

PROPIEDADES ELECTROMAGNÉTICAS DE AISLANTES TOPOLÓGICOS EN MOVIMIENTO

Alejandro Quiroga Triviño

Proyecto de Grado dirigido por
Juan Carlos Granada Echeverry, Ph. D.



UNIVERSIDAD DEL VALLE - SEDE CALI
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE FÍSICA
SANTIAGO DE CALI
10 de febrero de 2020

Resumen

El propósito de este trabajo fue estudiar las propiedades electromagnéticas de aislantes topológicos en movimiento. Para este fin, fue necesario desarrollar el formalismo de aislantes topológicos en movimiento, el cual permite obtener tanto las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos como la reestructuración de las condiciones de frontera en un aislante topológico en movimiento asociadas a la presencia del parámetro topológico y al movimiento relativo del sistema. Estas expresiones generalizan tanto las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos en dieléctricos en movimiento desarrollado por **Minkowski** como las ecuaciones que describen los campos electromagnéticos en aislantes topológicos en reposo halladas por **Wilczek**.

Estas relaciones generales se utilizaron para estudiar las propiedades electromagnéticas de sistemas específicos con diferentes geometrías (plana, cilíndrica, esférica) que realizan movimiento de traslación o rotación, encontrando así nuevos resultados que no han sido reportados. Entre los problemas estudiados destaca el de un cilindro sólido de aislante topológico sin carga que rota sobre su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo, donde se constató que el término topológico genera una corrección de segundo orden tanto en la polarización como en la magnetización al interior del sistema; adicionalmente se encontró que los efectos topológicos llevan a que se genere una nueva componente del vector magnetización en la dirección radial. Otro sistema que destaca es el de una esfera de aislante topológico que rota sobre su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo, donde se encontró que el campo eléctrico en el interior de la esfera tiene contribuciones de términos de tipo dipolar y cuadrupolar eléctrico. Además, la polarización en el interior de la esfera depende explícitamente del parámetro topológico y de la velocidad del sistema.

Palabras claves: aislantes topológicos, condiciones de frontera, dieléctricos en movimiento y ecuaciones de Maxwell.

Abstract

The aim of this work was the study of the electromagnetic properties of topological insulators in motion. For this purpose, it was necessary to develop the formalism of topological insulators in motion, which allowed to obtain both the constitutive relations between the electromagnetic fields as well as the restructuring of the electromagnetic boundary conditions in a topological insulator in motion. These expressions generalize those obtained by **Minkowski** for moving dielectric bodies and the relations obtained by **Wilczek**, which describe the electromagnetic fields in topological insulators at rest.

These general relations were used in order to study the electromagnetic properties of systems with different geometries (planar, cylindrical, spherical) performing translational or rotational motions, finding new results that have not been reported. Among the studied problems stands out the case of a solid cylinder of topological insulator which rotates around its symmetry axis in the presence of an external magnetic field, where it was found that the topological term induces a second order correction both in the polarization as well as in the magnetization inside the system; additionally, it was established that the topological term leads to the generation of a new component of the magnetization along the radial direction. Another system that stands out is that of a spherical topological insulator rotating around its symmetry axis in the presence of an external magnetic field, where it was found that the electric field inside the sphere has contribution of dipolar and quadrupole types. In addition, the polarization inside the sphere explicitly depends on the topological parameter and on the velocity of the moving body.

Índice

1. Capítulo 1:

Introducción	6
1.1. Marco de trabajo y formulación del problema	6
1.2. Estructura de la Tesis	8

2. Capítulo 2:

Fundamentos de la física de aislantes topológicos	10
2.1. Efecto Hall	10
2.2. Efecto Hall cuántico entero	11
2.3. Efecto Hall cuántico de Spin	12
2.4. Aislante topológico	13

3. Capítulo 3:

Electrodinámica de aislantes topológicos en reposo	19
3.1. Acción del sistema y ecuaciones de campo	19
3.2. Ecuaciones de Maxwell y relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos	23
3.3. Modificación del vector desplazamiento eléctrico y la inducción magnética	25

4. Capítulo 4:

Formalismo de aislantes topológicos en movimiento	28
4.1. Formalismo de Minkowski para dieléctricos en movimiento . . .	28
4.2. Relaciones tensoriales generales para aislantes topológicos en movimiento	29
4.3. Relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos en aislantes topológicos en movimiento	32

5. Capítulo 5:

Reestructuración de las condiciones de frontera	35
5.1. Componentes normales de los campos	35
5.2. Componentes tangenciales de los campos	36
5.3. Condiciones de frontera con velocidad tangencial al medio . .	38

6. Capítulo 6:

Aplicación del formalismo de aislantes topológicos en movimiento a sistemas físicos específicos	41
6.1. Cilindro sólido de aislante topológico	41
6.2. Cilindro hueco de aislante topológico	47
6.3. Densidad de carga superficial depositada en la cara interna y externa de un cilindro hueco de aislante topológico	48
6.4. Voltaje y carga en un capacitor eléctrico con aislante topológico	51

6.4.1. Caso 1: $q = 0$, entre las placas	52
6.4.2. Caso 2: $V = 0$ entre las placas del capacitor	55
6.4.3. Caso 3: cargas ($\pm q$) depositadas entre las placas del capacitor	56
6.4.4. Caso 4: Voltaje (V) suministrado al sistema	58

7. Capítulo 7:

Método de armónicos esféricos para campos en aislantes topológicos en movimiento 61

7.1. La ecuación de Poisson para aislantes topológicos en movimiento	61
7.1.1. Aproximación de la ecuación de Poisson para el potencial vectorial	63
7.2. Cilindro no magnetizado de aislante topológico:	64
7.3. Esfera de aislante topológico con simetría azimutal	69

8. Capítulo 8:

Conclusiones 77

8.1. Perspectivas	79
-----------------------------	----

Índice de figuras

1.	Efecto Hall convencional [1].	11
2.	Resistencia de Hall en función del campo magnético [2].	12
3.	Estados propios helicoidales presentes en un gas electrónico bidimensional en una configuración de telururo de cadmio y telururo de mercurio CdTe/HgTe [3].	13
4.	(a) Configuración del CdTe/HgTe/CdTe; (b) inversión de la estructura de bandas del CdTe/HgTe/CdTe cuando el espesor es mayor o igual a 6.3nm [4]	14
5.	(a) Estructura de bandas del telururo de mercurio (HgTe) y del telururo de cadmio (CdTe); (b) imagen esquemática de la geometría del pozo cuántico en el CdTe/HgTe/CdTe para dos espesores diferentes [5].	15
6.	(a) Estructura de bandas de la configuración de CdTe/HgTe/CdTe cuando $d \geq 6,3\text{nm}$; (b) estructura de bandas de la configuración de CdTe/HgTe/CdTe cuando $d < 6,3\text{nm}$	16
7.	Componentes tangenciales y normales de los campos electromagnéticos en la frontera del medio [6].	37
8.	Cilindro sólido de aislante topológico con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.	42
9.	Componentes de la magnetización presentes en un cilindro sólido de aislante topológico cuando el radio vector $\vec{r}$ coincide con el eje y	46
10.	Cilindro hueco de aislante topológico con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.	47

11.	Densidades de cargas superficiales depositadas en la cara interna y la cara externa de un cilindro hueco con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.	50
12.	Capacitor eléctrico con aislante topológico en su interior. . . .	52
13.	Cilindro sólido de aislante topológico con movimiento traslacional en dirección del eje z y representación de las coordenadas polares del sistema.	65
14.	Esfera sólida de aislante topológico con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.	70

1. Capítulo 1:

Introducción

1.1. Marco de trabajo y formulación del problema

La ciencia de materiales es una rama de la física que ha tomado gran importancia en los últimos años. Por esta razón se han desarrollado diferentes técnicas experimentales y formalismos teóricos con el objetivo de conocer las propiedades físicas de nuevos materiales, ya sea por sus posibles aplicaciones a la industria o por su interés en investigación. Gracias a la teoría de bandas desarrollada por Felix Bloch en el siglo veinte podemos distinguir tres tipos de materiales: aislantes, conductores y semiconductores [7, 8].

De acuerdo con esta teoría, los aislantes se definen como materiales que presentan una brecha energética (gap) entre la banda de valencia y la banda de conducción, mientras que los conductores se definen como materiales que no presentan dicho gap energético [7, 8]. En otras palabras, los materiales conductores permiten el movimiento de cargas eléctricas, mientras que los materiales aislantes no.

En el año 2006 se estudió una configuración de telururo de cadmio (CdTe) y telururo de mercurio (HgTe) que consistió en un sándwich de dos placas externas de CdTe y una placa interna de HgTe, en donde se observaron propiedades electromagnéticas inusuales que llamaron la atención de la comunidad científica [4, 9, 10], pues en el bulk, dicha configuración se comportaba como un material aislante, pero en su superficie, es decir en la interfaz del material, se observó una corriente eléctrica [4, 10, 11], lo que es una característica propia de un material conductor [7, 12]. La importancia de esta observación radica en el hecho que la aparición de dicha corriente no pudo ser explicada por medio de la electrodinámica convencional de Maxwell-Lorentz, ya que la presencia de dicha corriente rompe la invariancia del hamiltoniano del sistema frente a la simetría de inversión temporal. Por lo tanto, fue necesario recurrir a un formalismo desarrollado en el año de 1987 por Franck Wilczek, el cual pudo explicar la

aparición de nuevas propiedades electromagnéticas en estos materiales, que recibieron el nombre de aislantes topológicos [4, 9, 10, 13].

En la bibliografía estudiada hasta el momento, el grupo de problemas desarrollados con el formalismo de Franck Wilczekr concierne únicamente al estudio de aislantes topológicos en reposo [4, 11, 13, 14]. Pero de acuerdo con los trabajos desarrollados por Einstein y Minkowski de la electrodinámica de dieléctricos en movimiento [15, 16], se sabe que la consideración del movimiento relativo de un material lleva a la aparición de nuevos fenómenos electrodinámicos, tales como la modificación en la polarización y en la magnetización del sistema, así como la reestructuración de las condiciones de frontera, que llevan a correcciones en los campos electromagnéticos y a la aparición de cargas superficiales inducidas [15, 16].

Con base en lo anterior, el presente trabajo se desarrolló para responder a la siguiente incógnita: *¿Aparecerán nuevas propiedades electromagnéticas distintas a las predichas por el formalismo de Wilczek para un aislante topológico, si éste se encuentra en movimiento?*

Tomando como punto de partida la anterior pregunta, se planteó el problema central del trabajo de grado y la necesidad de conocer las nuevas propiedades electromagnéticas de los aislantes topológicos asociadas a su movimiento relativo.

En el presente trabajo se desarrolló el formalismo para un aislante topológico en movimiento y se aplicó a una serie de sistemas específicos, los cuales permitieron tener una visión más clara de la física de los aislantes topológicos en movimiento. También se encontró la reestructuración de las condiciones de frontera para el caso de aislantes topológicos en movimiento y se desarrolló el método de los armónicos esféricos para campos en aislantes topológicos en movimiento y se aplicó a un sistema físico específico con simetría esférica. Los resultados obtenidos no han sido reportados en la literatura científica, por lo que este trabajo es pionero en su área y permite tener una nueva visión de este tipo de materiales.

1.2. Estructura de la Tesis

En el capítulo 2 se presenta un breve recorrido histórico que abarca desde la observación del efecto Hall convencional hasta el descubrimiento de los aislantes topológicos, recalcando la relación entre las propiedades topológicas de dichos materiales y las especificidades de efectos análogos como el efecto Hall cuántico entero y el efecto Hall cuántico de spin.

En el capítulo 3 se desarrolla el formalismo para aislantes topológicos en reposo desarrollado por Wilczek, prestando especial atención a las relaciones constitutivas entre los campos electromagnéticos en el sistema de referencia con respecto al cual el sistema está en reposo.

El capítulo 4 es el más importante en este trabajo, ya que se desarrolla formalmente la electrodinámica de aislantes topológicos en movimiento y se investiga la reestructuración de las respectivas relaciones constitutivas asociada al movimiento relativo del material y a las propiedades topológicas.

En el capítulo 5 se encuentran las nuevas condiciones de frontera para los aislantes topológicos en movimiento.

En el capítulo 6 se aplica el formalismo de aislantes topológicos en movimiento desarrollado en el capítulo 4 a una serie de sistemas físicos específicos, con el fin de discutir fenómenos físicos particulares.

En el capítulo 7 se desarrolla el método de armónicos esféricos para campos en aislantes topológicos en movimiento y se aplica al problema específico de una esfera de aislante topológico que rota uniformemente en el vacío en presencia de un campo magnético constante paralelo al eje de rotación de la esfera. Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones del trabajo.

2. Capítulo 2:

Fundamentos de la física de aislantes topológicos

En este capítulo se presenta una breve introducción a la física de aislantes topológicos, debido a que es importante familiarizarse con algunas propiedades, conceptos y características propias de este tipo de sistemas. Dado que muchas propiedades de los aislantes topológicos son análogas a las propiedades de sistemas en las que se observa el efecto Hall cuántico, se presentará inicialmente una breve revisión del comportamiento de la conductividad de sistemas bidimensionales en presencia de campos magnéticos.

2.1. Efecto Hall

Considérese una muestra de dos dimensiones por la cual circula una corriente eléctrica I ; el sistema está sometido a un campo magnético $\vec{B}$ perpendicular tanto a su superficie como a la corriente, tal como se indica en la (figura 1). Cuando el campo magnético atraviesa la muestra, las partículas cargadas cambian el carácter de su movimiento debido a la fuerza de Lorentz y se acumulan en el borde superior e inferior de la muestra. Como resultado de la acumulación de cargas, se genera un campo eléctrico $\vec{E}$ en la dirección transversal que produce una diferencia de potencial V_H [1].

Este voltaje (denominado voltaje Hall) fue medido por primera vez en 1879 por el físico Estadunidense Edwin H. Hall [17]. Gracias al voltaje de Hall se puede encontrar la resistencia de Hall, la cual es directamente proporcional al campo magnético e inversamente proporcional al número de portadores de cargas y a la carga de dichos portadores:

$$R_H = \frac{V_H}{I} = \frac{B}{q\rho_e}.$$

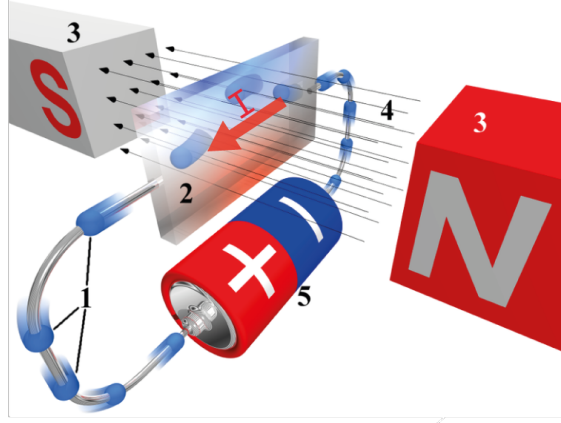


Figura 1: Efecto Hall convencional [1].

2.2. Efecto Hall cuántico entero

De acuerdo con la discusión anterior, en el efecto Hall convencional se observa que la resistencia de Hall (R_H) es lineal con respecto al campo magnético. Sin embargo, existen sistemas físicos en los cuales se observa una fuerte desviación de esta predicción. Entre estos sistemas destaca un dispositivo denominado MOSFET, típicamente construido como una configuración de sándwich de tres materiales: SiO₂, Si, Al. Al someter este sistema a un voltaje aplicado entre la parte superior e inferior, se atrapan electrones en la interfaz generada entre el SiO₂ y Si. Dichos electrones pueden moverse libremente a lo largo de la interfaz, pero su movimiento está fuertemente cuantizado en la dirección perpendicular razón por la cual dicho sistema electrónico recibe el nombre de gas electrónico bidimensional [18].

Al estudiar el efecto Hall en dicho sistema electrónico se observa que para valores altos del campo magnético la resistencia de Hall pierde su comportamiento lineal con respecto al campo magnético como se observa en la (figura 2) [2] y más bien toma valores fijos en ciertas regiones donde se varía continuamente el campo magnético lo cual evidencia el carácter topológico de este comportamiento.

La magnitud inversa de la resistividad de Hall es la conductividad de Hall, la

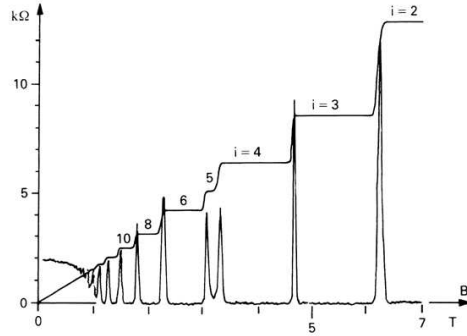


Figura 2: Resistencia de Hall en función del campo magnético [2].

cual se cuantiza en el gas electrónico bidimensional de acuerdo con la relación $\sigma_H = \frac{\nu e^2}{h}$, donde $\nu = 1, 2, 3, \dots$ es un número entero, el cual es conocido como el factor de ocupación [2, 19]. Sorprende en este fenómeno físico que la cuantización de la conductividad de Hall se da con una exactitud de una cifra en 10^9 , lo cual resulta paradójico, ya que estos materiales tienen muchas impurezas. Hoy en día se sabe que la cuantización de la conductividad de Hall está relacionada con la fase de Berry [20] y que es un parámetro topológico, ya que al variar continuamente un parámetro del sistema, como es el campo magnético $\vec{B}$, la conductividad de Hall permanece invariante.

2.3. Efecto Hall cuántico de Spin

En 1988 Haldane [21] propuso que el efecto Hall cuántico entero podría ser realizado en un sistema de red de electrones con spin total cero y con un flujo magnético constante [19]. Aunque el flujo magnético total es cero, los electrones son conducidos para crear un canal propio de conducción. Más aún, se encontró que el rol del flujo magnético periódico podía ser remplazado por el fuerte acoplamiento spin orbita de los electrones. Este fenómeno recibió el nombre de efecto Hall cuántico anómalo [19, 22].

El efecto Hall cuántico de spin puede ser explicado como la combinación de dos efectos Hall cuánticos anómalos, en uno de los cuales los electrones tienen spin hacia arriba (spin up), mientras que en el otro los electrones tienen spin hacia

abajo (spin down) y quiralidad opuesta, formando así dos canales de conducción.

Cuando los estados propios alrededor de la frontera del sistema dependen de la orientación del spin, los electrones con diferente spin se mueven en dirección opuesta para formar un par de estados propios helicoidales (ver figura 3) [23]. En 2006 Bernevig, Hughes y Zhang propusieron que el efecto Hall cuántico de Spin se podía realizar en el sándwich de pozo cuántico CdTe/HgTe/CdTe [19, 24].

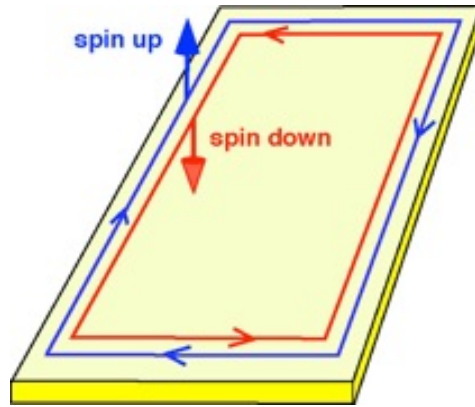


Figura 3: Estados propios helicoidales presentes en un gas electrónico bidimensional en una configuración de telururo de cadmio y telururo de mercurio CdTe/HgTe [3].

El HgTe es un material con una estructura de banda invertida y el CdTe tiene una estructura de banda normal, esta configuración especial permite que la estructura de banda del material se invierta y lo hace ideal para estudiar este tipo de sistemas físicos [24]. El efecto Hall cuántico de spin es además apodado como un aislante topológico 2-dimensional.

2.4. Aislante topológico

Un aislante topológico es un material que se comporta como un aislante en su interior y como un conductor en su frontera. En el bulk del aislante topológico,

la estructura de banda electrónica se asemeja a la de un aislante convencional, con un gap energético entre la banda de valencia y la banda de conducción. Pero cerca de la frontera, existen estados superficiales que permiten la aparición de electrones de conducción, los cuales generan estados de conducción en la superficie del material [9, 19]. Esto es debido a que se crea un pozo cuántico que confina el movimiento de los electrones a la frontera del material. Además, en los aislantes topológicos se rompe la simetría de inversión temporal debido a la existencia de dichos estados superficiales [5, 25].

Los aislantes topológicos se pueden entender como un material tridimensional donde se generaliza el efecto Hall cuántico de spin y debido a las nuevas características físicas del sistema se necesita recurrir a una nueva electrodinámica llamada “Electrodinámica del campo de Axion” [11, 14] para describir las nuevas propiedades eléctricas y magnéticas asociadas a dichos estados superficiales.

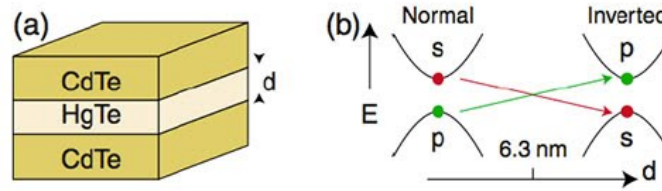


Figura 4: (a) Configuración del CdTe/HgTe/CdTe; (b) inversión de la estructura de bandas del CdTe/HgTe/CdTe cuando el espesor es mayor o igual a 6.3nm [4] .

El aislante topológico más conocido hasta la fecha es la configuración de CdTe/HgTe/CdTe (figura 4) [4, 26]. El CdTe (Telururo de cadmio) y el HgTe (Telururo de mercurio) son semiconductores binarios con estructura cristalina de blenda de zinc [5, 9]. Los estados superficiales en esta configuración se generan en la interfaz del material, entre la capa del CdTe y la capa del HgTe figura 4 (a) [4]. Además, para que la estructura de bandas de esta configuración se invierta, es necesario que el espesor de la placa (d) del HgTe sea mayor a 6.3nm; bajo estas condiciones se presentan los nuevos efectos físicos como se observa en la figura 4 (b) [4] y en la figura 5 (B) [5].

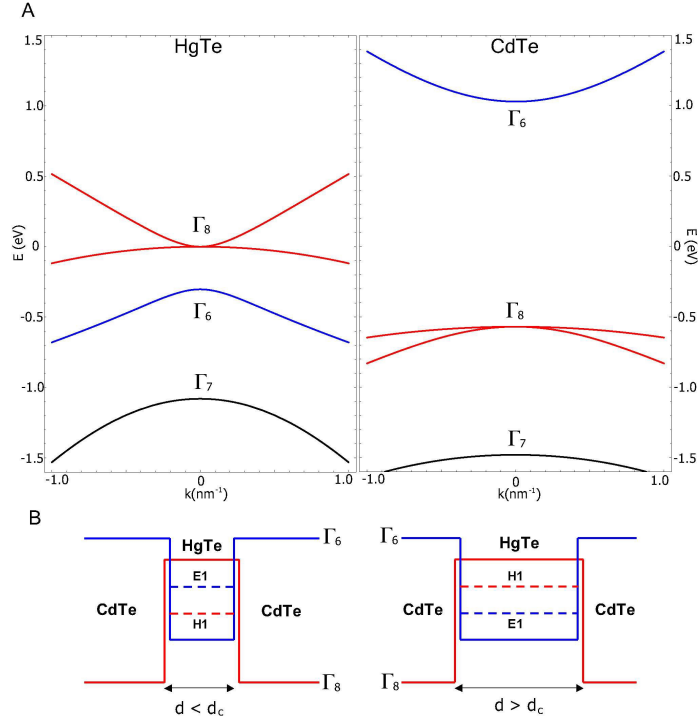


Figura 5: (a) Estructura de bandas del telururo de mercurio (HgTe) y del telururo de cadmio (CdTe); (b) imagen esquemática de la geometría del pozo cuántico en el CdTe/HgTe/CdTe para dos espesores diferentes [5].

Esta configuración particular fue propuesta por primera vez por Bernevig, Hughes y Zhang en 2006, la cual toma en cuenta la especificidad de la estructura de bandas de cada uno de estos semiconductores binarios. El CdTe presenta una estructura de bandas convencional, donde la banda de valencia (línea roja) está por debajo de la banda de conducción (línea azul). Pero, el HgTe presenta una estructura de banda invertida, es decir la banda de valencia (línea roja) está por encima de la banda de conducción (línea azul), como se observa en la figura 5 (A) [5]. Esto quiere decir que en el HgTe los huecos tienen una mayor energía que los electrones de conducción. Además, la inversión de la estructura de bandas se da por la fuerte interacción spin-orbita presente en el semiconductor.

Al construir el sándwich entre estos materiales (figura 4 (a)) con la condición que el espesor de la placa del HgTe sea $d \geq 6,3$ nm, se genera una nueva

estructura de bandas en la cual surgen estados de conducción que unen la banda de valencia con la banda de conducción figura 6 (a) [5].

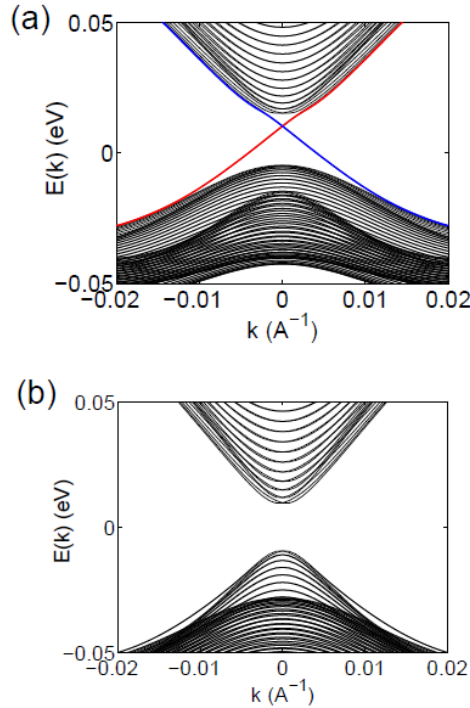


Figura 6: (a) Estructura de bandas de la configuración de CdTe/HgTe/CdTe cuando $d \geq 6,3\text{nm}$; (b) estructura de bandas de la configuración de CdTe/HgTe/CdTe cuando $d < 6,3\text{nm}$.

Estos estados de conducción son los responsables de la observación de la corriente eléctrica producida en el plano definido por la interfaz del arreglo [9]. Para poder describir este nuevo fenómeno físico se introduce un parámetro en el sistema, denominado parámetro topológico (Θ) el cual está directamente relacionado con la fase Berry y las clases de Chern [9, 19, 20]. Estos estados superficiales de conducción son un invariante topológico del sistema ya que al variar continuamente algún parámetro del arreglo como el espesor $d > 6,3 \text{ nm}$ o el campo magnético externo, dichos estados no se modifican y la existencia de la corriente se sigue presentando.

En la figura 6 (b) se observa que para espesores $d < 6,3\text{nm}$, no se presentan los estados de conducción, lo cual es debido a que para dichos espesores predomina el ordenamiento de bandas del CdTe [5, 9].

Con base en la anterior exposición se puede tener una visión más general de lo que es un aislante topológico y las nuevas propiedades que aparecen en estos sistemas. El presente trabajo se centra en estudiar las propiedades electromagnéticas de estos materiales al ser sometidos a un movimiento rotacional o traslacional.

3. Capítulo 3:

Electrodinámica de aislantes topológicos en reposo

En el presente capítulo se deducen las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas entre los campos electromagnéticos para un aislante topológico en reposo [11, 13, 14]. En este trabajo se utiliza el sistema Gaussiano de unidades, en lugar del sistema internacional.

3.1. Acción del sistema y ecuaciones de campo

Para describir las propiedades electrodinámicas de aislantes topológicos se parte de la acción efectiva, la cual incluye dos términos: el primero de éstos es la acción de la electrodinámica de Maxwell o también llamada electrodinámica convencional [15, 27] y el segundo es la acción del campo de Axion(Θ) [11, 14]. Este último término es el encargado de describir los nuevos fenómenos relacionados con el aislante topológico. Además se considera que el aislante topológico es un material polarizable y magnetizable. Bajo estas condiciones la acción que describe el sistema es:

$$S_{efectiva} = S_{Maxwell} + S_{axion}. \quad (1)$$

La acción de la electrodinámica convencional se escribe como:

$$S_{Maxwell} = - \sum \int m ds - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} F_{ik} F^{ik} d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} P^{ik} F_{ik} d\Omega, \quad (2)$$

donde m es la masa de las partículas, A_i es el 4-potencial, j^i es la 4-corriente, F_{ik} es el tensor del campo electromagnético, P^{ik} es el tensor de polarización, c la velocidad de la luz [28]. La integración se extiende a un volumen de cuatro dimensiones en el espacio de Minkowski [29, 30] (La definición de los tensores se encuentran en el **Apéndice 1**).

En la expresión (2) se identifican cuatro términos: el primero de ellos corresponde a la acción de las partículas; el segundo término describe la interacción campo-partículas; el tercer término es la acción del campo electromagnético; finalmente, el último término incluye la polarización y magnetización del sistema [15, 31].

Adicional a esto, la acción del campo de Axion se escribe como:

$$S_{axion} = \frac{\alpha}{32\pi^2 c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijkl} \Theta(x) F_{ij} F_{kl} d\Omega. \quad (3)$$

Dado que la acción efectiva representa un sistema físico real, la acción (1) debe satisfacer el principio de mínima acción [32, 33], es decir, se tiene:

$$\delta S_{efectiva} = \delta S_{Maxwell} + \delta S_{axion} = 0. \quad (4)$$

En primera instancia, se obtiene la variación de la acción de Maxwell [15] ver (**Apéndice 2**).

$$\begin{aligned} \delta S_{Maxwell} = & -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta(A_i) j^i d\Omega \frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} (\delta(F_{ik}) F^{ik} + F_{ik} \delta(F^{ik})) d\Omega \\ & - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} P^{ik} \delta(F_{ik}) d\Omega; \end{aligned} \quad (5)$$

con la propiedad tensorial $F^{ik} \delta F_{ik} = F_{ik} \delta F^{ik}$ [27, 28], se obtiene:

$$\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} (\delta(F_{ik}) F^{ik} + F_{ik} \delta(F^{ik})) d\Omega = -\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \delta F_{ik} d\Omega; \quad (6)$$

además, recordando la definición del tensor del campo electromagnético, $F_{ik} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right)$, su propiedad de antisimetría y permutando índices, se llega a:

$$F^{ik} \delta F_{ik} = F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} = 2 F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k}. \quad (7)$$

Remplazando (7) en (6) se obtiene:

$$-\frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \delta F_{ik} d\Omega = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} d\Omega. \quad (8)$$

Así, para la variación del término correspondiente al tensor del campo electromagnético se encuentra la siguiente relación:

$$-\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} d\Omega = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega. \quad (9)$$

Para la variación del término correspondiente al tensor de polarización se tiene:

$$-\frac{1}{c} \int_{\Omega} P^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (P^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega. \quad (10)$$

Remplazando (10) y (9) en (5) y teniendo en cuenta que sobre la superficie de cuatro dimensiones se cumple $\delta A_i|_{\Omega_i^f} = 0$, se llega finalmente a la siguiente expresión para la variación de la acción de Maxwell:

$$\delta S_{Maxwell} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} j^i + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} \right) \delta A_i d\Omega. \quad (11)$$

Nótese que de la ecuación (11) se pueden deducir las ecuaciones de la electrodinámica convencional [15, 27]. Estas se obtienen en el caso particular en el cual la expresión subintegral de (11) es igual a cero:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + 4\pi \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Para los sistemas considerados en el presente trabajo la expresión subintegral de (11) no se anula, ya que es preciso tener en cuenta el aporte asociado a la variación del término asociado al campo Axion. La acción del campo de Axion está descrita por [11, 14]:

$$S_{axion} = \frac{\alpha}{32\pi^2 c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijkl} \Theta(x) F_{ij} F_{kl} d\Omega, \quad (12)$$

donde α es la constante de estructura fina [34], ϵ^{ijkl} el tensor de Levi Civita y Θ el campo de axion [4, 11, 13, 14].

Al variar (12) se obtiene:

$$\delta S_{axion} = -\frac{\alpha}{16\pi c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijkl} \Theta(x) [(\delta F_{ij}) F_{kl} + F_{ij} (\delta F_{kl})] d\Omega.$$

Por las propiedades del tensor de Levi Civita [28, 35] y el tensor del campo electromagnético [15, 27, 28] se tiene; $\epsilon^{ijkl} F_{ij} \delta F_{kl} = \epsilon^{klij} F_{kl} \delta F_{ij} = \epsilon^{ijkl} F_{kl} \delta F_{ij}$, por lo que la anterior expresión toma la forma:

$$\delta S_{axion} = -\frac{\alpha}{8\pi c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijkl} \Theta(x) F_{kl} (\delta F_{ij}) d\Omega.$$

Pero por la expresión (7), se tiene $F_{kl}(\delta F_{ij}) = 2F_{kl}\frac{\partial\delta A_i}{\partial x^j}$, luego se cumple:

$$\delta S_{axion} = -\frac{\alpha}{4\pi c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijkl} \Theta(x) F_{kl} \left(\frac{\partial\delta A_i}{\partial x^j} \right) d\Omega. \quad (13)$$

El término subintegral en la anterior expresión se puede reescribir como:

$$\Theta(x) F_{kl} \frac{\partial\delta A_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} [\Theta(x) F_{kl} \delta A_i] - \frac{\partial}{\partial x^j} [\Theta(x) F_{kl}] \delta A_i.$$

Luego, (13) se escribe como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \delta S_{axion} = & -\frac{\alpha}{4\pi c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijkl} \frac{\partial}{\partial x^j} [\Theta(x) F_{kl} \delta A_i] d\Omega \\ & + \frac{\alpha}{4\pi c} \int_{\Omega} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} [\Theta(x) F_{kl}] \delta A_i d\Omega. \end{aligned}$$

El primer término de la anterior expresión es nulo, pues $\delta A_i = 0$ en la superficie de la región Ω [28, 32].

Además, intercambiando los índices j y k , dicha ecuación se reduce a:

$$\delta S_{axion} = \frac{\alpha}{4\pi c} \int_{\Omega} \epsilon^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Theta(x) F_{jl}) \delta A_i d\Omega. \quad (14)$$

La expresión (14) representa la variación de la acción del campo de Axion y ella es la responsable de la inclusión del parámetro topológico Θ en la electrodinámica de aislantes topológicos en reposo.

Finalmente, al remplazar (11) y (14) en (4) se obtiene la siguiente expresión para la variación de la acción efectiva:

$$\delta S_{efectiva} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} j^i + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} + \frac{\alpha}{4\pi c} \epsilon^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^k} \Theta(x) F_{jl} \right) \delta A_i d\Omega = 0$$

Dado que las variaciones de los 4-potenciales son arbitrarias, la expresión subintegral debe anularse, lo que lleva a las ecuaciones del campo electromagnético en un aislante topológico en reposo:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} + 4\pi \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ikjl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Theta(x) F_{jl}) = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Abreviando la notación, la anterior expresión se escribe como:

$$\partial_k F^{ik} + 4\pi \partial_k P^{ik} - \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{ikjl} \partial_k (\Theta(x) F_{jl}) = -\frac{4\pi}{c} j^i. \quad (15)$$

La ecuación (15) es la expresión que rige la nueva electrodinámica para los aislantes topológicos [11]. Nótese que la nueva electrodinámica viene incluida en el tercer término de (15) y es directamente proporcional al campo de Axion $\Theta(x)$.

3.2. Ecuaciones de Maxwell y relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos

En la presente sección se construye la electrodinámica del campo de Axion, la cual está determinada por las ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas de los campos.

De la expresión (15) se pueden obtener la ley de Gauss y la ley de Ampere generalizada. De ahora en adelante $\Theta(x)$ deja de ser un campo general y se convierte en un parámetro del sistema, llamado parámetro topológico Θ . En particular, para obtener la ley de Gauss, se debe evaluar dicha expresión para $i = 0$:

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} + 4\pi \frac{\partial P^{0k}}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{0kjl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Theta F_{jl}) = -\frac{4\pi}{c} j^0, \quad (16)$$

y realizar posteriormente la suma sobre el índice k (**Apéndice 3**), de donde se obtiene:

$$\text{div} \left(\vec{E} + 4\pi \vec{P} - \frac{\alpha\Theta}{\pi} \vec{B} \right) = 4\pi\rho.$$

Se obtiene así la ley de Gauss [36, 37]

$$\text{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho, \quad (17)$$

con una nueva definición para el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} - \frac{\alpha\Theta}{\pi} \vec{B}. \quad (18)$$

La ley de Ampere generalizada se deduce al tomar $i = 1, 2$ y 3 en la ecuación (15):

$$\bullet \quad \frac{\partial F^{1k}}{\partial x^k} = \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} \right),$$

- $\frac{\partial F^{2k}}{\partial x^k} = \frac{\partial F^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right),$
- $\frac{\partial F^{3k}}{\partial x^k} = \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right).$

Después de realizar la suma sobre el índice k (**Apéndice 3**), se obtiene:

$$\text{rot} \left(\vec{B} - 4\pi \vec{M} + \frac{\Theta}{\pi} \vec{E} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} + 4\pi \vec{P} - \frac{\Theta}{\pi} \vec{E} \right). \quad (19)$$

Por lo tanto la ley de Ampere generalizada toma la forma [27, 36]:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

donde el vector de intensidad magnética toma la forma concreta:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} + \frac{\Theta}{\pi} \vec{E}. \quad (20)$$

En el anterior desarrollo se encontraron el segundo par de ecuaciones de Maxwell y las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos en aislantes topológicos en reposo. Pero para tener una estructura completa de la electrodinámica del campo de Axion, se debe incluir también el primer par de ecuaciones de Maxwell,

De la definición del tensor del campo electromagnético F_{ik} (**Apéndice 1**) y de su propiedad de antisimetría, este tensor satisface la identidad de Jacobi [15]:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{il}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{lk}}{\partial x^i} = 0,$$

de la cual se deduce el primer par de ecuaciones de Maxwell:

$$\text{div}(\vec{B}) = 0,$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Recapitulando lo anterior, la estructura de la electrodinámica del campo de Axion se define mediante las ecuaciones de Maxwell

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{B}) &= 0, & \operatorname{div}(\vec{D}) &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{rot}(\vec{H}) &= \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},\end{aligned}$$

y las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{E} + 4\pi\vec{P} - \frac{\alpha\Theta}{\pi}\vec{B}, \\ \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi\vec{M} + \frac{\Theta}{\pi}\vec{E}.\end{aligned}$$

Así, la estructura de las ecuaciones de Maxwell de la electrodinámica del campo de Axion es idéntica a la electrodinámica convencional, excepto por la reestructuración radical que presentan las relaciones constitutivas. Es precisamente este último aspecto el que lleva a la aparición de nuevos fenómenos físicos asociados al término topológico Θ .

3.3. Modificación del vector desplazamiento eléctrico y la inducción magnética

En esta sección se analiza con más detalle la especificidad de las relaciones constitutivas asociada a la presencia del parámetro topológico Θ .

Como se indicó anteriormente, la ley de Gauss (17) no se modifica; lo que se reestructura es el vector desplazamiento eléctrico dado por la expresión (18). Para el caso particular de un medio lineal e isotrópico la polarización $\vec{P}$ esta relacionada con el campo eléctrico $\vec{E}$ mediante la expresión $\vec{P} = \chi_e\vec{E}$, donde χ_e es la susceptibilidad eléctrica [36, 38]. En este caso la ecuación (18) se reduce a la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} - \frac{\alpha\Theta}{\pi}\vec{B}, \tag{21}$$

donde $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$ es la permitividad dieléctrica del material [15, 16, 39]. Para dieléctricos sin propiedades topológicas ($\Theta = 0$), la expresión (21) se reduce a la relación convencional entre el desplazamiento eléctrico y el campo eléctrico [27, 36].

Para aislantes topológicos ($\Theta \neq 0$), la relación constitutiva (21) ha sido usada ampliamente para describir las nuevas propiedades ópticas de dichos materiales, entre las cuales destaca la rotación del plano de polarización de las ondas electromagnéticas superficiales que pueden propagarse en dichos sistemas [40, 41]. Dichas propiedades novedosas deben su origen físico a que el desplazamiento eléctrico $\vec{D}$ está relacionado con el campo magnético $\vec{B}$ a través del parámetro topológico Θ [11, 13]. Es necesario recalcar que la expresión (21) es válida en el sistema inercial de referencia con respecto al cual el material está en reposo.

Análogamente, la ley de Ampere generalizada no se modifica; lo que se modifica es la relación constitutiva para el vector intensidad magnética dado por la expresión (20). Para el caso particular de un medio lineal e isotrópico la magnetización $\vec{M}$ está relacionada con el vector de intensidad magnética $\vec{H}$ mediante la expresión $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, donde χ_m es la susceptibilidad magnética [36, 38]. En este caso la ecuación (20) se reduce de la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} - \frac{\Theta}{\pi} \vec{E}. \quad (22)$$

donde $\mu = 1 - 4\pi\chi_m$ es la permeabilidad magnética del material [27, 36].

Para dieléctricos sin propiedades topológicas ($\Theta = 0$), la expresión (22) se reduce a la relación convencional entre la intensidad magnética y la inducción magnética [27, 36]. Para aislantes topológicos ($\Theta \neq 0$), la relación constitutiva (22) también ha sido usada ampliamente para describir las nuevas propiedades ópticas de dichos materiales. Dichas propiedades novedosas deben su origen físico a que la inducción magnética $\vec{B}$ está relacionado con el campo eléctrico $\vec{E}$ a través del parámetro topológico Θ [11, 13]. La expresión (22) es válida en el sistema inercial de referencia con respecto al cual el material está en reposo.

En el siguiente capítulo se plantea examinar las consecuencias físicas de generalizar las relaciones (21) y (22) al caso cuando el aislante topológico se mueve con respecto a un observador situado en un sistema inercial de referencia.

4. Capítulo 4:

Formalismo de aislantes topológicos en movimiento

En el presente capítulo se desarrolla el formalismo para un aislante topológico en movimiento relativo con respecto a un sistema inercial de referencia. Para ello se parte de los trabajos de Minkowski para dieléctricos en movimiento y se generaliza para el caso de un aislante topológico en movimiento.

4.1. Formalismo de Minkowski para dieléctricos en movimiento

En el año de 1908 Hermann Minkowski desarrolló la electrodinámica de dieléctricos en movimiento [15, 16]. Para ello, Minkowski estudió el movimiento de cuerpos macroscópicos y examinó la modificación de los campos electromagnéticos en el interior y en el exterior del material debida a su movimiento.

Minkowski construyó dos relaciones generales [15], las cuales se presentan a continuación:

$$H^{\lambda\alpha}u_\alpha = \varepsilon F^{\lambda\alpha}u_\alpha, \quad (23)$$

$$F_{\lambda\alpha}u_\nu + F_{\alpha\nu}u_\lambda + F_{\nu\lambda}u_\alpha = \mu(H_{\lambda\alpha}u_\nu + H_{\alpha\nu}u_\lambda + H_{\nu\lambda}u_\alpha), \quad (24)$$

donde $H^{\lambda\alpha}$ es un tensor, u_α es la 4-velocidad (**Apéndice 1**), ε es la permitividad dieléctrica del material y μ la permeabilidad magnética del material.

Variando los índices se deducen las siguientes expresiones:

$$\vec{D} + \vec{v} \times \frac{\vec{H}}{c} = \epsilon \left(\vec{E} + \vec{v} \times \frac{\vec{B}}{c} \right),$$

$$\vec{B} + \vec{E} \times \frac{\vec{v}}{c} = \mu \left(\vec{H} + \vec{D} \times \frac{\vec{v}}{c} \right).$$

Considerando que la velocidad con la que se mueve el cuerpo es mucho menor a la velocidad de la luz ($\frac{v}{c} \ll 1$), se obtienen las siguientes relaciones constitutivas para dieléctricos en movimiento:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \frac{1}{c} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}, \quad (25)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} - \frac{1}{c} (\mu \varepsilon - 1) \vec{v} \times \vec{E}. \quad (26)$$

Estas expresiones, además de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz, son las expresiones que describen la electrodinámica de dieléctricos en movimiento [15, 16].

4.2. Relaciones tensoriales generales para aislantes topológicos en movimiento

En la presente sección se deducen las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos en aislantes topológicos que se mueven con respecto a un observador, situado en un sistema inercial de referencia.

En el sistema de referencia donde el aislante topológico está en reposo tiene lugar la siguiente relación material:

$$\vec{D}' = \vec{E}' + 4\pi \vec{P}' - \frac{\alpha}{\pi} \Theta \vec{B}',$$

la cual, en notación tensorial, toma la forma siguiente:

$$H'^{\lambda 0} u'_0 = F'^{\lambda 0} u'_0 + 4\pi P'^{\lambda 0} u'_0 - \frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon^{\lambda 0 \alpha \theta} (\Theta F'_{\alpha \theta}) u'_0$$

donde $u'_0 = (1, 0, 0, 0)$ es la velocidad en el sistema de referencia donde el aislante topológico se encuentra en reposo.

Por lo tanto, en el sistema de referencia donde el aislante topológico ya no se encuentra en reposo, la anterior relación se generaliza a la siguiente expresión tensorial:

$$H^{\lambda \mu} u_\mu = F^{\lambda \mu} u_\mu + 4\pi P^{\lambda \mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \varepsilon^{\lambda \mu \alpha \theta} (\Theta F_{\alpha \theta}) u_\mu;$$

teniendo en cuenta que:

$$F^{\lambda\mu} + 4\pi P^{\lambda\mu} = \epsilon F^{\lambda\mu},$$

finalmente se puede escribir:

$$H^{\lambda\mu} u_\mu = \epsilon F^{\lambda\mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\theta} F_{\alpha\theta} u_\mu, \quad (27)$$

donde $\varepsilon^{\lambda\mu\alpha\theta}$ es el tensor de Levi Civita (**Apéndice 1**) y u_μ la 4-velocidad. La expresión (27), es la primera relación general que incluye la velocidad del sistema y el parámetro topológico.

Así mismo, para el sistema de referencia donde el aislante topológico se encuentra en reposo, se cumple la relación:

$$\vec{B}' = \mu \vec{H}' - \frac{\alpha}{\pi} \Theta \vec{E}',$$

la cual se puede escribir en forma tensorial como:

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha 0} F'_{\mu\alpha} u'_0 = \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha 0} H'_{\mu\alpha} u'_0 - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta F'^{\lambda 0} u'_0.$$

Luego para cualquier sistema inercial de referencia se debe cumplir:

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\theta} F_{\mu\alpha} u_\theta = \frac{\mu}{2} \varepsilon^{\lambda\mu\alpha\theta} H_{\mu\alpha} u_\theta - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta F^{\lambda\theta} u_\theta. \quad (28)$$

La expresión (28), es la segunda relación general que incluye la velocidad del sistema y el parámetro topológico pero esta relaciona la intensidad magnética.

Primero se trabaja la expresión (27) para el caso en que $\lambda = 1, 2$ y 3 y se calculan las expresiones correspondientes:

$$\bullet \quad H^{1\mu} u_\mu = \epsilon F^{1\mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta \varepsilon^{1\mu\alpha\theta} F_{\alpha\theta} u_\mu, \quad (29)$$

$$\bullet \quad H^{2\mu} u_\mu = F^{2\mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta \varepsilon^{2\mu\alpha\theta} F_{\alpha\theta} u_\mu, \quad (30)$$

$$\bullet \quad H^{3\mu} u_\mu = F^{3\mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta \varepsilon^{3\mu\alpha\theta} F_{\alpha\theta} u_\mu. \quad (31)$$

Con el cálculo de (29), (30) y (31) (**Apéndice 4**) y resumiendo en notación vectorial se obtiene la siguiente relación exacta:

$$\vec{D} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H} = \epsilon(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\alpha}{\pi}\Theta(\vec{B} + \frac{1}{c}\vec{E} \times \vec{v}). \quad (32)$$

A continuación se trabaja con la segunda relación general (28). En el anterior desarrollo para obtener la expresión (32) se calculó el tercer término de la ecuación (27) (**Apéndice 4**). Análogamente, para $\lambda = 1, 2$ y 3 se obtiene:

- $\varepsilon^{1\mu\alpha\theta}H_{\mu\alpha}u_\theta = 2\gamma(H_{32}u_0 + H_{03}u_2 + H_{20}u_3) = 2\gamma(H_x + \frac{1}{c}[D_yv_z - D_zv_y]),$
- $\varepsilon^{2\mu\alpha\theta}H_{\mu\alpha}u_\theta = 2\gamma(H_{13}u_0 + H_{30}u_1 + H_{01}u_3) = 2\gamma(H_y + \frac{1}{c}[D_zv_x - D_xv_z]),$
- $\varepsilon^{3\mu\alpha\theta}H_{\mu\alpha}u_\theta = 2\gamma(H_{21}u_0 + H_{02}u_1 + H_{10}u_2) = 2\gamma(H_z + \frac{1}{c}[D_xv_y - D_yv_x]).$

Adicionalmente,

- $F^{1\mu}u_\mu = F^{10}u_0 + F^{12}u_2 + F^{13}u_3 = \gamma(E_x + \frac{1}{c}[B_zv_y - B_yv_z]),$
- $F^{2\mu}u_\mu = F^{20}u_0 + F^{21}u_1 + F^{23}u_3 = \gamma(E_y + \frac{1}{c}[B_xv_z - B_zv_x]),$
- $F^{3\mu}u_\mu = F^{30}u_0 + F^{31}u_1 + F^{32}u_2 = \gamma(E_z + \frac{1}{c}[B_yv_x - B_xv_y]).$

Resumiendo las anteriores expresiones en forma vectorial se obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{B} + \frac{1}{c}\vec{E} \times \vec{v} = \mu(\vec{H} + \frac{1}{c}\vec{D} \times \vec{v}) - \frac{\alpha}{\pi}\Theta(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}); \quad (33)$$

despejando $\vec{H}$ de (33) finalmente se obtiene:

$$\vec{H} + \frac{1}{c}\vec{D} \times \vec{v} = \frac{\vec{B}}{\mu} + \frac{1}{c\mu}\vec{E} \times \vec{v} + \frac{\alpha\Theta}{\pi\mu}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}\right). \quad (34)$$

Las relaciones (32) y (34) son las expresiones exactas entre los campos electromagnéticos en los aislantes topológicos en movimiento.

4.3. Relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos en aislantes topológicos en movimiento

En esta sección se trabaja con las relaciones vectoriales generales de los campos electromagnéticos en los aislantes topológicos en movimiento (32) y (34). Por medio de un proceso algebraico y una clasificación de términos se reducen a dos expresiones más sencillas, llamadas *relaciones constitutivas de los campos en aislantes topológicos en movimiento*.

Para ello se retoma la ecuación (34), se multiplica vectorialmente por $-\frac{1}{c}\vec{v}\times$ de donde se obtiene:

$$-\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{H}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{D}\times\vec{v}=-\frac{1}{\mu c}\vec{v}\times\vec{B}-\frac{1}{c^2\mu}\vec{v}\times\vec{E}\times\vec{v}-\frac{\alpha\Theta}{\pi\mu c}\left(\vec{v}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\times\vec{v}\right),$$

y se suma con la ecuación (32). Además, teniendo en cuenta que la velocidad con la que se mueven los sistemas estudiados $\vec{v}$, es mucho menor a la velocidad de la luz c , los términos de tipo $\frac{v^2}{c^2}$ son despreciados. Finalmente, se obtiene:

$$\vec{D}=\epsilon\vec{E}+\frac{1}{c}\left(\epsilon-\frac{1}{\mu}\right)\vec{v}\times\vec{B}-\frac{\alpha\Theta}{\pi}\vec{B}+\frac{\alpha\Theta}{\pi c}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\vec{v}\times\vec{E}. \quad (35)$$

Análogamente se multiplica $\frac{1}{c}\vec{v}\times$ por la expresión (32), se suma a la expresión (34) y se desprecian los términos de tipo $\frac{v^2}{c^2}$, de donde finalmente se obtiene:

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu}+\frac{1}{c}\left(\epsilon-\frac{1}{\mu}\right)\vec{v}\times\vec{E}+\frac{\alpha\Theta}{\pi\mu}\vec{E}-\frac{\alpha\Theta}{\pi c}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\vec{v}\times\vec{B}. \quad (36)$$

Nótese que el vector intensidad magnética depende de los vectores campo eléctrico, la inducción magnética y la velocidad del sistema. Más aun se evidencia que el parámetro topológico es el responsable de acoplar el campo eléctrico y la inducción magnética a la intensidad magnética, es decir es responsable de los efectos magnetoeléctricos.

De igual manera se evidencia en la expresión (35) el acople que recibe el vector desplazamiento eléctrico con la inducción magnética y el campo eléctrico, nuevamente efectos magnetoeléctricos.

La importancia del anterior resultado se observa en el hecho que al desaparecer el parámetro topológico, es decir cuando $\Theta = 0$, las expresiones (35) y (36) se transforman en las relaciones de **Minkowski** para dieléctricos en movimiento (expresiones (25) y (26)). Si existe un aislante topológico pero este se encuentra en reposo, es decir cuando $\vec{v} = 0$ las expresiones (35) y (36), se reducen a las ecuaciones para aislantes topológicos en reposo encontradas por **Wilczek** (ecuaciones (21) y (22)). Es decir, las expresiones (35) y (36) fueron deducidas de un formalismo más general que el formalismo desarrollado por Minkowski y Wilczek, el cual permite analizar nuevos problemas físicos nunca antes tratados por medio de la electrodinámica convencional o por medio del formalismo de aislantes topológicos en reposo.

Las expresiones (35) y (36), son las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos para los aislantes topológicos en movimiento. Estas expresiones más las ecuaciones de Maxwell constituyen la electrodinámica de aislantes topológicos en movimiento. Estas expresiones no han sido reportadas previamente en la literatura científica y constituyen uno de los aportes originales del presente trabajo.

5. Capítulo 5:

Reestructuración de las condiciones de frontera

Unas relaciones importantes al trabajar con campos electromagnéticos son las condiciones de frontera [27, 42], pues estas describen el comportamiento de los campos en la interfaz de un medio a otro y son muy útiles en la resolución de problemas. Por este motivo en el presente capítulo se deducen las condiciones de frontera para un aislante topológico en movimiento relativo con respecto a un sistema inercial de referencia.

5.1. Componentes normales de los campos

Dado que los vectores desplazamiento eléctrico e inducción magnética satisfacen las ecuaciones $\text{div}(\vec{D}) = 0$ y $\text{div}(\vec{B}) = 0$ [27, 42] (en ausencia de fuentes), se cumple que las componentes normales de los campos satisfacen la condición de continuidad [16, 42]:

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2}, \\ B_{n1} &= B_{n2}. \end{aligned} \tag{37}$$

Calculando la componente normal de la expresión (35) se encuentra:

$$D_n = \epsilon E_n + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} - \frac{\alpha \Theta}{\pi} B_n + \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \vec{n}, \tag{38}$$

donde $\vec{n}$ es el vector normal a la superficie del material considerado [43].

Teniendo en cuenta dos medios con diferente permeabilidad magnética, permitividad dieléctrica y término topológico, y remplazando (38) para cada medio

en la condición (37) se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_2 E_{n2} - \epsilon_1 E_{n1} = & \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_2 - \Theta_1) B_n - \frac{1}{c} \left(\epsilon_2 - \epsilon_1 - \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] \right) (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{n} \\ & - \frac{\alpha}{\pi c} \left(\Theta_2 \left(1 - \frac{1}{\mu_2} \right) - \Theta_1 \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \right) \right) (\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \vec{n}. \end{aligned} \quad (39)$$

La anterior expresión es la condición de frontera para la componente normal del campo eléctrico de los dos medios, la cual sufre una reestructuración debida a los términos topológicos de cada medio Θ_1 y Θ_2 , y a causa del movimiento relativo con respecto al sistema inercial de referencia ($\vec{v}$).

Nótese que en el caso que el material tratado no sea un aislante topológico ($\Theta = 0$) y además, este se encuentre en reposo, se obtiene la condición de continuidad convencional reportada en la literatura $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$ [15, 27, 42].

5.2. Componentes tangenciales de los campos

Para obtener las condiciones de las componentes tangenciales de los campos es necesario cambiar el sistema K de referencia, en el cual el sistema presenta movimiento relativo, por un sistema K' donde el medio se encuentra en reposo ($\vec{v} = 0$) [15]. Bajo estas condiciones se cumple que las componentes tangenciales de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son continuas, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{t1} &= \vec{E}'_{t2}, \\ \vec{H}'_{t1} &= \vec{H}'_{t2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Las componentes tangenciales y normales de los campos se pueden observar en la (figura 7) [6].

El razonamiento a continuación es el siguiente; al ser continuas las componentes de los campos en el sistema K' , se pueden aplicar las transformaciones de Lorentz [15, 44] para medir dichos campos con respecto a un observador en el sistema no primado K en el cual el cuerpo se encuentra en movimiento. Además, con ayuda del vector normal a la superficie del material $\vec{n}$, se pueden

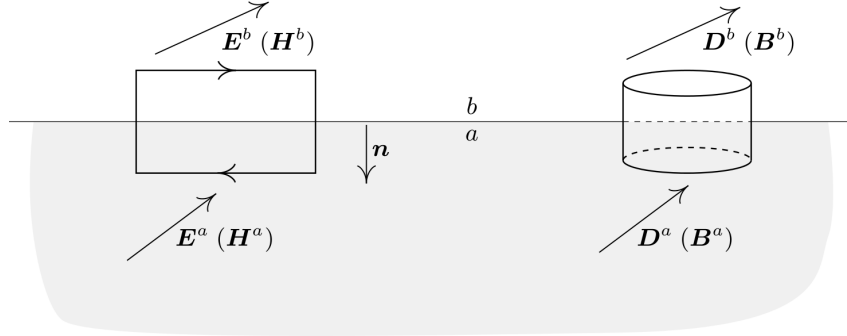


Figura 7: Componentes tangenciales y normales de los campos electromagnéticos en la frontera del medio [6].

escribir las componentes tangenciales de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{H}$ de la siguiente manera: $\vec{E}'_{ti} = \vec{n} \times \vec{E}'_i$ y $\vec{H}'_{ti} = \vec{n} \times \vec{H}'_i$. Luego, se obtiene la siguiente expresión:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{B}_1 \times \vec{v}/c) = \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{B}_2 \times \vec{v}/c),$$

utilizando la propiedad del doble producto vectorial (**Apéndice 1**) se obtiene:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{B}_2(\vec{v} \cdot \vec{n}) - \vec{B}_1(\vec{v} \cdot \vec{n}) + \vec{v}(\vec{B}_1 \cdot \vec{n}) - \vec{v}(\vec{B}_2 \cdot \vec{n}),$$

donde $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_n$, es la componente normal de la velocidad $\vec{v}$. Adicional a esto se sabe que $\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = B_{n1}$, $\vec{B}_2 \cdot \vec{n} = B_{n2}$ y por (37) estas expresiones deben ser iguales, por lo tanto la anterior ecuación se reduce a:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{v_n}{c}(\vec{B}_2 - \vec{B}_1). \quad (41)$$

Análogamente, se encontraron las componentes tangenciales de $\vec{H}$ en los dos medios, es decir:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{v} \times \vec{D}_1/c) = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{v} \times \vec{D}_2/c).$$

Aplicando la propiedad del doble producto vectorial se obtiene:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - H_1) = \vec{v}D_{2n} - \vec{v}D_{n1} + \vec{D}_1v_n - \vec{D}_2v_n,$$

pero por (37) el primer y segundo término de la anterior expresión se reduce a la siguiente relación:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - H_1) = -\frac{v_n}{c}(\vec{D}_2 - \vec{D}_1). \quad (42)$$

Reemplazando (35) y (36) en las expresiones (41) y (42), y despreciando términos de tipo $\frac{v^2}{c^2}$ se obtienen las siguientes relaciones vectoriales (**Apéndice 5**):

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{v_n}{c} \left(\mu_2 \vec{H}_{t2} - \mu_1 \vec{H}_{t1} - \frac{\alpha}{\pi} [\Theta_2 \vec{E}_{t2} - \Theta_1 \vec{E}_{t1}] \right), \quad (43)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\frac{v_n}{c} \left(\epsilon_2 \vec{E}_{t2} - \epsilon_1 \vec{E}_{t1} - \frac{\alpha}{\pi} [\Theta_2 \vec{B}_{t2} - \Theta_1 \vec{B}_{t1}] \right). \quad (44)$$

Considerando el caso particular donde las componentes tangenciales de los campos son aproximadas, es decir $\vec{E}_{t2} \approx \vec{E}_{t1}$, $\vec{H}_{t2} \approx \vec{H}_{t1}$ y $\vec{B}_{t2} \approx \vec{B}_{t1}$, el anterior par de ecuaciones se re escribe como:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{v_n}{c} \left((\mu_2 - \mu_1) \vec{H}_t - \frac{\alpha}{\pi} [\Theta_2 - \Theta_1] \vec{E}_t \right), \quad (45)$$

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = -\frac{v_n}{c} \left((\epsilon_2 - \epsilon_1) \vec{E}_t - \frac{\alpha}{\pi} [\Theta_2 - \Theta_1] \vec{B}_t \right). \quad (46)$$

Nótese que bajo estas condiciones la diferencia entre las componentes tangenciales de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ son dadas por la diferencia entre los parámetros topológicos $(\Theta_2 - \Theta_1)$, la permittividad dieléctrica $(\epsilon_2 - \epsilon_1)$ y la permeabilidad magnética de cada medio $(\mu_2 - \mu_1)$.

5.3. Condiciones de frontera con velocidad tangencial al medio

A continuación, se considera el caso particular en el cual la velocidad del medio no es normal a la superficie pero si tangente a ella. En esta situación se tiene $v_n = 0$, de donde (45) y (46) se reducen a:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0, \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Es de interés obtener la condición de frontera para las componentes tangenciales de la inducción magnética. Haciendo uso de la expresión (36) y la anterior

relación se encuentra la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 \right) &= \frac{\alpha}{\pi} \vec{n} \times \left(\frac{\Theta_2}{\mu_2} \vec{E}_2 - \frac{\Theta_1}{\mu_1} \vec{E}_1 \right) - \frac{\alpha}{\pi c} (\Theta_2 B_{n2} - \Theta_1 B_{n1}) \vec{v} \\ &+ \frac{1}{c} \left[\left(\epsilon_2 - \frac{1}{\mu_2} \right) E_{n2} - \left(\epsilon_1 - \frac{1}{\mu_1} \right) E_{n1} \right] \vec{v},\end{aligned}$$

pero por (37) y (47) la anterior ecuación se escribe finalmente como:

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1 - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2 \right) &= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\Theta_2}{\mu_2} - \frac{\Theta_1}{\mu_1} \right) \vec{E}_t + \frac{1}{c} \left[\left(\epsilon_2 - \frac{1}{\mu_2} \right) E_{n2} - \left(\epsilon_1 - \frac{1}{\mu_1} \right) E_{n1} \right] \vec{v} \\ &- \frac{\alpha}{\pi c} (\Theta_2 - \Theta_1) B_n \vec{v}.\end{aligned}\tag{48}$$

Nótese que los campos electromagnéticos cambian su comportamiento en la frontera del material debido a los efectos producidos por los estados superficiales de conducción, los cuales se representan por medio del parámetro topológico. Por esta razón se observa la dependencia de las condiciones de frontera con la diferencia de los parámetros topológicos de cada medio.

Para el caso particular cuando el sistema se encuentra en reposo $\vec{v} = 0$ y no se trata de un aislante topológico $\Theta = 0$, la condición (48) se reduce a las condiciones de continuidad de los campos en la frontera dadas por la electrodinámica convencional: $\frac{\vec{B}_{t1}}{\mu_1} = \frac{\vec{B}_{t2}}{\mu_2} = H_{t1} = H_{t2}$ [38, 42].

6. Capítulo 6:

Aplicación del formalismo de aislantes topológicos en movimiento a sistemas físicos específicos

En el presente capítulo se aplica el formalismo para aislantes topológicos en movimiento desarrollado en el capítulo 4 a una serie de cuatro sistemas específicos, con el fin de ilustrar el formalismo y descubrir efectos electromagnéticos nuevos.

6.1. Cilindro sólido de aislante topológico

En el siguiente sistema se considera un cilindro infinito, sin carga, de aislante topológico, con una permitividad dieléctrica ϵ , una permeabilidad magnética μ y término topológico Θ . El cilindro rota sobre su eje de simetría con una velocidad angular ω . El cilindro está ubicado en un campo magnético uniforme H_0 paralelo a ω como se ilustra en la figura 8.

El objetivo en este sistema, es encontrar la polarización y la magnetización del cilindro. Para este fin se considera un sistema inercial de referencia K' ubicado en el interior del cilindro, donde los campos $\vec{D}'$, $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ pueden ser expresados en términos de H_0 con ayuda de las ecuaciones (35) y (36). Partiendo de la relación (35), se encuentra:

$$\vec{D}' = \epsilon \vec{E}' + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0 - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{E}',$$

teniendo en cuenta que el cilindro no tiene carga se debe cumplir $\text{div} \vec{D} = 0$ [16, 37] en el interior del cilindro y despreciando en primera aproximación el último término de la anterior expresión, se obtiene la siguiente relación para $\vec{E}'$:

$$\epsilon \vec{E}' = -\frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0. \quad (49)$$

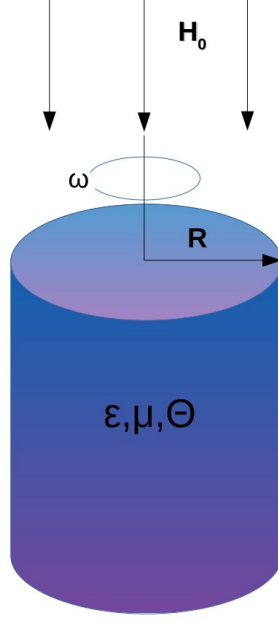


Figura 8: Cilindro sólido de aislante topológico con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.

Aplicando la transformación de Lorentz de los campos

$\vec{E} = \vec{E}' + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}'$ [28, 45], se obtiene el campo eléctrico para un observador externo:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c\epsilon} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha\Theta}{\pi} \vec{B}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B}_0/c.$$

La anterior expresión se puede reescribir como:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon\mu} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \frac{\vec{B}_0}{c} + \frac{\alpha\Theta}{\pi} \vec{B}_0. \quad (50)$$

De la ecuación (36) se encuentra la relación entre $\vec{H}_0$ y $\vec{B}_0$:

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu} + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{E}' + \frac{\alpha\Theta}{\pi\mu} \vec{E}' - \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0;$$

reemplazando (49) en la anterior expresión, se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{H}_0 &= \frac{B_0}{\mu} + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \left[-\frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi \epsilon} \vec{B}_0 \right] \\ &+ \frac{\alpha \Theta}{\pi \mu} \left[-\frac{1}{c \epsilon} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi \epsilon} \vec{B}_0 \right] - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0.\end{aligned}$$

En primera aproximación se desprecian los términos de tipo v/c , por lo que la anterior ecuación se reduce a:

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu} + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 \mu \epsilon} \vec{B}_0.$$

Despejando $\vec{B}_0$, se obtiene la inducción magnética en el sistema de referencia del cilindro:

$$\vec{B}_0 = \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) \vec{H}_0. \quad (51)$$

Remplazando (51) en (50) se encuentra el campo eléctrico para un observador en reposo en términos de $\vec{H}_0$:

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon \mu} \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \frac{\vec{H}_0}{c} + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) \vec{H}_0. \quad (52)$$

Nótese como el campo eléctrico se modifica, pues en (52) se observa como la velocidad del sistema ω y el parámetro topológico Θ definen los dos términos asociados al campo eléctrico.

Para encontrar el vector desplazamiento eléctrico medido por un observador en reposo, se utiliza la transformación de Lorentz, $\vec{D} = \vec{D}' + \vec{v} \times \frac{\vec{H}}{c}$ [16], donde se obtiene:

$$\vec{D} = (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 / c. \quad (53)$$

Por último, se aplica la transformación de Lorentz a la inducción magnética $\vec{B} = \vec{B}' - \vec{v} \times \vec{E}' / c$ [16, 45], donde se encuentra:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 - \frac{\vec{v}}{c} \times \left(-\frac{1}{c \epsilon} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0 \right);$$

reemplazando $\vec{B}_0$, finalmente se obtiene:

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \vec{H}_0 - \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0. \quad (54)$$

Se sabe que la polarización para un aislante topológico se obtiene por medio de la ecuación (18) [11], dada por:

$$4\pi\vec{P} = \vec{D} - \vec{E} + \frac{\alpha\Theta}{\pi} \vec{B}. \quad (55)$$

Reemplazando (52), (53) y (54) en (55) se encuentra la polarización para el cilindro de aislante topológico:

$$4\pi\vec{P} = \left[1 - \frac{1}{\epsilon\mu} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) - \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0/c,$$

realizando pasos algebraicos (**Apéndice 6**) la anterior relación se modifica como se observa a continuación:

$$4\pi\vec{P} = \left[1 - \left(\frac{\pi^2 + \epsilon\mu\alpha^2\Theta^2}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0/c.$$

Utilizando la propiedad del doble producto vectorial [27, 46] y teniendo en cuenta que $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ y $\vec{\omega} \parallel \vec{H}_0$, la anterior expresión se reescribe como:

$$4\pi\vec{P} = \left[1 - \left(\frac{\pi^2 + \epsilon\mu\alpha^2\Theta^2}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] \omega H_0 \vec{r}/c. \quad (56)$$

Del resultado anterior se puede observar que el segundo término en los corchetes cuadrados de la expresión (56) es una corrección a orden dos debida puramente al parámetro topológico Θ , es decir, la polarización del cilindro se modifica al tener en cuenta que el material tratado es un aislante topológico. Además, dicha modificación también depende de la permeabilidad magnética del material μ , algo que no ocurre en la electrodinámica convencional.

En ausencia del término topológico ($\Theta = 0$), es decir, para un dieléctrico convencional la expresión (56) se reduce a la relación reportada en la literatura [16]

$$4\pi\vec{P} = \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \right) \omega H_0 \vec{r}/c.$$

Además, si el sistema no se encuentra en movimiento ($\omega = 0$), no existe polarización asociada al cilindro $\vec{P} = 0$, efecto conocido [16, 42].

También es de interés conocer como el movimiento del aislante topológico modifica la magnetización del sistema. Por la ecuación (20) se puede obtener una expresión para la magnetización medida por un observador en un sistema inercial de referencia en reposo:

$$4\pi\vec{M} = \vec{B} - \vec{H} + \frac{\alpha\Theta}{\pi}\vec{E}. \quad (57)$$

Ya que se obtuvo el campo eléctrico $\vec{E}$ y la inducción magnética $\vec{B}$ para el observador en reposo y teniendo en cuenta que la intensidad magnética en dicho sistema es $\vec{H} = \vec{H}_0$, la magnetización del cilindro está dada por:

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{M} = & \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \vec{H}_0 - \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 - \vec{H}_0 \\ & + \frac{\alpha\Theta}{\pi} \left[\frac{1}{\epsilon\mu} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 + \frac{\alpha\Theta}{\pi} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \vec{H}_0 \right]. \end{aligned}$$

La anterior expresión se reescribe como:

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{M} = & - \left[1 - \left(\frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2} + 1 \right) \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] \vec{H}_0 \\ & + \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \left[\frac{1}{\epsilon\mu} - 1 \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad del doble producto vectorial [27, 46] sobre $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0$ y reduciendo algebraicamente (**Apéndice 6**) se encuentra finalmente:

$$4\pi\vec{M} = \left[\mu\epsilon \left(\frac{\pi^2 + \alpha^2\Theta^2}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) - 1 \right] \vec{H}_0 + \frac{\alpha\pi\Theta}{c} \left(\frac{1 - \epsilon\mu}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \omega H_0 \vec{r}. \quad (58)$$

Nuevamente el término topológico se manifiesta en una corrección de orden dos, en este caso sobre la magnetización $\vec{M}$. Más aún, debido al parámetro topológico Θ aparece una nueva componente de la magnetización en dirección del radio vector $\vec{r}$ como se observa en la figura (9). Esta contribución se presenta debido al movimiento del cilindro y al carácter topológico del material; este

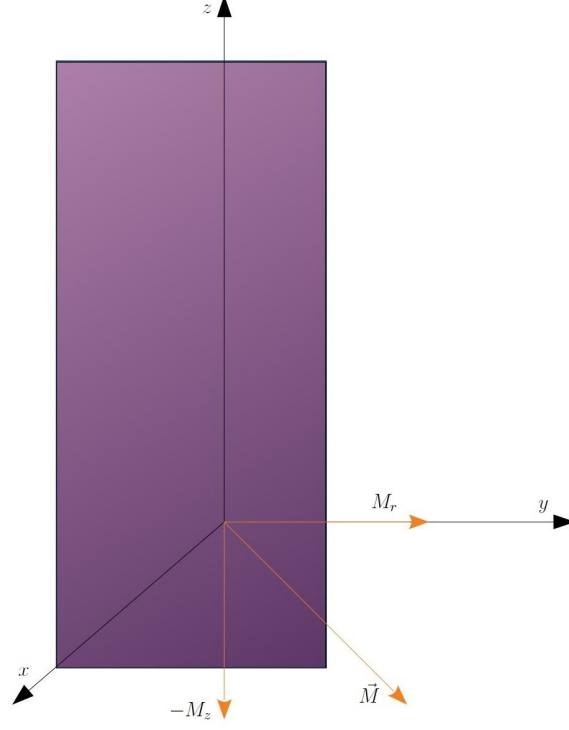


Figura 9: Componentes de la magnetización presentes en un cilindro sólido de aislante topológico cuando el radio vector $\vec{r}$ coincide con el eje y .

comportamiento es inusual y corresponde a uno de los resultados originales de este trabajo. Nótese que para el caso de un dieléctrico convencional, es decir $\Theta = 0$ la expresión (58) se reduce a la reportada por la literatura [16]:

$$4\pi\vec{M} = (\mu - 1) \vec{H}_0,$$

y sin campo magnético externo ($\vec{H}_0 = 0$), no existe magnetización $\vec{M} = 0$, resultado conocido.

En este sistema, se puede evidenciar la importancia del formalismo desarrollado en el capítulo 4, el cual produce resultados generales que para casos particulares se reducen a fenómenos reportados en la literatura científica.

6.2. Cilindro hueco de aislante topológico

En el siguiente sistema se considera un cilindro hueco de aislante topológico con radio interior $\vec{r}$ y radio exterior $\vec{R}$, sin carga, con parámetro topológico Θ que rota con velocidad angular ω en dirección de su eje de simetría como se observa en la (figura 10).

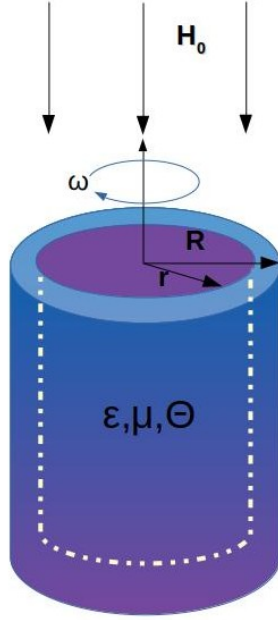


Figura 10: Cilindro hueco de aislante topológico con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.

Debido a que el cilindro no tiene cargas se cumple ($\text{div} \vec{D}' = 0$) y por la simetría del cilindro se tiene $\vec{D}' = 0$. Luego, de la ecuación (35) es posible encontrar el campo eléctrico en el interior del cilindro, el cual está dado por:

$$\epsilon \vec{E}' = -\frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{B}'_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}'_0,$$

al remplazar (51) en la anterior expresión, esta se reduce a:

$$\vec{E}' = -\frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\epsilon \pi} \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) \vec{H}_0.$$

Gracias a la definición de la diferencia de potencial [16, 47], es posible calcular el voltaje entre la cara interna y la cara externa del cilindro, dado por:

$$V_{rR} = \int_r^R \vec{E}' \cdot d\vec{r} = -\frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) \int_r^R H_0 \omega r dr \\ + \frac{\alpha \Theta}{\epsilon \pi} \left(\frac{\mu \pi^2 \epsilon}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) \int_r^R \vec{H}_0 \cdot d\vec{r}.$$

El segundo término de la anterior ecuación es cero ya que $\vec{H}_0 \perp d\vec{r}$, luego se deduce que el voltaje entre las caras es:

$$V_{rR} = \frac{1}{2c} (\epsilon \mu - 1) \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 \epsilon + \alpha^2 \Theta^2} \right) [r^2 - R^2] \omega H_0. \quad (59)$$

Se puede evidenciar la corrección que se deriva del parámetro topológico Θ en el denominador de la expresión (59), en este caso se tiene nuevamente corrección de orden dos al voltaje entre las caras del cilindro.

Para el caso que el cilindro fuera de un dieléctrico convencional es decir ($\Theta = 0$), la relación (59) se reduce a [16]:

$$V_{rR} = \frac{1}{2c} \left(\mu - \frac{1}{\epsilon} \right) [r^2 - R^2] \omega H_0.$$

Es evidente que si el sistema se encuentra en reposo no existe ningún voltaje entre las caras del sistema $V = 0$.

6.3. Densidad de carga superficial depositada en la cara interna y externa de un cilindro hueco de aislante topológico

En el siguiente problema se considera un cilindro conductor hueco de radio interior $\vec{r}$ y radio exterior $\vec{R}$, sin carga, con un parámetro topológico Θ que rota con velocidad angular ω en dirección de su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo $\vec{H}_0$.

Este es un caso particular del sistema número 2 tratado en la sección 6.2, en el cual el material presenta alguna propiedad de tipo conductor, de donde se tiene que $\epsilon \rightarrow \infty$ [38], por lo tanto (59) se reduce a:

$$V_{rR} = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{2c} \left(\mu - \frac{1}{\epsilon} \right) \left(\frac{\pi^2}{\pi^2 + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\epsilon}} \right) [r^2 - R^2] \omega H_0 = \frac{\mu}{2c} [r^2 - R^2] \omega H_0. \quad (60)$$

La expresión (60) mide el voltaje entre la cara interna y externa del cilindro. Si no hay corriente en el conductor se tiene que $\vec{E} = 0$, luego de la transformación de Lorentz se obtiene:

$$\vec{E}' = -\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_0,$$

reemplazando la anterior expresión en (35), se encuentra:

$$\vec{D}' = -\frac{\epsilon}{c} \vec{v} \times \vec{B}_0 + \frac{\epsilon}{c} \vec{v} \times \vec{B}_0 - \frac{1}{\mu c} \vec{v} \times \vec{B}_0 - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0 - \frac{\alpha \Theta}{\pi c^2} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{B}_0).$$

Despreciando el ultimo término de la anterior ecuación el cual es de tipo $\frac{v^2}{c^2}$. Además, los primeros dos términos se cancelan entre si, por lo tanto se obtiene:

$$\vec{D}' = -\frac{1}{\mu c} \vec{v} \times \vec{B}_0 - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0. \quad (61)$$

El material considerado presenta propiedades de conductor. Luego, se puede calcular fácilmente $\vec{B}_0$, puesto que es un caso particular de (51):

$$\vec{B}_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu \pi^2}{\pi^2 + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\epsilon}} \right) \vec{H}_0 = \mu \vec{H}_0,$$

reemplazando la anterior expresión en (61) finalmente se obtiene:

$$\vec{D}' = -\frac{1}{c} \omega H_0 \vec{r} - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \mu \vec{H}_0.$$

Para calcular la densidad de carga volumétrica se toma como base la expresión (17), de donde se deduce que:

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{D}') &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{c} \omega H_0 r^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\alpha \Theta}{\pi} \mu \vec{H}_0 \right) \\ &= -\frac{2\omega H_0}{c} = 4\pi \rho, \end{aligned}$$

donde se encuentra:

$$\rho = -\frac{\omega H_0}{2\pi c}. \quad (62)$$

La expresión (62) es la densidad de carga volumétrica en el cilindro.

Por último se obtiene la densidad de carga superficial sobre la cara interna y externa del cilindro. Para esto, se toma la condición de frontera para las componentes normales del vector desplazamiento eléctrico que se deriva de (17), $(D_{n2} - D_{n1} = 4\pi\sigma)$ [16, 48].

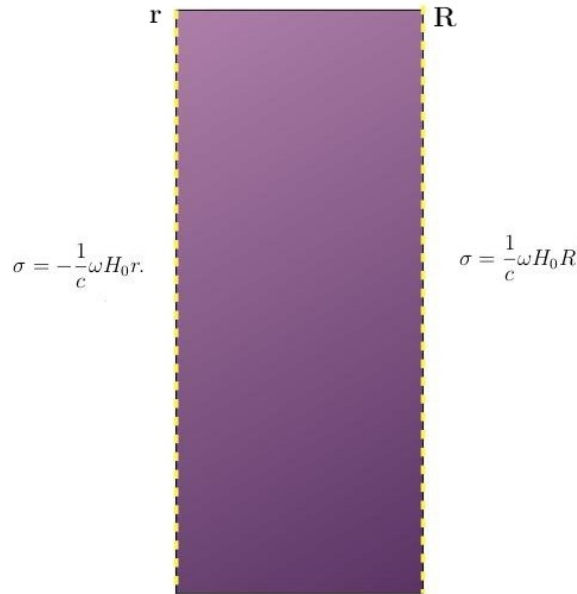


Figura 11: Densidades de cargas superficiales depositadas en la cara interna y la cara externa de un cilindro hueco con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.

Luego, se satisface que $D_{n1} = 0$, ya que fuera del material se cumple $\vec{D} = 0$, entonces:

$$D_{n2} = -\frac{1}{c}\omega H_0 \vec{r} \cdot \vec{n} - \frac{\alpha\Theta_2}{\pi}\mu_2 \vec{H}_0 \cdot \vec{n} = 4\pi\sigma.$$

El segundo término de la anterior expresión es cero ya que $\vec{H}_0$ y $\vec{n}$ son ortogonales.

Luego, se obtiene la relación final:

$$\sigma = -\frac{1}{c}\omega H_0 r. \quad (63)$$

Análogamente, para R se cumple $D_{n1} = \frac{1}{c}\omega H_0 R$, entonces:

$$\sigma = \frac{1}{c}\omega H_0 R. \quad (64)$$

Estas densidades de carga superficiales expresadas en las ecuaciones (63) y (64) se observan en la (figura 11).

Es fundamental recalcar la importancia del anterior sistema físico en el cual se considera que el material presenta propiedades de conductor, es decir ($\varepsilon \rightarrow \infty$), nótese que bajo esta suposición desaparecen inmediatamente los efectos topológicos aun así el parámetro topológico sea distinto de cero (Θ).

Aquí, se puede evidenciar que es completamente necesario que el material presente propiedades de aislante para que los efectos topológicos y los nuevos fenómenos físicos aparezcan, esto se puede evidenciar en la (figura 6) dado que si desaparece el gap energético entre la banda de valencia y la banda de conducción, el material se convierte en un conductor y los efectos topológicos desaparecen. Esta es una de las causas por las cuales este tipo de materiales recibe el nombre de “Aislante topológico” ya que es totalmente necesario que en el bulk del sistema el material se comporte como un aislante convencional y que tan solo en la interfaz se presenten los estados de conducción [4, 9].

6.4. Voltaje y carga en un capacitor eléctrico con aislante topológico

A continuación se tratan una serie de cuatro sistemas, los cuales se muestran en la (figura 11). El sistema consta de dos placas delgadas de un capacitor eléctrico separadas por una distancia d y con área transversal A. Este, se sitúa en un campo magnético uniforme $\vec{H}_0$, el cual es paralelo a las placas del capacitor. Una placa de aislante topológico de espesor d se sitúa en el interior del capacitor y se mueve con velocidad $\vec{v}_m$.

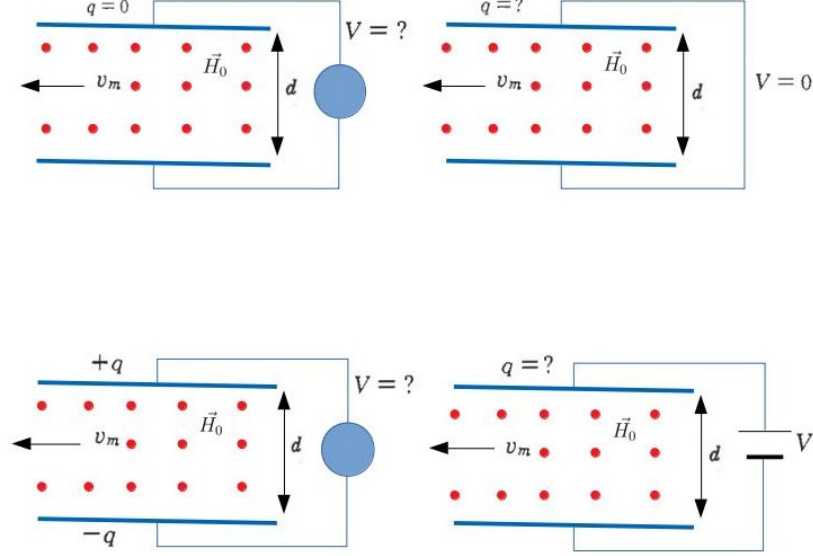


Figura 12: Capacitor eléctrico con aislante topológico en su interior.

6.4.1. Caso 1: $q = 0$, entre las placas

En el primer caso no hay cargas en las placas del capacitor y se desea encontrar el voltaje V entre ellas al mover el aislante topológico en su interior.

Como $q = 0$ y por la ley de Gauss [16, 42] se tiene que $\vec{D}' = 0$. Luego (35) se reduce a:

$$\epsilon \vec{E}' = -\frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0 - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{E}', \quad (65)$$

en primera aproximación se desprecia el ultimo término de la anterior expresión, de donde se obtiene :

$$\vec{E}' \approx -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{\mu \epsilon} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi \epsilon} \vec{B}_0.$$

Utilizando un método de aproximación, se reemplaza la anterior expresión en el último término de (65) para encontrar una aproximación del campo eléctrico:

$$\begin{aligned}\epsilon \vec{E}' = & -\frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0 + \frac{\alpha \Theta}{\pi c^2} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \left(1 - \frac{1}{\mu \epsilon} \right) \vec{v}_m \times (\vec{v}_m \times \vec{B}_0) \\ & - \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 \epsilon c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0.\end{aligned}$$

Despreciando el tercer término de la anterior expresión ya que es de tipo $\frac{v^2}{c^2}$ se obtiene:

$$\vec{E}' = \frac{\alpha \Theta}{\pi \epsilon} \vec{B}_0 - \frac{1}{\mu \epsilon c} \left[(\epsilon \mu - 1) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 c \epsilon} (\mu - 1) \right] \vec{v}_m \times \vec{B}_0. \quad (66)$$

Por ultimo, se encuentra el valor del campo $\vec{B}_0$ en términos del campo $\vec{H}_0$ gracias a la expresión (36):

$$\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}_0}{\mu} + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{E}' + \frac{\alpha \Theta}{\pi \mu} \vec{E}' - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0. \quad (67)$$

Análogamente, al aproximar a primer orden se desprecia el último término de la anterior expresión donde se obtiene:

$$\vec{B}_0 \approx \mu \vec{H}_0 - \frac{\mu}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{E}' - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{E}'.$$

Esta última relación se reemplaza en la ecuación (67) para obtener una aproximación para la inducción magnética:

$$\vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0 + \frac{\alpha \Theta \mu^2}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{H}_0 - \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \vec{v}_m \times \vec{E}'.$$

Para obtener una relación entre $\vec{B}_0$ y $\vec{H}_0$ se desprecia el término que incluye $\vec{E}'$, donde se obtiene:

$$\vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0 + \frac{\alpha \Theta \mu^2}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{H}_0.$$

Reemplazando la anterior expresión en (66), se deduce:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi\epsilon}\vec{H}_0 + \frac{\alpha^2\Theta^2\mu^2}{\pi^2\epsilon c}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\vec{v}_m \times \vec{H}_0 - \frac{1}{\epsilon c}\left[(\epsilon\mu - 1) + \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2 c\epsilon}(\mu - 1)\right]\vec{v}_m \times \vec{H}_0 \\ &\quad - \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi\epsilon c}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left[(\epsilon\mu - 1) + \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2 c\epsilon}(\mu - 1)\right]\vec{v}_m \times (\vec{v}_m \times \vec{H}_0).\end{aligned}$$

El ultimo término de la anterior relación se desprecia ya que es de tipo v^2/c^2 . Luego el campo eléctrico es:

$$\vec{E}' = \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi c}\vec{H}_0 - \frac{1}{\epsilon c}\left[(\epsilon\mu - 1) + \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2}(\mu - 1)\left(\frac{1}{\epsilon c} - 1\right)\right]\vec{v}_m \times \vec{H}_0.$$

Finalmente, se calcula la diferencia de potencial entre las placas del capacitor. Es importante recalcar que en este sistema el campo $\vec{H}_0$ está dirigido en la dirección $\hat{e}_x$, la velocidad $\vec{v}_m$ en dirección $-\hat{e}_y$ y el diferencial $d\vec{l}$ en dirección de $\hat{e}_z$. Luego el voltaje se encuentra como:

$$\begin{aligned}V &= \int_0^d \vec{E}' \cdot d\vec{z} = \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi c} \int_0^d \vec{H}_0 \cdot d\vec{z} \\ &\quad - \frac{1}{\epsilon c} \left[(\epsilon\mu - 1) + \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2}(\mu - 1) \left(\frac{1}{\epsilon c} - 1 \right) \right] \int_0^d v_m H_0 \hat{e}_z \cdot d\vec{z} \\ &= -\frac{1}{\epsilon c} \left[(\epsilon\mu - 1) + \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2}(\mu - 1) \left(\frac{1}{\epsilon c} - 1 \right) \right] v_m H_0 d.\end{aligned}\tag{68}$$

En la anterior expresión se puede observar como el segundo término del voltaje depende explícitamente del parámetro topológico. Además, nuevamente se encuentra una corrección de segundo orden en el voltaje.

Pero lo más importante, se encuentra en el segundo término de la ecuación (68) ya que se observa el hecho de la existencia de un nuevo aporte que incrementa el voltaje medido entre las placas del capacitor solo por el hecho de tener un aislante topológico en su interior, es decir se encuentra un voltaje mayor con el simple hecho de cambiar un material dieléctrico por un aislante topológico. Ya que para un dieléctrico convencional se tiene:

$$V = -\frac{1}{\epsilon c}(\epsilon\mu - 1)v_m H_0 d.$$

6.4.2. Caso 2: $V = 0$ entre las placas del capacitor

El segundo caso solo varia del primero en el hecho que no existe diferencia de potencial aplicado entre las placas ($V = 0$) y se calcula la carga inducida en las placas del capacitor al mover el aislante topológico en su interior.

Como $V = 0$, se obtiene inmediatamente $\vec{E}' = 0$, por lo tanto la expresión (35) se reduce a:

$$\vec{D}' = \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0 - \frac{\alpha\Theta}{\pi} \vec{B}_0. \quad (69)$$

A continuación, se procede a calcular $\vec{B}_0$ con ayuda de la expresión (36), de donde obtiene:

$$\vec{H}_0 = \frac{B_0}{\mu} - \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v}_m \times \vec{B}_0. \quad (70)$$

En primer aproximación se tiene:

$$\vec{B}_0 \approx \mu \vec{H}_0,$$

utilizando una aproximación se reemplaza la anterior expresión en el último término de (70) y se deduce:

$$\vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0 + \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi c} (\mu - 1) \vec{v}_m \times \vec{H}_0.$$

Con el campo $\vec{B}_0$ en términos de $\vec{H}_0$ se reemplaza en la relación (69), donde se encuentra el vector desplazamiento eléctrico para el sistema:

$$\vec{D}' = \frac{1}{c} \left[(\epsilon\mu - 1) - \frac{\alpha^2\Theta^2\mu}{\pi^2} (\mu - 1) \right] \vec{v}_m \times \vec{H}_0 - \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi} \vec{H}_0. \quad (71)$$

Finalmente, se calcula el valor de la carga inducida en cada una de las placas con ayuda de la ley de Gauss [16, 42] y teniendo en cuenta que el diferencial de superficie esta en dirección de $\hat{e}_z$:

$$\begin{aligned} q = \oint_s \vec{D}' \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{c} \left[(\epsilon\mu - 1) - \frac{\alpha^2\Theta^2\mu}{\pi^2} (\mu - 1) \right] \oint_A v_m H_0 (\hat{e}_z \cdot \hat{e}_z) dA \\ &\quad - \frac{\alpha\Theta\mu}{\pi} \oint_A H_0 (\hat{e}_x \cdot \hat{e}_z) dA. \end{aligned}$$

El segundo término de la anterior ecuación es igual a cero, ya que los vectores $\hat{e}_x$ y $\hat{e}_z$ conforman una base ortonormal [49, 50]. Finalmente, se obtiene:

$$\pm q = \pm \frac{1}{c} \left[(\epsilon\mu - 1) - \frac{\alpha^2 \Theta^2 \mu}{\pi^2} (\mu - 1) \right] v_m H_0 A. \quad (72)$$

Del anterior resultado se evidencia que aunque no exista voltaje aplicado entre las placas del capacitor, si se encuentra una carga superficial acumulada debida al movimiento del aislante topológico en su interior. Más aun, el parámetro topológico induce una corrección de orden dos en la carga del sistema como era de esperarse. Para un dieléctrico convencional ($\Theta = 0$), se tiene:

$$q = \frac{1}{c} (\epsilon\mu - 1) v_m H_0 A$$

y claramente si no hay movimiento, no se acumula carga ($q=0$).

6.4.3. Caso 3: cargas ($\pm q$) depositadas entre las placas del capacitor

Para el tercer caso de la (figura 11) Se posiciona una carga $+q$ en la placa superior del capacitor y una carga $-q$ en la placa inferior y se desea encontrar el voltaje generado entre las placas.

El campo eléctrico esta dado por medio de la ecuación (35):

$$\epsilon \vec{E} = \vec{D} - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{D} + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{B}_0 - \frac{1}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \vec{v} \times \vec{B}_0. \quad (73)$$

Para obtener una expresión para la inducción magnética ($\vec{B}_0$) en términos de $\vec{H}_0$ se parte de (36) y utilizando una aproximación se deduce el valor de la inducción magnética:

$$\vec{B}_0 = \mu \vec{H}_0 + \frac{\alpha \Theta \mu}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{H}_0 - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{E} - \frac{1}{c} \left[\mu \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \right] \vec{v} \times \vec{E},$$

posteriormente se remplace la anterior expresión en la ecuación (73) donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\epsilon + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right) \vec{E} = & \vec{D} - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{D} + \frac{\alpha \Theta \mu}{\pi} \vec{H}_0 + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 c} (\mu - 1) \vec{v} \times \vec{H}_0 \\ & - \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \vec{v} \times \vec{H}_0. \end{aligned} \quad (74)$$

Luego, la componente normal del campo eléctrico es dada por:

$$\begin{aligned} E_z = & \left(\frac{\pi^2}{\epsilon \pi^2 + \alpha^2 \Theta^2} \right) \left[\pm \frac{q}{A} - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) (\vec{v} \times \vec{D}) \cdot \hat{e}_z \right] \\ & - \left(\frac{\pi^2}{\epsilon \pi^2 + \alpha^2 \Theta^2} \right) \left(\frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 c} (\mu - 1) - \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \right) v_m H_0. \end{aligned}$$

Finalmente, se calcula la diferencia de potencial entre las placas del capacitor, obteniendo :

$$\begin{aligned} V = & \left(\frac{\pi^2}{\epsilon \pi^2 + \alpha^2 \Theta^2} \right) \left[\pm \frac{q}{A} d - \left(\frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 c} (\mu - 1) - \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \right) v_m H_0 d \right] \\ & \pm \left(\frac{\pi^2}{\epsilon \pi^2 + \alpha^2 \Theta^2} \right) \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \frac{q}{A} v_m d. \end{aligned} \quad (75)$$

Para este caso también encuentra una corrección a orden dos debida al parámetro topológico como era de esperarse. Pero más importante aún es el hecho que existen tres términos donde el parámetro topológico genera correcciones en el voltaje medido del sistema. En este caso se puede evidenciar como la naturaleza del material genera que el voltaje medido entre las placas del capacitor sea mucho mayor que el voltaje medido en el caso de un dieléctrico en movimiento, el cual está dado por:

$$V = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{q}{A} d + \frac{\mu}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \right] v_m H_0 d.$$

Como un comentario adicional, se puede pensar que desde el punto de vista experimental se podría diseñar un dispositivo en donde se pudiese corroborar este fenómeno y evidenciar el aumento del voltaje medido entre las placas del capacitor y ser aprovechado en algún tipo de aplicación experimental.

6.4.4. Caso 4: Voltaje (V) suministrado al sistema

Por último se trabajó el problema cuatro de la figura 11.

Análogamente se toma la expresión (35) y se despeja $\vec{D}$ de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{D} = & \left(\epsilon + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right) \vec{E} + \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{D} - \frac{\alpha \Theta \mu}{\pi} \vec{H}_0 - \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 c} (\mu - 1) \vec{v} \times \vec{H}_0 \\ & + \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \vec{v} \times \vec{H}_0. \end{aligned} \quad (76)$$

Aproximando a primer orden se encuentra:

$$\vec{D} \approx \left(\epsilon + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right) \vec{E} - \frac{\alpha \Theta \mu}{\pi} \vec{H}_0 - \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2 c} (\mu - 1) \vec{v} \times \vec{H}_0 + \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \vec{v} \times \vec{H}_0.$$

Reemplazando la anterior expresión en la parte derecha de la ecuación (76) y despreciando términos de tipo v^2/c^2 y términos de tipo $\frac{\alpha^3 \Theta^3}{\pi^3}$, se obtiene una aproximación para el vector desplazamiento eléctrico:

$$\vec{D} = \left(\epsilon + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right) \vec{E} + \frac{\alpha \Theta \epsilon}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \times \vec{E} - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{H}_0 + \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] \vec{v} \times \vec{H}_0.$$

La componente normal de este vector es:

$$D_z = \left(\epsilon + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right) E_z + \frac{\alpha \Theta \epsilon}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) v_m E_y - \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] v_m H_0. \quad (77)$$

El resultado anterior se obtiene gracias a que, $(\vec{v} \times \vec{E}) \cdot \hat{e}_z = v_m E_y$, $(\vec{v} \times \vec{H}_0) \cdot \hat{e}_z = v_m H_0$ y $\vec{H}_0 \cdot \hat{e}_z = 0$.

Con la expresión (77) y teniendo en cuenta un caso especial en el cual la componente $E_y = 0$ y el potencial suministrado al sistema es constante $E_z = \frac{V}{d}$ [16, 39, 47], se encuentra la carga:

$$q = \oint_A D_z dA = \left(\epsilon + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right) \frac{V}{d} A + \frac{\mu}{c} \left[\left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{\alpha^2 \Theta^2}{\pi^2} \right] v_m H_0 A. \quad (78)$$

De la expresión (78) se observa el hecho de suministrar un voltaje V entre las placas del capacitor y mover un aislante topológico en su interior, se genera una

carga eléctrica que se posiciona en las placas del capacitor. Esta carga depende explícitamente del parámetro topológico por medio de una corrección a segundo orden. Además, se evidencia nuevamente como la carga entre las placas del capacitor aumenta solo por el hecho de posicionar un aislante topológico en vez de un dieléctrico convencional, dado que para un dieléctrico convencional se tiene:

$$q = \epsilon \frac{V}{d} A + \frac{\mu}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) v_m H_0 d. \quad (79)$$

Nuevamente como comentario adicional, este nuevo fenómeno físico se podría aprovechar desde el punto de vista experimental.

7. Capítulo 7:

Método de armónicos esféricos para campos en aislantes topológicos en movimiento

En el presente capítulo se realiza el planteamiento general de la ecuación de Poisson en el caso de aislantes topológicos en movimiento y se desarrollan dos problemas; el primero de ellos presenta simetría cilíndrica mientras que el segundo simetría esférica.

7.1. La ecuación de Poisson para aislantes topológicos en movimiento

A continuación se deduce la ecuación de Poisson para el caso de aislantes topológicos en movimiento considerando el caso estacionario donde las derivadas con respecto al tiempo son idénticamente cero. En este caso, el campo eléctrico se define como: [27, 28, 42]:

$$\vec{E} = -\text{grad}(\phi), \quad (80)$$

y la inducción magnética como [27, 28, 42]:

$$\vec{B} = \text{rot}(\vec{A}), \quad (81)$$

donde ϕ es el potencial escalar y $\vec{A}$ el potencial vectorial [27, 28, 42].

Al aplicar el operador divergencia [51] sobre la expresión (35) se encuentra:

$$\text{div}(\vec{D}) = \epsilon \text{div}(\vec{E}) + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{div}(\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\alpha \Theta}{\pi} \text{div}(\vec{B}) + \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{div}(\vec{v} \times \vec{E}).$$

Como $\text{div}(\vec{B}) = 0$ (Ley de Gauss para el magnetismo) [16, 27, 42], la anterior ecuación se reescribe como:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{div}(\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{\alpha \Theta}{\pi \epsilon c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{div}(\vec{v} \times \vec{E}),$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano [27, 52]. Luego, se encuentra la siguiente expresión (**Apéndice 7**):

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{A} = & -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) (\vec{\omega} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \cdot \nabla(\text{div}(\vec{A})) \\ & + \frac{2\alpha\Theta}{\pi\epsilon c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) (\vec{\omega} \cdot \vec{E}). \end{aligned} \quad (82)$$

Reemplazando los términos $(\vec{\omega} \cdot \vec{B})$ y $(\vec{\omega} \cdot \vec{E})$ calculados en el (**Apéndice 7**), la ecuación (82) se reduce a:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{A} = & -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \varepsilon_{ijk} \omega_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \cdot \nabla(\text{div}(\vec{A})) \\ & - \frac{2\alpha\Theta}{\pi\epsilon c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \omega_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Además, por el gauge de coulomb ($\text{div}(\vec{A}) = 0$) [27, 28, 36], el tercer término de la anterior expresión es nulo, finalmente se obtiene:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \vec{v} \cdot \nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \varepsilon_{ijk} \omega_i \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{2\alpha\Theta}{\pi\epsilon c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \omega_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (83)$$

La relación (83) es la ecuación de Poisson para el potencial escalar en el caso de aislantes topológicos en movimiento.

Análogamente se deduce la ecuación de Poisson obtenida por medio de la expresión (36). Para esto, se aplica el operador rotacional [53] sobre la segunda relación constitutiva :

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{\mu} \text{rot}(\vec{B}) + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \vec{E}) + \frac{\alpha\Theta}{\mu\pi} \text{rot}(\vec{E}) - \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Con ayuda de la ley de Ampere generalizada $\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$, se obtiene:

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{grad}(\phi)) - \frac{\alpha\Theta}{\mu\pi} \text{rot}(\text{grad}(\phi)) - \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot}(\vec{A})) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}.$$

Como $\text{rot}(\text{grad}(\phi)) = 0$ (propiedad vectorial) [27, 51], la anterior expresión finalmente se reduce a:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{\mu c} \vec{J} + \frac{1}{\mu c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{grad}(\phi)) - \frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot}(\vec{A})). \quad (84)$$

Nótese que tanto en (83) como en (84) los potenciales vectorial y escalar se acoplan, esto es debido a que en las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos para aislantes topológicos en movimiento (expresiones (35) y (36)) los campos también están acoplados.

7.1.1. Aproximación de la ecuación de Poisson para el potencial vectorial

A continuación se simplifica la ecuación de Poisson (84). Para este propósito se identifican los términos más relevantes con ayuda de análisis dimensional.

Comparando los términos que incluyen el operador rotacional y teniendo en cuenta que $\nabla \approx L$, se obtiene la siguiente relación:

$$\left| \frac{\frac{\alpha \Theta}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot}(\vec{A}))}{\frac{1}{\mu c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{grad}(\phi))} \right| = \left| \frac{\alpha \Theta \frac{1}{L} v \frac{A}{L}}{\pi \mu \frac{1}{L} v \frac{\phi}{L}} \right| = \frac{\alpha \Theta}{\mu \pi} \frac{A}{\phi},$$

la fracción $\frac{A}{\phi} \approx \frac{v}{c} \ll 1$, además $\frac{\alpha \Theta}{\mu \pi} \ll 1$ (**Apéndice 7**). Luego, se tiene:

$$\frac{\alpha \Theta}{\mu \pi} \frac{A}{\phi} \approx \frac{\alpha \Theta}{\mu \pi} \frac{v}{c} \ll 1.$$

Por lo tanto, el término más relevante en la ecuación (84) es $\text{rot}(\vec{v} \times \text{grad}(\phi))$, reescribiendo se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{\mu c} \vec{J} + \frac{1}{\mu c} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \text{rot}(\vec{v} \times \text{grad}(\phi)). \quad (85)$$

Es importante tener en cuenta que aunque no se identifica explícitamente el parámetro topológico en la expresión (85), los efectos topológicos se encuentran en el término del gradiente, ya que el campo eléctrico depende explícitamente de Θ .

A continuación se trabajarán dos problemas específicos, donde se resolverá la ecuación de Laplace que es un caso particular de las expresiones (83) y (85) obtenidas en el anterior análisis.

7.2. Cilindro no magnetizado de aislante topológico:

Considerese un cilindro de aislante topológico no magnetizado de radio a , permitividad dieléctrica ϵ y parámetro topológico Θ . Éste se mueve a lo largo del eje z con velocidad uniforme v en un campo magnético $\vec{B}_0 = -B_0\hat{e}_y \perp \vec{v}$ como se muestra en la figura 13. Se plantea hallar el campo eléctrico, el campo magnético, la polarización y la magnetización del sistema en la región cercana a la frontera del cilindro, despreciando los efectos de borde. Además, el vector normal a la superficie del cilindro es $\hat{n} = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y$. Luego tienen lugar las siguientes relaciones (**Apéndice 8**):

$$\begin{aligned} [\vec{v} \times \vec{H}_0] \cdot \hat{e}_r &= vH_0 \cos\theta, \\ \vec{H}_0 \cdot \hat{e}_r &= -H_0 \sin\theta. \end{aligned}$$

Como el movimiento es una traslación uniforme en la dirección axial z , éste sistema presenta homogeneidad en dicha dirección. Por lo tanto se introduce el sistema de coordenadas polares (r, θ) y tiene lugar la siguiente ecuación de Laplace [52, 54]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial \theta^2} = 0.$$

Para éste sistema en particular, se satisfacen las siguientes condiciones de frontera:

$$(\phi_2 - \phi_1) = 0, \quad (86)$$

$$\left(\tilde{\epsilon}_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \tilde{\epsilon}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} = -\frac{\epsilon_1 \mu_1 - 1}{c} \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} v H_0 \cos\theta - \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) H_0 \sin\theta, \quad (87)$$

donde $\tilde{\epsilon}_i = \epsilon_i + \left(\frac{\alpha \Theta_i}{\pi} \right)^2$, es una corrección de orden dos de la permitividad dieléctrica del material debida al parámetro topológico Θ .

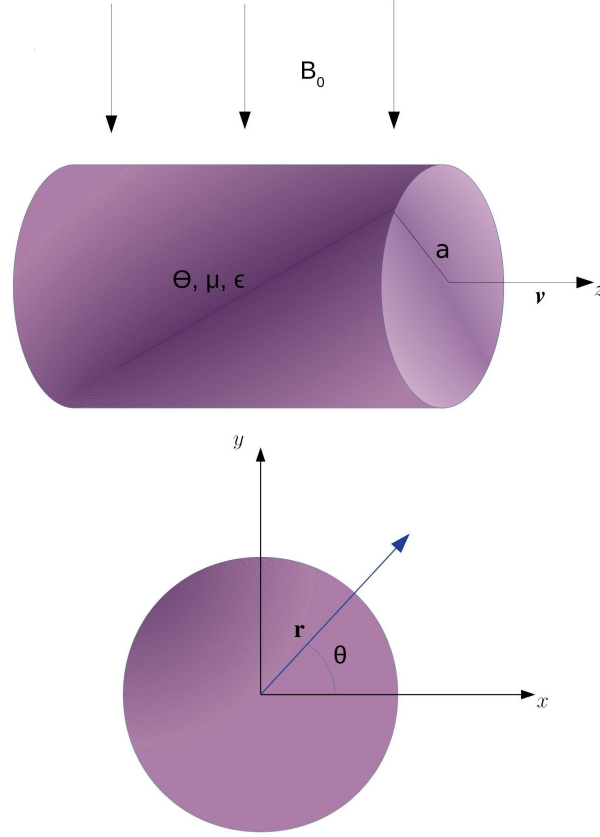


Figura 13: Cilindro sólido de aislante topológico con movimiento traslacional en dirección del eje z y representación de las coordenadas polares del sistema.

La solución de la ecuación de laplace en coordenadas polares está dada por [27, 55] :

$$\phi_{1,2}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\alpha_{1,2}^{(l)} r^l + \beta_{1,2}^{(l)} r^{-l} \right) \left(\gamma_{1,2}^{(l)} \cos(l\theta) + \nu_{1,2}^{(l)} \sin(l\theta) \right),$$

dato que de la condición de frontera, expresión (87) solo contienen términos con $l = 1$, entonces la solución debe ser:

$$\phi_{1,2}(r, \theta) = \left(\alpha_{1,2}^{(1)} r + \beta_{1,2}^{(1)} \frac{1}{r} \right) \left(\gamma_{1,2}^{(1)} \cos(\theta) + \nu_{1,2}^{(1)} \sin(\theta) \right).$$

Además, para que la solución sea físicamente correcta, el potencial en el interior y el potencial en el exterior no pueden diverger, por lo tanto se debe cumplir $A_2^{(1)} = 0$ y $B_1^{(1)} = 0$. Luego, el potencial en las regiones externas e internas toma la forma:

$$\begin{aligned}\phi_1(r, \theta) &= \alpha_1^{(1)} r \left(\gamma_1^{(1)} \cos(\theta) + \nu_1^{(1)} \sin(\theta) \right), \\ \phi_2(r, \theta) &= \beta_2^{(1)} \frac{1}{r} \left(\gamma_2^{(1)} \cos(\theta) + \nu_2^{(1)} \sin(\theta) \right).\end{aligned}$$

O bien,

$$\phi_1(r, \theta) = r (A \cos(\theta) + B \sin(\theta)), \quad (88)$$

$$\phi_2(r, \theta) = \frac{1}{r} (C \cos(\theta) + D \sin(\theta)). \quad (89)$$

Las condiciones de frontera llevan a las siguientes relaciones entre los coeficientes A y B (**Apéndice 8**):

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{a^2} C, & B &= \frac{1}{a^2} D, \\ \tilde{\epsilon}_1 A + \tilde{\epsilon}_2 \frac{1}{a^2} C &= \frac{\epsilon_1 \mu_1 - 1}{c} \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} v H_0, & \tilde{\epsilon}_1 B + \tilde{\epsilon}_2 \frac{1}{a^2} D &= \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) H_0.\end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (**Apéndice 8**), se obtiene:

$$\bullet \quad A = \frac{\epsilon_1 \mu_1 - 1}{c(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} v H_0, \quad (90)$$

$$\bullet \quad B = \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) H_0. \quad (91)$$

Por lo tanto los potenciales se reescriben como:

$$\phi_1 = r \frac{3\mu_2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[(\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \cos \theta + \mu_1 \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \theta \right], \quad (92)$$

$$\phi_2 = \frac{a^2}{r} \frac{3\mu_2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[(\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \cos \theta + \mu_1 \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \sin \theta \right]. \quad (93)$$

Utilizando la relación del campo eléctrico con el potencial (80), se calcula el campo eléctrico en el interior y el exterior del cilindro (**Apéndice 8**):

$$\vec{E}_1 = -\frac{3\mu_2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[(\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \hat{e}_x + \mu_1 \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \hat{e}_y \right], \quad (94)$$

$$\vec{E}_2 = \frac{a^2}{r^2} [(A \cos \theta + B \cos \theta) \hat{e}_r - (-A \sin \theta + B \cos \theta) \hat{e}_\theta]. \quad (95)$$

Debido al campo eléctrico en el interior del cilindro se induce una polarización en el interior, la cual para un observador en reposo es $\vec{P}_1 = \frac{1}{4\pi}(\epsilon - 1) \left(\vec{E}_1 + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_1 \right)$, o bien:

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} H_0 [(1 - \mu_1) \epsilon_1 + \epsilon_2 + 1] \left(\frac{v}{c} \hat{e}_x - \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \hat{e}_y \right). \quad (96)$$

Para medios no magnetizables y considerando que el medio dos es vacío, la polarización toma la forma concreta:

$$\vec{P}_1 = \frac{H_0}{2\pi} \left(\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 1} \right) \left(\frac{v}{c} \hat{e}_x - \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \hat{e}_y \right).$$

En ausencia del término topológico ($\Theta = 0$) la anterior expresión se reduce a [16]:

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1 + 1} \right) \frac{v}{c} H_0 \hat{e}_x.$$

En este nuevo resultado, ecuación (96) se puede observar como la diferencia de los parámetros topológicos de cada medio ($\Theta_1 - \Theta_2$) están directamente relacionadas con la aparición de una nueva componente de la polarización en la dirección y . Este resultado sorprende, ya que al aplicar un campo magnético externo aparece una nueva componente de la polarización en la dirección opuesta del campo aplicado, algo que no ocurre para un dieléctrico convencional ($\Theta = 0$).

Para obtener la magnetización del sistema se despeja la intensidad magnética de la segunda relación constitutiva (22) y utilizando la relación de la inducción magnética $\vec{B}$ con el potencial vectorial $\vec{A}$ (81), se encuentra la siguiente ecuación para el observador en reposo:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} [\text{rot}(\vec{A})] + \frac{\alpha \Theta}{\pi} \vec{E}. \quad (97)$$

Reemplazando en la anterior expresión la ecuación para el campo eléctrico $\vec{E}_2$ en el medio 2 (94) y teniendo en cuenta que se está estudiando el comportamiento del campo $\vec{H}$ sobre la frontera del cilindro ($r = a$), se tiene:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot}(\vec{A}) + \frac{\alpha\Theta}{\pi} [(A \cos \theta + B \sin \theta)\hat{e}_r - (-A \sin \theta + B \cos \theta)\hat{e}_\theta].$$

Nótese que $\vec{H}$ solo tiene componentes en las direcciones radial H_r y azimutal H_θ , siendo de interés la última, ya que es tangente a la superficie del cilindro. En el caso de las coordenadas polares se tiene $\text{rot}(\vec{A}_\theta) = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$. Luego, se tiene:

$$H_\theta = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\alpha\Theta}{\pi} [A \sin \theta - B \cos \theta]. \quad (98)$$

La ecuación de Laplace para la componete $A_z = \Psi$ del potencial vectorial es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_{1,2}}{\partial \theta^2} = 0.$$

Y las condiciones de frontera son:

$$(\Psi_2 - \Psi_1) = 0, \quad (99)$$

$$\left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (100)$$

$$+ \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \frac{3\mu_2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[(\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \sin \theta - \mu_1 \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \cos \theta \right] = 0.$$

Análogamente, como las condiciones de frontera solo tiene términos de tipo $l = 1$, la solución de Ψ en el interior y exterior del cilindro tiene la forma:

$$\Psi_1(r, \theta) = r[A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta],$$

$$\Psi_2(r, \theta) = \frac{1}{r}[A_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta].$$

Las condiciones de frontera (99) y (100), llevan a las siguientes relaciones:

$$\Psi_1(r, \theta) = r[A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta], \quad (101)$$

$$\Psi_2(r, \theta) = \frac{a^2}{r}[A_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta], \quad (102)$$

con las constantes dadas por:

$$A_1 = -\frac{3\mu_1^2\mu_2^2H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[\frac{\alpha}{\pi}(\Theta_2 - \Theta_1) \right]^2,$$

$$B_1 = \frac{3\mu_1\mu_2^2H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} (\epsilon_1\mu_1 - 1) \frac{v}{c} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2).$$

Al interior del cilindro se induce un campo magnético, el cual tiene la expresión:

$$\vec{B}_1 = -A_1\hat{e}_y + B_1\hat{e}_x - \frac{3\mu_1\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} H_0\hat{e}_y, \quad (103)$$

con la respectiva magnetización:

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi}(\vec{B} - \vec{H}) = \frac{1}{4\pi}(-A_1\hat{e}_y + B_1\hat{e}_x). \quad (104)$$

Nótese que en este caso la magnetización del sistema depende totalmente de la diferencia de los parámetros topológicos $(\Theta_1 - \Theta_2)$, pues para un dieléctrico convencional $\Theta = 0$, no existe magnetización en el sistema ($\vec{M} = 0$). Además, se encuentran dos componentes de la magnetización; una perpendicular al campo magnético aplicado (x) y otra en la misma dirección del campo magnético aplicado (y).

7.3. Esfera de aislante topológico con simetría azimutal

Considérese una esfera de aislante topológico con parámetro topológico Θ que rota uniformemente con velocidad angular ω en presencia de un campo magnético constante H_0 , como se muestra en la figura (14). Se pretende determinar el campo eléctrico que surge alrededor de la esfera.

El campo magnético en el interior de la esfera se modifica, dicha modificación es de carácter relativista y en primera aproximación se puede considerar que el campo magnético H_0 en el interior de la esfera es el mismo que el de una esfera en reposo [38]:

$$\vec{H}^{(i)} = \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \vec{H}_0. \quad (105)$$

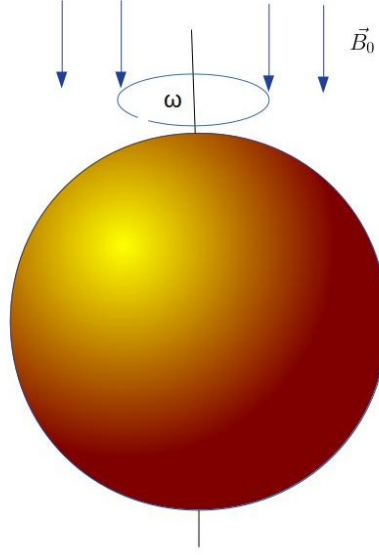


Figura 14: Esfera sólida de aislante topológico con movimiento rotacional respecto a su eje de simetría.

Como la rotación es uniforme, el campo eléctrico es constante y tiene un potencial asociado mediante la expresión (80). Fuera de la esfera, el potencial $\phi^{(2)}$ satisface la siguiente ecuación de Laplace [52, 54]:

$$\nabla^2 \phi_2 = 0.$$

Como la simetría del problema es esférica, el sistema presenta simetría azimutal (φ), por esta razón la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\nabla^2 \phi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Esta ecuación se puede resolver por el método de separación de variable [56, 57], escribiendo el potencial como:

$$\phi_2 = R(r)Y(\theta).$$

La solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas con simetría azimutal es bien conocida [27, 56, 58] y está dada en términos de los polinomios

de Legendre [59–61], como se muestra a continuación:

$$\phi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \left[A_2^{(l)} r^l + B_2^{(l)} r^{-(l+1)} \right] P_l(\cos \theta). \quad (106)$$

Para que la solución sea físicamente correcta, el potencial ϕ_2 no puede diverger cuando $r \rightarrow \infty$, por lo tanto $A_2^{(l)} = 0$ y se tiene:

$$\phi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} B_2^{(l)} r^{-(l+1)} P_l(\cos \theta).$$

Para este sistema en particular se satisfacen las siguientes condiciones de frontera:

$$(\phi_2 - \phi_1) = 0, \quad (107)$$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\epsilon}_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \tilde{\epsilon}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} + 2 \frac{\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} a \omega H_0 P_0(\cos \theta) - \frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{\pi} \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} H_0 P_1(\cos \theta) \\ - \frac{2\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} \omega H_0 a P_2(\cos \theta) = 0. \end{aligned} \quad (108)$$

Como en las condiciones de frontera solo aparecen términos relacionados con P_0 , P_1 y P_2 el potencial en el exterior se reduce a:

$$\phi_2 = \frac{B_2^{(0)}}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{B_2^{(1)}}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{B_2^{(2)}}{r^3} P_2(\cos \theta). \quad (109)$$

En el interior de la esfera tiene lugar la siguiente ecuación para el potencial ϕ_1 :

$$\nabla \phi_1 = \frac{6\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{c\tilde{\epsilon}_1(2\mu_2 + \mu_1)} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0.$$

La solución de la ecuación diferencial en el interior de la esfera es la suma de la solución particular ϕ_p y la solución homogénea ϕ_h [52, 56]:

$$\phi_1 = \phi_h + \phi_p.$$

Para este sistema la solución particular está dada por (**Apéndice 8**):

$$\phi_p = \frac{\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{c\tilde{\epsilon}_1(2\mu_2 + \mu_1)} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 (r^2 - a^2). \quad (110)$$

Para encontrar la solución homogénea se recurre a la expresión (106). A causa que el potencial en el origen no puede diverger, se cumple $B_1^{(l)} = 0$ y dadas las condiciones de frontera solo se deben tener en cuenta los términos de tipo P_0, P_1 y P_2 . Por lo tanto la solución homogénea está dada por:

$$\phi_h = A_1^{(0)} P_0(\cos \theta) + A_1^{(1)} r P_1(\cos \theta) + A_1^{(2)} r^2 P_2(\cos \theta).$$

Luego, el potencial en el interior de la esfera ϕ_1 es:

$$\phi_1 = A_1^{(0)} P_0(\cos \theta) + A_1^{(1)} r P_1(\cos \theta) + A_1^{(2)} r^2 P_2(\cos \theta) + \frac{\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{c \tilde{\epsilon}_1 (2\mu_2 + \mu_1)} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 (r^2 - a^2). \quad (111)$$

Con las expresiones para los potenciales en el interior y el exterior de la esfera (109) y (111), y teniendo en cuenta las condiciones de frontera (107) y (108), se encontraron las siguientes relaciones entre las constantes al tener en cuenta que los polinomios de Legendre conforman una base de ortonormal (**Apéndice 8**):

$$B_2^{(0)} = a A_1^{(0)}, \quad B_2^{(1)} = a^3 A_1^{(1)},$$

$$B_2^{(2)} = a^5 A_1^{(2)},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(1)}}{a^3} + \tilde{\epsilon}_1 A_1^{(1)} \right) &= -\alpha(\Theta_1 - \Theta_2) \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} H_0, \\ \left(3 \frac{\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(2)}}{a^4} + 2\tilde{\epsilon}_1 A_1^{(2)} a \right) &= -\frac{2\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} H_0 \omega a. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas se encuentran

las siguientes expresiones para las constantes (**Apéndice 8**):

- $A_1^{(0)} = \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)\tilde{\epsilon}_2} H_0\omega a^2,$
- $A_1^{(1)} = -\frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + 2\tilde{\epsilon}_2)} H_0,$
- $A_1^{(2)} = -2 \left(\frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)(2\tilde{\epsilon}_1 + 3\tilde{\epsilon}_2)} \right) H_0\omega,$
- $B_2^{(0)} = \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)\tilde{\epsilon}_2} H_0\omega a^3,$
- $B_2^{(1)} = -\frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + 2\tilde{\epsilon}_2)} H_0a^3,$
- $B_2^{(2)} = -2 \left(\frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)(2\tilde{\epsilon}_1 + 3\tilde{\epsilon}_2)} \right) H_0a^5\omega.$

Luego, los potenciales en el interior y exterior de la esfera están dados por:

$$\phi_2 = \frac{B_2^{(0)}}{r} + \frac{B_2^{(1)}}{r^2} \cos \theta + \frac{B_2^{(2)}}{2r^3} (3 \cos^2 \theta - 1), \quad (112)$$

$$\phi_1 = A_1^{(0)} + A_1^{(1)} r \cos \theta + A_1^{(2)} \frac{r^2}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{c\tilde{\epsilon}_1(2\mu_2 + \mu_1)} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 (r^2 - a^2). \quad (113)$$

Con ayuda de la expresión (80) se puede obtener el campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera, dado por:

$$\vec{E}_2 = \left[\frac{B_2^{(0)}}{r^2} + \frac{2B_2^{(1)}}{r^3} \cos \theta + \frac{3B_2^{(2)}}{2r^4} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] \hat{e}_r + \left[\frac{B_2^{(1)}}{r^3} + \frac{3B_2^{(2)}}{r^4} \cos \theta \right] \sin \theta \hat{e}_\theta, \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 = & - \underbrace{\left(A_1^{(1)} \cos \theta + A_1^{(2)} r (3 \cos^2 \theta - 1) + \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{c\tilde{\epsilon}_1(2\mu_2 + \mu_1)} (\vec{\omega} \cdot \vec{H}_0) r \right)}_{A(r,\theta)} \hat{e}_r \\ & + \underbrace{\left(A_1^{(1)} + 3r A_1^{(2)} \cos \theta \right)}_{B(r,\theta)} \sin \theta \hat{e}_\theta. \end{aligned} \quad (115)$$

Del anterior resultado se puede observar que para el campo eléctrico en el exterior de la esfera $\vec{E}_2$ se obtienen contribuciones de tipo dipolar y cuadipolar, este es un resultado inusual y corresponde a uno de los aportes originales de este trabajo.

Debido al campo eléctrico en el interior de la esfera $\vec{E}_1$, se induce una polarización, que para un observador en reposo esta dada por $\vec{P}_1 = \frac{1}{4\pi}(\epsilon - 1) \left(\vec{E}_1 + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}_1 \right)$, donde (**Apéndice 8**):

$$\vec{v} \times \vec{B}_1 = \underbrace{-H_0 \omega r \left(\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \right)}_{C(r, \theta)} \sin \theta (\hat{e}_x + \hat{e}_y). \quad (116)$$

Luego, esta se describe por medio de la siguiente relación vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{P}_1 = & \frac{1}{4\pi}(\epsilon_1 - 1) \left(A(r, \theta) \sin \theta + B(r, \theta) \cos \theta + \frac{1}{c} C(r, \theta) \right) [\hat{e}_x + \hat{e}_y] \\ & + \frac{1}{4\pi}(\epsilon_1 - 1)(A(r, \theta) \cos \theta - B(r, \theta) \sin \theta) \hat{e}_z, \end{aligned} \quad (117)$$

donde $A(r, \theta)$ es el término que acompaña el vector $\hat{e}_r$ en la expresión (115), $B(r, \theta)$ el término que acompaña a $\hat{e}_\theta$ y $C(r, \theta)$ el término que acompaña a $\hat{e}_x + \hat{e}_y$ en (116). En estas expresiones dependientes de r y θ se encuentra la dependencia con el parámetro topológico Θ .

En el caso particular donde se tiene un dieléctrico convencional, es decir cuando $(\Theta = 0)$ y el sistema se encuentra en reposo $(\omega = 0)$, se tiene que $A(r, \theta) = B(r, \theta) = C(r, \theta) = 0$. Luego, la polarización es:

$$\vec{P}_1 = 0,$$

resultado conocido. Pero, si se trabaja con un aislante topológico $(\Theta \neq 0)$ en reposo $(\omega = 0)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} A(r, \theta) &= \frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + 2\tilde{\epsilon}_2)} H_0 \cos \theta, \\ B(r, \theta) &= -\frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + 2\tilde{\epsilon}_2)} H_0 \sin \theta, \\ C(r, \theta) &= 0. \end{aligned}$$

Luego, la polarización al interior de la esfera es:

$$\vec{P}_1 = \frac{1}{4\pi}(\epsilon_1 - 1) \left[\frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + 2\tilde{\epsilon}_2)} \right] H_0 \hat{e}_z$$

Nótese que aun en ausencia de movimiento aparece una polarización en el sistema, la cual depende de la diferencia entre los parámetros topológicos de cada medio ($\Theta_1 - \Theta_2$). Cuando se incluye el movimiento de rotación a la esfera, la anterior expresión se generaliza a la ecuación (116). Dicha generalización se deduce del formalismo construido en el capítulo 4 y constituye uno de los resultados originales del presente trabajo.

8. Capítulo 8:

Conclusiones

El formalismo desarrollado en el presente trabajo y los problemas concretos considerados evidencian que los aislantes topológicos son un sistema físico fundamental que contribuye a comprender las nuevas propiedades topológicas de la materia, motivo por el cual estos sistemas se han y se siguen estudiando.

En el presente trabajo se estudiaron las propiedades electromagnéticas de los aislantes topológicos en movimiento y se encontraron nuevos resultados nunca antes presentados, en esta línea de ideas el resultado más relevante correspondió a las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos correspondientes a las ecuaciones (35) y (36), las cuales son un conjunto de dos expresiones generales que definen el comportamiento de los campos electromagnéticos en aislantes topológicos en movimiento. Además, se demostró que estas expresiones generalizan tanto las relaciones constitutivas de los campos electromagnéticos en dieléctricos en movimiento desarrollado por **Minkowski** como las ecuaciones que describen los campos electromagnéticos en aislantes topológicos en reposo desarrollado por **Wilczek**. Gracias a estas relaciones se concluyó que en los aislantes topológicos no existen efectos puramente eléctricos, ni puramente magnéticos. Más aun, el parámetro topológico es el responsable de los nuevos efectos magnetoeléctricos observados en los sistemas tratados en los capítulos 6 y 7.

En el capítulo 5 se evidenció como se reestructuraron las condiciones de frontera de las componentes normales y tangenciales de los campos electromagnéticos. Más aun, para el caso particular en el cual las componentes tangenciales de los campos en la frontera se consideraron en la aproximación no relativista, se encontró que la reestructuración se debe fundamentalmente a la diferencia entre los parámetros topológicos de cada medio ($\Theta_1 - \Theta_2$) y a la velocidad relativa del sistema. Los campos electromagnéticos cambian su comportamiento en la interfaz de los dos materiales, mostrando términos adicionales en las expresiones para las condiciones de frontera que no se pueden obtener por medio de la electrodinámica convencional.

Aplicando el formalismo desarrollado en el capítulo 4 a los sistemas descritos en el capítulo 6, se encontraron diferentes fenómenos físicos relacionados con la naturaleza de los aislantes topológicos y a la velocidad con la que se mueve el sistema.

Al examinar el problema de un cilindro sólido de aislante topológico sin carga que rota sobre su eje de simetría en presencia de un campo magnético, se constató que el término topológico genera una corrección de segundo orden tanto en la polarización como en la magnetización del sistema; adicionalmente se encontró que los efectos topológicos llevan a que se genere una nueva componente del vector magnetización en la dirección radial.

Al tratar el problema de un cilindro hueco de aislante topológico sin carga que rota sobre su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo, se encontró; que el voltaje medido entre la cara interna y la cara externa del cilindro sufre una corrección de segundo orden debida al parámetro topológico.

Cuando se trabajó el problema de un capacitor eléctrico cargado en un campo magnético uniforme en el cual se mueve una placa de aislante topológico con velocidad lineal se encontró que el voltaje medido entre las placas se modifica por el parámetro topológico por medio de una corrección de segundo orden. Además, se encontró que el voltaje es mayor que el voltaje medido para un dieléctrico convencional.

Al tratar el problema de un cilindro de aislante topológico no magnetizado que se mueve a lo largo de su eje con velocidad uniforme en presencia de un campo magnético se encontró que la diferencia de los parámetros topológicos de cada medio están directamente relacionadas con la aparición de una nueva componente de la polarización en la dirección del campo magnético y la aparición de dos componentes en la magnetización del sistema: una perpendicular al campo y otra en dirección del campo.

Por último, al trabajar el problema de la esfera de aislante topológico que rota sobre su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo se encontró que el campo eléctrico en el exterior tiene contribuciones de términos de tipo dipolar y cuadrupolar. Además, la polarización en el interior de la esfera

depende explícitamente del parámetro topológico y de la velocidad del sistema.

8.1. Perspectivas

Uno de los posibles pasos a seguir basándose en este trabajo es la aplicación del formalismo desarrollado para aislantes topológicos en movimiento a otro tipo de sistemas con geometrías más complejas, en los cuales no necesariamente sea posible encontrar una solución de tipo analítica y sea necesario recurrir a métodos numéricos, con el fin de encontrar soluciones numéricas y crear simulaciones de los sistemas físicos estudiados.

Otra posible perspectiva de este trabajo es el estudio de estos sistemas desde el punto de vista experimental, donde sea posible medir las cantidades calculadas teóricamente, tales como la polarización, la magnetización, la carga y el voltaje del sistema. De ello podrían derivarse posibles aplicaciones de estos materiales.

Los efectos considerados en este trabajo están basados en una descripción clásica surge entonces la pregunta sobre como se reestructuran los fenómenos cuánticos que se observan en aislantes topológicos cuando se considera el movimiento relativo de dichos sistemas.

Apéndice 1

Definiciones

En este apéndice se definen expresiones importantes para el presente trabajo.

- El 4-potencial se define como [15, 27]:

$$A_i = (\phi, -\vec{A}),$$

donde ϕ es el potencial escalar y $\vec{A}$ es el potencial vectorial.

- La 4-corriente se define como:

$$j^i = (c\rho, \rho\vec{v}),$$

donde ρ es la densidad de carga volumétrica, c es la velocidad de luz y $\vec{v}$ la velocidad del sistema.

- El tensor del campo electromagnético se define como [27, 28]:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

- La forma matricial del tensor del campo electromagnético, el tensor de polarización y H^{ik} se definen como [15]:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -P_x & -P_y & -P_z \\ P_x & 0 & M_z & -M_y \\ P_y & -M_z & 0 & M_x \\ P_z & M_y & -M_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$H^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}$$

- La 4-velocidad se define como:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

- El tensor de Levi Civita se define como:

$$\epsilon^{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k, l), \text{ es una permutación par} \\ -1 & \text{si } (i, j, k, l), \text{ es una permutación impar} \\ 0 & \text{si, dos índices son los mismos} \end{cases}$$

- La constante de estructura fina tiene el valor de [34, 62]:

$$\alpha = \frac{1}{137,03599911}.$$

- Sea $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ tres vectores de $\mathbb{R}^n$, luego el doble producto vectorial se define como [50, 63]:

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Apéndice 2

Calculo de la variación de la acción de Maxwell

La variación de la acción de Maxwell está dada por la siguiente expresión:

$$\delta S_{Maxwell} = - \sum \int \delta(mds) - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta(A_i j^i) d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} \delta(F_{ik} F^{ik}) d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} \delta(P^{ik} F_{ik}) d\Omega,$$

se trataron los cuatro términos de la anterior expresión independientemente. El primero de ellos el cual corresponde a la acción de las partículas es igual a cero, pues solo se considera la variación de los campos; por tanto la masa total del sistema es constante. También se considera j^i y P^{ik} invariantes, pues la carga total, la polarización y la magnetización del sistema se conservan. Luego, la anterior expresión se reduce a:

$$\delta S_{Maxwell} = - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta(A_i) j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} (\delta(F_{ik}) F^{ik} + F_{ik} \delta(F^{ik})) d\Omega - \frac{1}{2c} \int_{\Omega} P^{ik} \delta(F_{ik}) d\Omega. \quad (118)$$

Además, utilizando la propiedad tensorial $F^{ik} \delta F_{ik} = F_{ik} \delta F^{ik}$ [27, 28], el segundo término de la expresión anterior se reescribe como:

$$\frac{1}{16\pi c} \int_{\Omega} (\delta(F_{ik}) F^{ik} + F_{ik} \delta(F^{ik})) d\Omega = - \frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \delta F_{ik} d\Omega, \quad (119)$$

recordando la definición del tensor del campo electromagnetico, $F_{ik} = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right)$ (**Apéndice 1**), su propiedad de antisimetría ($F^{ik} = -F_{ik}$) [27, 28] y permutando indices, se obtiene:

$$F^{ik} \delta F_{ik} = F^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} = 2 F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k}.$$

Remplazando la anterior expresión en (120) se tiene:

$$- \frac{1}{8\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \delta F_{ik} d\Omega = - \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} d\Omega, \quad (120)$$

donde el término de la integral está dado por:

$$F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i.$$

Remplazando en (121) se obtiene:

$$-\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} F^{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x^k} d\Omega = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega. \quad (121)$$

Para el tercer término de (119) se obtiene la siguiente relación:

$$-\frac{1}{2c} \int_{\Omega} P^{ik} \delta(F_{ik}) d\Omega = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(P^{ik} \frac{\partial \delta A_k}{\partial x^i} - P^{ik} \delta \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) d\Omega = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} P^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega,$$

el término integral en la anterior ecuación se transforma de la siguiente manera:

$$P^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i = \frac{\partial}{\partial x^k} (P^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i.$$

Luego, la integral es:

$$-\frac{1}{c} \int_{\Omega} P^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega = -\frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (P^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega,$$

Reemplazando la anterior expresión y la ecuación (122) en (119) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta S_{Maxwell} &= \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \delta(A_i j^i) d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega \\ &\quad - \frac{1}{c} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} (P^{ik} \delta A_i) - \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Sabemos que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^k} (F^{ik} \delta A_i) d\Omega = F^{ik} \delta A_i|_{\Omega} = 0,$$

puesto que sobre la superficie de cuatro dimensiones, las condiciones de frontera satisfacen $\delta A_i|_{\Omega_i} = 0$.

Análogamente se cumple para $P^{ik} \delta A_k$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^k} (P^{ik} \delta A_k) d\Omega = P^{ik} \delta A_k|_{\Omega} = 0.$$

Finalmente, se encuentra la variación de la acción de Maxwell como:

$$\delta S_{Maxwell} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c^2} j^i \delta A_i + \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i + \frac{1}{c} \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega.$$

Apéndice 3

Deducción de la ley de Gauss y le ley de Am-pere generalizada

Para obtener la ley de Gauss se debe evaluar la expresión (15) para $i = 0$ y realizar suma sobre el índice k :

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} + 4\pi \frac{\partial P^{0k}}{\partial x^k} - \frac{\alpha}{2\pi} \epsilon^{0kjl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\Theta(x) F_{jl}) = -\frac{4\pi}{c} j^0. \quad (122)$$

Cada uno de los cuatro términos obtenidos en el lado izquierdo de la expresión (123) se tratan independientemente. Teniendo en cuenta la forma matricial de los tensores F^{ik} y P^{ik} (**Apéndice 1**), se obtiene:

$$\frac{\partial F^{0k}}{\partial x^k} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{03}}{\partial x^3} = -\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right).$$

Para el segundo término de (123) se obtiene la respectiva expresión:

$$4\pi \frac{\partial P^{0k}}{\partial x^k} = 4\pi \left(\frac{\partial P^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial P^{03}}{\partial x^3} \right) = -4\pi \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right).$$

Para calcular el tercer término de (123) se asume que Θ no es función de las coordenadas x^i , es decir, es una constante. Este argumento es importante ya que de esta manera Θ deja de ser un campo arbitrario y se convierte en un parámetro del sistema, llamado “parámetro topológico” el cual está completamente relacionado con los estados superficiales de conducción del material[19, 64].

Luego, el tercer término de (123) se obtiene como:

$$\begin{aligned}
\alpha\Theta\epsilon^{0kjl}\frac{\partial}{\partial x^k}F_{jl} &= \alpha\Theta\left(\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^1}F_{23} + \epsilon^{0132}\frac{\partial}{\partial x^1}F_{32} + \epsilon^{0213}\frac{\partial}{\partial x^2}F_{13}\right) \\
&+ \alpha\Theta\left(\epsilon^{0231}\frac{\partial}{\partial x^2}F_{31} + \epsilon^{0312}\frac{\partial}{\partial x^3}F_{12} + \epsilon^{0321}\frac{\partial}{\partial x^3}F_{21}\right) \\
&= \alpha\Theta\left(2\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^1}F_{23} + 2\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^2}F_{31} + 2\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^3}F_{12}\right) \\
&= \alpha\Theta\left(2\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^1}F_{23} + 2\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^2}F_{31} + 2\epsilon^{0123}\frac{\partial}{\partial x^3}F_{12}\right) \\
&= -2\alpha\Theta\left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

Recordando que la primera componente del 4-vector corriente es la densidad de carga volumetrica ρ por la velocidad de la luz c (**Apéndice 1**), se obtiene la respectiva expresión vectorial:

$$\text{div}(\vec{E}) + \text{div}(\vec{P}) - \frac{\alpha\Theta}{\pi}\text{div}(\vec{B}) = 4\pi\rho,$$

de donde se deduce la ley de Gauss [36, 37]:

$$\text{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho,$$

con

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} - \frac{\alpha\Theta}{\pi}\vec{B}.$$

A continuación se deduce la ley de Ampere generalizada. Para ello se evalúa $i = 1, 2$ y 3 en la expresión (15), y se realiza suma sobre el índice k :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial F^{1k}}{\partial x^k} &= \frac{\partial F^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{13}}{\partial x^3} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right), \\
\bullet \quad \frac{\partial F^{2k}}{\partial x^k} &= \frac{\partial F^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{23}}{\partial x^3} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right), \\
\bullet \quad \frac{\partial F^{3k}}{\partial x^k} &= \frac{\partial F^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Para el segundo término de (15) se obtiene:

- $\frac{\partial P^{1k}}{\partial x^k} = \frac{\partial P^{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial P^{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial P^{13}}{\partial x^3} = \frac{1}{c} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} \right),$
- $\frac{\partial P^{2k}}{\partial x^k} = \frac{\partial P^{20}}{\partial x^0} + \frac{\partial P^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{23}}{\partial x^3} = \frac{1}{c} \frac{\partial P_y}{\partial t} + \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \right),$
- $\frac{\partial P^{3k}}{\partial x^k} = \frac{\partial P^{30}}{\partial x^0} + \frac{\partial P^{31}}{\partial x^1} + \frac{\partial P^{32}}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial P_z}{\partial t} + \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right).$

Por último, se trabaja el tercer término de la ecuación (15):

- $\Theta \epsilon^{1kjl} \frac{\partial}{\partial x^k} F_{jl} = \Theta \left(\epsilon^{1023} \frac{\partial F_{23}}{\partial x^0} + \epsilon^{1032} \frac{\partial F_{32}}{\partial x^0} + \epsilon^{1203} \frac{\partial F_{03}}{\partial x^2} + \epsilon^{1230} \frac{\partial F_{30}}{\partial x^2} + \epsilon^{1302} \frac{\partial F_{02}}{\partial x^3} + \epsilon^{1320} \frac{\partial F_{20}}{\partial x^3} \right)$
 $= 2\Theta \left(\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right),$
- $\Theta \epsilon^{2kjl} \frac{\partial}{\partial x^k} F_{jl} = \Theta \left(\epsilon^{2013} \frac{\partial F_{13}}{\partial x^0} + \epsilon^{2031} \frac{\partial F_{31}}{\partial x^0} + \epsilon^{2103} \frac{\partial F_{03}}{\partial x^1} + \epsilon^{2130} \frac{\partial F_{30}}{\partial x^1} + \epsilon^{2301} \frac{\partial F_{01}}{\partial x^3} + \epsilon^{2310} \frac{\partial F_{10}}{\partial x^3} \right)$
 $= 2\Theta \left(\frac{1}{c} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right),$
- $\Theta \epsilon^{3kjl} \frac{\partial}{\partial x^k} F_{jl} = \Theta \left(\epsilon^{3012} \frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \epsilon^{3021} \frac{\partial F_{21}}{\partial x^0} + \epsilon^{3102} \frac{\partial F_{02}}{\partial x^1} + \epsilon^{3120} \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \epsilon^{3201} \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} + \epsilon^{3210} \frac{\partial F_{10}}{\partial x^2} \right)$
 $= 2\Theta \left(\frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right).$

Resumiendo lo anterior en notación vectorial se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{rot} \left(\vec{B} - 4\pi \vec{M} + \frac{\Theta}{\pi} \vec{E} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} + 4\pi \vec{P} - \frac{\Theta}{\pi} \vec{E} \right),$$

de donde se deduce la ley de Ampere generalizada [27, 36]:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

teniendo en cuenta que el vector de intensidad magnética toma la forma concreta:

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} + \frac{\Theta}{\pi} \vec{E}.$$

Apéndice 4

Relación exacta entre los campos electromagnéticos en un aislante topológico en movimiento

Al trabajar con la expresión (27) para $\lambda = 1$, se tiene:

$$H^{1\mu} u_\mu = \epsilon F^{1\mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta(x) \epsilon^{1\mu\alpha\theta} F_{\alpha\theta} u_\mu.$$

Tratando cada uno de estos términos independientemente se obtiene:

- $H^{1\mu} u_\mu = H^{10} u_0 + H^{12} u_2 + H^{13} u_3 = \gamma(D_x + \frac{1}{c}(H_z v_y - H_y v_z)),$
- $F^{1\mu} u_\mu = F^{10} u_0 + F^{12} u_2 + F^{13} u_3 = \gamma(E_x + \frac{1}{c}(v_y B_z - v_z B_y)),$
- $\begin{aligned} \epsilon^{1\mu\alpha\theta} F_{\mu\alpha} u_\theta &= \epsilon^{1023} F_{02} u_3 + \epsilon^{1203} F_{20} u_3 + \epsilon^{1032} F_{03} u_2 + \epsilon^{1302} F_{30} u_2 + \epsilon^{1230} F_{23} u_0 + \epsilon^{1320} F_{32} u_0 \\ &= 2 \left(\epsilon^{1023} F_{02} u_3 + \epsilon^{1032} F_{03} u_2 + \epsilon^{1230} F_{23} u_0 \right) \\ &= 2(F_{32} u_0 + F_{03} u_2 + F_{20} u_3) \\ &= 2\gamma(B_x + \frac{1}{c} E_y v_z - \frac{1}{c} E_z v_y). \end{aligned}$

Realizando el proceso análogo para $\lambda = 2$, se obtienen las siguientes expresiones:

$$H^{2\mu} u_\mu = F^{2\mu} u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi} \Theta(x) \epsilon^{2\mu\alpha\theta} F_{\alpha\theta} u_\mu, \quad (123)$$

y tratando cada uno de estos términos independientemente se llega a:

- $H^{2\mu}u_\mu = H^{20}u_0 + H^{21}u_1 + H^{23}u_3 = \gamma(D_y + \frac{1}{c}(H_x v_z - H_z v_x)),$
- $F^{2\mu}u_\mu = F^{20}u_0 + F^{21}u_1 + F^{23}u_3 = \gamma(E_y + \frac{1}{c}(v_z B_x - v_x B_z)),$
- $\begin{aligned} \varepsilon^{2\mu\alpha\theta}F_{\mu\alpha}u_\theta &= \varepsilon^{2013}F_{01}u_3 + \varepsilon^{2103}F_{10}u_3 + \varepsilon^{2031}F_{03}u_1 + \varepsilon^{2301}F_{30}u_1 + \varepsilon^{2130}F_{13}u_0 + \varepsilon^{2310}F_{31}u_0 \\ &= 2\left(\varepsilon^{2310}F_{31}u_0 + \varepsilon^{2031}F_{03}u_1 + \varepsilon^{2013}F_{01}u_3\right) \\ &= 2(F_{13}u_0 + F_{03}u_1 + F_{01}u_3) \\ &= 2\gamma(B_y + \frac{1}{c}E_z v_x - \frac{1}{c}E_x v_z). \end{aligned}$

Análogamente se realizó para $\lambda = 3$:

$$H^{3\mu}u_\mu = F^{3\mu}u_\mu - \frac{\alpha}{2\pi}\Theta(x)\varepsilon^{3\mu\alpha\theta}F_{\alpha\theta}u_\mu, \quad (124)$$

de donde se obtiene:

- $H^{3\mu}u_\mu = H^{30}u_0 + H^{31}u_1 + H^{32}u_2 = \gamma(D_z + \frac{1}{c}(H_y v_x - H_x v_y)),$
- $F^{3\mu}u_\mu = F^{30}u_0 + F^{31}u_1 + F^{32}u_2 = \gamma(E_z + \frac{1}{c}(v_x B_y - v_y B_x)),$
- $\begin{aligned} \varepsilon^{3\mu\alpha\theta}F_{\mu\alpha}u_\theta &= \varepsilon^{3120}F_{12}u_0 + \varepsilon^{3210}F_{21}u_0 + \varepsilon^{3021}F_{02}u_1 + \varepsilon^{3201}F_{20}u_1 + \varepsilon^{3012}F_{01}u_2 + \varepsilon^{3102}F_{10}u_2 \\ &= 2\left(\varepsilon^{3120}F_{12}u_0 + \varepsilon^{3021}F_{02}u_1 + \varepsilon^{3012}F_{01}u_2\right) \\ &= 2(F_{21}u_0 + F_{02}u_1 + F_{10}u_2) \\ &= 2\gamma(B_z + \frac{1}{c}E_x v_y - \frac{1}{c}E_y v_x). \end{aligned}$

Resumiendo las anteriores expresiones para $\lambda = 1, 2$ y 3 en notación vectorial se obtiene la siguiente relación:

$$\vec{D} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{H} = \epsilon(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\alpha}{\pi}\Theta(\vec{B} + \frac{1}{c}\vec{E} \times \vec{v}).$$

Apéndice 5

Deducción de condiciones de frontera para aislantes topológicos en movimiento

En el presente apéndice se calculan las componentes tangenciales del vector de campo eléctrico $\vec{E}$ y la intensidad magnética $\vec{H}$.

Teniendo en cuenta que $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \vec{B}_{2n} + \vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1n} - \vec{B}_{1t} = \vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t}$ y reemplazando la expresión (36) en la ecuación (41) se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = & \frac{v_n}{c} \left[\mu_2 \vec{H}_{t2} - \frac{\mu_2}{c} \left(\epsilon_2 - \frac{1}{\mu_2} \right) \vec{v} \times \vec{E}_{t2} - \frac{\alpha \Theta_2}{\pi} \vec{E}_{t2} - \frac{\alpha \Theta_2 \mu_2}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu_2} \right) \vec{v} \times \vec{B}_{t2} \right] \\ & - \frac{v_n}{c} \left[\mu_1 \vec{H}_{t1} - \frac{\mu_1}{c} \left(\epsilon_1 - \frac{1}{\mu_1} \right) \vec{v} \times \vec{E}_{t1} - \frac{\alpha \Theta_1}{\pi} \vec{E}_{t1} - \frac{\alpha \Theta_1 \mu_1}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \right) \vec{v} \times \vec{B}_{t1} \right], \end{aligned}$$

despreciando términos de tipo $\frac{v^2}{c^2}$, se obtiene:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{v_n}{c} \left[\mu_2 \vec{H}_{t2} - \mu_1 \vec{H}_{t1} - \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_2 \vec{E}_{t2} - \Theta_1 \vec{E}_{t1}) \right].$$

Análogamente, se reemplaza (35) en (42) de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = & - \frac{v_n}{c} \left[\epsilon_2 \vec{E}_{t2} + \frac{1}{c} \left(\epsilon_2 - \frac{1}{\mu_2} \right) (\vec{v} \times \vec{B}_2)_t - \frac{\alpha \Theta_2}{\pi} \vec{B}_{t2} + \frac{\alpha \Theta_2}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu_2} \right) (\vec{v} \times \vec{E}_2)_t \right] \\ & + \frac{v_n}{c} \left[\epsilon_1 \vec{E}_{t1} + \frac{1}{c} \left(\epsilon_1 - \frac{1}{\mu_1} \right) (\vec{v} \times \vec{B}_1)_t - \frac{\alpha \Theta_1}{\pi} \vec{B}_{t1} + \frac{\alpha \Theta_1}{\pi c} \left(1 - \frac{1}{\mu_1} \right) (\vec{v} \times \vec{E}_1)_t \right], \end{aligned}$$

despreciando términos de tipo $\frac{v^2}{c^2}$, se obtiene la expresión para las componentes tangenciales de la intensidad magnética:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = - \frac{v_n}{c} [\epsilon_2 \vec{E}_{t2} - \epsilon_1 \vec{E}_{t1} - \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_2 \vec{B}_{t2} - \Theta_1 \vec{B}_{t1})].$$

Apéndice 6

En la presente sección se deduce la polarización y magnetización de un cilindro de aislante topológico que rota con respecto a su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo, correspondiente a el primer problema del capítulo 6.

Al trabajar la polarización del cilindro se obtiene la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
 4\pi\vec{P} &= \left[1 - \frac{1}{\epsilon\mu} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) - \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0/c \\
 &= \left[1 - \left(\frac{1}{\epsilon\mu} + \frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0/c \\
 &= \left[1 - \left(\frac{\pi^2 + \epsilon\mu\alpha^2\Theta^2}{\epsilon\pi^2\mu} \right) \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0/c \\
 &= \left[1 - \left(\frac{\pi^2 + \epsilon\mu\alpha^2\Theta^2}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0/c.
 \end{aligned}$$

Análogamente, se trabajo con la magnetización del cilindro sólido de aislante topológico, teniendo en cuenta la propiedad del doble producto vectorial:

$$(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 = \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{H}_0) - \vec{H}_0(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) = H_0\vec{\omega} \times \vec{r}.$$

luego se calculó la magnetización como sigue a continuación:

$$\begin{aligned}
 4\pi\vec{M} &= - \left[1 - \left(\frac{\alpha^2\Theta^2}{\pi^2} + 1 \right) \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \right] \vec{H}_0 + \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \left[\frac{1}{\epsilon\mu} - 1 \right] (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 \\
 &= \left[\left(\frac{\alpha^2\Theta^2 + \pi^2}{\pi^2} \right) \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) - 1 \right] \vec{H}_0 + \frac{\alpha\Theta}{\pi c} \left(\frac{\mu\pi^2\epsilon}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) \left(\frac{1 - \epsilon\mu}{\epsilon\mu} \right) (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{H}_0 \\
 &= \left[\mu\epsilon \left(\frac{\pi^2 + \alpha^2\Theta^2}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) - 1 \right] \vec{H}_0 + \frac{\alpha\pi\Theta}{c} \left(\frac{1 - \epsilon\mu}{\pi^2\epsilon + \alpha^2\Theta^2} \right) H_0\vec{\omega} \times \vec{r}.
 \end{aligned}$$

Apéndice 7

Cálculo de expresiones complementarias

A continuación se calculan explícitamente algunas expresiones importantes usadas en el capítulo 7.

- Sea $\vec{\Omega}$ un campo general, calculando la componente i -ésima de la expresión $\text{div}(\vec{v} \times \vec{\Omega})$ y teniendo en cuenta que $v_j = \varepsilon_{jlm}\omega_l X_m$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \text{div}(\vec{v} \times \vec{\Omega})_i &= \nabla_i \varepsilon_{ijk} v_j \Omega_k = \nabla_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \omega_l X_m \Omega_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \omega_l \nabla_i X_m \Omega_k + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \omega_l X_m \nabla_i \Omega_k \\
 &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \omega_l \delta_{im} \Omega_k + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \omega_l X_m \nabla_i \Omega_k \\
 &= \varepsilon_{mjk} \varepsilon_{mjl} \omega_l \Omega_k + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \omega_l X_m \nabla_i \Omega_k \\
 &= 2\delta_{kl} \omega_l \delta_{im} \Omega_k + \varepsilon_{ijk} (\vec{\omega} \times \vec{r})_j \nabla_i \Omega_k \\
 &= 2\omega_k \Omega_k - v_j (\nabla \times \vec{\Omega})_j.
 \end{aligned}$$

La anterior expresión toma la siguiente forma vectorial:

$$\text{div}(\vec{v} \times \vec{\Omega}) = 2(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \vec{v} \cdot \text{rot}(\vec{\Omega}).$$

- Se tiene que $\Theta \approx \pi$ [11] y $0 < \mu < 1$ [65], luego se tiene:

$$\frac{\alpha\Theta}{\mu\pi} \approx \frac{1}{137} \ll 1.$$

- El producto escalar entre la velocidad angular y los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se presentan a continuación:

$$\vec{\omega} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 \omega_i B_i = \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial A_i}{\partial x_j},$$

y también :

$$\vec{\omega} \cdot \vec{E} = \sum_{i=1}^3 \omega_i E_i = - \sum_{i=1}^3 \omega_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j}.$$

Apéndice 8

Problemas específicos del capítulo 7

En el presente apéndice se calculan relaciones matemáticas importantes para la solución de los dos problemas específicos desarrollados en el capítulo 7 de este trabajo.

- A continuación se calculan dos relaciones vectoriales correspondientes a la intensidad magnética H_0 :

$$\begin{aligned} [\vec{v} \times \vec{H}_0] \cdot \vec{n} &= -vH_0[\hat{e}_x + \hat{e}_y] \cdot (\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y) \\ &= vH_0 \hat{e}_x \cdot (\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y) = vH_0 \cos \theta, \end{aligned}$$

el anterior resultado se obtiene al tener en cuenta que; $\vec{n} = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y$.

Otra relación importante es:

$$\vec{H}_0 \cdot \hat{e}_r = -H_0 \hat{e}_y \cdot (\cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y) = -H_0 \sin \theta.$$

- Para resolver el problema del cilindro de aislante topológico que se mueve con velocidad lineal en presencia de un campo magnético externo es necesario obtener las constantes que definen los potenciales (88) y (89). Utilizando la condición de frontera (86), se obtiene:

$$aA \cos \theta + aB \sin \theta = \frac{C}{a} \cos \theta + \frac{D}{a} \sin \theta.$$

Dado que las funciones $\cos \theta$ y $\sin \theta$ son linealmente independientes y conforman una base ortogonal se tiene que satisfacer:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a^2} C, \\ B &= \frac{1}{a^2} D. \end{aligned}$$

Utilizando la segunda condición de frontera (87), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{\epsilon}_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \tilde{\epsilon}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \tilde{\epsilon}_2 C \cos \theta - \frac{1}{r^2} \tilde{\epsilon}_2 D \sin \theta - \tilde{\epsilon}_1 A \cos \theta - \tilde{\epsilon}_1 B \sin \theta \\
&= -\left(\frac{1}{r^2} \tilde{\epsilon}_2 C + \tilde{\epsilon}_1 A \right) \cos \theta - \left(\frac{1}{r^2} \tilde{\epsilon}_2 D + \tilde{\epsilon}_1 B \right) \sin \theta \\
&= -\frac{\epsilon_1 \mu_1 - 1}{c} \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} v H_0 \cos \theta - \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) H_0 \sin \theta.
\end{aligned}$$

Utilizando el mismo argumento de independencia lineal de las funciones $\cos \theta$ y $\sin \theta$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon}_1 A + \tilde{\epsilon}_2 \frac{1}{a^2} C &= \frac{\epsilon_1 \mu_1 - 1}{c} \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} v H_0, \\
\tilde{\epsilon}_1 B + \tilde{\epsilon}_2 \frac{1}{a^2} D &= \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) H_0.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones para estas constantes se obtienen:

- $A = \frac{\epsilon_1 \mu_1 - 1}{c(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} v H_0,$
- $B = \frac{1}{(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \frac{3\mu_1 \mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) H_0.$

Con los potenciales de cada medio se puede calcular el campo eléctrico en el interior y exterior de la esfera por medio de la expresión (80), donde se obtiene:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= -\frac{\partial \phi_1}{\partial r} = -\frac{3\mu_2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[(\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \hat{e}_x + \mu_1 \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \hat{e}_y \right], \\
\vec{E}_2 &= -\frac{\partial \phi_2}{\partial r} = \frac{a^2}{r^2} [(A \cos \theta + B \sin \theta) \hat{e}_r - (-A \sin \theta + B \cos \theta) \hat{e}_\theta].
\end{aligned}$$

Para obtener la solución de la componente z del potencial vectorial $A_z = \Psi$, se utiliza la condición de frontera (99), de donde se tiene:

$$aA_1 \cos \theta + aB_1 \sin \theta = \frac{1}{a} A_2 \cos \theta + \frac{1}{a} B_2 \sin \theta.$$

Luego, se tiene:

$$A_2 = a^2 A_1, \tag{125}$$

$$B_2 = a^2 B_1. \tag{126}$$

Utilizando la condición de frontera (100), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\mu_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} \right) &= -\frac{1}{a^2 \mu_2} A_2 \cos \theta - \frac{1}{a^2 \mu_2} B_2 \sin \theta - \frac{1}{\mu_1} A_1 \cos \theta - \frac{1}{\mu_1} B_1 \sin \theta \\
&= -\left(\frac{1}{a^2 \mu_2} A_2 + \frac{1}{\mu_1} A_1 \right) \cos \theta - \left(\frac{1}{a^2 \mu_2} B_2 + \frac{1}{\mu_1} B_1 \right) \sin \theta \\
&= -\frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \frac{3\mu_2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[(\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \sin \theta - \mu_1 \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2) \cos \theta \right],
\end{aligned}$$

donde se deduce el valor de las constantes A_1 y B_1 :

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{3\mu_1^2 \mu_2^2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \left[\frac{\alpha}{\pi} (\Theta_2 - \Theta_1) \right]^2, \\
B_1 &= \frac{3\mu_1 \mu_2^2 H_0}{(2\mu_2 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} (\epsilon_1 \mu_1 - 1) \frac{v}{c} \frac{\alpha}{\pi} (\Theta_1 - \Theta_2).
\end{aligned}$$

- En esta sección se reportan los cálculos necesarios para el problema de la esfera de aislante topológico que rota respecto a su eje de simetría en presencia de un campo magnético externo uniforme.

La ecuación para el potencial en el interior de la esfera es:

$$\nabla \phi_1 = \frac{6\mu_2(\epsilon_1 \mu_1 - 1)}{c\tilde{\epsilon}_1(2\mu_2 + \mu_1)} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0.$$

La solución particular para un sistema con simetría central se obtiene como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r\phi_1^{part}) &= \frac{6(\epsilon\mu - 1)}{c\epsilon(2 + \mu)} \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0, \\
\frac{d}{dr} (r\phi_1^{part}) &= \frac{3(\epsilon\mu - 1)}{c\epsilon(2 + \mu)} r^2 \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 + K, \\
r\phi_1^{part} &= \frac{(\epsilon\mu - 1)}{c\epsilon(2 + \mu)} r^3 \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 + Kr, \\
\phi_1^{part} &= \frac{(\epsilon\mu - 1)}{c\epsilon(2 + \mu)} r^2 \vec{\omega} \cdot \vec{H}_0 + K.
\end{aligned}$$

La constante K se elige de tal manera que en la solución particular se anule en la frontera de la esfera, luego se obtiene:

$$\phi_p = \frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{c\tilde{\epsilon}_1(2\mu_2 + \mu_1)}\vec{\omega} \cdot \vec{H}_0(r^2 - a^2).$$

Para encontrar el valor de los potenciales en el interior y exterior de la esfera es necesario calcular las constantes que los definen. Luego, utilizando las expresiones de los potenciales (109) y (111) y la condición de frontera (107) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{B_2^{(0)}}{a}P_0(\cos\theta) + \frac{B_2^{(1)}}{a^2}P_1(\cos\theta) + \frac{B_2^{(2)}}{a^3}P_2(\cos\theta) \\ &= A_1^{(0)}aP_0(\cos\theta) + A_1^{(1)}a^2P_1(\cos\theta) + A_1^{(2)}a^3P_2(\cos\theta) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los polinomios de Legendre conforman una base ortogonal se debe cumplir:

$$\begin{aligned} B_2^{(0)} &= a^2 A_1^{(0)}, & B_2^{(1)} &= a^4 A_1^{(1)}, \\ B_2^{(2)} &= a^6 A_1^{(2)}, \end{aligned}$$

De la segunda condición de frontera (108), se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\epsilon}_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial r} - \tilde{\epsilon}_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial r} \right)_{r=a} &= -\tilde{\epsilon}_2 \left[\frac{B_2^{(0)}}{a^2}P_0(\cos\theta) + \frac{2B_2^{(1)}}{a^3}P_1(\cos\theta) + \frac{3B_2^{(2)}}{a^4}P_2(\cos\theta) \right] \\ &\quad - \tilde{\epsilon}_1 \left[A_1^{(0)}P_0(\cos\theta) + 2A_1^{(1)}aP_1(\cos\theta) + 3A_1^{(2)}a^2P_2(\cos\theta) \right], \end{aligned}$$

entonces se tiene:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(0)}}{a^2} + \tilde{\epsilon}_1 A_1^{(0)} \right) P_0(\cos\theta) - \left(\frac{2\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(1)}}{a^3} + 2\tilde{\epsilon}_1 A_1^{(1)}a \right) P_1(\cos\theta) \\ & - \left(\frac{3\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(2)}}{a^4} + 3\tilde{\epsilon}_1 A_1^{(2)}a^2 \right) P_2(\cos\theta) = -2 \frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} a\omega H_0 P_0(\cos\theta) \\ & + \frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} H_0 P_1(\cos\theta) + \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} \omega H_0 a P_2(\cos\theta). \end{aligned}$$

Luego, se deduce las siguientes relaciones entre las constantes:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(0)}}{a^2} + \tilde{\epsilon}_1 A_1^{(0)} \right) &= \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} H_0 \omega a, \\ 2 \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(1)}}{a^3} + \tilde{\epsilon}_1 A_1^{(1)} a \right) &= -\alpha(\Theta_1 - \Theta_2) \frac{3\mu_1\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} H_0, \\ 3 \left(\frac{\tilde{\epsilon}_2 B_2^{(2)}}{a^4} + \tilde{\epsilon}_1 A_1^{(2)} a^2 \right) &= -\frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{2\mu_2 + \mu_1} H_0 \omega a. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se encuentran los valores de las constantes:

- $A_1^{(0)} = \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} H_0 \omega a,$
- $A_1^{(1)} = -\frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \frac{H_0}{a},$
- $A_1^{(2)} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \right) \frac{H_0 \omega}{a^2},$
- $B_2^{(0)} = \frac{2\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} H_0 \omega a^3,$
- $B_2^{(1)} = -\frac{\alpha(\Theta_1 - \Theta_2)}{2\pi} \frac{3\mu_1\mu_2}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} H_0 a^3,$
- $B_2^{(2)} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\mu_2(\epsilon_1\mu_1 - 1)}{(2\mu_2 + \mu_1)(\tilde{\epsilon}_1 + \tilde{\epsilon}_2)} \right) H_0 \omega a^4.$

Al calcular el término $\vec{v} \times \vec{B}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= (\vec{\omega} \times \vec{B}) = -H_0 \omega r \left(\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \right) (\hat{e}_z \times \hat{e}_r) \times \hat{e}_z \\ &= -H_0 \omega r \left(\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \right) \hat{e}_z \times (\sin \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z) \times \hat{e}_z \\ &= -H_0 \omega r \left(\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \right) [\hat{e}_y - \hat{e}_x] \times \hat{e}_z \\ &= -H_0 \omega r \left(\frac{3\mu_2}{2\mu_2 + \mu_1} \right) [\hat{e}_x + \hat{e}_y]. \end{aligned}$$

Referencias

- [1] Wikipedia, “Efecto hall, url: [https://es.wikipedia.org/wiki/efecto hall](https://es.wikipedia.org/wiki/efecto_hall),” (2019), [24-12-2019].
- [2] D. Tong, “Lectures on the quantum hall effect,” (2016), arXiv:1606.06687 [hep-th] .
- [3] NQS, “Electron transport in topological insulator edge states,” (2016), [10-01-2020].
- [4] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).
- [5] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Reviews of Modern Physics **83**, 1057–1110 (2011).
- [6] PhysicsStackExchange, “Boundary condition in a real conductor,” (2018), [24-12-2019].
- [7] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed. (Wiley, 2004).
- [8] S. Holgate, *Understanding Solid State Physics* (Taylor & Francis, 2009).
- [9] M. Franz and L. Molenkamp, *Contemporary Concepts of Condensed Matter Science* (Elsevier, Oxford, UK, 2013).
- [10] J. K. Asbóth, L. Oroszlány, and A. Pályi, Lecture Notes in Physics (2016), 10.1007/978-3-319-25607-8.
- [11] A. Martín-Ruiz, M. Cambiaso, and L. F. Urrutia, Phys. Rev. D **92**, 125015 (2015).
- [12] D. Neamen, *An Introduction to Semiconductor Devices*, 1st ed. (McGraw-Hill, Inc., USA, 2005).
- [13] J. A. Crosse, “Theory of topological insulator waveguides: polarization control and the enhancement of the magneto-electric effect,” (2015), arXiv:1510.06130 [physics.optics] .
- [14] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **58**, 1799 (1987).

- [15] L. Landau and E. Lifshitz, *Electrodynamics Of Continuous Media.*, 2nd ed. (Pergamon press, Russia, Moscow, 1981).
- [16] D. Jefimenko, *Electricity and Magnetism.*, 2nd ed. (Electret Scientific, USA, Virginia, 1989).
- [17] E. Hall, *On a New Action of the Magnet on Electric Currents* (1879).
- [18] N. N. Arora, *MOSFET models for VLSI circuit simulation : theory and practice* (Wien ; New York : Springer-Verlag, 1993) includes index.
- [19] S.-Q. Shen, “Topological phases in one dimension,” in *Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matter* (Springer Singapore, Singapore, 2017) pp. 81–90.
- [20] M. V. Berry, Proc. R. Soc. Lond. A **392**, 45 (1984).
- [21] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **61**, 2015 (1988).
- [22] C.-X. Liu, S.-C. Zhang, and X.-L. Qi, “The quantum anomalous hall effect,” (2015), arXiv:1508.07106 [cond-mat.mes-hall] .
- [23] F. Dolcini, “Electron transport in topological insulator edge states,” (2018), [26-12-2019].
- [24] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Physics Today **63**, 33–38 (2010).
- [25] T. L. Hughes, E. Prodan, and B. A. Bernevig, Physical Review B **83** (2011), 10.1103/physrevb.83.245132.
- [26] P. Sengupta, T. Kubis, Y. Tan, M. Povolotskyi, and G. Klimeck, Journal of Applied Physics **114** (2013), 10.1063/1.4813877.
- [27] D. Jackson, *Classical Electrodynamics.*, 2nd ed. (Electret Scientific, USA ,Berkeley California, 1998).
- [28] L. Landau and E. Lifshitz., *Teoría Clásica De Los Campos.*, 2nd ed. (Editorial Reverté, España ,Barcelona, 1992).
- [29] S. M. Carroll, (1997), arXiv:gr-qc/9712019 [gr-qc] .
- [30] W. Rindler, Scholarpedia **7**, 10905 (2012), revision #137229.

- [31] Feynman lectures, “The tensor of polarizability,” (2006), [30-12-2019].
- [32] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics* (Addison Wesley, 2002).
- [33] L. Landau, E. Lifshitz, J. Sykes, and J. Bell, *Mechanics*, Butterworth-Heinemann (Elsevier Science, 1976).
- [34] G. Gabrielse, D. Hanneke, T. Kinoshita, M. Nio, and B. Odom, Phys. Rev. Lett. **97**, 030802 (2006).
- [35] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1973*, edited by Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973).
- [36] J. Schwinger, L. Deraad, K. Milton, W. Tsai, and J. Norton, *Classical Electrodynamics*, Advanced book program (Avalon Publishing, 1998).
- [37] A. Zangwill, *Modern electrodynamics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013).
- [38] J. C. Granada., *Curso de teoría electromagnética para físicos*. (Universidad del Valle, Programa Editorial, 2011).
- [39] W. Greiner, *Classical Electrodynamics*. (Springer-Verlag, New York, 1998).
- [40] J. Hofmann and S. Das Sarma, Physical Review B **93** (2016), 10.1103/physrevb.93.241402.
- [41] A. Karch, Physical Review B **83** (2011), 10.1103/physrevb.93.241402.
- [42] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics; 4th ed.* (Pearson, Boston, MA, 2013) re-published by Cambridge University Press in 2017.
- [43] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Graduate student series in physics (Hilger, Bristol, 1990).
- [44] E. Taylor, E. John Archibald Wheeler, E. Taylor, J. Wheeler, and U. Wheeler, *Spacetime Physics* (W. H. Freeman, 1992).
- [45] R. Haskell, *Special Relativity and Maxwell’s Equations* (CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014).

- [46] D. Kleppner and R. J. Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* (Cambridge University Press, 2010).
- [47] H. Young, F. Sears, R. Freedman, M. Zemansky, A. Ford, J. Brito, V. Flores, and R. Leal, *Física universitaria con física moderna 12ED. Volumen II*, Física universitaria No. v. 2 (Pearson Educación, 2009).
- [48] J. R. Reitz, R. W. Christy, and F. J. Milford, *Foundations of electromagnetic theory*, 4th ed. (Reading, Mass. : Addison-Wesley Pub. Co, 1992) pbk. format published 2009.
- [49] P. D. Lax, *Linear Algebra and Its Applications*, 2nd ed. (Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2007).
- [50] E. Nering, *Linear algebra and matrix theory* (Wiley, 1970).
- [51] T. Apostol, *Funciones de Varias Variables*, v. 2 (Reverté, 1996).
- [52] L. C. Evans, *Partial differential equations* (American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010).
- [53] J. Clerk-Maxwell, Proceedings of the London Mathematical Society **s1-3**, 224 (1869), <http://oup.prod.sis.lan/plms/article-pdf/s1-3/1/224/4316561/s1-3-1-224.pdf> .
- [54] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed. (Academic Press, Inc., San Diego, 1985).
- [55] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory* (Springer).
- [56] A. Polyanin and V. Zaitsev, *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations* (2002).
- [57] T. Myint-U and L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers* (2007).
- [58] J. Mathews and R. Walker, *Mathematical Methods of Physics*, Addison-Wesley World Student Series (W. A. Benjamin, 1970).
- [59] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, ninth dover printing, tenth gpo printing ed. (Dover, New York, 1964).

- [60] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, seventh ed. (Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007) pp. xlviii+1171, translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).
- [61] M. Spiegel, *Manual de formulas y tablas matematicas: 2400 formulas y 60 tablas*, Serie de compendios Schaum (McGraw-Hill, 1970).
- [62] Wikipedia, “Fine-structure constant,” (2019), [26-12-2019].
- [63] Wikipedia, “Doble producto vectorial,” (2019), [26-12-2019].
- [64] Z. Wang, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, Physical Review Letters **105** (2010), 10.1103/physrevlett.105.256803.
- [65] Wikipedia, “Permeabilidad magnética,” (2019), [30-12-2019].