemas” (tareas que requieren del resolutor mayor creatividad puesto que el resultado no es evidente).

En uno de los apartes de la investigación, la autora explica acerca de los tipos de problemas aritméticos, apoyándose en la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1990) indicando que dependen de la estructura operatoria que se requiera: para la suma y resta corresponden a la estructura aditiva;

También, se hace mención a los Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal (PAEV), los cuales están inmersos dentro del currículo escolar con la finalidad de acercar al estudiante no sólo al aprendizaje de la aritmética, sino a la aplicación de ésta en la cotidianidad, logrando que adquiriera significado en el contexto real (Castro, 1994 citado por Ayllón 2012).

La metodología usada para dicha investigación fue un diseño mixto de enfoque cualitativo y cuantitativo para conseguir una comprensión amplia y profunda de los resultados, así como la corroboración de éstos; los instrumentos de recolección de datos fueron entrevista semi-estructuradas y cuestionarios-prueba y el registro de datos se logró a través de grabaciones de audio y vídeo posteriormente transcrita y de pruebas escritas aplicadas a estudiantes de diferentes cursos de primaria, que pertenecen a diferentes estratos sociales de la ciudad de Granada.

Como conclusión de ese trabajo de investigación, se determinó que todos los estudiantes involucrados explican con sus palabras lo que entienden por problema y lo diferencian de lo que es un problema matemático, por el hecho de que en ellos están presentes los números, dándoles la importancia al momento de dar solución a los problemas planteados e inventados. Por otro lado, se evidenció que los estudiantes de los ciclos inferiores demostraron mayor capacidad para inventar problemas que los

educandos de los ciclos superiores; sin embargo, se tuvo en cuenta que los niños más pequeños crearon problemas simples, mientras que los más grandes, debían proponer problemas compuestos, que en ambos casos no se redujo a meros ejercicios aritméticos.

En cuanto a la invención y resolución de problemas, se concluyó que los niños, en su mayoría, cuando tienen la capacidad de diseñar una situación problémica con coherencia, claridad y la información necesaria, son capaces de resolverlos por sí mismos eligiendo correctamente las operaciones necesarias, no obstante, se hallaron errores en el proceso operatorio. Por otro lado, se encontraron dificultades en la interpretación de los problemas planteados por algunos compañeros, en la medida que la información suministrada por ellos no era clara o suficiente, pero esta situación se presentó con muy bajo porcentaje. También, refiere que los estudiantes preferiblemente usan los números naturales entre 2 y 8 cifras en los problemas de su invención, aunque los niños de 4º y 5º en ocasiones emplean fracciones y decimales.

Otra de las conclusiones extraídas, es la dificultad de los niños en cuanto a la percepción que tienen ellos acerca de si un problema presentado, les era fácil o no resolverlo, ya sea por el tipo de problema (cambio, combinación o comparación) o porque los ámbitos numéricos presentados no les fueran familiares, ya por la cantidad de cifras o por el tipo de número (natural, fracción o decimal).

Colombia no ha sido ajena a la investigación en resolución de problemas, muestra de ello, es el artículo publicado por Alberto de Jesús Iriarte Pupo acerca del desarrollo de la competencia denominada “resolución de problemas” abordada desde una didáctica con enfoque metacognitivo. En este trabajo, el autor expone las dificultades que presentan los estudiantes de grado quinto de primaria, de la Normal Superior de Sincelejo en tanto que, las estrategias didácticas y curriculares aplicadas no dan cuenta de la necesidad que tienen los educandos de ser sujetos activos en el proceso de aprender, por ende la importancia de implementar una metodología que conduzca a los estudiantes a fortalecer los procesos generales propios de la educación matemática, como son: razonamiento, modelación, comunicación, formulación y resolución de problemas, en aras de que el aprendizaje se dé de manera autónoma, sistemática y significativa.

Para llegar al fortalecimiento de la competencia “resolución de problemas” Iriarte (2011) establece en primer lugar las definiciones de los conceptos asociados a ello. Respecto a la definición de “problema” en educación matemática, se apoya en

Schoenfeld (1985), Alferi (1993) y Pozo et al (1994) quienes explican que un problema es una situación que exige una solución que no resulta evidente y por tanto requiere del uso de la creatividad del individuo. En este mismo sentido, cita a Callejo (1998) quien sostiene que resolver un problema implica habilidades para indagar estableciendo conexiones y afectos en la búsqueda de las soluciones. Con base en ello, es posible decir que el sujeto y el contexto relativizan el problema.

Respecto a la resolución de problemas, en esta investigación se retoman las estrategias de Polya (1945), quien es enriquecido en su teoría por Schoenfeld (1985), Mason et al (1989), De Guzmán (1991), Pifarré et al (1998) y Mayer (2002) quienes profundizan en los procesos metacognitivos que están implícita o explícitamente en la resolución de problemas matemáticos, así como las diferentes heurísticas que se deben presentar a los estudiantes para llevar a cabo este proceso.

En cuanto a la metacognición, se explica que es el conocimiento que uno tiene de sus propios procesos y productos cognitivos (Flavell 1976).

La metodología aplicada por el investigador fue de tipo cuasi-experimental, dado que los cuatro grupos de trabajo estaban previamente establecidos. Dos grupos fueron experimentales y los otros dos de control. En cada caso, se aplicó a uno de ellos un pre-test y un post-test y al otro grupo sólo el post-test. Se observó que los grupos de control no demostraron avances en la competencia de resolución de problemas matemáticos una vez finalizada la intervención; por su parte, los grupos experimentales evidenciaron una mejoría significativa en la resolución de problemas contextualizados.

Al terminar el proyecto, el autor concluye que para que los estudiantes adquieran procesos de pensamiento metacognitivo, que se traduzca en un alto de nivel de competencia para resolver problemas contextualizados, se requiere que los docentes sean agentes comprometidos con la labor educativa, que estén dispuestos a buscar y aplicar nuevas estrategias de aula que le posibiliten a los educandos ser personas propositivas, autónomas, responsables y conscientes de su aprendizaje. Así mismo, da cuenta de la eficiencia del programa de intervención desarrollado, en tanto que se observó una evolución importante en los grupos experimentales y destaca el aporte de esta investigación en el campo de la metacognición, ya que tradicionalmente, este tema no ha sido de interés para los investigadores en la educación primaria.

En la Universidad Nacional de Colombia, sede de Manizales, se encontró una investigación de maestría desarrollada por Jhonatan Pineda Quintero (2013), titulada “Unidad Didáctica para la enseñanza de las estructuras aditivas en los grados tercero y quinto de básica primaria”. Ese proceso investigativo nació de la necesidad que tenían los docentes de matemáticas de mejorar sus conocimientos disciplinares y didácticos, en tanto que esta dificultad permeaba el rendimiento académico de los estudiantes de la Institución Educativa San Pío X, dando lugar al diseño de una estrategia metodológica que favoreciera el proceso de enseñanza – aprendizaje de dicho objeto de estudio a partir de la reflexión y mejorara el desarrollo de las prácticas de aula del grupo de maestros involucrados.

Este autor toma como referentes teóricos, entre muchos otros, a Luis Puig (1995) para hacer énfasis en la destreza de los niños y niñas al resolver “Problemas Aritméticos Escolares”, en otras palabras: “Problemas de enunciado”. Sobre este tema, da cuenta de las estrategias que emplean los estudiantes en sus primeros años de escolaridad puesto que argumenta que ellos ya han desarrollado habilidades con las cuales pueden enfrentar una situación de carácter aditivo e incluso multiplicativo.

Por otra parte, el autor da importancia también a Fuson (1992), Bermejo (1994) y De Corte & Verschaffel (1985), pues encuentra en las investigaciones de éstos la posibilidad de introducir en los problemas aritméticos de adición y sustracción, las categorías de cambio, comparación, combinación e igualación en las actividades escolares desde temprana edad, favoreciendo la construcción de nociones y conceptos ricos y amplios con respecto a las operaciones relacionadas con la estructura aditiva.

En esa investigación, el autor aplicó una metodología cualitativa del tipo investigación – acción, con la cual logró que los maestros se organizaran por Comunidades De Aprendizaje, en las cuales, en primera instancia se dio la reflexión acerca de sus prácticas de aula y producto de ello, fue la participación activa en la elaboración de la Unidad Didáctica que buscó empoderarlos en el diseño y aplicación de estrategias pedagógicas innovadoras y motivadoras para sus estudiantes de quienes se esperaban tuviesen mayor interés en el aprendizaje de las matemáticas.

Las principales conclusiones que arrojó dicho proceso investigativo fueron:

- Un cambio de actitud por parte de los docentes, ya que fueron asequibles y reflexivos frente a la propuesta metodológica planteada por el autor, generando

transformaciones en la práctica pedagógica, en tanto que hubo una profundización en el conocimiento disciplinar y didáctico.

- Respecto a los estudiantes, la Unidad Didáctica facilitó sus procesos de aprendizaje relacionados con la estructura aditiva, esto es, la identificación del contexto del problema, la identificación de la incógnita y el uso correcto de los algoritmos.

Además de las anteriores investigaciones, se encontró también la de Lina Marcela Quijano Rodríguez y Jennifer Agualimpia Hernández (2013) para la Universidad del Valle, titulada “Análisis desde una perspectiva semiótica del papel del docente en la enseñanza de las operaciones de suma y resta con números naturales” desarrollada en la ciudad de Santiago de Cali. Esta investigación de licenciatura, tuvo como propósito identificar los elementos semióticos utilizados por los docentes de 2º de primaria de los colegios Americano, Carmelitano y la Institución Educativa Monseñor Ramón Arcila, en la enseñanza de la estructura aditiva que permiten la aprehensión de los conceptos en los estudiantes.

Para alcanzar dicho propósito, las autoras citan a Vergnaud (2003) y sus investigaciones sobre los diferentes problemas que se presentan en la educación primaria en la enseñanza de las matemáticas, ahondando en los números y su escritura, así como en las operaciones que se realizan con estos números para establecer el tipo, el nivel de complejidad, la variedad, y la manera como son desarrolladas las situaciones aditivas.

También se cita a Duval (1999) quien en su propuesta de perspectiva semiótica en la formación de pensamiento numérico, afirma que “el progreso de los conocimientos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el primero de ellos, el de la lengua natural” (p. 17).

Para dar cuenta de lo anterior, la metodología que se aplicó fue la investigación etnográfica, con base en lo planteado por Goetz & LeCompte (1988), donde la información obtenida, fue analizada a partir de rejillas de observación para revisar las diferentes estrategias utilizadas por los docentes al momento de enseñar la estructura aditiva, además de los elementos epistemológicos, Semióticos y Didácticos-Pedagógicos tenidos en cuenta por los docentes.

Con base en lo anterior, se logró concluir que la falta de articulación entre los diferentes registros semióticos utilizados en la enseñanza de la estructura aditiva,

desencadena la falta de apropiación del significado de las operaciones en las distintas situaciones debido a la confusión que causa en los estudiantes.

Finalmente, con respecto a la resolución de problemas, se encontró la investigación realizada por Diana Cristina Tole Restrepo (2012) de la Unidad Central del Valle del Cauca sede Tuluá, para su tesis de licenciatura, titulada “Diseño de estrategias didácticas para la resolución de problemas matemáticos en escolares del grado cuarto del colegio Antonio José Gonzáles de Bugalagrande – Valle”. El problema encontrado por la investigadora fue la dificultad que tenían los estudiantes para resolver problemas matemáticos, razón por la cual direccionó sus esfuerzos en desarrollar actividades con ellos que propendieran por mejorar esta habilidad utilizando la lectura comprensiva como medio para lograrlo.

La autora se apoyó teóricamente en Villarroel (2003), Polya (2009) y Pérez (2008), quienes se especializan en la resolución de problemas, coincidiendo en que este es un tópico que ha sido de interés para muchos investigadores y enfatizan en que esta actividad resulta compleja, pues se trata de que el niño en realidad tenga que acudir a nuevos procesos de pensamiento y hacer uso de su creatividad para encontrar una solución a una situación planteada, para lo cual proponen algunas etapas que podrían conducir a tener éxito en esta tarea.

Por otra parte, Tole Restrepo (2012) se fundamenta en lo explicado por De La Torre Zermeno (2005) en cuanto a lo que tiene que ver con el constructivismo como “una tendencia didáctica que implica un proceso de ordenación de componentes para construir conocimiento” explicando que el docente es un dinamizador de procesos que propone a sus estudiantes actividades intencionadas y planificadas con el fin de que el aprendizaje sea producto de la experiencia de los niños. En este mismo sentido, se apoya además en autores como Piaget (s.f), Vigotsky (1931) y Ausubel (1963) para dar cuenta de la importancia de que los niños construyan sus propios conocimientos, lo que permite movilizar en ellos nuevas estructuras mentales.

En esta investigación se utilizó una metodología descriptiva de carácter mixto (cualitativo y cuantitativo), desarrollando actividades de orden diagnóstico que le permitirían identificar cuáles son las principales dificultades que presentan los niños a la hora de resolver problemas, luego pasa a una etapa de aplicación en donde los educandos deben establecer las pautas para dar solución a ellos, a partir de la redacción de los

mismos; por otra parte, plantea lecturas de las cuales pueden extraer problemas que les permitan evidenciar la presencia de las matemáticas en su vida cotidiana; ejecuta también actividades de juego e interacción entre los estudiantes a partir de la exposición e intercambio de saberes.

Finalmente, se realiza la evaluación de las actividades anteriormente mencionadas, lo cual le permite concluir que la lectura es fundamental en la enseñanza de las matemáticas para garantizar la comprensión de los problemas dados; así mismo esto favorece el dominio de algunos términos y conceptos propios del lenguaje matemático; y por último, afirma que las prácticas de aula debe presentarse de manera agradable, amena, armoniosa y dinámica al estudiante, para que genere un ambiente de aprendizaje donde el interés del niño no se disperse y permanezca en el objeto de estudio.

CAPÍTULO 2

2. MARCO CONCEPTUAL

A continuación se presentan los elementos teóricos y las unidades de análisis que fundamentan el presente trabajo de investigación.

2.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA REALISTA (EMR).

La Educación Matemática Realista (EMR) reconoce como fundador al Dr. Hans Freudenthal (1905-1990), la cual es una línea didáctica que nació en Holanda como reacción frente al movimiento de la Matemática moderna de los años 70 y al enfoque mecanicista de la enseñanza de la misma, con lo cual se proponía un cambio en la enseñanza tradicional de esta ciencia.

Con relación a esta corriente didáctica, se puede afirmar que invita a pensar la matemática como una actividad humana, denominada por Freudenthal como *Matematización*, de tal modo que debe existir una matemática para todos; el desarrollo de la comprensión matemática pasa por distintos niveles donde juegan un papel fundamental los contextos y los modelos, lo cual es llevado a cabo por el proceso didáctico denominado reinvenición guiada en un ambiente de heterogeneidad cognitiva que desde el enfoque curricular de la matemática en tanto actividad de **matematización** requiere de la fenomenología didáctica como metodología de la investigación, esto es, la búsqueda de contextos y situaciones que gesten la necesidad de ser organizados

matemáticamente, siendo la historia de la matemática, las creaciones y producciones matemáticas espontáneas de los estudiantes, las dos fuentes principales de esta búsqueda.

Así mismo, esta teoría hace uso de principios que se hallan ampliamente relacionados entre sí. A continuación se realiza una explicación de cada uno de ellos, de los cuales tendrá mayor relevancia el **principio de niveles** ya que es base fundamental en el desarrollo de esta investigación; sin embargo, también se tienen en cuenta en ella, los principios de *actividad*, *realidad* y *reinención*, en tanto que son necesarios para la construcción y aplicación del diseño.

Principio de actividad.

Freudenthal (citado en Bressan, s.f) concebía la matemática como una actividad humana a la que todas las personas pueden acceder y la mejor forma de aprenderla es haciéndola. “Las cosas están al revés si se parte de enseñar el resultado de una actividad más que de enseñar la actividad misma (hecho que caracteriza como inversión antididáctica)”

De este modo, para este matemático –investigador, hacer matemática (matematizar) es más importante que aprenderla como producto terminado. “El énfasis no está en aprender algoritmos, sino en el proceso de algoritmización, no en el álgebra sino en la actividad de algebrizar, no en las abstracciones sino en la acción de abstraer, no en la forma y la estructura sino en formalizar y estructurar” (p. 2). De este modo, la matemática, en la perspectiva realista, toma un valor educativo en la medida en que posibilita la comprensión y participación en los distintos espacios del entorno social y natural. El término “educación” de acuerdo con este autor incluye tanto el alcance de los objetivos de la educación formal como el desarrollo de actitudes de toda clase: morales, sociales, emocionales, religiosas y cognitivas, que en conjunto buscan hacer del ser humano un hombre culto y formado. De igual manera, favorece una matemática para todos, con lo cual reconoce que no todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos, pero que la matemática a utilizar por una mayoría, será la que les ayude a resolver los problemas de la vida diaria.

Por otra parte, también plantea que los niños en un principio, no pueden matematizar la matemática, debido a que no hay objeto matemático que sea de su

experiencia real, razón por la cual se debe propiciar el acercamiento a conocimientos, destrezas y disposiciones a través de situaciones problemáticas que acerquen a los estudiantes a la necesidad de utilizar mecanismos matemáticos para su organización y solución.

Principio de la realidad

De acuerdo con Freudenthal (citado por Bressan s.f) el aprendizaje matemático debe originarse en la realidad, dado que la matemática surge como matematización (organización) de la realidad. Lo cual no sólo significa mantener a esta disciplina conectada al mundo real o existente sino también a lo realizable, imaginable o razonable para los estudiantes. “Yo prefiero aplicar el término ‘realidad’ a lo que la experiencia del sentido común toma como real en un cierto escenario” (p.3). Visto de esta forma, en la medida en que se le presente al estudiante situaciones problemáticas en contextos de su cotidianidad, podrán imaginarlas, representarlas y razonarlas; en tanto que lo enseñado en el aula cobra sentido y significado en su realidad. “Un contexto es ese dominio de la realidad el cual, en algún proceso de aprendizaje particular, es revelado al alumno en orden a ser matematizado” (p.3).

De la misma manera, Van den Heuvel Panhuizen (citado por Bressan 2016), afirma que:

Un contexto es un evento, una proposición o situación derivada de la realidad, la cual es significativa para los alumnos o la pueden imaginar y conduce a usar métodos matemáticos desde su propia experiencia. Provee significado concreto y apoyo para las relaciones y operaciones relevantes de la matemática. Las situaciones podrían ser tomadas desde experiencias cotidianas, tales como los recorridos del colectivo o las compras y el manejo del dinero. Además de los contextos derivados de la vida, experiencia diaria, los contextos pueden encontrarse en la matemática misma- el mundo de los problemas con números puros y las relaciones numéricas, tales como el contexto de los números primos. (p.3).

Los contextos en la EMR al ser significativos para el estudiante dan inicio a su actividad matemática y cumplen una función primordial en el aprendizaje matemático de estos, en tanto que: son el inicio en el proceso de enseñanza y aprendizaje para hacer

matemática y dominios de aplicación de la misma; despiertan su interés, por lo tanto deben ser bien elegidos; les posibilita trabajar en distintos niveles de conceptualización con base a sus capacidades, tornando comprensible el contenido matemático; fomentan el uso del sentido común, movilizan sus saberes, la modelización y permiten las discusiones matemáticas entre pares dado a que son abiertos lo cual admite estrategias variadas y/o varias soluciones.

Principio de reinención.

La educación matemática en la EMR reconoce el papel clave del **docente como guía** y organizador de la **interacción** en las aulas, lo cual fue denominado por Freudenthal (citado por Bressan, s.f) como “reinención guiada” y la entiende como “...un balance sutil entre la libertad de inventar y la fuerza de guiar” (p.5), es decir, un proceso de aprendizaje en el cual los estudiantes reconstruyen el conocimiento matemático formal a través de métodos informales permeados por atajos en las estrategias, cambios de puntos de vista y el uso de modelos de distintos niveles de formalización. El docente aquí toma un papel determinante como mediador entre los estudiantes y las situaciones problemáticas en juego, entre los estudiantes entre sí, entre las producciones informales de los estudiantes y las herramientas formales ya institucionalizadas, de la matemática como disciplina. La capacidad del docente para anticipar, observar y reflexionar sobre los aprendizajes a corto y largo plazo de sus estudiantes permite guiar adecuadamente este proceso, dado que le facilitará conocer las habilidades y comprensiones de los mismos, para planear la actividad en el aula posibilitando la reinención y el paso de un nivel a otro.

Principio de niveles.

Freudenthal completa el proceso de reinención con lo que Treffers (citado por Bressan, s.f) llamó “matematización progresiva”; esto es que los estudiantes comienzan matematizando un tema o contenido de la realidad y luego llegan a procesos más complejos como el análisis de su propia actividad matemática. Este proceso de matematización fue profundizado por Treffers entre los años 1978 y 1987 quien formuló la idea de dos formas de matematización en un contexto educacional y retomado por Freudenthal en 1991 bajo dos formas:

-*La de matematización horizontal*, que consiste en transformar un problema de la vida diaria a un problema matemático, a través de la intuición, el sentido común, la aproximación empírica, la observación y la experimentación inductiva.

-*La de matematización vertical*, ya dentro de la matemática misma, es decir, en el mundo de los símbolos. Esto posibilita estrategias de reflexión, esquematización, generalización, prueba, simbolización y rigorización (limitando interpretaciones y validez), con el objetivo de lograr mayores niveles de formalización matemática.

De acuerdo con Freudenthal y Gravemeijer (citados por Bressan, s.f) la EMR admite que los estudiantes pasen por distintos niveles de comprensión en el proceso de matematización progresiva, determinados por diferentes tipos de actividades mentales y lingüísticas, sin establecer un orden jerárquico estricto. “Estos niveles son: situacional, referencial, general y formal, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de categoría cognitiva”.

- En el *nivel situacional* se interpreta la situación problemática en el contexto de la misma situación. Los estudiantes se apoyan en sus conocimientos informales, su sentido común y su experiencia, para dar solución a las mismas utilizando diferentes formas. A este proceso se le denomina *matematización horizontal*.

Los demás niveles pertenecen a la *matematización vertical*, la cual se distingue por el “ajuste” de modelos, la esquematización y formalización progresiva.

- En el *nivel referencial* aparecen los modelos gráficos, materiales o rotacionales y las descripciones, conceptos y procedimientos que esquematizan el problema, pero siempre referidos a la situación en particular. De allí que los modelos se consideren como *modelos de*; en este nivel los estudiantes esquematizan de forma particular la situación a través de modelos o descripciones que hagan de la misma.

- El *nivel general* “se desarrolla a través de la exploración, reflexión y generalización de lo aparecido en el nivel anterior, pero propiciando una focalización matemática sobre estrategias que supere la referencia al contexto” (2016, p.7). En este nivel se da lugar a los **modelos para** la resolución de problemas mediados por la exploración, reflexión y generalización que le permite al estudiante concluir que los

aspectos desarrollados pueden ser utilizados en conjuntos de problemas homólogos a los estudiados.

- En el *nivel formal*, “se comprenden y se actúa con los conceptos, procedimientos y notaciones convencionales propios de la rama de la matemática con que se está trabajando”. (2016, p.8).

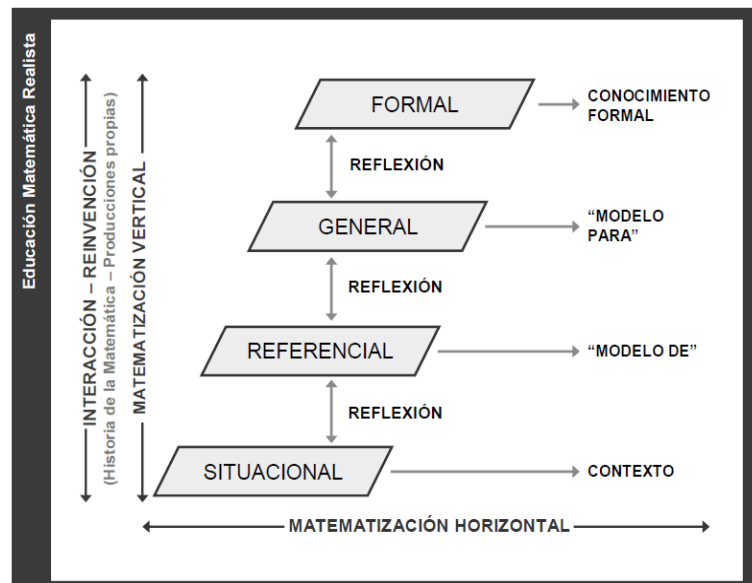


Figura 3: Niveles de matematización

Fuente: Bressan, et al 2016, p.7

Estos niveles no tienen un orden jerárquico de alcance puesto que son dinámicos y los estudiantes pueden revertir de un nivel a otro siempre que lo necesiten para contenidos distintos o partes de un mismo contenido. Afirma Freudenthal (citado por Bressan s.f) “La evolución entre niveles se da cuando la actividad en un nivel es sometida a análisis en el siguiente, el tema operatorio en un nivel se torna objeto del siguiente nivel” (p.7). Los instrumentos básicos para el cambio de nivel son los modelos y la *reflexión* colectiva sobre la propia actividad pues estos constituyen representaciones de las situaciones donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos y relaciones matemáticas que son significativos para resolver la situación dada. Con respecto a esto, Goffree (citado por Bressan et. al, 2016) recuerda las palabras de Freudenthal quien sostiene que:

Uno aprende matemática haciéndola. Los alumnos primero deberían conocer qué están haciendo y lo que es aún más importante, deberían tener la oportunidad de pensar sobre lo que ellos y sus pares han hecho. Esto es la reflexión en el proceso de aprendizaje (p.8).

En la EMR el uso de modelos difiere del concepto generalizado de modelización matemática, como el cambio de situaciones problemáticas a expresiones matemáticas que pueden actuar como modelos. Gravemeijer (citado por Bressan s.f) afirma que en esta corriente, “el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto, sosteniendo una profunda implicación constitutiva entre modelo y situación” (p.10). Los modelos que florecen de los propios estudiantes son respetados y se acercan a otros inspirados en las estrategias informales, utilizadas ya sea por los estudiantes o los estudiados por la fenomenología didáctica que aparecen en la historia de la matemática. Ellos pueden usarse como puente para establecer la distancia entre la matemática contextualizada e informal y la formal, lo cual permite avanzar en los distintos niveles, dada su flexibilidad.

Principio de interacción.

La EMR considera que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, es una actividad social, en tanto que permite la interacción entre estudiante - estudiante y estudiante - docente, llevando a procesos de reflexión e interpretación de las situaciones problemas ya que se comparten diversas experiencias y habilidades; además se comparan estos permitiendo la retroalimentación. Por consiguiente, el aula de clase debe ser un escenario para trabajar en equipos de trabajo como una unidad de organización y cooperación en grupos heterogéneos (cuestión que fue defendida por Freudenthal desde los años 40). De ahí que, las situaciones problemáticas que se elijan deben dar lugar a su resolución apelando a diferentes niveles de comprensión, para que todos los estudiantes puedan trabajar en ellas.

Principio de interconexión (Estructuración)

Los ejes curriculares no pueden ser tratados como entidades separadas, sino que deben incluir contenidos matemáticos interrelacionados de tal modo que haya coherencia en la enseñanza y se posibiliten distintos modos de matematizar las situaciones bajo

diferentes modelos y lenguajes. Con relación a esto, Freudenthal (citado por Bressan s.f) enuncia que:

Lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si se es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación (p.12).

Por ende, aplicar la matemática se torna bastante difícil si se enseña cada eje aisladamente y sin tener en cuenta las conexiones que los entrelazan, dado que habitualmente en las aplicaciones se necesita más que sólo conocimientos de la aritmética, la geometría o solo el álgebra para dar solución a una situación problemática.

Para el interés de la presente investigación, serán tomados en cuenta los principios de *realidad* y *actividad* para el diseño de la secuencia didáctica y los principios de *niveles* e *interconexión* para el análisis de resultados de los productos de los estudiantes. Con relación al principio de niveles, el nivel formal no se tendrá en cuentas debido a la edad y grado de escolaridad de los niños y niñas beneficiarios del presente trabajo de investigación.

LA DIDÁCTICA DESDE LA EMR

En esta corriente se entiende el currículo dentro de una filosofía educativa que tiene por objetivo promover el desarrollo de la investigación educativa, mediante una metodología cualitativa /interpretativa que se fundamenta en las prácticas y experiencias de aulas en las que deben diseñarse e implementarse secuencias didácticas que promuevan cambios en la enseñanza formal. Causa de esto es el esfuerzo conjunto de investigadores, diseñadores curriculares y profesores por generar desarrollos educativos que guíen de forma efectiva los procesos de matematización. Freudenthal en 1999 y Gravemeijer en 1994 (citados por Bressan s.f), afirman que:

Mientras el desarrollo curricular, se centra en el desarrollo de materiales curriculares, el desarrollo educativo constituye mucho más que el diseño instruccional; es una innovación estratégica total que, por una parte, se funda en una filosofía educativa explícita y, por otra, incorpora el desarrollo de toda clase de materiales (adaptándolos) como parte de esa estrategia” (p. 12).

La didáctica realista sostiene que los estudiantes son sujetos activos y participativos en la organización matemática, que da respuesta a fenómenos imaginables. De esta manera supone que si la actividad primordial de los estudiantes es matematizar, entonces, el docente tiene como actividad primordial didactizar, entendiéndose ésta como una tarea organizadora, que se da tanto a nivel horizontal como a nivel vertical.

Según Freudenthal (citado por Bressan, s.f), horizontalmente, los docentes trabajan alrededor de fenómenos de enseñanza – aprendizaje que surgen de sus propias prácticas de aula y/o en las de otros; verticalmente, reinventan sus propias herramientas didácticas a través de la reflexión y la generalización de las situaciones anteriores en busca de posibilitar la matematización.

2.2 LOS PROBLEMAS ARITMÉTICOS MIXTOS ADITIVOS (PAMA).

¿QUÉ ES RESOLVER UN PROBLEMA?

En primera instancia, es muy importante definir qué es un problema, ya que de acuerdo con Polya, esto es “tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata” (Rodríguez, 2013, p.154).

Además, para la actividad de resolver problemas, este autor propone 4 etapas o fases, a saber:

- *Comprender el problema:* Donde el sujeto resolutor debe tener claro aspectos tales como: la incógnita, los datos y las condiciones dadas en el problema.
- *Concebir un plan:* Allí, el individuo debe determinar si se ha enfrentado a situaciones similares en otras circunstancias o si conoce alguna información que le permita planear una estrategia de solución.
- *Ejecutar el plan:* En esta etapa, el sujeto resolutor necesita poner en marcha su plan de acción, de manera que le permita demostrar que éste fue exitoso.
- *Examinar la solución obtenida:* Esta fase es un proceso de retroalimentación y metacognición, en la cual el individuo puede verificar que el plan ejecutado fue el acertado y además, trasponerlo en otras situaciones o aplicando diferentes heurísticas (Rodríguez, 2013, p. 159).

Por otra parte, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN 1998) sostienen que “la resolución de problemas debe ser el eje central del currículo de matemáticas, y como tal, debe ser un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática.” (p.52), por consiguiente, es un proceso que requiere ser abordado desde los primeros años de escolaridad, que integre los diferentes aspectos del currículo con las estrategias y recursos necesarios para alcanzar este fin.

Dicho documento afirma también que la actividad de resolver problemas, permite al individuo desarrollar su creatividad y por tanto, su pensamiento divergente, pues con ello avanza a niveles más altos de competitividad, además de ganar mayor confianza en el uso de las matemáticas, no sólo en el aula de clase, sino también en contextos cotidianos (MEN, 1998, p. 52)

Antes de avanzar hacia la estructura aditiva, es importante hacer un breve recorrido por el sentido numérico en educación matemática, en tanto que éste se constituye en el primer paso para desarrollar tareas más complejas.

De acuerdo con Greeno (citado por Almeida, Bruno & Perdomo s.f), un buen sentido numérico se manifiesta cuando se tiene un cálculo mental flexible, se realizan buenas estimaciones numéricas y se hacen inferencias adecuadas sobre las cantidades (p. 11). Así mismo, Sowder (citado por Almeida, et al., s.f), define sentido numérico como una red conceptual, bien organizada, que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible (p.11). Tales definiciones de sentido numérico, permiten inferir que éste abarca una serie de conocimientos de los contenidos relacionados con los números, así como habilidades que permitan darles utilidad y significado en situaciones y tareas cotidianas que los requieran.

Si bien, estas explicaciones son de gran relevancia en la Educación Matemática, no se puede dejar de lado lo que frente al concepto de sentido numérico dice la NCTM (1989) en los Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática: “Es una intuición sobre los números que surge de los diversos significados del número” (p. 38); y respecto a sus componentes, esta organización, sostiene que es importante:

Tener un buen entendimiento del significado de los números; desarrollar múltiples relaciones entre los números; reconocer la magnitud relativa de los números; conocer el efecto relativo de las operaciones en los números, y desarrollar referentes para medir objetos comunes y situaciones de su entorno. (p. 38).

Por su parte, McIntosh (1992), realiza aportes a las categorías señaladas por la NCTM relacionadas con las estrategias de cálculo y con estrategias numéricas adecuadas, ellas son:

➤ **Comprender el efecto relativo de las operaciones:** Habilidad para identificar cómo las operaciones afectan al resultado final de los problemas numéricos, en otras palabras, «comprender el efecto relativo de las operaciones» y «saber relacionar las operaciones». Incluye el uso de propiedades para llegar más fácilmente a los resultados.

➤ **Desarrollar estrategias apropiadas y evaluar lo razonable de una respuesta:** Uso de estrategias adecuadas en función de la tarea (método gráfico, cálculo escrito, estimación, cálculo mental, etc.) y se tiene la habilidad para evaluar si un resultado es razonable.

Estas dos categorías, serán un punto de apoyo muy importante en el desarrollo de la presente investigación, en tanto que, apuntan al interés central de la misma.

Una vez entendido qué es el sentido numérico, es posible avanzar hacia los Problemas Aritméticos Elementales (PAE), en ellos, es importante reconocer su nivel de dificultad, su categorización, las posibles estrategias de solución, de acuerdo con lo expresado con investigadores, tales como: Castro, Rico & Castro, (1995); Carpenter, Moser & Romberg, (1982); Puig & Cerdán, (1988).

Por ejemplo, Castro et al., (s.f) dedicaron buena parte de sus estudios a los problemas de estructura aditiva simples y compuestos, centrándose en los números naturales y las magnitudes discretas, en tanto que éstos son los que más utilizan los docentes en los primeros años de escolaridad de los niños.

Respecto a los problemas de estructura aditiva simple, Castro (1992,1994) los denomina también como problemas de una sola etapa o un solo paso, ya que sólo requieren de una operación para su resolución. De sus análisis, han surgido algunos criterios que permiten clasificarlos, éstos son:

- “a. Designar a los problemas con el nombre de las operaciones es confuso, puesto que un problema de resta se puede resolver con suma.
- b. Los problemas simples de estructura aditiva responden a varios tipos de estructuras semánticas (cambio, combinación, comparación, igualación).
- c. En todo problema hay un esquema subyacente o relación entre los datos.
- d. En un problema simple hay tres cantidades relacionadas: dos datos y una incógnita. La incógnita puede ser una de las tres cantidades relacionadas.
- e. Hay problemas catalogados como de *aumento* y otros son catalogados de *disminución*”. (p. 64).

Por su parte, Vergnaud (citado por Moreira, s.f) expuso la teoría de campos conceptuales, dominio en el cual un conocimiento se desarrolla en un periodo de tiempo considerable, que aborda la experiencia, la maduración y el aprendizaje; y es construido en la vida diaria y en la escuela. Para este autor, la maduración es entendida desde el mismo enfoque piagetiano, es decir, se refiere al crecimiento y desarrollo fisiológico y del sistema nervioso; la experiencia hace alusión a las situaciones de la vida diaria, en donde el sujeto interacciona con el objeto; y finalmente, hace entender que el aprendizaje es la responsabilidad escolar por excelencia, la actuación del docente (sus elecciones, planificación y desarrollo de experimentos didácticos) es imprescindible en la construcción del conocimiento de los estudiantes (p.2).

Vergnaud (citado por Moreira, s.f) explica entonces que “un campo conceptual es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones de pensamiento, conectados unos a otros y probablemente entrelazados durante el proceso de adquisición” (p. 2), donde el conocimiento tiene características locales, en tanto que las situaciones y problemas son ya conocidos.

En este sentido, Vergnaud propone un campo conceptual para la adición y sustracción, al que ha denominado “Estructuras Aditivas”, en el cual toma en consideración los enfoques entre el uso de medidas, las transformaciones y las relaciones estáticas. En él, se categorizan cuatro situaciones diferentes:

- ✓ **Composición:** Establece la relación parte-todo.
- ✓ **Transformación:** Es la relación entre un estado inicial y una transformación que lleva a un estado final.

✓ **Comparación:** Es la relación entre dos partes comparándolas, teniendo siempre dos partes las cuales se denominan referente y referido y una relación.

✓ **Mixtos:** En ellos, es posible combinar problemas de las clases anteriores.

Además de ello, Vergnaud (citado por Díaz de León, 2004), considera la posibilidad de establecer seis diferentes categorías de relaciones numéricas aditivas, que parten de su teoría de campos conceptuales, a saber:

- I. Composición de dos medidas
- II. Transformación de una medida en otra medida
- III. Relación estática entre dos medidas.
- IV. Composición de dos transformaciones.
- V. Transformación de una relación estática (estado relativo) en otra relación estática (estado relativo).
- VI. Composición de dos relaciones estáticas (estados relativos).

De cada una de estas categorías, se relacionan, en su orden, ejemplos que permiten ilustrarlas y en consecuencia, entenderlas mejor:

- I. *“Pedro tiene 6 canicas en su bolsa derecha y 8 canicas en su bolsa izquierda. Él tiene 14 canicas por todas”.*
- II. *“Pedro tenía 17 canicas antes de jugar, él ha perdido 4 canicas. Ahora tiene 13 canicas”*
- III. *“Pedro tiene 8 canicas, él tiene 5 más que Juan. Juan tiene 3 canicas”.*
- IV. *“Pedro ganó 6 canicas en la mañana, él perdió 9 canicas en la tarde. En total él perdió 3 canicas”.*
- V. *“Pedro debe a Enrique 6 canicas. Él le dio 4. Él todavía le debe a Enrique 2 canicas”.*
- VI. *“Pedro debe 8 canicas a Enrique, pero Enrique debe 6 a Pedro. Así que Pedro sólo debe 2 canicas a Enrique”.* (p. 34).

Otros autores, denominan los problemas aritméticos mixtos propuestos por Vergnaud, como “compuestos” o “combinados”. Para el interés de la presente investigación, se hablará de problemas *mixtos*. No obstante, se tendrán en cuenta las

definiciones que ellos proponen, en tanto que enriquecen el marco conceptual del objeto de estudio.

Así por ejemplo, Verschaffel & De Corte, (1996) ponen de manifiesto que, la dificultad o complejidad de un problema radica en la cantidad de operaciones que implique utilizar para resolverlo, así como el lenguaje que en él se utiliza. Esto sucede, por supuesto, con la adición y la sustracción, y por ello, ha sido necesario establecer diferentes maneras de categorizar los problemas que involucran estas operaciones. En este sentido, es ampliamente conocida la categorización que exponen Carpenter et al., (1982) y Verschaffel & De Corte (1996) quienes toman en consideración las relaciones semánticas presentes en el enunciado con relación a las cantidades. Según estos autores, es posible distinguir tres categorías básicas:

“Problemas de cambio (algún evento cambia el valor de una cantidad inicial), de combinación (un conjunto particular y dos subconjuntos disjuntos de él se relacionan entre sí) y de comparación (se comparan dos cantidades y la diferencia entre ellas)” (p. 59).

Además, explican que cada categoría se subdivide de acuerdo con la posición de la incógnita en el problema planteado. Con referencia a las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas, estos autores explican que generalmente los niños realizan procesos de modelación que tienen en cuenta la acción o relación descrita que encuentran en el problema, y más adelante, emplean sus saberes sobre conteo y recuerdan hechos numéricos concretos que les permiten abstraer la modelación directa que conduce a una resolución de problemas más eficiente.

Así mismo, estos autores explican que los problemas denominados compuestos son aquellos que requieren de dos o más operaciones o de desarrollar la misma operación más de una vez, es decir, que constan de dos etapas o dos pasos.

Castro, et al. (s.f), en su investigación, sostienen que los problemas de carácter compuesto, incluyen las cuatro operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), formando dieciséis parejas entre ellas.

Para el interés de la presente investigación, sólo serán tenidas en cuenta las siguientes:

(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)

Estos autores, afirman que sobre los problemas compuestos no hay mucha investigación al respecto, sin embargo, encuentran en Durell (citado por Castro, et. al) la

premisa de que la resolución de problemas es uno de los pilares de la enseñanza de la aritmética, por lo que estima confiable crear una lista de los problemas más básicos; para ello, considera muy relevante distinguir entre “el número de diferentes tipos de procesos de cálculo y el número de pasos (u operaciones) requeridos para resolver un problema dado” (p. 65).

Explica Durell (citado por Castro, et al., s.f) que cuando los problemas requieren sólo de dos adiciones o dos multiplicaciones para su solución, entonces se está hablando de problemas de dos procesos.

La investigación de Castro, et al. (s.f), se apoya también, en autores más contemporáneos (Shallin, 1985; Nesher, 1991; Nesher y Herskovitz, 1994) quienes sostienen que los problemas aritméticos compuestos, no son otra cosa que la combinación de dos esquemas simples: el aditivo y el multiplicativo, partiendo del hecho de que los problemas compuestos no están basados en las cuatro operaciones sino más bien, en la relación entre tres cantidades.

En otra de sus investigaciones, Castro, et al., (1992) amplían el conocimiento de los problemas de estructura aditiva de dos etapas, indicando que éstos sólo requieren de la suma y/o la resta para obtener la solución y proponen un enfoque estructural basado en las categorías semánticas de los problemas: cambio (Ca), combinación (Co), comparación (Cp) e igualación (Ig) (Esta última, también propuesta por Carpenter & Moser, 1982).

Al igual que los autores mencionados anteriormente, Puig & Cerdán (1989), explican en su estudio que los problemas que requieren de más de un paso para su resolución, son denominados por ellos Problemas Aritméticos Verbales de Operaciones Combinadas y los identifican con la sigla PAVOC, y puntualizan además en que la *traducción* (en palabras de Polya “*entender el problema*”) es mucho más compleja que en los problemas simples o de una sola etapa, puesto que haría falta identificar por lo menos tres componentes existentes en ellos, estableciendo así “qué operaciones hay que realizar, entre qué datos y en qué orden” (p. 1).

Finalmente, es importante entonces comprender que para el presente equipo investigador, un **Problema Aritmético Mixto Aditivo (PAMA)**, se entiende como *una situación cuya respuesta no es evidente a luz de los conocimientos matemáticos previos, y que requiere el uso de dos operaciones (suma y/o resta) para su solución*. Para alcanzar este fin, es necesaria la interpretación del problema, la identificación de los datos, la

operación a realizar con ellos y el orden en que éstas se deben efectuar, dar cuenta del valor de la incógnita y dar una respuesta precisa a lo que se está preguntando; por ello, es necesario tener un buen sentido numérico, así como ejecutar estrategias que conduzcan al estudiante a desarrollar este proceso con éxito.

PERSPECTIVA MATEMÁTICA

Con el ánimo de enriquecer las bases teóricas que sustentan la presente investigación, a continuación se presentan los Postulados de Peano con relación a los números naturales, tomados del libro “Álgebra Moderna” de Frank Ayres, Jr (2003) y los aporte de Godino (2004), los cuáles serán transcritos al pie de la letra, en tanto que, no se debe caer en errores o imprecisiones.

POSTULADOS DE PEANO

Sea un conjunto N no vacío, tal que

Postulado I: $1 \in N$

Postulado II: Para cada $n \in N$ existe un único $n * \in N$, llamado siguiente de n .

Postulado III: Para cada $n \in N$ se tiene $n * \neq 1$.

Postulado IV: Si $m, n \in N$ y $m * = n$, entonces $m = n$.

Postulado V: Todo subconjunto K de N que tenga las propiedades

(a) $1 \in N$

(b) $K^* \in K$ siempre que $k \in K$ en el mismo N

Estas son propiedades bien conocidas de los números naturales. Los postulados I y II no requieren más explicación; el III establece que hay un primer número natural, el 1; el IV dice que distintos números naturales m y n tienen distintos siguientes $m + 1$ y $n + 1$; el V dice en esencia que cualquier número natural puede alcanzarse comenzando con 1 y contando los siguientes consecutivos.

ADICIÓN SOBRE N

La adición sobre N se define por

(i) $n + 1 = n *$ para todo $n \in N$.

(ii) $n + m * = (n + m) *$ siempre que $n + m$ esté definido.

Se demuestra que la adición está regida por las siguientes leyes:

Para cualesquiera $m, n, p \in N$,

- | | | |
|----------------------|--------------------|---------------------------------------|
| A₁ | Ley de clausura | $n + m \in N$ |
| A₂ | Ley conmutativa | $n + m = m + n$ |
| A₃ | Ley asociativa | $m + (n + p) = (m + n) + p$ |
| A₄ | Ley de cancelación | Si $m + p = n + p$, entonces $m = n$ |

Con relación a lo anterior, Godino (2004) define lo que es la adición de la siguiente forma:

Definición conjuntista para la adición

Dados dos números naturales a, b , se llama suma $a + b$ al cardinal del conjunto $A \cup B$, siendo A y B dos conjuntos disjuntos cuyo cardinal es a y b , respectivamente. (p. 54).

Volviendo a Peano, este autor establece las siguientes **relaciones de orden** entre los números naturales:

Para cualesquiera $m, n \in N$ definimos “<” por

(vii) $m < n$ si, y solamente si, existe algún $p \in N$ tal que $m + p = n$

Así se demuestra que la relación $<$ es transitiva, pero no reflexiva ni simétrica, por el

Teorema I: Todo elemento $n \neq 1$ de N es el siguiente de algún otro elemento de N .

$$1 < n \quad \text{para todo } n \neq 1$$

Y por **(i)** y **(vii)** $n < n *$ para todo $n \in N$

Para cualesquiera $m, n \in N$ definimos “>” por

(viii) $m > n$ si, y solamente si, $n < m$

De aquí sigue

La ley de tricotomía: Para cualesquiera $m, n \in N$ se verifica una y solo una de las siguientes relaciones:

$$(a) m = n \quad (b) m < n \quad (c) m > n$$

Otras consecuencias de las relaciones de orden son los Teoremas II y II’:

Teorema II: Si $m, n \in N$ y $m < n$, entonces para todo $p \in N$

$$(a) m + p < n + p \quad (b) m \cdot p < n \cdot p$$

y recíprocamente, si (a) o (b) son ciertas para algún $p \in N$, entonces $m < n$.

Teorema II': si $m, n \in N$ y $m > n$, entonces para todo $p \in N$

$$(a) m + p > n + p$$

$$(b) m \cdot p > n \cdot p$$

y recíprocamente si (a) y (b) son ciertas para algún $p \in N$, entonces $m > n$.

Como el Teorema II' no es más que el Teorema II con m y n cambiadas, es claro que la demostración de una parte del Teorema II demuestra la parte correspondiente del Teorema II'. Las relaciones «menor o igual que» ($\leq$) y «mayor o igual que» ($\geq$) se definen como sigue:

$$\begin{array}{llll} \text{Para } m, n \in N, & m \leq n & \text{si} & m < n \quad \text{o si} \quad m = n \\ & m \geq n & \text{si} & m = n \quad \text{o si} \quad m > n \end{array}$$

Sea A un subconjunto cualquiera de N (esto es, $A \subseteq N$). Un elemento p de A se dice *elemento mínimo* de A si $p \leq a$ para todo $a \in A$. Nótese que en el lenguaje de los conjuntos, p es el primer elemento de A con respecto al orden $\leq$.

Así mismo, Godino (2004) plantea desde el campo de los números naturales el orden de éstos, así:

Definición algebraica de la ordenación de números naturales

Dados dos números naturales a y b , a es menor que b , $a \leq b$, si existe otro número natural d tal que $a + d = b$. Esta relación binaria definida en N cumple las propiedades:

- Es una relación de orden total, es decir que si se toman dos números cualesquiera siempre se puede decir cuál de ellos es mayor.
- Reflexiva, es decir, para todo natural, n , $n \leq n$
- Antisimétrica, es decir, para dos naturales n y p , si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq n$, entonces necesariamente $n = p$
- Transitiva: es decir, para tres naturales n , p y q , si se tiene que $n \leq p$ y que $p \leq q$, entonces necesariamente $n \leq q$. (p.28)

Por otra parte, se conoce en matemáticas desde Godino (2004) la *función biyectiva* entre los números. Se dice que una función es biyectiva si es al mismo tiempo *inyectiva*

y *sobreyectiva*; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.

Formalmente, dada una función f :

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \rightarrow y = f(x)$$

La función es biyectiva si se cumple la siguiente condición:

$$\forall y \in Y : \exists! x \in X / f(x) = y$$

Es decir, para todo y de Y se cumple que existe un único x de X , tal que la función evaluada en x es igual a y .

Dados dos conjuntos X e Y finitos, entonces existirá una biyección entre ambos, si y sólo si X e Y tienen el mismo número de elementos y la función es inyectiva o sobreyectiva.

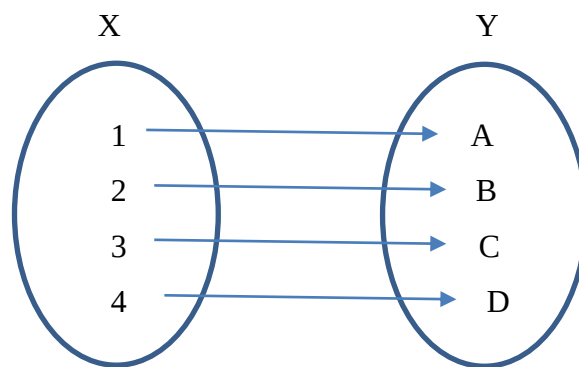


Figura 4. Ejemplo de función biyectiva de dos conjuntos finitos.

Fuente: Godino (2004)

Por otra parte, es claro que en la adición de cantidades pequeñas, los niños hacen uso de los principios de conteo, por lo que es importante tenerlos en cuenta como punto de partida de la adición. Con base en esto, se presentan a continuación las técnicas de conteo para obtener cardinales, tomando en consideración lo planteado por Godino en su libro “Matemática para Maestros” (2004), los cuales serán transcritos al pie de la letra, con el fin de no caer en imprecisiones o posibles errores.

Principios para el conteo

- *Principio del orden estable.* Las palabras numéricas uno, dos, tres, ... deben recitarse siempre en el mismo orden, sin saltarse ninguna.
 - *Principio de la correspondencia uno a uno.* A cada elemento del conjunto sometido a recuento se le debe asignar una palabra numérica distinta y sólo una.
 - *Principio de irrelevancia del orden.* El orden en que se cuentan los elementos del conjunto es irrelevante para obtener el cardinal del conjunto.
 - *Principio cardinal.* La palabra adjudicada al último elemento contado del conjunto representa, no sólo el ordinal de ese elemento, sino también el cardinal del conjunto.
- (p.21)

Definición conjuntista para la sustracción

Dados $b < a$, de modo que hay un subconjunto propio B de b elementos en un conjunto A de a elementos, entonces $a - b = \text{Card}(B')$, donde B' es el conjunto complementario de B respecto del conjunto A. (p. 55)

Definición conjuntista para la sustracción por comparación

Dados $a < b$, de modo que un conjunto A con a elementos se puede poner en correspondencia biyectiva con un subconjunto propio A1 de un conjunto B con b elementos, entonces $b - a = \text{Card}(A'1)$. (p. 55)

PERSPECTIVA DIDÁCTICA

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (y de cualquier otra área) en sí mismas, normalmente, el docente planea su labor pedagógica con todo lo que ello implica (discurso, instrumentos, actividades, evaluación, etc), a partir de idealizaciones que él mismo supone que le llevarán al éxito en el desarrollo y alcance de sus objetivos, cuando estos elementos los ponga en escena en el aula de clase. Sin embargo, en la ejecución de dichas actividades, suele darse cuenta de que se pueden presentar situaciones, las cuales no presupuestó y por lo tanto, se pueden convertir en una barrera que impida la adquisición de los saberes por parte de los estudiantes.

En muchas ocasiones los niños emplean estrategias empíricas de resolución de problemas, alejadas de las propuestas por el docente que si bien pueden resultar útiles en

contextos cotidianos o con números pequeños, no lo son, cuando de trabajar con números grandes se trata; por lo que es importante destacar que la instrucción dada por el maestro, no es el objetivo central de la actividad resolutoria si ésta se pone en perspectiva del currículo; el asunto de mayor relevancia es “dotar de significado los números y las operaciones o a la creación de esquemas mediante la solución de problemas, o series de problemas que puedan ser evocados al resolver otros problemas” (p. 2) tal como lo afirman Carpenter, Hiebert y Moser (citados por Puig & Cerdán 1990),

Con base en ello, Martín Socas (1997) explica acerca de las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas que para el interés de la presente investigación, son muy relevantes, en tanto que darán herramientas para el análisis del desempeño de los estudiantes, sujeto de estudio.

Entonces, en primer lugar, Socas (1997) afirma que las dificultades presentadas por los estudiantes en la tarea de aprender matemáticas, puede tener, entre otros, varios orígenes, de los cuales sólo menciona algunos, como son: la organización curricular de las matemáticas, la conceptualización de los estudiantes y los problemas al enseñar. Sostiene este investigador que las dificultades mencionadas, se entretajan para formar estructuras más complejas que a la luz de la práctica, se constituyen en obstáculos que se hacen evidentes en los estudiantes en forma de errores; así, explica la relación entre estas tres ideas.

Por otra parte, sostiene Socas que algunas de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas están asociadas al macrosistema educativo, pero que éstas se concretan en la relación, maestro – materia - alumno – institución educativa, es decir, el microsistema educativo; y que además, no están necesariamente vinculadas a las personas que tienen menos habilidades con las matemáticas.

Afirma el autor que, las dificultades pueden ser de diferente índole y por lo tanto, su tratamiento se puede abordar desde diferentes perspectivas. Al respecto, realiza una categorización de ellas, así:

-Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas: Están asociadas al manejo del lenguaje propio de la disciplina, en lo que tiene que ver con palabras y/o expresiones, así como el uso de signos. La comunicación de ideas matemáticas se puede complejizar cuando el estudiante se enfrenta a palabras polisémicas

o que las asocia con contextos diferentes al de ésta área de conocimiento, o bien, que las ubica en otros dominios.

Dado que los sistemas de representación matemática son abstractos, el lenguaje de los signos puede resultar confuso para el estudiante, en tanto que, para él no significan nada y en consecuencia, no sabe cómo utilizarlos y mucho menos qué representan en una situación que le plantee el docente.

-Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático: Frente a este ítem, Socas explica que: “El abandonar ciertas demostraciones formales en beneficio de una aplicación más instrumental de las reglas matemáticas, no debe implicar de ninguna manera el abandono del pensamiento lógico” (p.7). Esto es, que ni los aspectos deductivos formales ni el desarrollo de procedimientos algorítmicos, son la riqueza de las matemáticas, que si bien pueden resultar importantes y útiles, lo es más la necesidad de conducir al estudiante a procesos de pensamiento inteligente, por lo que el pensamiento lógico debe ponerse de manifiesto en todas las actividades matemáticas y dicha lógica se enmarca en la situación del educando.

Entrando al campo de los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, Socas (1997) cita a Bachelard (1938) quien introduce este concepto, pero en el campo de las ciencias experimentales afirmando que los problemas científicos hay que plantearlos en términos de obstáculos, pues es en ese momento “cuando surgen como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos” (p. 14).

Menciona Socas que ha sido objeto de debate el traslado del concepto *obstáculo epistemológico* de las ciencias experimentales a la Didáctica de las Matemática por varios autores, entre ellos Brousseau en 1983, con quien coincide en afirmar que: “la propia noción de obstáculo está constituyéndose y diversificándose; por lo que no es fácil hacer generalidades pertinentes sobre este tema” (p. 14).

Brousseau (citado por Socas, 1997) explica que los obstáculos pueden ser de origen *ontogénico*, es decir los relacionados con el desarrollo del niño; de origen *didáctico*, que tienen que ver con las decisiones que se hacen para la situación de enseñanza; y finalmente de origen *epistemológico*, o sea los relacionados directamente con la formación de los conceptos.

En conclusión, Socas termina expresando sobre los obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas, que:

- Son un conocimiento adquirido y no una falta de conocimiento.
- Son eficaces en tanto que responden adecuadamente a determinados contextos.
- Son resistentes, pues están arraigados a la validez que han demostrado, por lo que rechazan un nuevo saber.

Por otra parte, con relación a los errores, Luis Rico (1995) los define como “datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable en dichos procesos” (p. 6).

En cuanto a los errores en el aprendizaje de las matemáticas, Socas sostiene que: “un conocimiento de los errores básicos es importante para el profesor porque le provee de información sobre la forma en que los alumnos interpretan los problemas y utilizan diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta” (p.23).

Afirma el autor que a pesar de que los estudiantes estén en capacidad de mostrar resultados satisfactorios, detrás de éstos pudiesen estar ocultos muchos errores conceptuales, por lo que propone dedicar más tiempo a saber qué piensan los alumnos sobre un determinado tópico que a la enseñanza misma; con esto, se lograría determinar cuáles son sus concepciones erróneas que se pueden repensar y reajustar en situaciones matemáticas dadas y discutidas.

Dice este investigador que la psicología cognitiva puede ser de gran ayuda para interpretar y analizar los errores cometidos en la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, pues ella afirma que la mente del estudiante tiene unos conocimientos adquiridos a priori, por lo que cuando llega a la escuela no trae “una hoja en blanco”.

Por lo anterior, en la adquisición del nuevo conocimiento, se debe tener en cuenta que éste signifique para el alumno, por lo que debe contestarse preguntas que se ha hecho a sí mismo o por lo menos recuperar algunas de las representaciones que ya se había hecho de ese saber; con esto logrará apropiarse y responsabilizarse de los problemas considerándolos suyos y no del profesor. Además, el conocimiento anterior podría resultar favorable en la construcción de uno nuevo, si no es así, se constituye entonces en un obstáculo por lo que hay que desapegarse de él para permitir una estructuración total del conocimiento nuevo.

Socas determina entonces que, los errores pueden provenir de los obstáculos cuando están relacionados con la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático; o bien, los errores podrían tener su génesis en la ausencia de significado para el estudiante, es decir que estarían vinculados a las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Para finalizar, Socas propone estrategias para prevenir y remediar las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas. En primer lugar, plantea arbitrar entre las estrategias generales de enseñanza con las específicas; dando cuenta de que las generales son todas aquellas mencionadas como dificultades, mientras que las específicas tienen que ver con los obstáculos y errores anteriormente explicados en el presente apartado.

En lo que tiene que ver con los remedios, el autor sostiene que éstos están enmarcados en la labor que día a día se pone de manifiesto en el aula de clase y que están determinados en buena medida por la evaluación y diagnóstico que hace el docente.

Explica Socas que la revisión de los errores, tiene una doble intencionalidad: la primera, conducir mejor la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas a partir de la buena organización de las mencionadas estrategias generales y específicas: mientras que la segunda, busca preparar estrategias que permitan corregirlos. Es por ello, que el docente debe tener claridad de los errores de sus alumnos para que sus esfuerzos, sean precisos en ambas direcciones.

Algunas de esas estrategias generales, de acuerdo con el autor, deben estar encaminadas a:

- “-Asegurarse de que los objetos matemáticos del sistema antiguo de signos, no representen dificultades.
- No precipitar el aprendizaje de un nuevo objeto.
- Evitar una innecesaria complejidad de los signos matemáticos.
- Asegurarse de que los diferentes sentidos de un objeto matemático estén claramente diferenciados” (p. 30).

En otras palabras, lo que se debe procurar es la evasión o minimización de los obstáculos, ya que si éstos son superados, se dotan de sentido los objetos matemáticos y el pensamiento matemático, creando un clima de actitudes positivas afectivas y emocionales hacia las matemáticas. En este sentido, afirma Brousseau (citado por Socas, 1997) que: “para superar un obstáculo se requiere un esfuerzo de la misma naturaleza

que cuando se establece un conocimiento, es decir interacciones repetidas, dialécticas del alumno con el objeto de su conocimiento” (p. 31).

Dicho lo anterior, lo que interesa realmente es poner de manifiesto que los conocimientos que ha adquirido el alumno, pueden responder a una “lógica personal” que le podría causar errores, sin embargo, no se trata de quedarse ahí, por el contrario, se trata de aprovechar y ver esos obstáculos como algo interesante que enriquece la discusión de la Educación Matemática y produce nuevos conocimientos; es por esto, que Socas finaliza su documento diciendo que “*Todo error puede ser el comienzo de un buen aprendizaje*” (p.36).

PERSPECTIVA CURRICULAR

De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Educación Matemática emitidos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) en el año 1998, se afirma respecto a las situaciones problemáticas, que éstas son un pretexto para favorecer el acercamiento de los estudiantes al conocimiento matemático, puesto que con él se pone en ejercicio el aprendizaje activo, se evidencia la aplicabilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, transformando la cultura, además de privilegiar la evolución de los procesos de pensamiento.

Es natural que los estudiantes estén familiarizados con los números, con la realización de operaciones y la resolución de problemas antes de ingresar al sistema educativo, con la característica de que estas actividades son realizadas de manera informal y empírica. Lamentablemente, en la escuela, la resolución de problemas matemáticos es consecuencia del aprendizaje de los algoritmos, esto significa que se dejan para el final de las unidades temáticas o de los periodos académicos, lo que conlleva a que no se les dedique el tiempo que ameritan y además que los niños y niñas no hallen ninguna relación entre ellos.

Tomar cartas en este asunto, es decir, que se ponga de manifiesto en el aula estrategias donde se relacionen las operaciones con la resolución de problemas, permitirá que los alumnos reinventen las matemáticas a partir de la exploración y planteamiento, así como de la enunciación de preguntas y reflexión sobre modelos.

Sobre este aspecto en particular, Miguel de Guzmán (citado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998) afirma que:

La enseñanza a partir de situaciones problemáticas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces (p. 24).

Frente a estos aspectos, De Guzmán sostiene que en el trabajo con los estudiantes, se deben considerar como relevantes elementos tales como: la manipulación de objetos matemáticos, la activación de la capacidad de matemáticas, la reflexión sobre su propio pensamiento, la transferencia de estas actividades a otros factores de su trabajo mental, la adquisición de confianza –que favorece la autonomía-, el agrado por las matemáticas, la trasposición del conocimiento a otras ciencias y a su propia vida; y finalmente, que pueda afrontar los nuevos retos de la ciencia y la tecnología.

Además de las razones expuestas por De Guzmán, los Lineamientos Curriculares, también toman en consideración los argumentos del Instituto Freudenthal de Holanda, con relación a la importancia de la resolución de problemas en un contexto determinado, frente a esto, dice este grupo de investigadores que:

- Los conocimientos matemáticos cobran sentido en la sociedad y la vida cotidiana.

- Es fundamental reconocer las matemáticas en las actividades cotidianas y futuras a partir de una postura crítica y flexible, para que todos los estudiantes puedan apropiarse de ellas en tanto que son parte de su educación básica.

- Es importante incrementar el interés de los estudiantes en las matemáticas desde el conocimiento de su historia, así también, con las demás disciplinas.

- A partir de las situaciones de un contexto eficaz, los alumnos desarrollan habilidades de análisis y de organización de información, por lo que la creatividad y el pensamiento divergente, se ven favorecidos, pues se aplican estrategias informales y de sentido común.

-Los problemas concretos y las matemáticas abstractas se ven mediadas por un buen contexto, esto es que en el proceso de resolución, hay una transformación de la situación en un modelo que puede evolucionar desde una situación hasta todos los problemas similares a él.

Respecto a la comprensión del concepto de las operaciones, los Lineamientos Curriculares sostienen que se deben tener en cuenta algunos elementos para construir su significado y da además orientaciones para el aprendizaje de las operaciones entre números naturales (en este caso: adición y sustracción). Dichas orientaciones pueden leerse en la figura 5, página 60.

Con base en ello, se puede decir que, las acciones y transformaciones que se llevan a cabo en las diferentes operaciones durante su proceso de aprendizaje, permiten identificar rasgos similares entre ellas, lo que facilita considerarlas dentro de un mismo proceso operatorio, este es el caso de la estructura aditiva, donde se ejecutan acciones tales como agregar y desagregar, reunir y separar.

Consecuencia de esta primera etapa, se espera que el niño, en una segunda etapa, establezca relaciones entre las operaciones dentro del contexto numérico que está manejando, lo que debe conllevar a la producción de modelos a partir de los diversos esquemas e ilustraciones que le permiten enunciar una idea.

Para el caso de la adición y sustracción, Dickson (citado en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, 1998) sostiene que cada una de estas operaciones tiene sus propios modelos que parten de las particularidades de cada una y de las generalidades del número. Para dicho autor, los modelos asociados a éstas, tienen que ver con los objetos individuales y las longitudes continuas.

En este documento, se explica además que, la enseñanza de la suma se ha limitado a procesos de “agregar” y la resta a “quitar”, por lo que los problemas que se les presentan a los estudiantes, están diseñados de acuerdo con la operación que se esté trabajando, lo que pone de manifiesto que el enunciado verbal, también esté sesgado en ellos, lo que evidencia la necesidad de plantear situaciones donde los estudiantes trabajen en diferentes tipos de problemas verbales.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que comprender las operaciones implica un desarrollo gradual del número que se amplía con base en una gran gama de situaciones abstractas. Dicho desarrollo está relacionado con la comprensión de:

✓ *Las propiedades de las operaciones:* más que reglas formales, se necesita que los niños las entiendan como entidades manipulables que cobran importancia en un contexto en particular.

✓ *Efecto de las operaciones:* invita a la utilización de modelos para que el estudiante comprenda cómo la operación actúa en una situación, lo que les permitirá darse cuenta de que para llegar a una solución o respuesta, pueden emplearse diferentes caminos.

✓ *Relaciones entre las operaciones:* está asociado a la conexión entre las diferentes operaciones para pensar en las diversas maneras de resolver un problema.

✓ *Cálculos de números y aplicaciones de números y operaciones:*

La finalidad de los cálculos es la resolución de problemas. Por lo tanto, aunque el cálculo sea importante para las matemáticas y para la vida diaria, la era tecnológica en que vivimos nos obliga a replantear la forma en que se utiliza el cálculo hoy día. Hoy día, casi todos los cálculos complejos los hacen las calculadoras y los computadores. En muchas situaciones de la vida diaria, las respuestas se calculan mentalmente o basta con una estimación, y los algoritmos con lápiz y papel son útiles cuando es razonablemente simple (NCTM, 1989, p. 34)

✓ *Aplicación de números y operaciones:* está relacionada con la aplicabilidad de los números y las operaciones en la vida real. En este punto, se requiere razonar con los números y con las operaciones a usar, es decir, que tipo de respuesta es apropiada, cuál herramienta de cálculo es más eficiente y accesible, escoger una estrategia para aplicar y que permita revisar los datos, así como verificar si los resultados obtenidos son razonables.

Con base en todo lo expuesto anteriormente y en consecuencia de ello, el Ministerio de Educación Nacional, promulgó los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas, que buscan, que al terminar el grado tercero, los estudiantes, frente a todos los aspectos relacionados con la estructura aditiva y la resolución de problemas,

enmarcado en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, estén en capacidad de realizar las acciones que pueden leerse en la figura 5 (véase página 60).

Los Estándares de Competencia de Matemáticas para el ciclo primero a tercero de educación primaria, son insumo de la presente investigación, en tanto que, éstos son tenidos en cuenta en el plan de área de la Institución Educativa La Moralia, como parte de su Proyecto Educativo Institucional (PEI).

Además de ello, son tenidos en cuenta los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), que para el alcance de los mencionados estándares de calidad propone el Ministerio de Educación Nacional, en el marco del macroproceso “Resolución de problemas”; que a su vez aborda los procesos de: comunicación, razonamiento, procedimientos y modelación. Dichos DBA, están incluidos en la figura 5, que puede leerse en la página 60.

La aplicación y desarrollo de los DBA que son objeto de interés de la presente investigación, apuntan a los ejes de progresión que en la categoría de pensamiento numérico, direcciona el MEN, a saber:

- Usos e interpretaciones de los números y de las operaciones en contextos.
 - Uso y sentido de los procedimientos y estrategias con números y operaciones.
 - Comprensión de las relaciones entre números y operaciones.
 - Comprensión de la estructura de los conjuntos (propiedades, usos y significados en la resolución de problemas).

Los elementos curriculares mencionados y las competencias que deben desarrollar los estudiantes del grado tercero de la institución educativa, contempladas en su PEI, dan como fruto los objetivos planteados en cada una de las situaciones que componen la secuencia didáctica. Tanto dichas competencias como los mencionados objetivos, se encuentran en la figura 5 (página 61).

La rejilla que condensa los aspectos curriculares tenidos en cuenta para orientar las situaciones planteadas en la secuencia didáctica y que hacen parte de la fase uno de la presente investigación, pueden leerse en el marco metodológico en las páginas 60 y 61.

CAPÍTULO 3

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 METODOLOGÍA

La metodología de investigación que se aplicó en el presente trabajo tuvo un enfoque *CUALITATIVO*, de tipo *DESCRIPTIVO*, puesto que, de acuerdo con Sampieri (2014) este método no exige un proceso rígido en el análisis, por el contrario, permite al investigador revisar aspectos que ya podría creer finalizados, planteándose nuevas preguntas. Además, en este enfoque, el investigador debe correlacionar una serie de hechos entre sí, lo que le permitió desarrollar conclusiones con base en lo que se observa y se vivencia.

Dice además Patton (citado por Sampieri, 2014) que los datos cualitativos son descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observadas y sus manifestaciones. Ellos, son evidencia o información simbólica, verbal, audiovisual o en forma de texto e imágenes (p. 42).

Afirma además el autor que este enfoque se cimienta desde un punto de vista interpretativo, ya que su punto de interés son las acciones de los seres vivos, especialmente, de los humanos y sus instituciones. Por otra parte, la investigación cualitativa puede entenderse como un compendio de prácticas interpretativas que hacen evidente al mundo, generando transformaciones que simbolizan las observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos.

En cuanto a las técnicas de recolección de datos, se puede decir que en el enfoque cualitativo, algunas de ellas son: “observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, interacción e introspección con grupos o comunidades” (Sampieri, p. 42).

Dado que en la presente investigación, el equipo de trabajo pretendió describir el desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica, el tipo de estudio que se empleó fue de carácter descriptivo, pues afirma Sampieri que: “los estudios descriptivos son útiles para mostrar con precisión los ángulos o dimensiones de un fenómeno, suceso, comunidad, contexto o situación” (p.125), en este caso específico, el nivel de matematización que alcanzan los estudiantes del grado tercero.

Dado que la investigación afloró de la práctica pedagógica cotidiana, los instrumentos de recolección de información, tuvieron también su génesis allí. Dichos instrumentos fueron elegidos en tanto que permitieron enriquecer y evidenciar los saberes de la población objeto de estudio y están fundamentados en el marco teórico que sustenta y da respuesta a los argumentos presentados en la formulación del problema. Estos son: *rejillas construidas desde el marco teórico para la revisión documental y los análisis; grabaciones en videos y fotografías*, las cuales permitieron capturar momentos específicos del desempeño de los estudiantes al momento de desarrollar la secuencia didáctica.

Para el desarrollo de la presente investigación, la población objeto de estudio del presente proceso investigativo son los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa La Moralia, quienes conforman un total de 27 niños y niñas. De ellos, la muestra está compuesta por 9 estudiantes de las sedes educativas Guillermo Valencia y Antonio Ricaurte de las veredas Venus y La Mansión respectivamente, con edades que oscilan entre los 8 y 9 años.

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación, se tuvieron en cuenta tres fases. La primera de ellas, buscó dar respuesta al primer objetivo específico; en esta fase se realizó el proceso de documentación *disciplinar, didáctica y curricular* que da sustento a la pregunta formulada en el problema (éstos se pueden evidenciar en el capítulo 2). En la segunda fase, dicha documentación se consolida en una rejilla de aspectos curriculares y otra rejilla donde éstos se articulan con los aspectos disciplinares y didácticos, relacionados con los niveles de matematización, dando respuesta así al objetivo específico 2. Como elemento adicional, En esta fase, se llevó a cabo el diseño de una rejilla que plantea 3 situaciones contextualizadas, cada una de ellas conformada por dos actividades que ponen de manifiesto las estructuras semánticas que componen cada problema planteado, y una rejilla más que permite ver de manera global los aspectos más relevantes de la secuencia didáctica, poniendo de manifiesto las acciones que el estudiante debe desarrollar para alcanzar cada nivel. Finalmente, en la tercera fase se realizó el análisis de los resultados obtenidos a partir de su condensación en un tabulado (figura 9), fueron de gran importancia las rejillas de las figuras 7 y 8, en tanto que, con estos insumos fue posible evidenciar el nivel de matematización alcanzado por los estudiantes; además se

emitieron algunas conclusiones y reflexiones que sirvan de insumo a futuras investigaciones que aborden el mismo objeto matemático u otros similares.

3.2 ASPECTOS CONTEXTUALES

La Institución Educativa La Moralia se encuentra ubicada en la zona rural (media montaña) del municipio de Tuluá en el corregimiento que lleva su mismo nombre. Está situada a 1200 metros sobre el nivel del mar, a 15 kilómetros del perímetro urbano y está caracterizada en el estrato social 1. Su temperatura promedio es de 23 grados centígrados; cuenta además con una gran variedad de fauna y vegetación enriquecida por la presencia del río Morales como afluente principal de la zona y de numerosos nacimientos y quebradas.

Dicho establecimiento educativo es una entidad pública de educación básica primaria, secundaria y media, de carácter oficial y mixto, Se constituyó por Resolución Departamental 1855 del 05 de septiembre de 2002 y a través del acto administrativo municipal 079 del 15 de junio de 2005 las cuales le facultan para otorgar el título de Bachiller Académico. Su autonomía administrativa, académica y financiera se atempera a lo establecido en las Leyes 115 de 1994 y 715 de 2001.

La Institución Educativa La Moralia beneficia a una población de niños, niñas y jóvenes entre 5 y 18 años de edad, en los mencionados niveles de educación, integrando un total de 368 estudiantes en la actualidad y con quienes se pretende una formación integral de ciudadanos comprometidos con el desarrollo de la localidad a partir de la protección y aprovechamiento racional de los recursos que les ofrece su entorno. Se busca además la construcción del liderazgo y la participación democrática con sentido crítico.

El establecimiento educativo en mención cuenta con un total de ocho sedes, ubicadas en diferentes veredas del corregimiento; de las cuales 6 son atendidas por un solo docente cada una. Es importante destacar que dos de ellas se beneficiarán directamente del presente proceso investigativo, a saber: las sedes “Guillermo Valencia” del corregimiento Venus y “Antonio Ricaurte” de la vereda La Mansión. En dichas sedes hay a la fecha un total de 9 estudiantes en el grado tercero, quienes oscilan entre 8 y 9 años de edad, y serán tomados como muestra poblacional. Dichos estudiantes pertenecen a las sedes beneficiadas.

Como información fundamental para el diseño de la secuencia didáctica, se tuvieron en cuenta aspectos relevantes de la comunidad, tales como el cultivo del café y la mora, así como la fiesta del campesino. Del mismo modo, se tomaron elementos de estos eventos, los cuales son conocidos por los estudiantes a partir de sus vivencias, a saber: variedades de plantas, cantidad de cultivos, plagas, precios de los productos, agremiaciones locales, instrumentos de recolección, actividades comunitarias, entre otras.

Dado que los aspectos didácticos, disciplinares y curriculares ya fueron establecidos en el marco conceptual (página 27), a continuación se presenta la rejilla que condensa estos últimos que fueron abordados en la página 51. Todos ellos responden al objeto matemático de la presente investigación, finalizando de este modo la fase 1 de la misma.

ASPECTOS CURRICULARES

ASPECTOS CURRICULARES	LINEAMIENTOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS Las situaciones problemáticas, son un pretexto para favorecer el acercamiento de los estudiantes al conocimiento matemático, puesto que con él se pone en ejercicio el aprendizaje activo, se evidencia la aplicabilidad de las matemáticas en la vida cotidiana, transformando la cultura, además de privilegiar la evolución de los procesos de pensamiento. Para este fin, es importante: ➤ Reconocer el significado de la operación en situaciones concretas de la cuales emergen. ➤ Reconocer los modelos más usuales y prácticos de las operaciones. ➤ Comprender las propiedades matemáticas de las operaciones. ➤ Comprender el efecto de cada operación y las relaciones entre operaciones.
	ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIA Al terminar el grado tercero, los estudiantes, frente a todos los aspectos relacionados con la estructura aditiva y la resolución de problemas, enmarcado en el pensamiento numérico y sistemas numéricos, están en capacidad de:

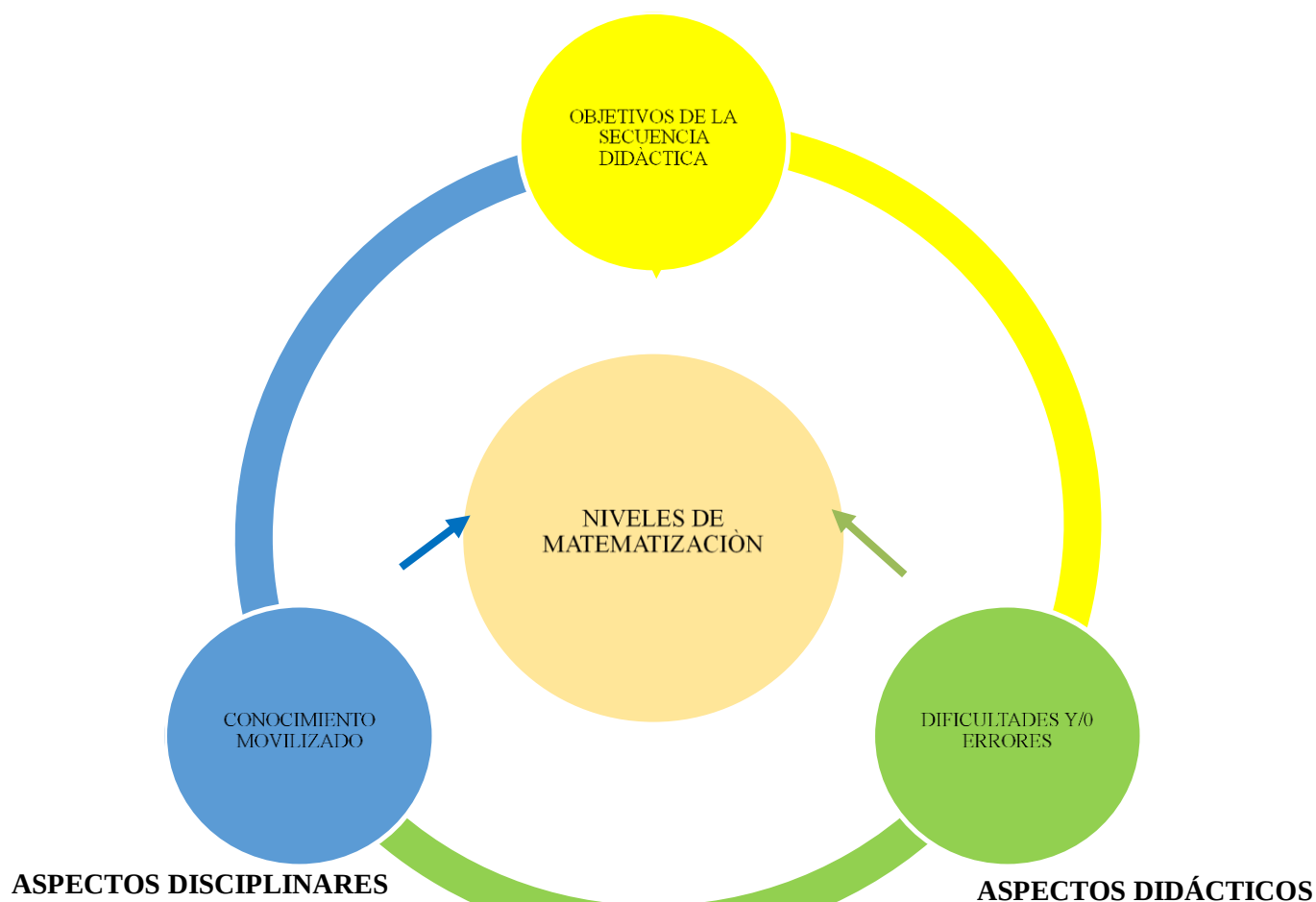
	➤ Resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación. ➤ Usar diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. ➤ Identificar, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.
	DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE Para el alcance de los mencionados estándares de calidad propone el Ministerio de Educación Nacional, en el marco del macroproceso “Resolución de problemas”; que a su vez aborda los procesos de: comunicación, razonamiento, procedimientos y modelación, los siguientes: ➤ DBA 1: Interpreta y resuelve problemas aditivos y multiplicativos. ➤ DBA 2: Propone y justifica estrategias para estimular y calcular resultados de operaciones. ➤ DBA 3: Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones aditivas y multiplicativas. ➤ DBA 9: Argumenta sobre situaciones en los que aparecen datos desconocidos.
	PROYECTO EDUCATIVO INSTITUCIONAL: El plan de área de Matemáticas de la Institución Educativa La Moralia, establece para grado 3º, que los estudiantes estén en la capacidad de resolver y formular problemas en situaciones aditivas de composición y de transformación para comparar los resultados de diferentes operaciones y analizar la validez de los mismos.

	OBJETIVOS DE LAS SITUACIONES DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA: ➤ Interpretar y resolver Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA) que involucren la argumentación acerca de la información presentada en situaciones de composición y transformación. ➤ Establecer comparaciones entre cantidades y expresiones que involucren problemas aditivos de transformación y composición desarrollando procedimientos y estrategias donde le den uso y sentido a los números naturales. ➤ Resolver y formular problemas mixtos en situaciones aditivas de composición y de transformación que conduzcan a la generalización de estrategias en su resolución.
--	---

Figura 5: Rejilla de aspectos curriculares

Una vez determinados los aspectos curriculares, que dan origen a los objetivos de la secuencia didáctica, se inicia la fase 2, en la cual se presenta la rejilla que permitió relacionar a éstos con los elementos disciplinares y didácticos, relacionándolos con los niveles de matematización que se pretende que los estudiantes alcancen a través de los Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA).

ASPECTOS CURRICULARES



- Interpretar y resolver PAMA que involucren la argumentación acerca de la información presentada en situaciones de composición y transformación.
- Establecer comparaciones entre cantidades y expresiones que involucren problemas aditivos de transformación y composición desarrollando procedimientos y estrategias donde le den uso y sentido a los números naturales.
- Resolver y formular problemas mixtos en situaciones aditivas de composición y de transformación que conduzcan a la generalización de estrategias en su resolución.



- Comprensión de las operaciones adición y sustracción.
- Relación de orden entre las cantidades involucradas.
- Propiedades de la adición.
- Agrupación y desagrupación de cantidades.



- No identificación de los datos el problema.
- No reconocimiento de la incógnita.
- No reconocimiento de la unidad o la magnitud.
- No reconocimiento de las cantidades numéricas.
- No emitan respuesta con base a la pregunta formulada.
- No saber qué operación aplicar en cada etapa del problema.
- No saber desagrupar las cantidades, especialmente las seguidas de cero
- No discernir si todos los datos son necesarios.
- Confundir la adición con la sustracción en la operatoria.
- El lenguaje de los signos puede resultar confuso.

Figura 6: Rejilla de relación de aspectos curriculares, disciplinares y didácticos

Con el ánimo de avanzar en la segunda fase de la presente investigación, es necesario exponer detalladamente, antes que nada, las situaciones que componen la secuencia didáctica, especificando qué se pretendía en cada una de ellas y cuáles fueron las estrategias pedagógicas utilizadas; así como el tipo de números a utilizar que corresponde a los naturales desde la axiomática de Peano y los aportes de Godino.

Con relación a la situación 1 (ver página 129) denominada “La mora, fruta que enamora” el objetivo planteado, a saber fue: Interpretar y resolver Problemas Aritméticos Mixto Aditivos (PAMA) que involucren la argumentación acerca de la información presentada en situaciones de composición y transformación.

Esta situación, proponía dos actividades, cada una de ellas compuesta por cuatro problemas, con los cuales se pretendía que los estudiantes identificaran los datos contenidos en cada uno, así como las unidades o magnitudes a las que éstos hacen referencia, además de la posibilidad de argumentar cuáles de los datos les resultaban más relevantes para llevar a cabo el proceso resolutor de cada uno.

En la primera actividad, se entregó a los estudiantes material manipulativo con el ánimo de que éste les sirviera como recurso práctico para representar la información del problema; mientras que en la actividad 2, se hizo uso de la representación pictórica de los datos.

La segunda situación (ver página 142) que se presentó a los estudiantes, “Una semilla de café, una historia por conocer”, tuvo por objetivo establecer comparaciones entre cantidades y expresiones que involucren problemas aditivos de transformación y composición desarrollando procedimientos y estrategias donde le den uso y sentido a los números naturales.

En la búsqueda del alcance de dicho objetivo, la situación 2 propone a los estudiantes dos actividades. En la primera de ellas se les solicita que identifiquen los datos del problema, se deja un espacio para que ellos libremente apliquen un modelo o estrategia de resolución y finalmente, se les presentan preguntas donde debían comparar las cantidades, no sólo los números como tal, sino también aludir a las cantidades mayores o menores en forma verbal y a través de los símbolos que los representan. Por otra parte, en la segunda actividad, se planteó además, opciones de respuesta para que los niños y

niñas elijan una de ellas después de haber desarrollado una estrategia de cálculo, se realizan preguntas similares a las de la actividad 1 y se formulan casos de orden ascendente y descendente de las cantidades; en este caso, ya no cobra importancia la identificación de los datos, en tanto que este ítem ya fue abordado en las anteriores instancias.

Con respecto a la situación 3, (ver página 152) cuyo nombre fue “...Y nos fuimos de fiesta” ésta tuvo por objetivo resolver y formular problemas mixtos en situaciones aditivas de composición y de transformación que conduzcan a la generalización de estrategias en su resolución, es posible decir que a través de ella se pretendía que los estudiantes no sólo resolvieran eficientemente los problemas planteados, sino que además, lograran crear sus propios PAMA.

Esta situación consta de dos actividades. La primera de ellas, está compuesta por 5 problemas, que estaban sujetos a una lista de precios dada, además, en el tercer problema se pretendía la creación de un problema a partir de dicha lista. La segunda actividad, está compuesta por 7 problemas, 4 de los cuales son propuestos y los 3 restantes serían creación de los estudiantes, a partir de una información dada, los cuales podrían ser de su propia invención o siguiendo los modelos semánticos presentados en esta situación; los educandos debían además, buscar un mecanismo para validar sus respuestas y realizar estimaciones con base en las cantidades conocidas.

Tal como propuso Ayllón (2012) en su tesis doctoral, en esta situación se busca que los educandos puedan ser buenos resolutores de problemas, en tanto que, la creación de éstos, tienen origen en los propios conocimientos que tienen los niños de su contexto. Es por esto, que en el campo disciplinar, se espera que los educandos, hagan buen uso de las operaciones de suma y resta, de las propiedades que existen entre ellas, así como las relaciones entre los números.

A continuación se presenta la rejilla que da cuenta de la estructura semántica de los problemas que componen cada situación. Debe tenerse en cuenta que letra señalada con negrita, indica el elemento que el estudiante debe buscar en cada paso del problema.

SITUACIÓN 1
LA MORA, FRUTA QUE ENAMORA

ACTIVIDAD 1	
SITUACIÓN RELACIONADA CON EL CONTEXTO DE LA MORA	
MANIPULACIÓN DE MATERIAL CONCRETO	
PROBLEMA 1: COMPOSICIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Bolsas de semillas sin tuna B = Bolsas de semillas con tuna C= Total de bolsas de semilla	B=Bolsas de semillas con tuna D =Bolsas de semillas para la siguiente cosecha E = Bolsas de semillas con tuna sembradas
$C - A = \mathbf{B}$	$B - D = \mathbf{E}$
PROBLEMA 2: COMPOSICIÓN – TRANSFORMACIÓN	
A= Libras de mora de la mañana B = Libras de mora de la tarde C= Total de libras de moras del día	B= Total de libras moras de la tarde D= Libras de mora que vendió. E = Libras de mora que no vendió.
$C - A = \mathbf{B}$	$B - D = \mathbf{E}$
PROBLEMA 3: TRANSFORMACIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Helados vendidos el lunes B= Helados vendidos el martes C = Total de helados vendidos en los 2 días	C= Total de helados vendidos en los 2 días D= Helados preparados con leche. E = Helados preparados con agua.
$A + B = \mathbf{C}$	$C - D = \mathbf{E}$
PROBLEMA 4: TRANSFORMACIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Mermeladas vendidas el viernes B = Mermeladas por vender entre sábado y domingo. C= Total de frascos de mermelada	B= Mermeladas por vender entre sábado y domingo D= Mermeladas vendidas el sábado E = Mermeladas para vender el domingo
$C - A = \mathbf{B}$	$B - D = \mathbf{E}$
OBSERVACIÓN: En este problema, se podría presentar que los niños resuelvan el problema haciendo primero una suma y luego, lo cual daría lugar a una estructura semántica diferente: $A + B = \mathbf{C}$ $D - C = \mathbf{E}$	

ACTIVIDAD 2	
SITUACIÓN RELACIONADA CON EL CONTEXTO DE LA MORA	
REPRESENTACIÓN PICTÓRICA	
PROBLEMA 5: COMPOSICIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Canastas del lunes B= Canastas de miércoles C= Canastas de lunes y miércoles	C=Canastas de lunes y miércoles D =Canastas del viernes E= Canastas de la semana
$A + B = C$	$C + D = E$
PROBLEMA 6: COMPOSICIÓN – TRANSFORMACIÓN	
A= Plantas sembradas el martes B= Plantas sembradas el jueves C= Total de plantas sembradas	C= Total de plantas sembradas D= Plantas que dañó el hongo E= Plantas que sobrevivieron al hongo.
$A + B = C$	$C - D = E$
PROBLEMA 7: TRANSFORMACIÓN - COMPOSICIÓN	
A= El dinero que tiene Doña Alexandra B= El dinero que le pagan en el Centro de Acopio. C= Dinero que tiene Doña Alexandra después de que le pagan.	D= El costo del traslado de la mora. C= Dinero que tiene Doña Alexandra después de que le pagan. E= Diferencia entre el costo del viaje y el dinero de Doña Alexandra
$A + B = C$	$D - C = E$
PROBLEMA 8: TRANSFORMACIÓN – TRANSFORMACIÓN	
A= El dinero que queda de la venta B= El costo del viaje C= El dinero total de la venta	A= El dinero que queda de la venta D= El dinero invertido en semillas E= La ganancia real de la venta
$C - B = A$	$A - D = E$
*Durante el desarrollo de la situación, podría presentarse entre las dificultades y/o errores, que los niños: -No identifiquen los datos del problema. -No den cuenta de la unidad por la que se les pregunta (discreta o de medida). -No reconozcan las cantidades. -Desarrollen mal el algoritmo. -No enuncien la respuesta del problema. -Resuelvan el problema con suma en lugar de resta o viceversa. -No desagrupen al hacer las sustracciones. -Ubiquen el sustraendo en el lugar del minuendo. -Incluyan en las operaciones a efectuar, datos que no son necesarios. -No sepan qué operación hacer en cada paso del problema. -Ubiquen mal los números en los algoritmos, sin tener en cuenta el valor posicional.	

SITUACIÓN 2

UNA SEMILLA DE CAFÉ, UNA HISTORIA POR CONOCER

ACTIVIDAD 1	
SITUACIÓN RELACIONADA CON EL CONTEXTO DEL CAFÉ	
REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	
PROBLEMA 1: COMPOSICIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Plantas de la familia Montoya B = Plantas de la familia Acevedo C= Total de plantas sembradas	B= Plantas de la familia Acevedo D= Plantas que pertenecen a Don Juan E = Plantas que pertenecen a Carlos
$C - A = \mathbf{B}$	$B - D = \mathbf{E}$
PROBLEMA 2: COMPOSICIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Café cosechado por la familia Agudelo B = Café cosechado por la familia Pérez C= Café de ambas familias	B= Café de la familia Pérez D= Café arruinado por la roya E = Café que sobrevivió a la plaga
$C - A = \mathbf{B}$	$B - D = \mathbf{E}$
PROBLEMA 3: TRANSFORMACIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Kilos de café recogidos en la primera semana B= Kilos de café recogidos en la segunda semana C= Kilos de café recogido en la tercera semana D = Kilos de café recogidos durante las tres semanas	D= Kilos de café recogidos durante las tres semanas E= Kilos de café vendidos en Tuluá F = Kilos de café vendidos en La Marina
$A + B + C = \mathbf{D}$	$D - E = \mathbf{F}$
PROBLEMA 4: TRANSFORMACIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Bultos de café recolectados B= Bultos de café vinagre C = Bultos de café en buen estado	C= Bultos de café en buen estado D= Bultos de café exigidos E = Bultos de café por conseguir
$A - B = \mathbf{C}$	$D - C = \mathbf{E}$

ACTIVIDAD 2	
SITUACIÓN RELACIONADA CON EL CONTEXTO DEL CAFÉ	
REPRESENTACIÓN TIPO PRUEBA SABER	
PROBLEMA 5: COMPOSICIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Plantas de café de variedad Castillo B= Plantas de café de variedad Supremo C= Total de plantas de café variedad Castillo y Supremo	C= Total de plantas de café de variedad Castillo y Supremo D= Plantas de café de variedad Catimore E= Total de plantas de café de las tres variedades.
$A + B = C$	$C + D = E$
OBSERVACIÓN: En este problema se podría presentar que los niños hagan una sola suma, lo cual daría lugar a una estructura semántica diferente, así: $A + B + C = D$	
PROBLEMA 6: COMPOSICIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Dinero ganado en el año 2016 B= Dinero ganado en el año 2017 C= Dinero ganado en los dos años	C= Dinero ganado en los dos años D= Dinero invertido en plaguicidas E= Dinero que queda
$A + B = C$	$C - D = E$
PROBLEMA 7: TRANSFORMACIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Kilos de café que le quedaron a Doña Delfina B= Kilos de café que se rodaron en la montaña. C= Kilos de café de Doña Delfina	A= Kilos de café que le quedaron a Doña Delfina D= Kilos de café de Rubiela E= Kilos de café de ambas señoras.
$C - B = A$	$C + D = E$
PROBLEMA 8: TRANSFORMACIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Surtido de café de enero B= Café vendido en enero C= Café por vender	C= Café por vender D= Meta de compra E= Café que debe comprar
$A - B = C$	$D - C = E$
*Durante el desarrollo de la situación, podría presentarse entre las dificultades y/o errores, que los niños: -No identifiquen los datos del problema. -No den cuenta de la unidad por la que se les pregunta (discreta o de medida). -No reconozcan las cantidades. -Desarrollen mal el algoritmo. -No enuncien la respuesta del problema. -Resuelvan el problema con suma en lugar de resta o viceversa. -No desagrupen al hacer las sustracciones. -Ubiquen el sustraendo en el lugar del minuendo. -Incluyan en las operaciones a efectuar, datos que no son necesarios. -No sepan qué operación hacer en cada paso del problema. -Ubiquen mal los números en los algoritmos, sin tener en cuenta el valor posicional. -Confundan los signos mayor que y menor que.	

SITUACIÓN 3

“...Y NOS FUIMOS DE FIESTA”

ACTIVIDAD 1	
SITUACIÓN RELACIONADA CON LA FIESTA DEL CAMPESINO	
REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA	
PROBLEMA 1: COMPOSICIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Dinero que recibe la hija de Don Felipe B = Dinero que recibe la esposa de Don Felipe C= Dinero que tiene de Don Felipe	B= Dinero que recibe la esposa de Don Felipe D= Costo de la chuleta. E = Costo del almuerzo de la suegra de Don Felipe
$C - A = B$	$B - D = E$
PROBLEMA 2: COMPOSICIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Dinero que debe llevar de devuelta B = Dinero que le queda para gastar C= Dinero que le dio la mamá a María	B= Dinero que le queda para gastar D= Dinero que gastó E = Dinero que le sobró a María
$C - A = B$	$B - D = E$
PROBLEMA 3:	
En estos problemas los datos, las operaciones y la estructura semántica, así como las dificultades y errores dependerán de la invención de cada niño; aunque es posible que los estudiantes tomen los dos problemas anteriores como ejemplo para crear el suyo.	
PROBLEMA 4: TRANSFORMACIÓN - COMPOSICIÓN	
A = Dinero que tiene ahora Cristina B= Dinero que se le regalaron a Cristina C= Dinero que llevaba Cristina	A= Dinero que tiene ahora Cristina D= Dinero que gastó en su almuerzo E = Dinero que Cristina ahorra
$C + B = A$	$A - D = E$
OBSERVACIÓN: Es posible que para dar respuesta a la pregunta del problema, los estudiantes no acudan a la sustracción, sino a la comparación directa de los números.	
PROBLEMA 5: TRANSFORMACIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Dinero que José le regala al hermano B = Dinero que le queda a José C= Dinero que tiene José	B= Dinero que le quedó a José D= Precio del pastel de pollo E = Dinero que le quedó a José
$C - A = B$	$B - D = E$

ACTIVIDAD 2	
SITUACIÓN RELACIONADA CON LA FIESTA DEL CAMPESINO	
REPRESENTACIÓN NUMÉRICA	
PROBLEMA 6: COMPOSICIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Dinero recibido por venta de comidas B= Dinero recibido por venta de bebidas C= Dinero recibido por venta de comidas y bebidas	C= Dinero recibido por venta de comidas y bebidas D= Dinero recibido por alquiler de sillas y baños E= Dinero recibido en total por Doña Yamir
$A + B = C$	$C + D = E$
OBSERVACIÓN: En este problema se podría presentar que los niños hagan una sola suma, lo cual daría lugar a una estructura semántica diferente, así: $A + B + D = E$	
PROBLEMA 7:	
En estos problemas los datos, las operaciones y la estructura semántica, así como las dificultades y errores dependerán de la invención de cada niño; aunque es posible que los estudiantes tomen los dos problemas anteriores como ejemplo para crear el suyo.	
PROBLEMA 8: COMPOSICIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Dinero aportado por la alcaldía B= Dinero aportado por la JAC C= Dinero que recibió la comunidad	C= Dinero que recibió la comunidad. D= Dinero invertido en ingredientes. E= Dinero para otros gastos
$A + B = C$	$C - D = E$
PROBLEMA 9: TRANSFORMACIÓN - COMPOSICIÓN	
A= Dinero que le sobra a la comunidad B= Dinero con el que pagaron a los artistas C= Dinero que tiene la comunidad	A= Dinero que le sobró a la comunidad D= Dinero que aportaron Don Silvio y Don Edgar E= Dinero que la comunidad tiene ahora
$C - B = A$	$A + D = E$
PROBLEMAS 10	
En estos problemas los datos, las operaciones y la estructura semántica, así como las dificultades y errores dependerán de la invención de cada niño. Aunque podría presentarse que los niños tomen como ejemplo los problemas anteriores para crear el suyo.	
PROBLEMA 11: TRANSFORMACIÓN - TRANSFORMACIÓN	
A= Dinero que gastó Jorge en comida B= Dinero que le quedó a Jorge C= Dinero que ganó Jorge en la cabalgata	B= Dinero que le quedó a Jorge D= Dinero que Jorge regaló a su esposa E= Dinero que le sobra a Jorge
$C - A = B$	$B - D = E$
PROBLEMAS 12	
En estos problemas los datos, las operaciones y la estructura semántica, así como las dificultades y errores dependerán de la invención de cada niño. Aunque puede presentarse que los niños tomen como ejemplo los problemas anteriores para crear el suyo.	
*Durante el desarrollo de la situación, podría presentarse entre las dificultades y/o errores, que los niños:	

- No identifiquen los datos del problema.
- No den cuenta de la unidad por la que se les pregunta (discreta o de medida).
- No reconozcan las cantidades.
- Desarrollen mal el algoritmo.
- No enuncien la respuesta del problema.
- Resuelvan el problema con suma en lugar de resta o viceversa.
- No desagrupen al hacer las sustracciones.
- Ubiquen el sustraendo en el lugar del minuendo.
- Incluyan en las operaciones a efectuar, datos que no son necesarios.
- No sepan qué operación hacer en cada paso del problema.
- Ubiquen mal los números en los algoritmos, sin tener en cuenta el valor posicional.

Figura 7: Rejilla de estructura semántica de los problemas de la secuencia didáctica

A continuación, se presenta una rejilla en la cual se condensan cada uno de los problemas de las distintas situaciones de la secuencia didáctica y se encuentran las acciones que deben desarrollar los estudiantes para determinar en qué nivel de matematización se encuentran. Por otra parte, se hace claridad de que el desempeño de los niños y niñas se puede ubicar en cualquiera de dichos niveles, en tanto que éstos no tienen un orden jerárquico.

Es importante tener en cuenta que en la columna denominada “operatividad”, los signos señalados con asterisco, representan la posibilidad de que el estudiante aplique una acción diferente a la planteada.

Situación	Actividad	Problema	Estructura Aitiva	Operatividad	Niveles de matematización /Criterios
1	1	1	Composición Composición	(–, –)	<i>Situacional:</i> (interpretación del problema en el contexto) *Identifica los datos *Reconoce las unidades discretas y de medida.
		2	Composición Transformación	(–, –)	
		3	Transformación Composición	(+, –)	
		4	Transformación Transformación	(–, –) *(+, –)	
	2	5	Composición Composición	(+, +)	

				*(+)	*Identifica las cantidades. <i>Referencial:</i> (Modelos, descripciones y procedimientos) *Compara las cantidades. *Usa los algoritmos *Ordena las cantidades. *Explica los procedimientos. *Recurre a diferentes heurísticas para resolver los problemas. <i>General:</i> (Exploración, reflexión, generalización)
		6	Composición Transformación	(+, -)	
		7	Transformación Composición	(+, -)	
		8	Transformación Transformación	(-, -)	
2	1	1	Composición Composición	(-, -)	*Propone y resuelve sus propios problemas. *Reflexiona sobre sus estrategias y sus resultados (metacognición). *Transposición del conocimiento.
		2	Composición Transformación	(-, -)	
		3	Transformación Composición	(+, -)	
		4	Transformación Transformación	(-, -)	
	2	5	Composición Composición	(+, +) *(+)	
		6	Composición Transformación	(+, -)	
		7	Transformación Composición	(-, +)	
		8	Transformación Transformación	(-, -)	
3	1	1	Composición Composición	(-, -)	
		2	Composición Transformación	(-, -)	
		3	(Creación del estudiante)		
		4	Transformación Composición	(+, -)	
		5	Transformación Transformación	(-, -)	
	2	6	Composición Composición	(+, +) *(+)	
		7	(Creación del estudiante)		
		8	Composición Transformación	(+, -)	
		9	Transformación Composición	(-, +)	
		10	(Creación del estudiante)		
		11	Transformación Transformación	(-, -)	

		12	(Creación del estudiante)		
--	--	----	---------------------------	--	--

Figura 8: Rejilla que relaciona la estructura semántica de la secuencia didáctica con las acciones de los niveles de matematización

CAPÍTULO 4

4. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

4.1 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS

A continuación se presentan los análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes durante la aplicación de la secuencia didáctica, a partir de un tabulado estadístico, el cual es insumo para la tercera fase de la presente investigación. En ella, las preguntas se encuentran identificadas de la forma P1, P2, P3 para pregunta 1, pregunta 2, pregunta 3, etc y los diferentes tipos de respuestas emitidos por los estudiantes, se encuentran identificados de la forma T1, T2, T3, para Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3, etc. En ambos casos, la numeración está sujeta a la cantidad de preguntas y respuestas dadas en cada problema. Además, se citan fragmentos de diálogos obtenidos en las grabaciones de los vídeos y fotografías que fortalecen la información contenida en la tabla.

En la presente tabla se encuentran las letras FA para indicar la Frecuencia Absoluta, es decir, el total de estudiantes; FR para abreviar Frecuencia Relativa es decir, el número de estudiantes con relación al total y ND para indicar la Notación Decimal.

SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 1			
PROBLEMA 1			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato numérico del problema.	4	4/9	0,44
T3: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que hacen uso del cálculo mental para determinar un dato.	1	1/9	0,11
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no identificaron la unidad del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que identificaron las semillas como si éstas fuesen la unidad del problema.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que identificaron la mora con y sin tuna como si éstos fuesen las unidades del problema.	2	2/9	0,22

T4: Estudiantes que identificaron las bolsitas de semilla como la unidad del problema.	4	4/9	0,44
P3: ¿Cuántas bolsas de semillas con tuna se sembraron en esta cosecha?			
T1: Estudiantes que no dieron cuenta ni de la cantidad ni de la unidad para dar respuesta al problema.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad del problema pero no de la unidad.	7	7/9	0,77
P4: ¿Cuál de la información del problema fue más importante para resolverlo?			
T1: Estudiantes que no hicieron alusión a ningún dato del problema.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que identificaron la semilla con tuna como el dato más importante.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que hicieron alusión al procedimiento utilizado para resolver el problema.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que identificaron la cantidad total de bolsitas de semillas de mora y además la composición de éstas.	1	1/9	0,11

PROBLEMA 2			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato numérico del problema.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que identifican todos los datos del problema.	2	2/9	0,22
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no dan cuenta de la unidad de la que se habla.	4	4/9	0,44
T2: Estudiantes que refirieron el procedimiento a utilizar.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que dan cuenta de los datos del problema.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que dieron cuenta de la unidad del problema	3	3/9	0,33
P3: ¿Cuántas libras de mora NO vendió?			
T1: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad, pero no de la unidad.	4	4/9	0,44
T2: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad y de la unidad del problema.	5	5/9	0,66
P4: ¿Cuál de la información del problema planteado fue indispensable para poder resolverlo?			
T1: Estudiantes que se refirieron a la respuesta del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que dan cuenta de la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que aludieron a la cantidad inicial y a la que se vendió	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que hicieron alusión a la operación.	2	2/9	0,22
T5: Estudiantes que dieron cuenta del primer dato del problema.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 3			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato numérico del problema.	4	4/9	0,44
T3: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	3	3/9	0,33
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no dan cuenta de la unidad de la que se habla.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que se refirieron a la cantidad total de helados.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que dieron cuenta de la unidad de la que se habla.	3	3/9	0,33
P3: ¿Cuántos helados fueron preparados con agua?			
T1: Estudiantes que no dieron cuenta de la respuesta correcta.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad y de la unidad del problema.	7	7/9	0,77
P4: ¿Cuál de la información del problema planteado fue indispensable para resolverlo?			
T1: Estudiantes que se refieren a la unidad.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que se refirieron a la composición de los helados sin hacer mención de cantidades.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que se refirieron a la composición de los helados haciendo mención a las cantidades.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que aludieron a la operación utilizada en la primera etapa del problema.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 4			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato numérico del problema.	4	4/9	0,44
T3: Estudiantes que identificaron la unidad del problema.	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que identifican todos los datos del problema	2	2/9	0,22
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no dan cuenta de la unidad de la que se habla.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que dieron cuenta de la unidad de la que se habla.	7	7/9	0,77
P3: ¿Cuántos frascos le quedan para vender el domingo?			
T1: Estudiantes que respondieron correctamente el problema.	9	9/9	1
P4: ¿Cuál de la información del problema planteado fue indispensable para resolverlo?			
T1: Estudiantes que no dan cuenta de ningún dato del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que se refieren a la venta implícita en el problema en un solo día.	2	2/9	0,22

T3: Estudiantes que se refirieron a la cantidad total de unidades.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que aludieron a la operación utilizada en el problema.	2	2/9	0,22

SITUACIÓN 1 – ACTIVIDAD 2			
PROBLEMA 5			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	6	6/9	0,66
T2: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que dan respuesta inmediata al problema a partir del conteo de los gráficos.	1	1/9	0,11
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que identifican parcialmente la unidad del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que aluden al fruto pero no a la magnitud.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que identificaron las canastas de mora como la unidad del problema.	5	5/9	0,55
P3: ¿Cuántas canastas de mora en total se recogieron en estos días de la semana?			
T1: Estudiantes que no dieron respuesta correcta al problema.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad del problema pero no de la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que respondieron correctamente el problema.	5	5/9	0,55
P4: ¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?			
T1: Estudiantes que no hicieron alusión a ningún dato del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que dieron la respuesta del problema como dato.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que hicieron alusión al procedimiento utilizado para resolver el problema.	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que aludieron a la unidad.	3	3/9	0,33
T5: Estudiantes que aludieron a las canastas de mora y a los días.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 6			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	4	4/9	0,44
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato numérico del problema.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que identifican todos los datos del problema.	1	1/9	0,11
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no dieron ninguna respuesta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que se refirieron al hongo “Tris” como unidad.	4	4/9	0,44
T3: Estudiantes que dieron cuenta de datos numéricos	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que aludieron a la mora como unidad.	2	2/9	0,22

P3: ¿Cuántas plantas de mora sobrevivieron a la acción del hongo?			
T1: Estudiantes que no dieron respuesta correcta al problema.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que desarrollaron bien el algoritmo pero no dieron cuenta de la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que no desagruparon en la centena al restar y además no dieron cuenta de la unidad.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que respondieron correctamente.	1	1/9	0,11
P4: ¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?			
T1: Estudiantes que se refirieron a la mora como unidad del problema.	4	4/9	0,44
T2: Estudiantes que aludieron al primer dato del problema, así como a su respuesta.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que aludieron al hongo de la mora.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que hicieron alusión a la operación.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 7			
P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato del problema sin enunciar la cantidad.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que aludieron a los gráficos del dinero sin enunciar la cantidad.	3	3/9	0,33
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no dieron ninguna respuesta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que no identificaron ni la cantidad ni la unidad.	6	6/9	0,66
T3: Estudiantes que identificaron el dinero como unidad.	2	2/9	0,22
P3: ¿Es suficiente el dinero que tiene Doña Alexandra para pagar el costo del viaje? ¿Cuánto le falta o cuánto le sobra?			
T1: Estudiantes que no dieron respuesta correcta al problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que dieron respuesta correcta sólo a la segunda pregunta.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que respondieron ambas preguntas pero no hicieron alusión a la unidad.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que respondieron correctamente.	2	2/9	0,22
P4: ¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?			
T1: Estudiantes que se refirieron a uno de los datos y a la respuesta del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que aludieron a uno de los datos del problema.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que se refirieron al dinero.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que hicieron alusión a la operación.	2	2/9	0,22
PROBLEMA 8			

P1: ¿Qué datos puede identificar en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	7	7/9	0,77
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato del problema sin enunciar la cantidad.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	1	1/9	0,11
P2: ¿A qué hacen referencia esos datos?			
T1: Estudiantes que no identificaron la unidad.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que aludieron al dato que no era relevante para resolver el problema.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que identificaron correctamente la unidad.	4	4/9	0,44
P3: ¿Cuál es la ganancia real de esta venta?			
T1: Estudiantes que no dieron respuesta correcta al problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad pero no de la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que desarrollaron bien los algoritmos pero no respondieron con base en la pregunta.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que respondieron correctamente.	5	5/9	0,55
P4: ¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?			
T1: Estudiantes que se refirieron a los billetes presentes en el problema anterior.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que hicieron alusión a la operación.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que se refirieron al dinero.	5	5/9	0,55

SITUACIÓN 2 – ACTIVIDAD 1			
PROBLEMA 1			
P1: ¿Qué datos identificaste en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no identifican la información del problema.	5	5/9	0,55
T2: Estudiantes que sólo identifican un dato numérico del problema.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que identifican parcialmente los datos del problema	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que identifican todos los datos del problema.	1	1/9	0,11
P2: ¿Cuántas plantas de café le pertenecen a Carlos?			
T1: Estudiantes que respondieron correctamente pero tuvieron dificultad al desagrupar en la segunda resta.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que respondieron correctamente pero no enunciaron la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que respondieron correctamente el problema.	5	5/9	0,55
P3: ¿Cuál familia sembró menos café?			
T1: Estudiantes que tomaron la cantidad mayor para dar respuesta a la pregunta.	4	4/9	0,44

T2: Estudiantes que no aluden a los datos numéricos de las familias, sino a los de las personas.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	4	4/9	0,44
P4: ¿Quién de los hermanos Acevedo sembró más café?			
T1: Estudiantes que tomaron la cantidad menor para dar respuesta a la pregunta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	8	8/9	0,88

PROBLEMA 2			
P1: ¿Qué datos identificaste en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no dieron respuesta alguna.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que no identificaron ningún dato del problema.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que identificaron el primer dato del problema.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que identificaron las cantidades presentes en el problema, pero confundieron las unidades.	1	1/9	0,11
T5: Estudiantes que identificaron dos de las cantidades presentes en el problema, pero confundieron las unidades.	1	1/9	0,11
P2: ¿Cuántas libras de café no se le afectaron a la familia Pérez?			
T1: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad mas no de la unidad.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	8	8/9	0,88
P3: ¿Fue mayor las cantidad de café que se arruinó por la roya que la que sobrevivió? Explique.			
T1: Estudiantes que compararon las cantidades pero no dieron ninguna explicación.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	7	4/9	0,77
P4: ¿Cuál de las dos familias recogió más café?			
T1: Estudiantes que respondieron correctamente.	9	9/9	1

PROBLEMA 3			
P1: ¿Qué datos identificaste en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que aludieron a información que no es relevante para resolver el problema.	4	4/9	0,44
T2: Estudiantes que identificaron las semanas como dato en lugar de los kilos de café, además no tuvieron en cuenta las cantidades.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que identificaron algunos datos del problema.	3	3/9	0,33
P2: ¿Cuántos kilos de café vendió Don Edgar en La Marina?			
T1: Estudiantes que respondieron correctamente el problema, pero se equivocaron en la magnitud.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron con base en la pregunta pero no dieron cuenta de la unidad.	2	2/9	0,22

T3: Estudiantes que contestaron con base en la pregunta, pero se equivocaron en el algoritmo de la resta.	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que respondieron correctamente.	4	4/9	0,44
P3: ¿Fue necesaria toda la información del problema para resolverlo? Explica tu respuesta.			
T1: Estudiantes que no dieron respuesta alguna.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que dijeron que toda la información fue necesaria, pero no explican la razón.	5	5/9	0,55
T3: Estudiantes que dijeron si fue necesaria toda la información y dieron alguna explicación.	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que aludieron a algún dato del problema sin ninguna explicación.	1	1/9	0,11
P4: ¿En cuál semana hubo mayor recolección de café?			
T1: Estudiantes que no dieron respuesta alguna.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	8	8/9	0,88
P5: ¿Dónde vendió más café Don Édgar? ¿En La Marina o En Tuluá?			
T1: Estudiantes que tomaron el dato menor como la respuesta correcta.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	7	7/9	0,77
P6: ¿Cómo fue la recolección de café en la primera y tercera semana con relación a la segunda semana?			
T1: Estudiantes que enunciaron la tercera semana del problema sin establecer comparación con las otras dos.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que enunciaron las semanas sin establecer comparaciones entre ellas.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que compararon la semana tres con las otras dos de manera aislada.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que hicieron una descripción cualitativa.	1	1/9	0,11
T5: Estudiantes que agruparon las cantidades de las semanas 1 y 3 para compararlo con la semana 2.	2	2/9	0,22
PROBLEMA 4			
P1: ¿Qué datos identificaste en el problema?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no dieron respuesta alguna.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que no identificaron ningún dato del problema.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que aludieron a algunos datos del problema sin tener en cuenta las cantidades.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que identificaron el primer dato del problema.	1	1/9	0,11
T5: Estudiantes que identificaron sólo las cantidades sin aludir a la unidad.	1	1/9	0,11
T6: Estudiantes que identificaron parcialmente los datos.	1	1/9	0,11
P2: ¿Cuántos bultos les faltan por conseguir?			
T1: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad mas no de la unidad.	2	2/9	0,22

T2: Estudiantes que respondieron con base en la pregunta pero desarrollaron mal el algoritmo.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	4	4/9	0,44
P3: De todas las cantidades de bultos de café que aparecen en el problema ¿Cuál es la mayor? ¿Cuál es la menor?			
T1: Estudiantes que identificaron el número mayor pero no el menor.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que identificaron el número menor pero no el mayor.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	7	7/9	0,77
P4: Compara las cantidades que aparecen en el problema usando los símbolos <i>mayor que</i> (>) y <i>menor que</i> (<)			
T1: Estudiantes que confundieron totalmente los símbolos.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que en algunos casos no aplicaron correctamente los símbolos.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que usaron correctamente el símbolo, siendo evidentes las correcciones.	5	5/9	0,55
T4: Estudiantes que aplicaron correctamente el símbolo sin dificultad.	1	1/9	0,11

SITUACIÓN 2 – ACTIVIDAD 2			
PROBLEMA 5			
P1: ¿Cuántas plantas en total de las tres variedades hay en el cafetal?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no eligieron la respuesta correcta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que eligieron la respuesta correcta (B).	8	8/9	0,88
P2: ¿De cuál de las variedades de café hay más plantas en el cafetal?			
T1: Estudiantes que no identificaron el número mayor.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	7	7/9	0,77
P3: Ordena de menor a mayor las cantidades de plantas presentes en el problema.			
T1: Estudiantes que ordenaron en forma descendente.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que ordenaron en forma descendente pero identificando cuál era la cantidad mayor.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	7	7/9	0,77

PROBLEMA 6			
P1: ¿Cuánto dinero le quedó a la familia Aguirre?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no dieron respuesta alguna.	1	1/9	0,11

T2: Estudiantes que no eligieron la respuesta correcta.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que eligieron la respuesta correcta (A).	7	7/9	0,77
P2: ¿Qué información utilizaste para resolver el problema?			
T1: Estudiantes que no especifican qué información del problema utilizaron.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que hicieron alusión a la resta para indicar el procedimiento utilizado.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que tuvieron sólo el primer dato numérico.	2	2/9	0,22
T4: Estudiantes que se refirieron al dinero sin enunciar la unidad.	2	2/9	0,22
T5: Estudiantes que respondieron correctamente.	3	3/9	0,33
P3: ¿En qué año recibió más dinero la familia Aguirre?			
T1: Estudiantes que respondieron correctamente.	9	9/9	1

PROBLEMA 7			
P1: ¿Cuántos kilos de café tienen entre las dos?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no eligieron la respuesta correcta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que eligieron la respuesta correcta (D).	8	8/9	0,88
P2: Ordena las cantidades de kilos de café que aparecen en el problema de mayor a menor.			
T1: Estudiantes que ordenaron en forma ascendente.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que ordenaron correctamente.	8	8/9	0,88

PROBLEMA 8			
P1: ¿Cuántas libras de café debe comprar si quiere tener 34 libras de café en el mes de febrero?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que eligieron la respuesta correcta (D).	9	9/9	0,99
P2: ¿En cuál de los dos meses Doña Gilma compró más café?			
T1: Estudiantes que no respondieron con base en la pregunta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	8	8/9	0,88
SITUACIÓN 3 – ACTIVIDAD 1			
PROBLEMA 1			
P1: ¿Qué compró la esposa de Don Felipe para su mamá?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron con base en la pregunta.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	7	7/9	0,77
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que explicaron el procedimiento utilizado.	3	3/9	0,33

T2: Estudiantes que rectificaron las operaciones utilizadas.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que comprobaron su respuesta haciendo la operación inversa (suma).	4	4/9	0,44

PROBLEMA 2			
P1: ¿Cuánto dinero le quedó a María?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron con base en la pregunta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron con base en la pregunta pero se equivocaron en el algoritmo.	3	3/9	0,33
T3: Estudiantes que dieron cuenta de la cantidad mas no de la unidad.	1	1/9	0,99
T4: Estudiantes que respondieron correctamente	4	4/9	0,44
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que dieron que explicación que no tiene que ver con la pregunta del problema.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que realizaron una suma entre la cantidad total y una cantidad que no existe en el problema.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que rectificaron las operaciones utilizadas.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que rectificaron con las operaciones pero tuvieron dificultad con la desagrupación en la resta.	1	1/9	0,11
T5: Estudiantes que intentaron comprobar con la operación inversa (suma) pero se equivocaron en el algoritmo.	1	1/9	0,11
T6: Estudiantes que intentaron explicar en forma descriptiva pero aludieron a la operación incorrecta.	1	1/9	0,11
T7: Estudiantes que explicaron en forma descriptiva mencionando las operaciones utilizadas.	1	1/9	0,11
T8: Estudiantes que comprobaron utilizando la operación inversa (suma) en forma correcta.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 3			
P1: Plantea un problema similar a los anteriores teniendo en cuenta la lista de precios. Haz uso de sumas y/o restas.			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no tuvieron coherencia en el planteamiento, ni en el desarrollo ni en la respuesta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que utilizan mucha información en el planteamiento del problema, por lo que se confunden al redactar la pregunta, aunque utiliza bien los algoritmos, la respuesta no corresponde a lo planteado.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que plantean bien el problema y responden con base en la pregunta pero se equivocan al escribir la cantidad.	1	1/9	0,99
T4: Estudiantes cuya pregunta no corresponde a la situación planteada, además no responde con base en la pregunta.	1	1/9	0,11

T5: Estudiantes que hicieron un buen planteamiento del problema pero el primer dato es irrelevante en su resolución.	2	2/9	0,22
T6: Estudiantes que hicieron un buen planteamiento del problema, lo desarrollaron correctamente y respondieron con base en la pregunta.	3	3/9	0,33

PROBLEMA 4			
P1: ¿Cuánto dinero pudo ahorrar Cristina?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron correctamente.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que respondieron correctamente pero no hicieron alusión a la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	4	4/9	0,44
P2: ¿Qué otros productos podría comprar Cristina con el dinero que le quedó?			
T1: Estudiantes que no especifican su respuesta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que no tuvieron en cuenta los valores propuestos.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que respondieron correctamente aunque no especificaron cuánto dinero sobró.	6	6/9	0,66
P3: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que realizaron nuevamente los algoritmos pero se equivocaron en su desarrollo.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que realizaron nuevamente los algoritmos con el mismo error evidente en la solución.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva del procedimiento utilizado.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que realizaron nuevamente los algoritmos sin dificultad alguna.	2	2/9	0,22
T5: Estudiantes que comprobaron haciendo uso de la operación inversa (suma)	4	4/9	0,44
PROBLEMA 5			
P1: ¿Cuánto dinero le queda a José?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron correctamente.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente pero no hicieron alusión a la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	6	6/9	0,66
P2: ¿Qué otros productos podría comprar José con el dinero que le quedó?			
T3: Estudiantes que respondieron correctamente aunque no especificaron cuánto dinero sobró.	9	9/9	1
P3: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que realizaron nuevamente los algoritmos con los que hallaron la solución.	3	3/9	0,33

T2: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva del procedimiento utilizado.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que comprobaron haciendo uso de la operación inversa (suma)	4	4/9	0,44

SITUACIÓN 3 – ACTIVIDAD 1			
PROBLEMA 6			
P1: ¿Cuánto dinero recibió Doña Yamir durante la fiesta?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron correctamente.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que respondieron correctamente pero no hicieron alusión a la unidad.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	6	6/9	0,66
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que realizaron nuevamente el algoritmo con los mismos errores.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva del procedimiento utilizado.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que desarrollaron nuevamente el algoritmo con el que dieron solución al problema.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que hicieron una sola suma de tres sumandos, mientras que en la solución hicieron dos sumas de dos sumandos cada una.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 7			
P1: Plantea un problema similar al anterior haciendo uso de sumas y/o restas.			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no tuvieron coherencia en el planteamiento, ni en el desarrollo ni en la respuesta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes no plantean bien el problema, que se confunden al redactar la pregunta, aunque utiliza bien los algoritmos, la respuesta no corresponde a la pregunta planteada.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que plantean el problema con ambigüedades en la información, sin embargo, hacen buen uso del algoritmo y dan respuesta con base en la pregunta.	1	1/9	0,99
T4: Estudiantes plantean bien el problema pero se les dificulta el algoritmo y en consecuencia emiten mal la respuesta en cuanto a la cantidad.	2	2/9	0,22
T5: Estudiantes que hicieron un buen planteamiento del problema, lo desarrollaron correctamente y respondieron con base en la pregunta.	4	4/9	0,44
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que realizaron nuevamente el algoritmo con los mismos errores.	1	1/9	0,11

T2: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva del procedimiento utilizado.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que desarrollaron nuevamente el algoritmo con el que dieron solución al problema.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que hicieron la operación inversa (suma) para comprobar su respuesta.	1	1/9	0,11
T5: Estudiantes que tomaron valores que no eran necesarios en la solución, además eligió el algoritmo equivocado.	1	1/9	0,11

PROBLEMA 8			
P1: ¿Cuánto dinero le queda a la comunidad para otros gastos?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron correctamente.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente pero no hicieron alusión a la unidad.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que respondieron correctamente.	6	6/9	0,66
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva del procedimiento utilizado que no es el acertado.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva haciendo alusión a los resultados de los algoritmos.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que se comprobaron la primera etapa del problema.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que desarrollaron nuevamente el algoritmo con el que dieron solución al problema.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que comprobaron con la operación inversa.	3	3/9	0,33
PROBLEMA 9			
P1: ¿Cuánto dinero hay ahora para otros gastos?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no respondieron correctamente.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	8	8/9	0,88
P2: Explica tu elección.			
T1: Estudiantes cuya explicación no corresponde a la información suministrada.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que no dieron explicación alguna.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que solamente enunciaron su elección.	1	1/9	0,11
T4: Estudiantes que afirman que la opción B es correcta pero no explican las razones.	2	2/9	0,22
T5: Estudiantes que hicieron alusión a las operaciones utilizadas.	2	2/9	0,22
T6: Estudiantes que hicieron alusión a los datos y además hicieron evidente la operación.	2	2/9	0,22

PROBLEMA 10			
P1: Con base en los siguientes dibujos (papas, bombón y gaseosa) cree un problema que requiera de sumas y/o restas para su solución.			

	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que no tuvieron coherencia en el planteamiento, ni en el desarrollo ni en la respuesta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes no plantean bien el problema dado que no enuncian una acción, además presentan dificultad con los algoritmos.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que redactan bien el problema, dan la respuesta con base en la pregunta planteada pero no es correcta por el desarrollo del algoritmo.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que hicieron un buen planteamiento del problema, lo desarrollaron correctamente y respondieron con base en la pregunta.	3	3/9	0,33
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que realizaron nuevamente el algoritmo con los mismos errores.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que realizaron una explicación descriptiva del procedimiento utilizado.	2	2/9	0,22
T3: Estudiantes que desarrollaron nuevamente el algoritmo con el que dieron solución al problema.	4	4/9	0,44
T4: Estudiantes que hicieron la operación inversa (suma) para comprobar su respuesta.	1	1/9	0,11
T5: Estudiantes que tomaron valores que no eran necesarios en la solución, además eligió el algoritmo equivocado.	1	1/9	0,11

PROBLEMA 11			
P1: ¿Cuánto dinero tiene ahora Jorge?			
	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que respondieron con base en lo que se pregunta, pero el resultado es incorrecto.	3	3/9	0,33
T2: Estudiantes que respondieron correctamente.	6	6/9	0,66
P2: ¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?			
T1: Estudiantes que utilizaron alguna información del problema para restar, sin embargo no comprobaron su respuesta.	2	2/9	0,22
T2: Estudiantes que al comprobar utilizaron las mismas operaciones de la solución, pero no se dan cuenta de que obtuvieron valores diferentes.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que realizaron nuevamente el mismo procedimiento.	3	3/9	0,33
T4: Estudiantes que utilizaron la operación inversa para comprobar.	3	3/9	0,33

PROBLEMA 12
P1: Lee con atención la siguiente información y con ella, cree un problema que requiera de sumas y/ restas para su solución. *Los premios entregados a los ganadores de los diferentes concursos fueron: -Carrera de entaconados: \$80.000 -Encostalados: \$50.000 -El cerdo engrasado: \$70.000

	FA	FR	ND
T1: Estudiantes que redactan el problema con incoherencia, no aplican el algoritmo correcto, responden con base en la pregunta planteada pero la respuesta es incorrecta.	1	1/9	0,11
T2: Estudiantes que plantean bien el problema, desarrollan bien el algoritmo y responden con base en la pregunta, pero no utilizan la información propuesta.	1	1/9	0,11
T3: Estudiantes que hicieron un buen planteamiento del problema, lo desarrollaron correctamente y respondieron con base en la pregunta.	7	7/9	0,77

Figura 9. Tabulado de los resultados de los estudiantes en el desarrollo de las situaciones de la secuencia didáctica.

A partir del anterior tabulado, se realiza una revisión y análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes en el desarrollo de cada una de las situaciones que componen la secuencia didáctica relacionada con el contexto socio-cultural de la Institución Educativa La Moralia. Dicho análisis aborda los aspectos curriculares, disciplinares y didácticos que le atañen, además que tiene en cuenta elementos importantes de los antecedentes presentes en el capítulo 1 del presente trabajo investigativo. Los sujetos implícitos en cada una de las situaciones, se encuentran identificados con las letras PLP y PPA para dar cuenta de las intervenciones de las docentes, mientras que los estudiantes han sido asignados con los códigos de E1 a E9; en aras de defender el derecho que tienen los niños y niñas colombianos a la protección de su identidad, de acuerdo con el artículo 7 del Código de Infancia y Adolescencia, Ley 1098 del 8 de noviembre de 2006, no se identificarán con su nombres propios.

Dado que la presente investigación fue de enfoque cualitativo de tipo descriptivo, en primer lugar, se presenta la descripción del desempeño de los estudiantes en cada uno de los problemas planteados y al final de cada situación se analizan los resultados obtenidos.

En la situación 1, la primera pregunta de cada problema apunta específicamente al reconocimiento de los datos que en él aparecen. En este primer caso, se encontró que 7 de los 9 estudiantes no identifican los datos, reconocen sólo uno o algunos de ellos. Fue necesaria la intervención de las docentes para conducir a los estudiantes al reconocimiento de éstos, a través de preguntas, tal como se observa a continuación en el siguiente ejemplo:

PROBLEMA 2

PPA: ¿Qué te dice el problema que él hizo con esas 45 libras de mora?

E9: Las vendió

PPA: ¿Todas de una sola vez? ¿Cómo las vendió?

E9: 25 por la mañana y 16 en la tarde

PPA: ¿Y cómo sabes que 16 en la tarde? ¿Ahí dice eso, seguro?

E9: No

PPA: Entonces separa las que vendió por la mañana

(El estudiante cuenta las bananas que representan las 25 libras de mora vendidas por Don Juan en la mañana).

PPA: ¿Listo? Estas que tienes aquí ¿Qué te representan? (señalando las que el niño separó)

E9: Las que vendió por la mañana

PPA: ¡Correcto! Entonces éstas que tienes aquí (señalando el otro conjunto de bananas) ¿Qué te representan?

E9: Las que no vendió

PPA: Las que no ha vendido todavía, ¿verdad? Entonces, si éstas son las que vendió por la mañana, significa que estas son las que va a vender por la tarde. Hasta ahí vamos muy bien. ¿Qué más te dice el problema? ¿Qué pasó con estas de aquí? (Las del segundo conjunto de bananas)

E9: Las vendió

PPA: ¿Todas? ¿Cuántas dice el problema que logró vender?

E9: 16

PPA: ¡Ah, bueno! ¿Entonces, qué vas a hacer?

E9: Separarlas.

PPA: ¡Exactamente!

(Del segundo conjunto de bananas, el estudiante aparta 16)

PPA: ¿Listo? ¿Ya sabes cuántas libras de mora no vendió?

E9: 4

PPA: ¡Muy bien!

Como se puede observar, para el estudiante, en este caso, fue difícil dar cuenta de los datos del problema por sí mismo, pues tal como lo dice Ayllón (2012) es necesario

una lectura comprensiva y exhaustiva que conduzca a la identificación de los datos, creando conexiones entre ellos para llegar a la resolución del problema.

Con respecto a la pregunta dos, a través de ella se pretendía que los estudiantes hicieran un reconocimiento de las unidades discretas o de medida presentes en los problemas. En este caso, se observó que, en promedio 4 de los 9 estudiantes hicieron alusión, en sus respuestas a la unidad presentada. Los demás, se confundían con los datos u otra información del problema o simplemente no la mencionaron, lo cual permite inferir que existe una falta de comprensión en la lectura, tal como se observa en el siguiente ejemplo:

PROBLEMA 5

PLP: Entonces, ¿Qué vas a responder? ¿Qué te están preguntando?

E3: La familia Melo cogió 24 kilos de mora.

PLP: ¿Te están preguntando por kilos?

E3: ¡Ah no! De canastas.

Por lo anterior, es importante recordar lo concluido por Tole (2012), quien en su investigación hace hincapié en que la lectura matemática es fundamental para la comprensión de los problemas.

Con relación a la pregunta 3, se puede afirmar que a través de ella, los estudiantes demostrarían habilidades en la resolución de los problemas a través de la identificación de las operaciones a ejecutar, el desarrollo de los algoritmos, el reconocimiento de la incógnita, la estructura semántica a tener en cuenta y finalmente a enunciar la respuesta a la pregunta dada. Es por ello que, a continuación, se presenta una descripción detallada de lo observado en cada uno de los problemas que componen la situación 1.

✓ Problema 1

Se presentó que todos los estudiantes eligieron correctamente las operaciones a ejecutar (resta y resta) en un problema de composición – composición, donde el algoritmo en sí mismo, tampoco les generó dificultad a pesar de que la incógnita estaba presente en diferentes posiciones; sin embargo, 2 de los 9 estudiantes no dio cuenta al momento de responder ni de la cantidad ni de la unidad de la cual se hablaba.

✓ Problema 2

En este caso, se presentó a los estudiantes un problema de composición - transformación que se resolvía con restas en ambas etapas. Al igual que en el problema anterior, los niños y niñas eligieron las operaciones indicadas y las desarrollaron correctamente, pese a que la incógnita estaba dada en diferentes posiciones. No obstante, 4 de los 9 estudiantes enunciaron la respuesta sin hacer alusión a la unidad requerida.

✓ Problema 3

En este problema, se pudo observar que 7 de los 9 estudiantes dieron cuenta de cuáles eran las operaciones que debían utilizar para resolverlo (suma y resta) en un ejercicio de estructura semántica transformación – composición, desarrollando además, correctamente ambos algoritmos. Con respecto a los otros dos estudiantes, uno de ellos desarrolló mal el primer algoritmo y en el segundo, realizó la resta, pero escribiendo el signo de la adición, además respondió parcialmente la pregunta. Por su parte, el otro estudiante realizó las operaciones indicadas, pero la adición le quedó mal desarrollada, además de que no tuvo en cuenta el tercer dato. Sin embargo, dio respuesta correcta al problema.

✓ Problema 4

En este caso, en el que se propuso un problema de transformación – transformación, en el que los estudiantes podían resolverlo haciendo uso de dos restas o de una suma y una resta (tal como se contempló en la rejilla de análisis didáctico), se pudo observar que 6 de los 9 estudiantes lo hicieron de la primera forma, solamente presentándose en uno de ellos dificultad con los algoritmos; mientras que los tres restantes utilizaron la segunda forma posible, desarrollando correctamente los algoritmos. Con relación a la enunciación de la respuesta, ésta no presentó dificultad para ninguno de los estudiantes.

Hasta este punto, se puede afirmar que las cantidades pequeñas no representan para los estudiantes mayor complejidad al momento de la actividad operatoria. Tal como lo afirma Bruno (s.f) a los niños les resulta más fácil trabajar con cantidades pequeñas.

✓ Problema 5

Con relación a este problema de composición – composición, 8 de los 9 estudiantes escogieron la operación correcta que era la suma, donde se vio aplicación de la propiedad conmutativa, uno de ellos realizó una sola adición tal como estaba contemplado en la rejilla de análisis didáctico. El estudiante restante, no realizó operación alguna, lo cual permite evidenciar que acudió directamente al conteo de las imágenes. Sin embargo, 2 de los 9 estudiantes, desarrollaron mal el algoritmo, en consecuencia, su respuesta no estuvo acorde a la pregunta. También, es posible decir que de los otros 7 estudiantes, sólo 5 dieron respuesta correcta al problema de acuerdo con la pregunta, en tanto que tuvieron en cuenta no sólo la cantidad, sino también la unidad al momento de enunciarla.

✓ Problema 6

En este caso, 6 de los 9 estudiantes eligieron las operaciones correctas para resolver este problema de composición – transformación (suma y resta). En ellos se observó que hubo problemas de desagrupación en la centena al restar, pues sólo 3 de estos niños desarrollaron bien el algoritmo. Uno de los estudiantes eligió las operaciones adecuadas, pero en ambas tuvo dificultad con la operatoria. Por otra parte, los dos estudiantes restantes, aplicaron una misma operación en las dos etapas del problema, bien sea, resta – resta o suma – suma. Este problema en particular causó dificultad a los niños y niñas en la enunciación de la respuesta, pues sólo uno de ellos la escribió correctamente; los demás no lo lograron, en tanto que se equivocaron en el algoritmo u omitieron la unidad de la que se hablaba.

✓ Problema 7

Este problema les presentaba a los estudiantes un caso de transformación – composición que se resolvía con suma y resta, donde debían tener en cuenta el valor de los billetes presentados para formar diferentes cantidades. En este caso, se puede observar que 8 de los 9 estudiantes respondieron bien a lo que se les preguntaba, sin embargo, 3 de ellos sólo tuvieron en cuenta la primera pregunta del problema donde se les cuestionaba si el dinero era suficiente para realizar el pago de un viaje; por su parte, otros 3 niños respondieron ambas cuestiones, la anteriormente mencionada y además si le sobraba o no dinero al sujeto del problema, pero no tuvieron la unidad, en este caso: pesos. Los otros dos estudiantes, dieron cuenta de todos los aspectos implícitos en el problema. Al revisar los algoritmos, se evidencia que los niños y niñas no tuvieron dificultad con la

representación de las cantidades numéricas dadas en las imágenes de los billetes, desarrollando bien los algoritmos. Sólo uno de los estudiantes, escribió las cantidades sin tener en cuenta las de primer orden, es decir, que en lugar de escribir \$80.000, simplemente escribió 80; no obstante, en la respuesta, sí las tuvo en cuenta.

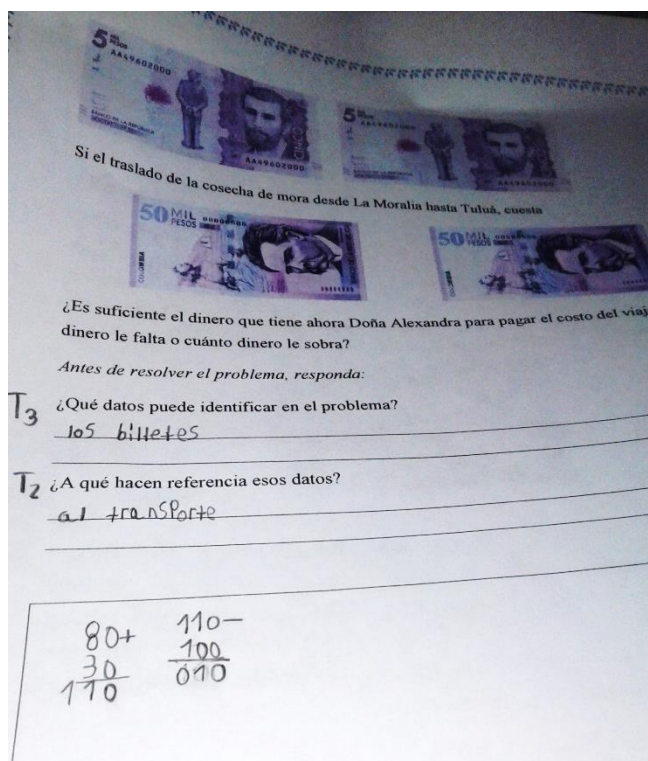


Foto 1: ejemplo de estudiante que omite las unidades de primer orden.

✓ Problema 8

En este caso, los estudiantes debían elegir dos restas para resolver este problema de transformación – transformación, en él se pudo observar que 8 de los 9 estudiantes eligieron dichas operaciones y realizaron bien los algoritmos, lo que significa que el estudiante que no hace parte de este grupo no lo hizo de la misma manera, pues eligió dos sumas, las cuales hizo bien, pero esto no fue suficiente para responder correctamente a la pregunta. Del grupo de 8 estudiantes, 5 de ellos dieron cuenta cabalmente a la pregunta, 1 de ellos, no respondió con base en el interrogante planteado y los 2 restantes dijeron cuál era la cantidad, pero no dieron cuenta de la unidad. Particularmente, cabe destacar que de acuerdo con lo planteado en la rejilla de análisis, se esperaba que los estudiantes

lo resolvieran de la forma $C - B = A$ y $A - D = E$. Sin embargo, se encontró que dos de los estudiantes los resolvieron de la forma $C - D = A$ y $A - B = E$; lo que demuestra que la posición de la incógnita no les causó dificultad.

Además de lo anteriormente mencionado, sobresale que para la resolución de este problema, era necesario tener en cuenta el anterior, aspecto al cual la docente tuvo que hacer especial énfasis, ya que los estudiantes lo pasaban por alto, con relación al costo del viaje, tal como se puede leer en el siguiente ejemplo:

PPA: ¿De dónde salió este número? (señalando en la hoja de trabajo el 300) Muéstramelo, mami.

(La estudiante señala el número 300 en el problema)

PPA: Mira lo que dice el problema: que durante la semana se recogieron 300 kilos de mora (haciendo énfasis) 300 kilos de mora. Que se ganaron una plata, que de esa plata pagaron -o sea plata- les quedó una plata y que sacaron otra plata. ¿El problema es de plata o el problema es de kilos de mora? Además, mira lo que dice: “Para resolver este problema, ten en cuenta el problema anterior”.

(La docente le lee la primera parte del problema a la estudiante)

PPA: ¿Cuánto vale el viaje?

E5: Vale...

PPA: “Ten en cuenta el problema anterior” ¿Cuánto vale el viaje?

(La estudiante se queda pensando en silencio un rato)

PPA: ¿Cuánto vale el viaje? ¡Vámonos al problema anterior!

E5: Vale ¿\$10.000?

PPA: ¿El viaje vale \$10.000? ¿Cuánto vale el viaje? ¿Cuánto vale el traslado de la cosecha de mora desde La Moralia hasta Tuluá?

E5: \$100.000

PPA: ¡Ah, listo! ¿Entonces, qué vamos a hacer?

E5: ¿Una suma?

PPA: Si tú tienes una plata y de ahí tienes que sacar para pagarle a alguien ¿Tú tienes ahora más plata o menos plata?

E5: Una resta

PPA: ¡Ah, bueno! ¿Entonces, qué vas a restar?

E5: Los 420.000 menos 100.000

PPA: ¡Exactamente!

Una vez más, se hace evidente que el estudiante requiere la intervención guiada por el docente, tal como lo propone Freudenthal en el principio que lleva por nombre “reinención”.

En términos generales, hasta el momento, se puede afirmar que el 50% de los estudiantes han logrado expresar las respuestas de cada problema con base en lo preguntado en cada uno de ellos, a pesar de que les cuesta trabajo la identificación de los datos, tal como lo requiere el tercer EBC citado en la rejilla de análisis. También se puede afirmar que el formato de presentación de los problemas no impidió el reconocimiento de la incógnita en los problemas, tal como lo advierte Bruno (s.f).

La situación finaliza, preguntando a los estudiantes “¿cuáles fueron los datos relevantes para resolver el problema?” En este caso, se encontró que los educandos retomaban la información que habían dado en la primera pregunta de cada uno de ellos; otros por su parte, aludieron al primer dato, a uno de las cantidades dadas, o bien, a la unidad. Algunos de ellos no hicieron referencia a nada, mientras que otros describieron, en un lenguaje natural, el proceso operatorio utilizado.

En cuanto a los aspectos disciplinares, la situación 1 buscaba movilizar específicamente la comprensión de la suma y la resta que maneja el estudiante, ya que como lo expresó Bruno (s.f) la operatoria cobra importancia a través de los problemas aditivos, en tanto que se observó que en promedio sólo 2 de los 9 estudiantes presentaron dificultad al momento de aplicar los algoritmos, tal como se evidencia en el siguiente diálogo:

(El estudiante suma $18 + 9$)

PPA: Este 27 ¿Qué representa?

E6: Los helados de leche (autocorrigiéndose) de agua, digo.

PPA: ¿Seguro?

E6: El total

PPA: ¿El total de qué?

E6: El total de todos los helados

PPA: ¡Exactamente! Listo. Y aquí ¿Qué hiciste? (Señalando el segundo algoritmo hecho por el niño)

E6: Coloqué el 18 más 9

PPA: No, aquí ya me explicaste que a los helados del lunes le sumaste los del martes para saber cuántos helados tenía la señora ¿Cierto? ¡Listo! Hasta aquí vamos bien. Y aquí ¿qué hiciste? (señalando el segundo algoritmo)

E6: La sumé con el 15 que está aquí (señalando el número 15 en el problema)

PPA: ¿La sumaste? (La pregunta obedece a que el niño escribió el signo menos y sin embargo habló de sumar).

E6: ¡Ah, no! La resté, la resté, la resté.

PPA: ¡Bien! Entonces, este 27 ¿Qué te está representando?

E6: El total de los helados

PPA: ¿Y este 15 qué te está representando?

E6: Los helados de leche.

PPA: ¿Entonces?

E6: Los helados de leche son 15 y los de agua son 12

PPA: ¡Excelente! ¿Qué te pregunta el problema?

E6: ¿Cuántos helados fueron preparados con agua?

PPA: ¿Entonces tú qué vas a contestar?

E6: Los helados preparados con agua fueron 12.

PPA: ¡Excelente!

Por otra parte, cabe destacar que la mayoría de los estudiantes, sí lograron dar significado a la suma y la resta, en tanto que, utilizaron las operaciones correctas en cada una de las etapas del problema, aunque en ocasiones con dificultades en el desarrollo de los algoritmos.

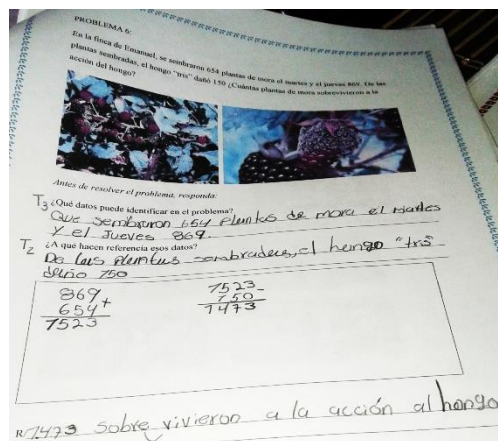


Foto 2: Ejemplo de estudiante que elige las operaciones correctas con dificultad al desagrupar en la resta.

Con base en el objetivo planteado para esta situación y haciendo una revisión exhaustiva de los resultados obtenidos por los estudiantes, se puede afirmar que el 100% de ellos, se encontraron ubicados en el *nivel situacional* propuesto por Freudenthal, en tanto que, reconocieron parcial o totalmente los datos del problema, y los tuvieron en cuenta al momento de resolver cada problema que componía la actividad, haciendo uso de su sentido común y de su saber empírico. En este caso, se evidenció que en promedio el 66% de los estudiantes, no identificó ninguno o sólo uno de los datos, el 22% de ellos, identificó parcialmente la información contenida en el problema; además el 12% de los estudiantes reconoció y enunció todos los datos del problema.

En cuanto a la argumentación que requerían los problemas, se encontró que el 55% de los estudiantes logró emitir una respuesta clara, precisa y coherente frente a las preguntas planteadas, mientras que el 45% de los estudiantes omitió algunos aspectos importantes de las respuestas, tal como la unidad, o bien no respondió a ningún elemento de ellas.

En la situación 2, la primera pregunta apunta a la identificación de los datos del problema, en este caso se encontró que 4 de los 9 estudiantes no reconocen o no dan cuenta de la información contenida en él, aspecto que fue mencionado en el planteamiento del problema de la presente investigación. Con relación a la situación anterior, se evidencia que hubo mayor cercanía de los estudiantes con los datos, sin embargo, se

requirió nuevamente de la orientación de las docentes para su identificación, tal como se muestra en el siguiente ejemplo, tomado del vídeo:

PROBLEMA 1

PLP: Bueno, entonces ¿Por qué te dio eso? El primer dato ¿Qué es?

E4: De las plantas que tenían plantadas de café.

PLP: ¿Por qué hiciste esa resta allí? ¿Con qué datos?

E4: Con los 4.500 que sembró la familia Montoya.

PLP: ¡Eso! Entonces, ¿Cuántas sembró la familia Acevedo?

E4: Eeeeh... ¿3.900?

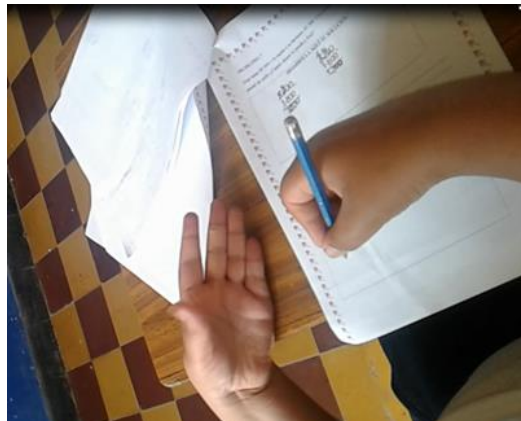
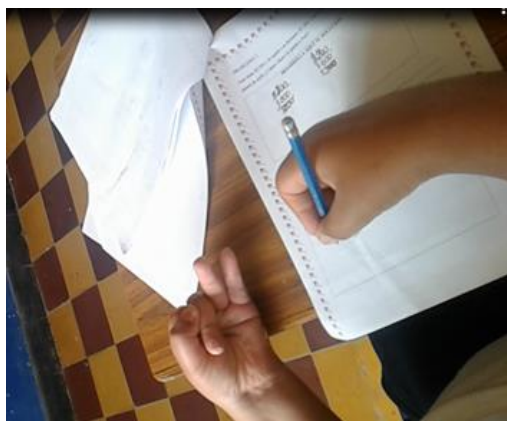
LPL: ¿Usted de dónde sacó esto mami? (señalando la segunda resta)

E4: Las de Don Juan

PLP: Entonces, ¿Cuántas sembró Don Carlos?

E4: 5.100

Respecto a la estrategia de cálculo utilizada por los estudiantes, se puede decir que los niños realizaron conteo en los dedos y sus resultados los plasmaron en el taller presentado, a través de los algoritmos de la suma y la resta.



Fotos 3 y 4: Estudiante que hace conteo con los dedos.

Con relación a la pregunta 2, se puede decir que a través de ella los estudiantes debían enunciar la respuesta a cada problema teniendo en cuenta las cantidades y las unidades, a partir de un correcto desarrollo de los algoritmos en cada caso. Con base en ello, se encontró lo siguiente en los problemas propuestos.

✓ Problema 1

Los nueve estudiantes escogieron la operación resta, lo cual es correcto, para cada uno de los pasos del problema, que en este caso era de composición – composición. Del total de estudiantes, 7 realizaron bien la operatoria, sin embargo, 2 de ellos, no tuvieron en cuenta la unidad, mientras que los otros 5, si lo hicieron al dar respuesta a la pregunta formulada en el problema. Por otra parte, los dos estudiantes restantes tuvieron dificultad con la desagrupación en donde intervienen cantidades seguidas de cero, por lo que su respuesta fue desacertada con relación a la cantidad.

✓ Problema 2

En este caso, se presentó a los estudiantes un problema de composición – transformación, que debía solucionarse con dos restas. Se observó que todos los estudiantes dieron cuenta de las operaciones que debían hacerse para resolver este problema y las desarrollaron correctamente. Sólo uno de los educandos omitió enunciar la unidad al momento de dar respuesta a la pregunta del problema.

✓ Problema 3

Con relación a este problema, se propuso a los educandos un caso de transformación - composición que debía resolverse con una suma y una resta. Se puede decir que todos los estudiantes escogieron las operaciones correctas, además se encontró que 3 de ellos, dado que la suma tenía varios sumandos, la realizaron como dos sumas y no como una sola. De los 9 estudiantes, 4 respondieron correctamente, 2 tuvieron dificultad al desagrupar en el algoritmo de la resta, y de los tres restantes, dos no dieron cuenta de la unidad (café) y uno no aludió a la magnitud (kilos). Cabe destacar que en este caso, existía una información que no era relevante para la resolución (5 jornaleros) y los estudiantes no lo tomaron como dato, lo que permite inferir que los niños hicieron una buena lectura de este problema.

✓ Problema 4

En este caso, se presentó a los estudiantes un problema de transformación – transformación, en el cual se debía recurrir a la operación de la resta en ambas etapas de él. Se puede decir que todos los educandos eligieron las operaciones correctas, mas sólo 4 de los 9 estudiantes respondieron satisfactoriamente, de los restantes, 3, aunque tuvieron

en cuenta la pregunta formulada, su respuesta fue incorrecta en tanto que desarrollaron mal algoritmo debido a las dificultades con la desagrupación con unidades seguidas de cero; mientras que los otros 2 omitieron la unidad al enunciar la respuesta a la pregunta formulada.

En la segunda actividad de la situación dos, se presentó a los estudiantes cuatro problemas donde encontraban un ejercicio de selección múltiple con única respuesta.

✓ Problema 5

Con respecto a este problema de composición – composición, que se resolvía con dos sumas, se pudo encontrar que todos los estudiantes escogieron dicho algoritmo y los desarrollaron correctamente, por lo tanto, la respuesta elegida fue la esperada. Es importante agregar, que tres de los nueve niños hicieron una sola suma de tres sumandos, tal como estaba contemplado en la rejilla de análisis de la fase dos.

✓ Problema 6

El problema que se propuso a los estudiantes se resolvía con una suma y una resta en un caso de composición – transformación. Se encontró que 7 de los 9 estudiantes eligieron las operaciones indicadas y además las desarrollaron correctamente, por lo que su respuesta también fue acertada. Uno de los estudiantes sólo hizo la primera operación y dado que esa cantidad era una de las opciones de respuesta, omitió el segundo paso del problema. Otro de los niños intentó hacer una resta con las tres cantidades relacionadas con dinero presentes en el problema, por lo que no pudo hallar una respuesta correcta.

✓ Problema 7

Con relación a este problema, se presentó a los estudiantes un caso de transformación – transformación que, de acuerdo con la rejilla de análisis, se resolvía con resta – suma. En este caso, se puede decir que 7 de los 9 estudiantes escogieron las operaciones esperadas y los procedimientos fueron los correctos, en consecuencia, las respuestas también lo fueron. Cabe anotar que uno de estos estudiantes, lo resolvió de la forma $D - B = ?$ y $? + C = E$; aunque se esperaba que el problema se resolviera de la forma $C - B = A$ y $C + D = E$, sin embargo, se considera muy positivo, pues pone de manifiesto que dicho estudiante encontró una heurística no sólo diferente, sino además acertada, pues el resultado fue correcto. Uno de estos estudiantes eligió el planteamiento

esperado, pero desarrolló mal los algoritmos, y aunque encontró su respuesta en una de las opciones, esta no fue la correcta. También se encontró que 2 de los 9 estudiantes resolvieron el problema de la forma $C + D = ?$ y $? - B = E$ (lo representado con signo de interrogación, representa un elemento que no aparece en la rejilla, sin embargo, en este último caso, la respuesta fue correcta).

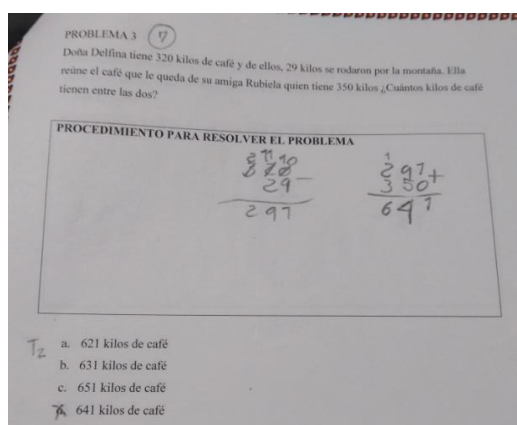


Foto 5: Planteamiento esperado

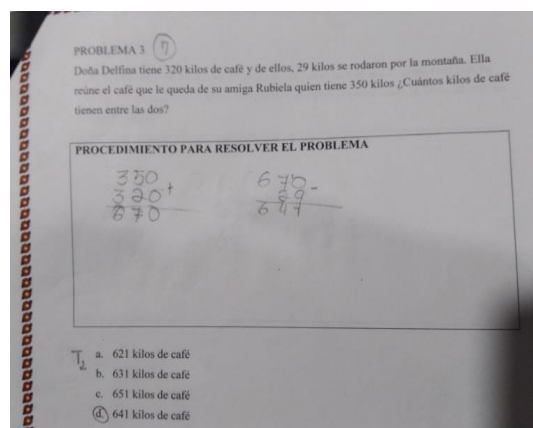


Foto 6. Planteamiento propuesto por un estudiante

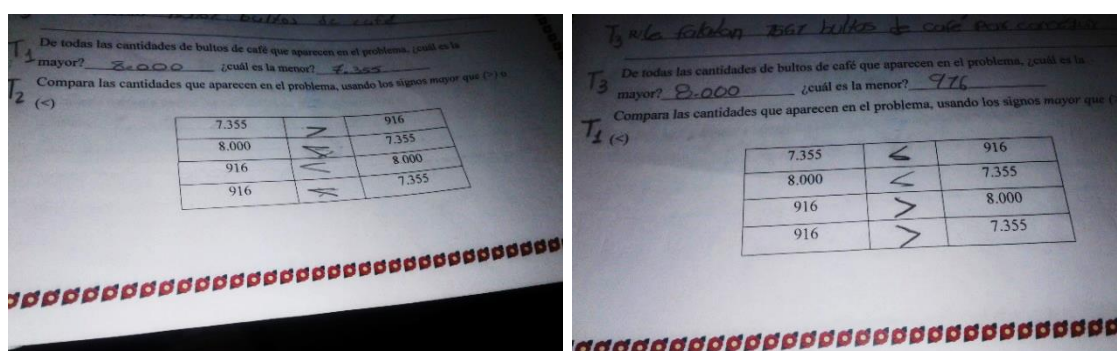
✓ Problema 8

Con respecto a este problema, se puede decir que se presentó a los estudiantes un caso de transformación – transformación que se resolvía con dos restas, se encontró que ninguno los estudiantes tuvo dificultad con él, por lo que se obtuvo un buen resultado.

Al terminar la revisión de esta parte de la situación, que tiene que ver específicamente con la escogencia y desarrollo de los algoritmos, así como la enunciación de la respuesta de cada problema, se puede afirmar que, la propuesta de opciones de respuesta con selección múltiple fue más fácil para ellos, en tanto que al llevar a cabo la operatoria, les fue posible corroborar que los resultados estuviesen presentes en dichas opciones.

En cuanto a la comparación de cantidades, se buscaba que los estudiantes realizaran esta tarea en forma verbal y numérica. En este caso se puede afirmar que el 77% de los estudiantes compararon correctamente las cantidades propuestas en los diferentes problemas que componen la situación 2, pues lograron reconocer el dato mayor o menor que fue requerido en cada pregunta.

Este mismo porcentaje, se presentó en los ejercicios donde se solicitaba a los estudiantes que ordenaran diferentes cantidades de mayor a menor o viceversa, lo cual permite evidenciar que los estudiantes no tienen mayores dificultades a la hora de establecer relaciones de orden ascendente o descendente entre los números. A pesar de ello, se presentaron falencias en el reconocimiento y aplicación de los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$). Esta situación comprueba lo dicho por Socas cuando afirma que el lenguaje de los signos puede resultar confuso para los estudiantes, como se puede evidenciar en las siguientes fotografías.



Fotos 7 y 8: Uso de los símbolos mayor que y menor que

Al realizar una revisión minuciosa de los desempeños de los estudiantes en la situación 2, a la luz del objetivo trazado para ella, se pudo encontrar que nuevamente el 66% de los estudiantes no reconoce los datos del problema o sólo uno de ellos, lo que permite evidenciar que persiste esta dificultad en el grupo de educandos; por otra parte, el 33% de los niños y niñas reconoce parcialmente los datos y únicamente el 1% de la totalidad de los estudiantes da cuenta de toda la información del problema. Sin embargo, al igual que en la situación anterior, fue evidente que los educandos, a pesar de no lograr extraer los datos de un problema dado, sí los tienen en cuenta al momento de resolverlos, en tanto que el 77% de los estudiantes respondieron en forma clara y correcta a los cuestionamientos de la situación, el 22% tuvo alguna dificultad, bien sea en el desarrollo de los algoritmos o en el reconocimiento de las unidades, mientras que el 1% restante no dio cuenta de ninguna respuesta.

Otro de los aspectos que tenía en cuenta el objetivo de esta situación, era la capacidad de los estudiantes para establecer comparaciones entre los números, con base en su tamaño relativo; con relación a este hecho en particular se puede decir que el 77% de los

estudiantes no tuvieron dificultad para identificar una cantidad mayor o menor que otra, ni para ordenar las cantidades en forma ascendente o descendente; mientras que, el 23% del grupo de educandos mostró algún problema para realizar esta tarea. Como ya se dijo antes, el principal obstáculo de este ejercicio fue el uso de los símbolos mayor que ($>$) y menor que ($<$), en tanto que sólo 1 de los 9 estudiantes pudo aplicarlos sin dificultad.

En el siguiente diálogo, se puede evidenciar esta dificultad de los estudiantes:

PROBLEMA 4

E2: ¿Profe, así?

PPA: Tú comparas los números (señalando en la hoja) si este número es más grande que este, pones este símbolo (mayor que $>$) o si este número es menor que este, pones este símbolo (menor que)

(minutos después)

E2: ¿Así?

PPA: Revisa (haciendo los símbolos con los dedos) la boquita grande con el número grande y la boca chiquita con el número chiquito.

(minutos más tarde)

E2: ¿Así?

PPA: ¿Por qué pusiste los dos símbolos? Un número no puede ser más grande que otro y al mismo tiempo ser menor. A ver, Entre estos dos números (8.000 y 916) ¿cuál es el más grande?

E2: Este (señalando el 8.000)

PPA: Muy bien. Entonces, si yo te digo que la boca grande va con el número grande y la boca chiquita con el número chiquito; entonces ¿cuál de los dos símbolos vas a poner en este caso?

E2: Este (señalando el símbolo de mayor que)

PPA: Muy bien.

En esta situación, se puede decir además que la representación utilizada por los estudiantes en todos los problemas de la situación, fue de carácter numérico, en tanto que recurrieron al algoritmo en todos ellos. Además, al momento de validar sus respuestas, los estudiantes recurrieron al lenguaje natural para describir el procedimiento utilizado en cada caso, otros por su parte, realizaron nuevamente las operaciones que habían hecho para verificar sus resultados, mientras que otros educandos recurrieron a la operación inversa para comprobar sus resultados, buscando hallar el total. También fue notable el uso del cálculo mental y de los dedos como dispositivo de conteo.

Con base en lo anterior, es posible afirmar que el 77% de los estudiantes alcanzaron, en esta segunda situación, el *nivel referencial* que propone Freudenthal en su teoría de Educación Matemática Realista, en tanto que realizaron las acciones que para este nivel se enuncian en la rejilla 8 (página 71); mientras que el 23% restante continúa en el *nivel situacional*, dado que es recurrente la dificultad con la identificación de los datos de los problemas.

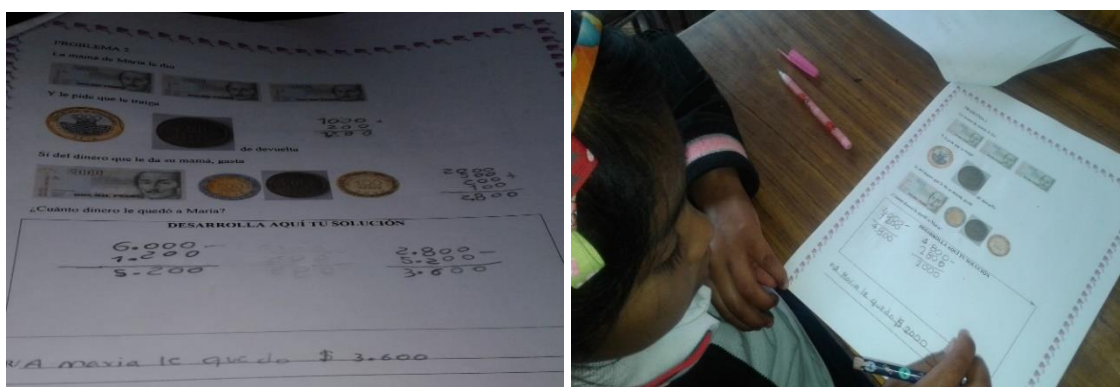
A continuación, se realiza el análisis de cada uno de los problemas planteados en la situación 3, lo cual permitió evidenciar si hubo o no avances por parte de los estudiantes en la resolución de los PAMA con relación a las situaciones 1 y 2; y además, verificar, si se alcanzó el logro de crear sus propios problemas con las características anteriormente mencionadas, dando respuestas coherentes y precisas.

✓ Problema 1

En este caso a los estudiantes se les propuso un problema de composición - composición que se resolvía con el uso de dos restas, allí se pudo observar que el 100% de los estudiantes eligieron las operaciones esperadas; sin embargo, 2 de los 9 estudiantes desarrollaron el algoritmo con errores. Ante la pregunta: “¿Qué compró la esposa de Don Felipe para su mamá?”, se puede mencionar, que los 7 estudiantes que desarrollaron bien las operaciones, buscaron en la tabla de precios un producto que costara exactamente los \$8.000 que se tenían; mientras que los 2 estudiantes restantes, al no haber operado correctamente, no emitieron respuestas coherentes.

✓ Problema 2

Con relación a este problema, se propuso a los estudiantes un problema de composición transformación que se requería de dos restas para su resolución. En este caso, el 100% de los estudiantes eligió las operaciones esperadas; no obstante, se observó que 5 de los 9 estudiantes desarrollaron los algoritmos correctamente y con respuestas coherentes; 3 del total de los estudiantes tuvieron dificultad con la operatoria, tal como lo plantean los Lineamientos Curriculares, mientras que uno de ellos, no tuvo en cuenta la pregunta formulada a la hora de responder. De estos 8 estudiantes, también se puede decir, que no tuvieron dificultad con el reconocimiento del dinero y el conteo de éste se dio en forma mental. Del estudiante que falta por mencionar, se puede decir, que para realizar el conteo del dinero, usó una estrategia de cálculo diferente, en tanto que acudió a la escritura de las cantidades para saber cuánto dinero había; sin embargo, el desarrollo de los algoritmos no fue correcto y por ende, la respuesta tampoco lo fue.



Fotos 9 y 10: Representación de las cantidades a través de billetes y monedas.

✓ Problema 3

Con respecto a este problema, la estructura semántica, los algoritmos utilizados y las respuestas enunciadas, dependían de la invención de cada estudiante. En este caso, se encontraron varias particularidades, a saber:

- Un estudiante intentó construir un problema de composición – composición que se resolvía con dos restas. Se pudo observar que las operaciones aplicadas fueron las correctas. Sin embargo, el problema perdió coherencia en la emisión de la respuesta, puesto que al escribir demasiada información en el problema, no pudo dar cuenta de lo que se preguntaba a sí mismo.

- Un estudiante propuso un problema de composición – transformación que se resolvía con dos restas. A pesar de haber desarrollado correctamente los algoritmos, el problema no tuvo éxito, puesto que la pregunta del problema estaba mal formulada y además la respuesta dada por el estudiante no correspondió a la pregunta planteada.

- Un estudiante planteó un problema de composición – transformación que debía resolverse con suma y resta. En este caso, fue evidente que el educando tomó cifras exactas para resolver el problema sin tener ningún tipo de inconveniente a la hora de ejecutar los algoritmos.

- Un estudiante propuso un problema de transformación – transformación, el cual debía resolverse con dos restas. En él, se observa falta de coherencia en la redacción porque la cantidad inicial de la que se habla, hace alusión al valor de un almuerzo, pero luego, menciona la compra de dos productos más que salieron de ese mismo valor. Además, al escribir las cantidades en el segundo algoritmo, sin pretenderlo, multiplicó por 10. Consecuentemente, la respuesta a la pregunta planteada, tampoco tuvo coherencia.

- Un estudiante también propuso un problema de transformación – transformación que pretendía requerir de dos restas para su resolución, sin embargo, al momento de operar utilizó una cantidad que no era necesaria para resolver el problema. A pesar de que los algoritmos quedaron bien desarrollados, la respuesta a su pregunta no fue clara, en tanto que no aludió al resultado de la operación, sino a una cantidad ya mencionada en el problema.

- Un estudiante careció de total claridad a la hora de redactar el problema, por lo tanto, no fue posible identificar cuál era la estructura semántica que pretendía plantear, por lo que tuvo dificultad en el planteamiento y desarrollo de los algoritmos, así como en la redacción a la respuesta de una pregunta que no planteó.

- Los tres estudiantes restantes también plantearon problemas de transformación – transformación, que necesitaban de diferentes parejas de operaciones para su resolución: suma – resta, suma – suma y resta – resta. En este caso, los problemas estuvieron bien redactados, 2 de ellos usaron como magnitud el dinero haciendo uso de cantidades exactas, 1 estudiante, por su parte, utilizó cantidades muy pequeñas. Sus algoritmos quedaron bien ejecutados y sus respuestas fueron coherentes.

✓ Problema 4

En este caso, se propuso a los estudiantes un problema de transformación – composición que se resolvía con una suma y una resta. El 100% de los estudiantes eligieron las operaciones correctas. 7 de los 9 estudiantes desarrollaron adecuadamente todos los aspectos del problema (algoritmo, unidad, respuesta). Por su parte, los dos estudiantes restantes, no ejecutaron correctamente la operatoria, por lo que su respuesta también fue desacertada.

✓ Problema 5

Con relación a este problema, se les presentó a los estudiantes un caso de transformación – transformación que debía resolverse con una resta en cada etapa de él. Se pudo observar que el 100% de los estudiantes eligieron las operaciones necesarias para resolver este problema. Sólo uno de los estudiantes no tuvo en cuenta la desagrupación a la hora de desarrollar el segundo algoritmo. De los 8 educandos restantes, uno de ellos utilizó una estructura diferente a la propuesta en la rejilla, en tanto que lo resolvió de la forma: $C - D = B$ y $B - A = E$. La respuesta dada por estos 8 estudiantes fue correcta, sin embargo, dos de ellos, no tuvieron en cuenta la unidad.

✓ Problema 6

Con este problema, inicia la segunda actividad de la tercera situación. En este caso, se planteó a los estudiantes un problema de composición – composición, que requería el uso de dos sumas para su resolución. Se pudo apreciar que 8 de los 9 estudiantes, escogieron las operaciones necesarias; el educando restante hizo una resta y una suma. Uno de los ocho estudiantes desarrolló mal los algoritmos y por lo tanto, su respuesta fue incorrecta. De los siete educandos restantes, cinco hicieron dos sumas y los otros dos hicieron una sola suma con todos los términos dados en el problema, (ambos casos estaban contemplados en la rejilla de análisis); la respuesta de estos siete niños y niñas correspondió a la pregunta formulada.

✓ Problema 7

- Uno de los estudiantes planteó un problema, cuya estructura semántica no es clara, puesto que carece de coherencia en la redacción; además, la pregunta planteada ya

había sido contestada dentro del mismo problema, por lo que las operaciones que desarrolló, no eran necesarias.

- Tres de los estudiantes plantearon problemas de composición – transformación. Uno de ellos, redactó correctamente el problema, desarrolló muy bien los algoritmos necesarios y su respuesta fue coherente; sin embargo, es evidente que el estudiante utilizó cantidades exactas para evitar dificultades en el desarrollo, pero también pone de manifiesto su habilidad con el cálculo mental.

PLP: ¿Qué problema creaste?

E3: umm lo voy a leer “Yo tengo 16.000 pesos y quiero comprar dos atados de tamal, ¿me alcanza sí o no?”

PLP: me alcanza sí o no ¿Qué?

E3: el dinero

PLP: entonces te hace falta información.

E3: si, poner el dinero. Listo profe.

PLP: ¿entonces tú cómo lo resolviste?

E3: hice 8.000 más 8.000

PLP: ¿y qué es eso?

E3: lo que valía el atado de tamal

PLP: cuántos compraste

E3: dos y me dio 16.000, que valían 16.000 los dos.

PLP: y tu tenías ¿Cuánto? 16.000 pesos

E3: ¿Cuántos compraste?

PLP: dos. Y me dio 16.000 pesos

Otro estudiante que propuso un problema de composición – transformación, redactó bien su problema, pero tuvo dificultad con el segundo algoritmo, pues allí requería de una resta y en su lugar, planteó una suma, en consecuencia, su respuesta no fue correcta.

El estudiante restante, intentó hacer un ejercicio similar al problema identificado con el número dos de la actividad 1, por lo que la redacción de éste estuvo bien planteada, sin embargo, cometió errores en la operatoria, pues no desagrupó correctamente, aspecto que se vio reflejado en su respuesta en la parte numérica.

- Tres estudiantes propusieron un problema de transformación – composición, similar al identificado con el número 4 en la actividad 1. Todos ellos, construyeron bien

el problema, eligieron las operaciones necesarias, desarrollaron correctamente los algoritmos y sus respuestas fueron coherentes. Cabe destacar que uno de estos estudiantes, planteó un problema que resolvió con tres operaciones, yendo más allá de las expectativas.

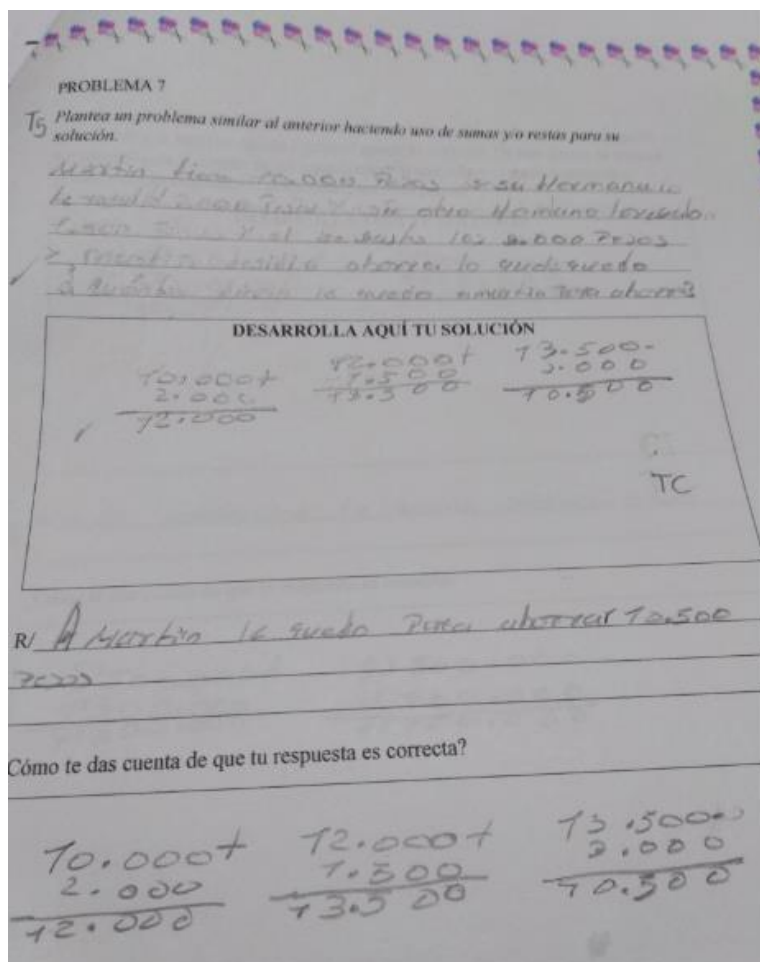


Foto 11: Ejemplo de estudiante que uso más de dos operaciones en la resolución del problema creado por él mismo.

- Dos de los estudiantes propusieron problemas de transformación – transformación. Uno de ellos, no tuvo coherencia en la redacción de la pregunta, al plantear las operaciones, una de las cantidades utilizadas no estaba presente en el problema y su respuesta no corresponde a la pregunta formulada. El otro estudiante no tuvo problemas ni en la construcción ni en la resolución del problema.

✓ Problema 8

En este caso, se propuso a los estudiantes un problema de composición – transformación, que necesitaba el uso de una suma y una resta para su resolución. Uno de los nueve estudiantes utilizó dos restas, donde en la segunda de ellas, no tuvo en cuenta la desagrupación; al cometer los mencionados errores, la respuesta a la pregunta formulada no fue correcta. Por su parte, los ocho estudiantes restantes eligieron las operaciones correctas, desarrollaron bien los algoritmos y respondieron correctamente a la pregunta planteada, aunque dos de ellos omitieron expresar la unidad. Cabe resaltar, que en este problema, los educandos no presentaron dificultad al trabajar con unidades hasta de 7 cifras.

PROBLEMA 8
Para costear los gastos de la fiesta del campesino, la alcaldía municipal de Tolón aportó \$8'500.000 y la Junta de Acción Comunal aportó \$1'300.000. De ese dinero, se sacaron \$2'700.000 para la compra de los ingredientes del sancocho y el asado comunitario. ¿Cuánto dinero le queda a la comunidad para otros gastos?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 8'500.000 + \\ 1'300.000 \\ \hline 9'800.000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9'800.000 - \\ 2'700.000 \\ \hline 7'100.000 \end{array}$$

R/ le queda a la comunidad \$ 7'100.000

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

$$\begin{array}{r} 8'500.000 + \\ 1'300.000 \\ \hline 9'800.000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9'800.000 - \\ 2'700.000 \\ \hline 7'100.000 \end{array}$$

Foto 12: Ejemplo de estudiante que usa cantidades hasta de 7 cifras sin dificultad.

✓ Problema 9

Con respecto a este problema, se puede decir que se propuso un caso de transformación – composición que requería el uso de una suma y una resta para su resolución; además, estaba planteado para que los estudiantes eligieran entre 4 opciones de respuesta. A pesar de que necesitaron ayuda de la docente para saber cómo responder, uno de los educandos no dio cuenta de ninguna opción.

PPA: ¿Tú ya sabes qué debes hacer ahí?

E4: Sí

PPA: Bueno, lee el problema

E4: De los siete millones cien mil con los que cuenta la comunidad se gastaron cinco millones seiscientos mil en el pago de los artistas.

PPA: Para hasta ahí. Hasta ahí ¿Qué tendrías que hacer?

E4: Una resta

PPA: Bueno. ¿Por qué una resta?

E4: Porque con los siete millones cien mil que cuenta la comunidad, ellos gastaron

PPA: ¡Ah, correcto! Entonces, si gastaron, quiere decir que hay una...

E4: Resta

PPA: Listo, ¿Qué más te dice el problema?

E4: Si al dinero que sobra, Don Silvio y Don Édgar le aportaron quinientos mil.

PPA: ahí, ¿qué tendrías que hacer?

E4: Otra resta

PPA: ¿Seguro? ¿Qué significa que a uno le aporten? ¿Qué le dan o que le quitan?

E4: ¡Ah, una suma!

PPA: ¡Listo! Como tú ya tienes claro qué hay que hacer, entonces tú miras si la respuesta A es la que resuelve el problema, o si la B es la que lo resuelve o si la C... Entonces tú marcas la que sea correcta.

E4: Yo ya sé cuál es... es la B. ¿Cómo la marco profe?

PPA: como tú quieras, con un círculo, tachando con una X... como tú quieras.

✓ Problema 10

En esta oportunidad, se buscaba que los estudiantes crearan un problema a partir de las imágenes de dulces o productos que habitualmente consiguen en una tienda local. Los estudiantes debían proponer el precio de cada uno y con base en ello, hacer su invención. Realizando la revisión del trabajo de los niños y niñas, se pudo encontrar lo siguiente:

- Uno de los estudiantes formuló su problema con total falta de coherencia, al momento de operar no tuvo en cuenta los datos que él mismo planteó, aunque los algoritmos están bien hechos, su respuesta fue incorrecta y ni siquiera responde a su

propia pregunta; tal como se puede observar en la siguiente imagen. Este hecho podría explicarse a que el estudiante no tuvo en cuenta un modelo que le permitiera conectar todos los elementos requeridos para la formulación de un problema.

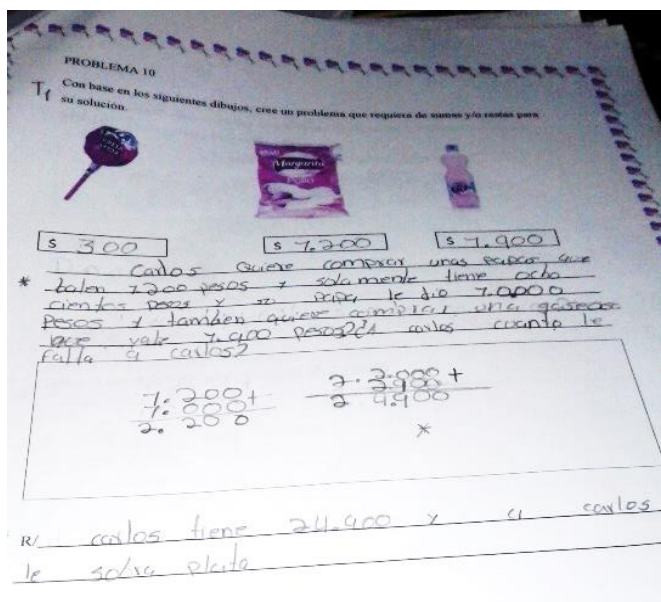


Foto 13: Ejemplo de problema planteado con incoherencia.

- Otro de los estudiantes propuso un problema de transformación – transformación que resolvió con tres restas. Aunque su problema es coherente, los algoritmos son los correctos y además su respuesta es conforme a la pregunta planteada, en este caso al educando, le faltó desarrollar bien los algoritmos y ser explícito en indicar qué acción realizó el sujeto del problema con el dinero que tenía.

- Dos de los estudiantes propusieron problemas de transformación – transformación. Uno de ellos, lo resolvió con una suma y una resta, pero al momento de desarrollar los algoritmos, no tuvo en cuenta que en su problema habló de 2 bombones y solamente tomó el precio de 1. Por su parte, el otro estudiante, resolvió su planteamiento con tres restas, las cuales quedaron bien desarrolladas, y su respuesta fue coherente.

- Dos estudiantes plantearon problemas de composición – transformación. Uno de ellos fue coherente con el problema, el desarrollo de éste y la respuesta, sin embargo, el primer algoritmo tuvo dificultad en la desagrupación al restar, mas no así con la suma. Por su parte, el otro estudiante, aunque planteó un problema coherente, su principal error, radicó en que planteó una resta con tres términos, por lo tanto, su respuesta fue errada.

- Los tres estudiantes restantes propusieron problemas de composición – transformación que requerían del uso de una suma y una resta para su resolución. En estos casos, los planteamientos fueron coherentes, los algoritmos estuvieron bien desarrollados y consecuentemente la respuesta a la pregunta formulada, fue precisa.

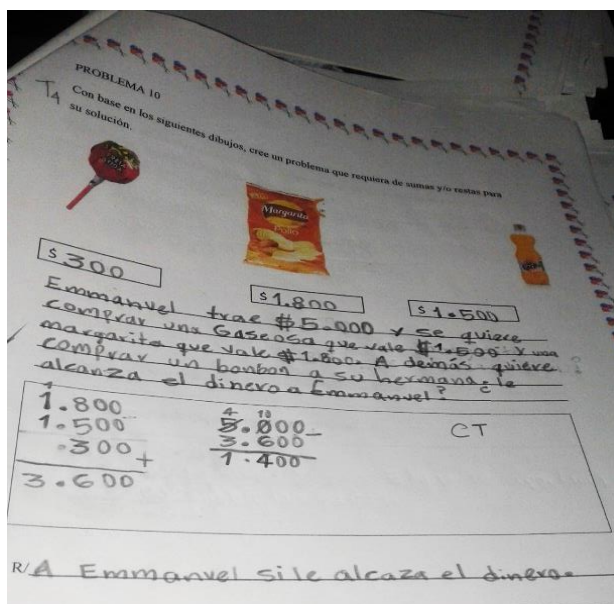


Foto 14: Ejemplo de problema planteado y resuelto con coherencia

Un aspecto relevante en el problema 10, es que los valores que los estudiantes asignaron a los productos dados en las imágenes fueron reales y contextualizados.

✓ Problema 11

Con relación a este problema, se puede decir que se planteó a los estudiantes un caso de transformación – transformación que necesitaba de dos restas para ser resuelto. 8 de los 9 estudiantes escogieron estas operaciones para llegar a una solución. De estos 8 educandos, 5 desarrollaron el problema como era esperado, por lo que sus respuestas estuvieron acordes a la pregunta de éste. Los tres estudiantes restantes tuvieron dificultades en la desagrupación, por lo que el dato numérico de la respuesta no fue correcto. El estudiante faltante, dado que escogió una suma en la segunda etapa del problema, también se equivocó al emitir la respuesta.

✓ Problema 12

En este caso, se esperaba que los estudiantes propusieran un problema a partir de una información del contexto relacionada con algunos de los concursos tradicionales de la comunidad de La Moralia durante la Fiesta del Campesino. Los aspectos que se observaron, son los que se describen a continuación.

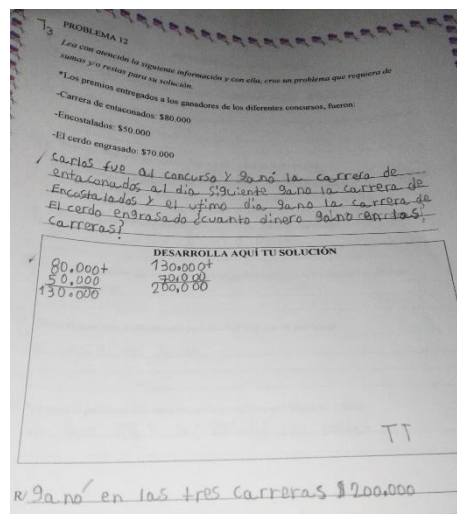
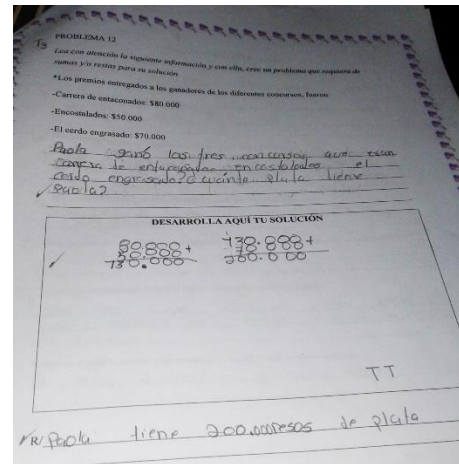
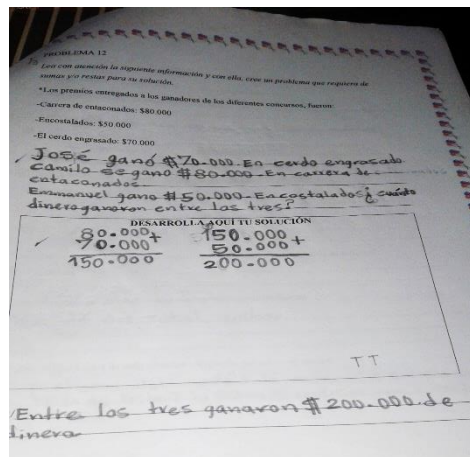
- 1 de los estudiantes citó en su problema el valor de cada uno de los concursos en juego, pero no hay claridad en expresar qué sucede con dichos valores, además la pregunta que hace no tiene nada que ver con su planteamiento. Por otra parte, hace dos restas, que aunque están bien desarrolladas, no corresponden a lo que se pretendía.

- 1 estudiante propuso un problema de transformación – transformación que se resolvía con dos restas. En este caso, el educando sólo tuvo en cuenta uno de los datos propuestos por la docente, los demás los planteó sin ningún sustento; sin embargo, cabe anotar que se trata de un problema aditivo mixto, por lo que su respuesta alude a la pregunta formulada.

- 1 de los estudiantes redactó su problema de transformación – transformación con lógica y coherencia, el desarrollo del algoritmo fue correcto y su respuesta corresponde a la pregunta que se planteó a sí mismo. Es importante anotar que el educando resolvió su propuesta como un problema aditivo simple.

- 1 de los estudiantes recurrió al cálculo mental para saber el valor total de los premios de los concursos. Con base en ello, planteó su problema de composición – transformación, de tal manera que al momento de desarrollar los algoritmos no tuviese inconvenientes al desagrupar, en tanto que utilizó cifras exactas.

- Los cinco estudiantes restantes propusieron problemas de transformación – transformación que requerían el uso de dos restas para su resolución. En estos casos, se pudo observar que todos ellos redactaron problemas coherentes, los cuales resolvieron con eficiencia y además sus respuestas corresponden a las preguntas formuladas.



Fotos 15, 16 y 17: Ejemplos de problemas planteados y resueltos con coherencia.

Para concluir la tercera situación, se solicitó a los niños que indicaran la forma en la cual validaron sus respuestas en algunos de los problemas. Al hacer una revisión de los resultados, se puede decir que en promedio 2 de los nueve estudiantes hacen alusión al procedimiento utilizado, recurriendo a su lenguaje natural; 4 de ellos, llevaban a cabo el mismo procedimiento que utilizaban en la solución del problema, aunque en algunos casos, incurrían en los mismos errores de desagrupación al restar y 3 del total de estudiantes hacía uso de la operación inversa para rectificar sus respuestas, buscando el total de las cantidades que les fueron propuestas, presentándose una constante en este aspecto, si se tiene en cuenta la situación 2.

Como ejercicio final de las tres situaciones que componen la secuencia didáctica, se establece un espacio denominado “momento para reflexionar”, con el cual se busca que los niños y niñas puedan hacer generalizaciones sobre las operaciones de adición y sustracción, con base en el desarrollo de los PAMA relacionados con su contexto socio-

cultural, como parte de su proceso metacognitivo, pues como lo indica Iriarte Pupo (2011), esto es muy importante para interiorizar el conocimiento. Como resultado de dicho ejercicio, se pudo encontrar lo siguiente:

➤ Al pedir a los estudiantes que observaran el problema 1 de cada situación y dijeran qué aspecto encontraron en común entre ellos, el 100% de los niños y niñas indicaron que dichos problemas requerían de la resta para su resolución. En el siguiente diálogo se evidencia que los educandos no tuvieron dificultad ante este cuestionamiento: PLP: observen el problema 1 de cada situación y expliquen qué tienen en común. ¿Qué pasa con el problema 1 de la mora? ¿Cómo lo solucionaron ustedes?

E7: con resta

PLP: con resta ¿Cómo lo solucionaste tú E8?

E8: con resta

PLP: y ¿cómo lo solucionó E3?

E3: con restas

PLP: ahora van a mirar el problema 1 del café, miren el problema 1 del café

E3: con una suma y una resta lo hice yo

PLP: estamos en el problema 1 y usted ya va en problema el 4 E3

E8: yo, con dos restas

PLP: con dos restas también y ahorita observas el problema que hicimos... déjalo abierto para que analices. En el problema del café ¿con qué lo solucionaste E7?

E7: con resta

PLP: también y ahora miremos el problema de la fiesta del campesino. Este primer problema ¿con qué lo solucionaron?

E7: con resta

➤ Ante la pregunta a qué operación hacen referencia las palabras *añadir, agregar, aumentar, ganar, recibir, le regalan*, el 100% de los estudiantes indicó que estas acciones se aluden al proceso de la suma.

➤ Cuando el 100% de los estudiantes observa el problema 3 de las secuencias 1 y 2, refieren a que este tipo de problema requiere de la suma y la resta para su solución, lo cual es correcto.

➤ Ante la pregunta a qué operación se refieren las palabras *quitar, perder, gastar, regalar, la diferencia*, el 100% de los estudiantes expresa que estas acciones están asociadas al proceso de la resta.

PROBLEMA 7
T₅ Plantea un problema similar al anterior haciendo uso de sumas y/o restas para su solución.

Marta tiene 10.000 pesos y su hermano le regaló 2.000 pesos y su otro hermano le regaló 1.500 pesos y el resto lo gastó. ¿Cuánto dinero le queda a Marta?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 10.000 + 2.000 + 1.500 \\ 2.000 \quad 1.500 \\ \hline 13.500 \\ 13.500 - 2.000 \\ \hline 11.500 \\ 11.500 - 1.500 \\ \hline 10.000 \end{array}$$

TC

R: A Marta le queda para gastar 10.000 pesos.

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

T₃

$$\begin{array}{r} 10.000 + 2.000 + 1.500 \\ 2.000 \quad 1.500 \\ \hline 13.500 \\ 13.500 - 2.000 \\ \hline 11.500 \\ 11.500 - 1.500 \\ \hline 10.000 \end{array}$$

PROBLEMA 12
T₅ Lee con atención la siguiente información y con ella, crea un problema que requiera de sumas y/o restas para su solución.

* Los premios entregados a los ganadores de los diferentes concursos, fueron:

- Carrera de catonados: \$80.000
- Encestados: \$50.000
- El cerdo engrasado: \$70.000

Jose ganó \$70.000. En cerdo engrasado. Camilo ganó \$80.000. En carrera de catonados. Emmanuel ganó \$50.000. Encestados. ¿Cuánto dinero ganaron entre los tres?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

$$\begin{array}{r} 80.000 + 50.000 + 70.000 \\ 70.000 \quad 50.000 \\ \hline 150.000 \\ 150.000 + 70.000 \\ \hline 220.000 \end{array}$$

TT

Entre los tres ganaron \$220.000 de dinero.

Fotos 18 y 19: Ejemplo de aplicación correcta de operaciones, desarrollo eficiente de algoritmos y respuestas coherentes.

➤ Con respecto a las preguntas en las cuales se le solicitaba a los estudiantes plantear estrategias de solución para los diferentes tipos de PAMA, se pudo corroborar que para validar sus respuestas, los niños y niñas, expresaron ideas tales como: describir el procedimiento utilizado, rectificar sus respuestas realizando nuevamente las operaciones del procedimiento o buscando la operación inversa como mecanismo de comprobación, comprendiendo el efecto de cada operación y las relaciones entre ellas (Lineamientos Curriculares, 1998).

Al finalizar la situación 3, se encontró que con relación a los casos en los cuales se buscaba que los estudiantes pudieran resolver PAMA propuestos por la docente, se pudo encontrar que el 66% de ellos alcanzó esta meta, también se puede decir que el 22% de los educandos continúa presentando dificultades en cuanto a la enunciación de la unidad y al desarrollo de los algoritmos, pues la desagrupación en la resta sigue siendo la constante; por otra parte, el 11% restante de la totalidad de niños y niñas aún no encuentra coherencia entre la pregunta formulada y su respuesta.

Otro de los aspectos primordiales que se trazaba el objetivo de esta situación, era que los estudiantes logaran plantear sus propios PAMA. Con respecto a esto, se encontró que el 55% de los estudiantes pudo alcanzar este propósito, en tanto que sus ejercicios

estuvieron expresados con claridad, precisión y coherencia entre el planteamiento, los algoritmos aplicados y la emisión de su respuesta con base en la pregunta formulada; también se pudo evidenciar que el 33% de los estudiantes tuvo alguna dificultad en este aspecto, puesto que escribían demasiada información en los problemas, lo que les llevaba a confundirse a sí mismos al momento de aplicar un procedimiento para la solución, los algoritmos tenidos en cuenta no eran los requeridos para resolver el problema o la desagrupación de las cantidades nuevamente causó inconvenientes, también fue evidente que, al enunciar la unidad, ésta era omitida por los estudiantes, aunque en algún momento del problema se podía encontrar alguna relación entre un par de los elementos que componen el problema (planteamiento, procedimiento y respuesta). Por su parte, el 11% de los estudiantes no logró redactar problemas claros ni coherentes, por lo que la relación entre éste con el procedimiento aplicado o bien con la respuesta, careció totalmente de lógica. Cabe anotar que el 1% restante de la totalidad de estudiantes expresada en los presentes análisis, corresponde al margen de error, en tanto que al sacarse los porcentajes, expresados como notación decimal, los resultados obtenidos dan con cifras decimales.

Otro aspecto sobresaliente en la formulación de los problemas por parte de los estudiantes, es que en esta situación se les propuso la creación de cuatro problemas, para un total de 36. A partir de allí se observó que los educandos construyeron 16 problemas de la estructura semántica transformación – transformación; 12 de los problemas fueron de composición – transformación, se presentaron 2 casos de transformación – composición y un solo caso de composición – composición. Los 5 problemas restantes, no fue posible caracterizarlos en alguna de las estructuras semánticas establecidas, precisamente por las incoherencias mencionadas en el párrafo anterior, pudiéndose anotar además, que se presentaron en los mismos estudiantes.

Con base en lo expuesto por Vergnaud, se puede sugerir que los problemas de transformación – transformación, resultan más fáciles para los estudiantes en tanto que podría ser para ellos más común tener una cantidad inicial que sea transformada en disminución o aumento por una cantidad nueva.

Como etapa final de la situación 3 de la secuencia didáctica, se requería que los estudiantes establecieran generalizaciones con relación a las situaciones presentadas en ella. Haciendo una revisión detallada de los resultados se pudo encontrar que la totalidad

de los estudiantes logró asociar a la suma, acciones tales como: agregar, añadir, aumentar, etc; del mismo modo, relacionaron tareas como: quitar, perder, disminuir, etc a la resta. Sin embargo, al solicitárseles que propusieran estrategias para resolver esta clase de problemas (de adición y sustracción) se encontró que el 11% de los estudiantes sólo logró expresar estrategias vinculadas al contexto en el cual se les presentaban los problemas, por lo que se ubican en el *nivel situacional*; un 22% de los estudiantes, pudo ubicarse en el *nivel referencial*, pues lograron esquematizar procesos que le permitieran avanzar en sus modelos para la solución de sus problemas; por su parte, el 66% restante de los estudiantes logró alcanzar el *nivel general*, en tanto que, propusieron diferentes formas de modelizar las situaciones, las cuales pueden ser utilizadas en otros contextos que se les presente, llevadas a cabo mediante un proceso de reflexión.

4.2 CONCLUSIONES

4.2.1 Con respecto al objetivo 1

❖ Determinar algunos referentes curriculares, didácticos y disciplinares que posibiliten la matematización de Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA).

Después de una acuciosa búsqueda, fue posible determinar cómo los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, los Estándares Básicos de Competencia, los Derechos Básicos de Aprendizaje y las competencias que los estudiantes de tercer grado de la Institución Educativa La Moralia deben alcanzar en esta área del conocimiento, expresadas en su Proyecto Educativo Institucional, se convirtieron en pieza fundamental para la creación de los objetivos de cada una de las situaciones de la secuencia didáctica y que a su vez, encuentran cohesión con los elementos didácticos desde la EMR propuesta por Freudenthal, así también con lo expuesto por Vergnaud con relación al campo conceptual aditivo y finalmente, con lo planteado por Socas con relación a las dificultades y errores que es posible encontrar en el aprendizaje de las matemáticas. En este mismo sentido, la perspectiva matemática desde Peano y Godino, dieron luces para indicar cuáles aspectos relacionados con la adición y la sustracción se esperaba que los estudiantes conocieran y alcanzaran.

Todas estas fuentes documentales cobraron gran relevancia en el diseño, desarrollo y revisión de la secuencia didáctica, en tanto que se convirtieron en la piedra angular que

soportó y direccionó el alcance de los demás objetivos específicos y por supuesto del objetivo general.

4.2.2 Con respecto al objetivo 2

❖ Articular los referentes curriculares, didácticos y disciplinares para el diseño de una secuencia didáctica que posibilite la matematización.

Con base en la importancia que tienen para la labor del docente los elementos curriculares, disciplinares y didácticos, y particularmente en el presente trabajo de investigación, cobró vital importancia el instrumento de las rejillas, puesto que a través de ellas se pudieron encontrar relaciones fundamentales para la construcción de una secuencia didáctica que abordó aspectos contextuales del entorno de los estudiantes, en tanto que ellos son conocedores de las situaciones planteadas ya que son reales (principio de realidad de Freudenthal) y los niños y niñas son partícipes activos en de las mismas. Además, si estos elementos hubiesen sido abordados de manera aislada, la actividad habría perdido total coherencia y propósito. La secuencia didáctica, buscó que las situaciones, problemas y actividades planteadas tuvieran como sustento, no sólo el contexto de la comunidad, sino también una fundamentación teórica clara y consistente, que permitió los procesos de matematización en los estudiantes, que se ubicaron en diferentes proporciones en sus distintos niveles, tal como se puede leer en las conclusiones del objetivo general del presente capítulo (página 123).

4.2.3 Con respecto al objetivo 3

❖ Analizar los resultados obtenidos durante la aplicación de la secuencia didáctica y vincularlos con los niveles de matematización de Freudenthal.

El ejercicio de analizar los desempeños de los estudiantes en la ejecución de la secuencia didáctica, fue necesario realizarlo de manera procesual y detallada, puesto que un análisis que no observe a profundidad cada elemento que contiene la actividad pedagógica, dejaría pasar inadvertidos aspectos que podrían generar a futuro nuevas estrategias e innovaciones que le aporten a la Educación Matemática, específicamente en el campo de la matematización. Para dicho ejercicio, fueron de gran importancia las rejillas 8 y 9. Con el análisis, se pudo evaluar el alcance de las tareas y actividades

propuestas a los estudiantes como sujetos individuales así como comunidad de aprendizaje.

Con base en el desarrollo de la secuencia didáctica por parte de los estudiantes, se encontró que:

- *La identificación de los datos fue una de las principales dificultades para la resolución de los problemas.

- *Los diferentes términos desconocidos propuestos en las estructuras semánticas de los problemas, no le resultó difícil hallarlos a los estudiantes.

- *Enunciar la unidad o la magnitud en las respuestas en forma escrita fue una de las principales falencias de los estudiantes; resultó más fácil para ellos, verbalizarlas en forma oral.

- *Las representaciones concretas de las cantidades no fueron relevantes para los estudiantes, mientras que si lo fueron las representaciones pictóricas y numéricas, demostrando que el material manipulativo ya no es requerido como modelo que aluda a las cantidades en esta etapa escolar.

- *El ejercicio de la desagrupación, especialmente aquellas seguidas de cero en el procedimiento de la resta, resultó un elemento complejo, en tanto que no reconocían el valor de este número de acuerdo con su posición dentro de la cantidad.

- *Los estudiantes pudieron ordenar fácilmente los números dados en orden ascendente o descendente, así mismo, pudieron identificar cantidades mayores o menores con respecto a otra; sin embargo, la utilización de los signos mayor que y menor que, les resultó confuso. Esta circunstancia podría indicar que el lenguaje de los signos, no les representa nada en el contexto numérico.

- *Para los estudiantes, fueron más fáciles los problemas de transformación – transformación, especialmente en la creación de sus propios problemas.

- *En el desarrollo de los diferentes problemas fue necesaria y recurrente la orientación del docente (principio de reinención guiada) puesto que hubo elementos de ellos que los estudiantes pasaron por alto, evidenciando que hace falta más ejercicio de lectura matemática en el aula de clase.

4.2.4 Con respecto al objetivo general

❖ Establecer el nivel de matematización que alcanzan los estudiantes del grado tercero de la Institución Educativa La Moralia cuando desarrollan una secuencia didáctica con Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA).

Con base en la revisión exhaustiva de los resultados obtenidos por los estudiantes en el desarrollo de la secuencia didáctica, puede señalarse que fue posible que entre ellos se presentaran los diferentes niveles de matematización propuestos por Freudenthal en su teoría de la EMR, en tanto que, se pudo verificar que tal como lo afirma este autor, la matemática fue posible para todo el conjunto de educandos. A pesar de que no todos alcanzaron el mismo nivel, se observó un avance en ellos con relación al estado en el que se encontraban en el proceso de matematización expresado en el planteamiento del problema del presente trabajo de investigación.

Los niveles de matematización fueron alcanzados por los estudiantes, en las diferentes situaciones, de la manera que se detalla a continuación:

*Situación 1: Los 9 estudiantes en el *nivel situacional*, es decir, el 100% de ellos.

*Situación 2: 2 de los 9 estudiantes en el *nivel situacional* (23%) y los 7 estudiantes restantes en el *nivel referencial* (77%).

*Situación 3: 1 estudiante se ubicó en el *nivel situacional* (11%), en el *nivel referencial* se situaron 2 estudiantes (22%) y los 6 estudiantes restantes alcanzaron el *nivel general* (66%).

Con base en lo anterior, se puede afirmar en términos generales que el 45% de los estudiantes, es decir, 4 de ellos alcanzaron el *nivel situacional*, el 33% de los niños y niñas, lo que equivale a 3 de ellos, logró el *nivel referencial* y finalmente el 22% de los estudiantes alcanzó el *nivel general*, lo que representa 2 educandos. Dichos alcances están dados por la realización de las acciones que fueron enunciadas en la rejilla 8 (página 71).

Estos resultados permiten evidenciar que el objetivo trazado fue alcanzado ampliamente. No obstante, no se debe perder de vista que Freudenthal afirma que estos niveles no son de carácter jerárquico y por consiguiente, los estudiantes podrían revertir sus procesos de un nivel a otro, cuando se enfrentan a procesos metacognitivos.

Del mismo modo, se pudo afirmar que en promedio 4 de los 9 estudiantes desarrollaron habilidades para plantear y resolver sus propios problemas, proponiendo datos concretos, haciendo uso correcto de éstos y de los algoritmos, enunciaron respuestas claras y coherentes a sus creaciones teniendo en cuenta las unidades. Dicho resultado puso de manifiesto que es posible que los estudiantes pueden ser propositivos y buenos resolutores de problemas, partiendo inicialmente de situaciones circundantes en su contexto que más adelante se pueden transponer a otros ámbitos.

4.3 RECOMENDACIONES

A partir de los resultados y análisis obtenidos a lo largo de la revisión del desempeño de los estudiantes en la ejecución de la secuencia didáctica propuesta, se presentan algunas recomendaciones generales que podrían ser tenidas en cuenta por otros docentes de matemáticas en el ciclo de primaria, o bien, por otros investigadores que aborden una problemática similar a la presente:

- Revisar los aspectos curriculares, didácticos y disciplinares que sustentan un determinado constructo matemático, o de cualquier otra área del conocimiento, antes de poner en escena una actividad pedagógica.
- Es fundamental ejercitar a los niños en la lectura comprensiva de los problemas matemáticos, puesto que esto, con la orientación del docente, les permite identificar los datos en él inmersos, las operaciones a tener en cuenta y la emisión de respuestas claras y coherentes.
- Resulta muy importante la práctica de la desagrupación, especialmente en el proceso de la resta, en tanto que, realizar esta labor, especialmente con las cantidades seguidas de cero, suele ser más difícil para los niños y niñas.
- Es importante promover en los estudiantes la construcción de sus propios problemas, en tanto que esto les permite comunicar, razonar, crear, desarrollar procedimientos y por tanto modelizar situaciones matemáticas.
- Resulta de gran importancia presentar problemas contextualizados, en tanto que, no sólo les permite reflexionar sobre su realidad, sino que además puede movilizar en ellos la capacidad de proponer acciones en favor de ella, que conduzca por consiguiente a un aprendizaje significativo.

- Proponer a los estudiantes diferentes tipos de problemas, donde la incógnita no esté necesariamente al final de él y que además les posibilite trabajar con otras estructuras semánticas diferentes a las de transformación que son las más comunes en las aulas de clase.
- Las tareas anteriormente mencionadas deben ser aplicadas por el docente desde las primeras etapas de la vida escolar de los niños y niñas para aflorar en ellos su capacidad creativa y consciente de su propio proceso de aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, R., Bruno, A., & Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, 9-34.
- Ayllón, M. F. (2012). Invención - resolución de problemas por alumnos de educación primaria. Granada, Granada, España: Universidad de Granada.
- Ayres Jr, F. (2003). *Álgebra Moderna*. México: McGraw-Hill.
- Bressan, A. (30 de Agosto de 2017). *www.educra.cl*. Obtenido de *www.educra.cl*: <https://educra.cl/wp-content/uploads/2017/06/DOC1-principios-de-educacion-matematica-realista.pdf>
- Bressan, a. M., Gallego, M. F., Pérez, S., & Zolkower, B. (30 de Agosto de 2017). *www.gdomatematica.org.ar*. Obtenido de Educación Matemática Realista, bases teóricas: http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2016/03/Modulo_teoría_EMRFinal.pdf
- Bruno, A. (S.F). Estructuras Aditivas. *Estructuras Aditivas* (págs. 1, 7, 42, 43). Tenerife, España: Universidad de La Laguna.
- Carpenter, T. J. (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1995). *Estructuras aritméticas elementales y su modelación*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Castro, E., Rico, L., Encarnación, C., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., . . . Fernández, F. (s.f.). *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones*. Granada: Departamento Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
- Díaz de León, J. J. (2004). *El grado de abstracción en la resolución de problemas de cambio de suma y resta en contextos rural y urbano*. Madrid - España: Universidad de Complutense.
- Económico, O. p. (06 de Diciembre de 2016). *www.oecd.org*. Recuperado el 30 de Mayo de 2017, de *www.oecd.org*: <http://www.oecd.org/pisa/singapur-encabeza-la-ultima-encuesta-pisa-sobre-educacion-que-realiza-la-ocde-a-escala-internacional.htm>

- Estrena, I. (2014). *Aprender a matematizar. Matematización como medio y no como fin*. Granada - España: Universidad de Granada.
- Galeano Ramirez, M. Y., & Ortiz Ruíz, D. S. (2008). *El cálculo numérico como estrategia para desarrollar el pensamiento numerico*. Recuperado el 1 de Noviembre de 2016
- García García, J. J. (1998). la creatividad y la resolución de problemas como bases de un modelo didáctico alternativo. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Gobierno de Colombia. (2006). *Código de Infancia y Adolescencia, Ley 1098 de noviembre 8 de 2006*. Bogotá, Colombia.
- Godino, J. (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada - España: Edumat.
- Iriarte Pupo, A. d. (2011). Desarrollo de la competencia resolución de problemas desde una didáctica con enfoque metacognitivo. *Zona Próxima (extraído de internet)*.
- Iriarte Pupo, A. d. (s.f.). *Estrategias metacognitivas para la resolución de problemas matemáticos en estudiantes de 5º de primaria*. Recuperado el 13 de Octubre de 2016
- Martínez Pérez, M. L., Davalle, N., Betina, Z., & Bressan, A. (2000). *Los contextos "realistas" en la resolución de problemas de matemática: una experiencia para capacitadores, docentes y alumnos*. Bariloche - Argentina: Grupo Patagónico de didáctica de la Matemática.
- McIntosh, A., Reys, B., & R.E, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning mathematics*, 2-8.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Moreira, M. A. (s.f). *La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área*. Porto Alegre: Instituto de física UFRGS.
- National Countil of Teachers Mathematic. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Ordóñez, L. I. (2014). Estructuras Aditivas En La Resolución De Problemas Aditivas De Enunciado Verbal (PAEV). Palmira, Valle del Cauca, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Pérez, Y., & Raquel, R. (s.f.). Estrategia de enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Fundamentos teóricos y metodológicos. *Revista de investigación Nº 73*, 2011.
- Pineda, J. D. (2013). Unidad didáctica para la enseñanza de las estructuras aditivas en los grados tercero y quinto de básica primaria. Manizales, Caldas, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.
- Puig, L., & Cerdán, F. (1990). La estructura de los problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. *Cuarta reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de*

profesores e Investigación en Matemática Educativa. Acapulco, México: Departamento de didáctica de las matemáticas de la Universidad de Valencia.

Puig, L., & F, C. (1998). *Problemas aritméticos escolares*. México: Síntesis.

Quijano, L. M., & Jennifer, A. (2013). Análisis desde una perspectiva semiótica del papel del docente en la enseñanza de las operaciones de suma y resta con números naturales. Santiago de Cali, Valle del Cauca, Colombia: Universidad del Valle.

Regader, B. (s.f.). *psicologiyamente.net*. Recuperado el 10 de Abril de 2017, de <https://psicologiyamente.net/inteligencia/teoria-inteligencias-multiples-gardner#!>

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. Granada - España: Dialnet.

Rodríguez Quintana, E. (2005). Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemática. una propuesta integradora desde el enfoque antropológico. Madrid, España.

Rodríguez, M. (2013). Resolución de Problemas. En R. Mabel, *Resolución de Problemas. Educación Matemática. aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pág. 154 y 159). Buenos Aires: Edivim.

Sampieri, R. H. (2014). *Metodología de la investigación*. México: McGrawHill.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria. En M. Socas, *Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en educación secundaria* (págs. 1-37). España: Universidad de La Laguna.

Tole Restrepo, D. C. (2012). Diseño de estrategias didácticas para la resolución de problemas matemáticos en escolares de cuarto del colegio Antonio José González de Bugalagrande - Valle. Bugalagrande, Valle del Cauca, Colombia: Unidad Central del Valle del Cauca.

Verschaffel, L., & Corte, E. d. (1996). Numbers and arithmetic. En K. Bishop, C. Clements, J. Keitel, Kilpatric, & C. Laborde, *International Handbook of Mathematics Educations, part 1* (págs. 99-138). Países Bajos: Sense Publishers.

ANEXOS

SITUACIÓN 1

¡LA MORA, FRUTA QUE ENAMORA!



Fuente: <https://es.dreamstime.com/stock-de-ilustraci%C3%B3n-car%C3%A1cter-feliz-de-blackberry-o-de-la-mora-image42224206>

OBJETIVO: Interpretar y resolver Problemas Aritméticos Mixtos Aditivos (PAMA) que involucren la argumentación acerca de la información presentada en situaciones de composición y transformación.

En las veredas Venus y La Mansión, una de las principales actividades agrícolas de las familias de la región, es el cultivo de la mora. En el cultivo participan los adultos y en la cosecha se involucran los niños. Durante este año lectivo, los estudiantes de La Moralia desean estudiar más profundamente algunos aspectos relacionados con esta actividad.

ACTIVIDAD 1

Para la presente actividad, se les entregará a los estudiantes material concreto que representa los objetos que se enuncian en cada problema.

PROBLEMA 1

La Junta de Acción Comunal, le dio a cada familia 28 bolsitas con semillas de mora. De ellas, 13 son de la especie sin tuna y el resto **con tuna**. De las bolsas de semilla con tuna, 7 serán usadas en la próxima cosecha ¿Cuántas bolsas de semillas **con tuna** se sembraron en esta cosecha?

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/

¿Cuál de la información del problema fue más importante para resolverlo?

PROBLEMA 2

Don Juan llevó 45 libras de mora para vender en el mercado campesino. En la mañana vendió 25 libras y el resto las venderá en la tarde. Si en la tarde, logró vender 16 libras de mora ¿Cuántas libras de mora NO vendió?

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/

¿Cuál de la información del problema planteado fue indispensable para poder resolverlo?

PROBLEMA 3.

La señora Esmeralda vendió 18 helados de mora el lunes y 9 helados el martes. Si del total de helados, 15 fueron preparados con leche ¿Cuántos helados fueron preparados con agua?

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/

¿Cuál de la información del problema planteado fue indispensable para resolverlo?

PROBLEMA 4

Doña Marta prepara 50 frascos de mermelada que venderá el fin de semana. El viernes vende 11 frascos y el sábado 17. ¿Cuántos frascos le quedan para vender el domingo?

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/

¿Cuál de la información del problema planteado fue indispensable para resolverlo?

ACTIVIDAD 2:

Lea y observe atentamente cada situación y dé respuesta a las preguntas planteadas.

PROBLEMA 5

La familia Melo recogió varias canastas de mora en los días usuales de cosecha, como se muestra a continuación.

*Canastas de mora recogidas el lunes.



*Canastas de mora recogidas el miércoles



Si para el día viernes se recolectan 5 canastas más



Fuente: <https://cliparto.es/imagen/3191674-mora/>

¿Cuántas canastas de mora en total se recogieron en estos días de la semana?

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/ _____

¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?

PROBLEMA 6:

En la finca de Emanuel, se sembraron 654 plantas de mora el martes y el jueves 869. De las plantas sembradas, el hongo “tris” dañó 150 ¿Cuántas plantas de mora sobrevivieron a la acción del hongo?



Fuente: <http://www.elcampesino.co/cultivo-de-mora/>

https://www.buscagro.com/detalles/Las-enfermedades-de-la-mora---Manual-de-campo-para-el-manejo..._74587.html

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/ _____

¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?

PROBLEMA 7

Para llevar la cosecha de mora de La Moralia a Tuluá, Doña Alexandra tiene



En el Centro de Acopio, uno de los asociados le paga a Doña Alexandra el dinero que le debía





Si el traslado de la cosecha de mora desde La Moralia hasta Tuluá, cuesta



Fuente: <http://www.colombia.co/en/this-is-colombia/colombias-monetary-heroes/>

¿Es suficiente el dinero que tiene ahora Doña Alexandra para pagar el costo del viaje?

¿Cuánto dinero le falta o cuánto dinero le sobra?

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia esos datos?

R/ _____

¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?

PROBLEMA 8:

Para resolver este problema, tenga en cuenta el problema anterior.

En el mercado campesino de Tuluá, los moreros de las veredas La Mansión y Venus, recolectaron durante la semana 300 kilogramos de mora. Por la venta de este producto ganaron en total \$420.000. De ese dinero, deben pagar el costo del viaje. Del dinero que les queda, invierten \$50.000 en la compra de nuevas semillas. ¿Cuál es la ganancia real de esta venta?



Fuente:

http://www.bbc.co.uk/blogs/mundo/cartas_desde_cuba/2011/08/se_perdio_el_dinero.html

Antes de resolver el problema, responda:

¿Qué datos puede identificar en el problema?

¿A qué hacen referencia estos datos?

R/ _____

¿Cuáles datos fueron relevantes para resolver el problema?

SITUACIÓN 2

UNA SEMILLA DE CAFÉ, UNA HISTORIA POR CONOCER



Fuente: <https://sp.depositphotos.com/99163584/stock-illustration-cartoon-funny-coffee-bean-giving.html>

OBJETIVO: Establecer comparaciones entre cantidades y expresiones que involucren problemas aditivos de transformación y composición desarrollando procedimientos y estrategias donde le den uso y sentido a los números naturales.

El café es el principal producto agrícola de Colombia. Tradicionalmente, los campesinos del país lo han cultivado, por lo que este fruto se ha convertido en el sustento de muchas familias colombianas. Después de una dura época de violencia, los habitantes de La Moralia y las veredas aledañas, han retomado la cosecha y siembra de café para reactivar su economía.

ACTIVIDAD 1

Para la presente actividad, se espera que los estudiantes se apropien de los conocimientos matemáticos necesarios para que logren generalizar los procedimientos que se usan para la solución de cada problema.

A continuación, se presentarán problemas de mayor complejidad dado que los estudiantes deben demostrar más habilidades matemáticas.

PROBLEMA 1

En esta temporada, en la vereda La Mansión, se sembraron 12.500 plantas de café. De ellas, 4.500 fueron sembradas por la familia Montoya y el resto por la familia Acevedo. De las plantas sembradas por la familia Acevedo, 3.900 son de Don Juan y las restantes de su hermano Carlos ¿Cuántas plantas de café le pertenecen a Carlos?

Antes de resolver el problema, responde:

¿Qué datos identificaste en el problema?

R/

¿Cuál familia sembró menos café?

¿Quién de los hermanos Acevedo sembró más café?

PROBLEMA 2:

Las familias Agudelo y Pérez recogieron 9.700 libras de café. De ellas, 5.500 libras de café las recogió la familia Agudelo y el restante, los Pérez. Del café recogido por la familia Pérez, la roya arruinó 300 libras. ¿Cuántas libras de café no se le afectaron a la familia Pérez?

Antes de resolver el problema, responde:

¿Qué datos identificaste en el problema?

R/

¿Fue mayor la cantidad de café que se arruinó por la roya que la que sobrevivió? Explique.

¿Cuál de las dos familias recogió más café?

PROBLEMA 3

Don Edgar contrató 5 jornaleros para la recolección del café de su finca. En la primera semana ellos recogieron 651 kg; en la segunda semana recogieron 902 kg y en la tercera semana 460 kg. De los kilos de café recolectados, vendió 1.830 en Tuluá y los demás en La Marina ¿Cuántos kilos de café vendió Don Edgar en La Marina?

Antes de resolver el problema, responde:

¿Qué datos identificas en el problema?

R/

¿Fue necesaria toda la información del problema para resolverlo? Explica tu respuesta.

¿En cuál semana hubo mayor recolección de café?

¿Dónde vendió más café Don Edgar? ¿En La Marina o en Tuluá?

¿Cómo fue la recolección de café en la primera y tercera semana con relación a la segunda semana?

PROBLEMA 4

Una vez seco el café, éste es llevado a la trilladora de La Marina. De los 7.355 bultos de café entregados, 916 bultos fueron devueltos porque está vinagre. Si en la trilladora les exigen entregar 8.000 bultos ¿Cuántos bultos les faltan por conseguir?

Antes de resolver este problema, responde:

¿Qué datos identificaste en el problema?

R/_____

De todas las cantidades de bultos de café que aparecen en el problema, ¿cuál es la mayor?_____ ¿cuál es la menor?_____

Compara las cantidades que aparecen en el problema, usando los signos *mayor que* ($>$) o *menor que* ($<$)

7.355		916
8.000		7.355
916		8.000
916		7.355

ACTIVIDAD 2

Resuelve los siguientes problemas y elige la respuesta correcta en cada caso.

PROBLEMA 5

En un cafetal se tienen 3.812 plantas de variedad Castillo y 4.651 de variedad Supremo. Si Diego cultiva 1.372 plantas de variedad Catimore ¿Cuántas plantas en total de las tres variedades hay en el cafetal?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

- a. 8.835 plantas
- b. 9.835 plantas
- c. 9.845 plantas
- d. 9.935 plantas

¿De cuál de las variedades de café hay más plantas en el cafetal?

Ordena de menor a mayor las cantidades de plantas presentes en el problema.

PROBLEMA 6

En el año 2016, la familia Aguirre recibió \$847.000 por la venta de 12 arrobas de café, en el 2017, recibió \$963.000 por la venta de la misma cantidad de café. Si del dinero recibido por la venta de café en los dos años, se invierten \$325.000 en plaguicidas ¿Cuánto dinero le quedó a la familia Aguirre?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

- a. \$1.485.000
- b. \$1.810.000
- c. \$1.845.000
- d. \$1.458.000

¿Qué información utilizaste para resolver el problema?

¿En qué año recibió más dinero la familia Aguirre por la venta del café?

PROBLEMA 7

Doña Delfina tiene 320 kilos de café y de ellos, 29 kilos se rodaron por la montaña. Ella reúne el café que le queda con el de su amiga Rubiela quien tiene 350 kilos ¿Cuántos kilos de café tienen entre las dos?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

- a. 621 kilos de café
- b. 631 kilos de café
- c. 651 kilos de café
- d. 641 kilos de café

Ordena las cantidades de kilos de café que aparecen en el problema de mayor a menor.

PROBLEMA 8

Doña Gilma surtió su fonda con 25 libras de café en el mes de enero. Durante el mes ha vendido 18 libras. ¿Cuántas libras de café debe comprar si quiere tener 34 libras de café en el mes de febrero?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

- a. 17 libras de café
- b. 7 libras de café
- c. 37 libras de café
- d. 27 libras de café

¿En cuál de los dos meses Doña Gilma compró más café?

SITUACIÓN 3

“... Y NOS FUIMOS DE FIESTA”



Fuente: <http://practicandolectoescritura.blogspot.com.co/2014/09/>

OBJETIVO: Resolver y formular problemas mixtos en situaciones aditivas de composición y de transformación que conduzcan a la generalización de estrategias en su resolución.

El 2 de junio se celebra en toda Colombia el Día Nacional del Campesino. Esta fiesta fue oficializada en el año 1965 por el presidente Guillermo Valencia con el ánimo de honrar la labor de todas aquellas personas que labran la tierra. Las veredas Venus y La Mansión no son ajenas a esta hermosa celebración, por lo que cada año sus habitantes se reúnen con sus familiares y amigos para vivir días llenos de felicidad y orgullo. Algunas de las actividades más comunes en dicha fiesta son: la venta de comidas y bebidas, la realización de concursos y juegos; así como presentaciones artísticas.

ACTIVIDAD 1

A partir de la siguiente tabla de precios, resuelva los siguientes problemas.

PRODUCTO	PRECIO
Empanada	\$600
Chorizo	\$2.000
Pastel de pollo o carne	\$1.800
Pollo asado	\$16.000
Gaseosa pequeña	\$700
Gaseosa familiar	\$5.000
Caja de lechona	\$6.000
Atado de Tamal	\$8.000
Chuleta	\$7.000
Arroz mixto	\$4.500
Caja de rellena	\$3.500

PROBLEMA 1

Don Felipe tenía \$20.000 de los cuales le dio \$5.000 a su hija y lo demás a su esposa. Con ese dinero, la esposa compró una chuleta para ella y el almuerzo para su mamá ¿Qué compró la esposa de Don Felipe para su mamá?

DESARROLLA AQUÍ LA SOLUCIÓN

R/ _____

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

PROBLEMA 2

La mamá de María le dio



<http://www.colombia.co/esta-es-colombia/cultura/los-heroes-de-los-billetes-colombianos/>

Y le pide que le traiga



<https://www.taringa.net/posts/imagenes/19496711/Conoce-las-monedas-Colombianas-Todas.html>

Si del dinero que le da su mamá, gasta



<http://www.colombia.co/esta-es-colombia/cultura/los-heroes-de-los-billetes-colombianos/>

<https://www.taringa.net/posts/imagenes/19496711/Conoce-las-monedas-Colombianas-Todas.html>

¿Cuánto dinero le quedó a María?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/ _____

¿Cómo te das cuenta que tu respuesta es correcta?

PROBLEMA 3

Plantea un problema similar a los anteriores, teniendo en cuenta la lista de precios. Haz uso de sumas y/o restas.

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/

PROBLEMA 4

Cristina salió de su casa para la fiesta con \$7.000, en el camino su padrino le regaló \$2.500. Con el dinero que tiene, gastó \$5.200 en su almuerzo y decide ahorrar lo que le sobra. ¿Cuánto dinero pudo ahorrar Cristina?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/ _____

¿Qué otros productos podría comprar Cristina con el dinero que le quedó?

¿Cómo te das cuenta que tu respuesta es correcta?

PROBLEMA 5

José tiene \$5.000 y le regala a su hermano \$1.500. Con el dinero que le queda, se compra un pastel de pollo ¿Cuánto dinero le queda a José?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/ _____

¿Qué otros productos podría comprar José con el dinero que le quedó?

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

ACTIVIDAD 2

Resuelva los problemas planteados a continuación.

PROBLEMA 6



Fuente: <http://dibujosa.com/index.php?codigo=16107>

Durante la fiesta del campesino, Doña Yamir recibió \$975.400 por la venta de comida y \$613.500 por la venta de bebidas. Además, recibió \$153.000 por el alquiler de sillas y baños ¿Cuánto dinero recibió Doña Yamir durante la fiesta?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/ _____

¿Cómo te das cuenta de que tu solución es correcta?

PROBLEMA 7

Plantea un problema similar al anterior haciendo uso de sumas y/o restas para su solución.

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

PROBLEMA 8

Para costear los gastos de la fiesta del campesino, la alcaldía municipal de Tuluá aportó \$8'500.000 y la Junta de Acción Comunal aportó \$1'300.000. De este dinero, se sacaron \$2'700.000 para la compra de los ingredientes del sancocho y el asado comunitario. ¿Cuánto dinero le queda a la comunidad para otros gastos?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/ _____

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

PROBLEMA 9

Lea con atención el siguiente problema y elija la manera correcta de resolverlo.

De los \$7'100.000 con los que cuenta la comunidad, se gastaron \$5'600.000 en el pago de los artistas. Si al dinero que sobra, Don Silvio y Don Edgar le aportaron \$500.000 ¿Cuánto dinero hay ahora para otros gastos?

POSIBLES SOLUCIONES		
A	$ \begin{array}{r} 7'100.000 - \\ \underline{5'600.000} \\ 1'500.000 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1'500.000 - \\ \underline{500.000} \\ 1'000.000 \end{array} $
B	$ \begin{array}{r} 7'100.000 - \\ \underline{5'600.000} \\ 1'500.000 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1'500.000 + \\ \underline{500.000} \\ 2'000.000 \end{array} $
C	$ \begin{array}{r} 7'100.000 + \\ \underline{5'600.000} \\ 12'700.000 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 12'700.000 + \\ \underline{500.000} \\ 13'200.000 \end{array} $
D	$ \begin{array}{r} 7'100.000 - \\ \underline{5'600.000} \\ 2'500.000 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 2'500.000 - \\ \underline{500.000} \\ 2'000.000 \end{array} $

Explica tu elección.

PROBLEMA 10

Con base en los siguientes dibujos, cree un problema que requiera de sumas y/o restas para su solución.



\$

\$

\$

Fuentes:

<https://ec.all.biz/en/lollipops-g603>

<https://www.latinmart.com/p/papas-fritas-margarita-sabor-pollo%2C-12-unidades%2C-11.86-oz/>

<http://impopaper.cl/tienda/cafeteria/fanta-lata-botella-zero-500-cc/>

R/

PROBLEMA 11

Jorge fue el ganador de la cabalgata y recibió como premio \$350.000. De ellos, gastó \$66.000 en comida para su familia. Con el dinero que le queda, le obsequió a su esposa \$120.000. ¿Cuánto dinero tiene ahora Jorge?

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/ _____

¿Cómo te das cuenta de que tu respuesta es correcta?

PROBLEMA 12

Lea con atención la siguiente información y con ella, cree un problema que requiera de sumas y/o restas para su solución.

*Los premios entregados a los ganadores de los diferentes concursos, fueron:

-Carrera de entaconados: \$80.000

-Encostalados: \$50.000

-El cerdo engrasado: \$70.000

DESARROLLA AQUÍ TU SOLUCIÓN

R/

MOMENTO PARA REFLEXIONAR

*Observe el problema 1 de cada situación y explique qué tienen en común.

*Las palabras *añadir, agregar, aumentar, ganar, recibir, le regalan* ¿A qué operación se refieren?

*Proponga estrategias de solución para resolver este tipo de problemas.

*Observe el problema 3 de las situaciones 1 y 2 y explique qué tienen en común.

*Las palabras *quitar, perder, gastar, regalar, la diferencia*, ¿A qué operación se refieren?

*Proponga estrategias de solución para resolver este tipo de problemas.
