



Fortaleciendo el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática en
estudiantes de grado noveno con una secuencia didáctica diseñada en GeoGebra

Nelson Alejandro Leudo

Oscar Bernardo Trujillo Gil

Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca.

Facultad de Educación y Pedagogía.

Escuela de Ciencias, Tecnologías y Culturas.

Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

Junio del 2025



Fortaleciendo el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática en
estudiantes de grado noveno con una secuencia didáctica diseñada en GeoGebra

Nelson Alejandro Leudo

Oscar Bernardo Trujillo Gil

Dirigido por: Mg. Estefanía Muñoz.

Universidad del Valle, Sede Norte del Cauca.

Facultad de Educación y Pedagogía.

Escuela de Ciencias, Tecnologías y Culturas.

Licenciatura en Educación con énfasis en Matemáticas.

Junio del 2025

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios, fuente de sabiduría y fortaleza, por haberme acompañado en cada paso de este camino académico, dándome la perseverancia necesaria para culminar esta etapa con éxito.

A mi esposa Marisol y a mis hijos Jesús y Fernando, gracias por su amor incondicional, su paciencia y su apoyo constante. Ellos han sido mi principal motivación y sostén durante los momentos de mayor exigencia y dificultad.

Agradezco profundamente a mi tutora, por su orientación, dedicación y compromiso en la revisión y acompañamiento de este trabajo. Su guía fue clave para mantener la coherencia y el rigor en cada etapa del proceso investigativo.

De igual manera, extendiendo mi gratitud a los evaluadores de esta tesis, por sus observaciones críticas, sus aportes constructivos y el tiempo dedicado a la lectura y análisis de este proyecto. Su mirada enriqueció significativamente los alcances del trabajo.

Finalmente, gracias a todas las personas e instituciones que hicieron posible el desarrollo de esta investigación. Cada uno desde su lugar, contribuyó a que este esfuerzo llegara a buen término.

Oscar Bernardo Trujillo Gil.

Expreso mi más sincero agradecimiento, principalmente a Dios, por brindarme la vida, salud y la fortaleza necesaria para culminar con éxito esta etapa académica.

A mis padres, Nelson y Maricela, les agradezco profundamente por su amor incondicional, su guía constante y el compromiso ejemplar con mi formación. Su apoyo ha sido un pilar fundamental en mi desarrollo personal y profesional.

A mi hermana Elena, mi novia Paula por su compañía, afecto, palabras de aliento que han sido un sostén invaluable en los momentos de dificultad.

Deseo expresar un especial reconocimiento a mi tutora, cuya experiencia, compromiso y sentido académico, fueron fundamentales para el desarrollo de este trabajo. Su acompañamiento constante y sus valiosas orientaciones permitieron consolidar un trabajo coherente, riguroso y con un sentido formativo.

A la profesora Adriana García, por su constante compromiso, su gestión y, especialmente, por el valioso apoyo brindado en momentos adverso. Su disposición y empatía fueron fundamentales para superar diversas dificultades a lo largo de este proceso.

Asimismo, agradezco a sinceramente a los evaluadores de este trabajo de grado por la rigurosidad de su análisis, la calidad de sus observaciones y el compromiso demostrado durante el proceso de observación. Sus aportes críticos y constructivos contribuyeron significativamente al enriquecimiento académico y metodológico de esta investigación.

Por último, a los docentes, compañeros y demás personas que, directa o indirectamente, contribuyeron con su conocimiento, experiencia y apoyo a lo largo de mi formación universitaria, les expreso mi más sincera gratitud. A todos, gracias por hacer parte de este logro.

Nelson Alejandro Leudo Rivas

Tabla de contenido

Introducción	13
Capítulo I. Aspectos generales.....	16
1.1 Contextualización del problema y justificación.....	16
1.2 Objetivos	22
1.2.1 Objetivo General.	22
1.2.2 Objetivos Específicos	23
Capítulo II. Fundamentos teóricos.....	24
2.1 Referente Curricular.....	26
2.2 Referente Matemático	30
2.2.1 Definición Algebraica	30
2.2.2 Geometría Analítica y Transformaciones.	31
2.3 Referente Didáctico	33
2.3.1 Las Teorías de Secuencia Didáctica de Guy Brousseau.	33
2.3.2 Secuencias Didácticas.	35
2.3.3 Registros De Representación En La Teoría De Duval.....	37
2.4 Referente Tecnológico: Integración De GeoGebra.....	40
2.4.1 Representación Gráfica.	41
Capítulo III. Metodología	44
3.1 Enfoque de la Investigación.....	45
3.2 Descripción De La Institución Educativa y Estudiantes.....	49
3.3 Fases Del Diseño Metodológico De La Investigación.....	50

3.4	Descripción De Las Situaciones	53
	Capítulo IV Análisis y resultados	56
4.1	Análisis De Los Resultados De La Situación 1. Reconocimiento De La Función Cuadrática A Partir Del Lanzamiento De Una Pelota.	57
4.2	Análisis de los resultados de la Situación 2: Determinar la concavidad de una parábola . 67	
4.3	Análisis De Los Resultados De La Situación 3: Relación Entre Concavidad, Máximos Y Mínimos, Contracción Y Dilatación.	76
4.4	Análisis de los resultados de la situación 4: Transformaciones.....	97
4.5	Análisis de los resultados de la Situación Final: Desplazamiento mixto.....	110
	Capitulo V. Conclusiones	132
5.1	Recomendaciones	136
	Referencias.....	139
	Anexos: Diseño de la secuencia didáctica	143

Índice de Figuras

Figura 1 Representación de la concavidad de la parábola	30
Figura 2 Dilataciones y contracciones	32
Figura 3 Desplazamiento horizontal	32
Figura 4 Deslizador	41
Figura 5 Producción escrita de E4	62
Figura 6 Fragmento de la respuesta de E3	63
Figura 7 Producción escrita por E6	63
Figura 8 Evidencia fotográfica de acierto de estudiantes E1, E2, E3, E4, y E6	66
Figura 9 Evidencia fotográfica del error de E5	67
Figura 10 Producción escrita de E1 y E2	70
Figura 11 Producción escrita de E3	70
Figura 12 Producción escrita de E4	71
Figura 13 Producción escrita de E5	71
Figura 14 Producción escrita de E6	71
Figura 15 Selección de los estudiantes E1, E2, E3 y E6	74
Figura 16 Selección del estudiante E4	75
Figura 17 Producción escrita de E3	80
Figura 18 Evidencia fotográfica de E6	81
Figura 19 Producción escrita de E2	84
Figura 20 Fotografía de acierto del estudiante E2	90
Figura 21 Producción escrita de E1	90

Figura 22 Producción escrita de E2	90
Figura 23 Producción escrita de E4	91
Figura 24 Producción escrita de E4	95
Figura 25 Trabajo de E4 en GeoGebra	95
Figura 26 Producción escrita de E6	96
Figura 27 Producción escrita de E3	97
Figura 28 Producción escrita de E1	102
Figura 29 Producción escrita de E2	102
Figura 30 Producción escrita de E3	102
Figura 31 Producción escrita de E4	103
Figura 32 Evidencia de no participación de E5	103
Figura 33 Producción escrita de E6	103
Figura 34 Producción escrita de E1	108
Figura 35 Producción escrita de E2	108
Figura 36 Producción escrita de E3	109
Figura 37 Producción escrita de E4	109
Figura 38 Producción escrita de E5	110
Figura 39 Producción escrita de E6	110
Figura 40 Producción escrita de E1	118
Figura 41 Producción escrita de E2	118
Figura 42 Producción escrita de E3	119
Figura 43 Producción escrita de E2	119
Figura 44 Producción escrita de E4	120

Figura 45 Producción escrita de E5	120
Figura 46 Producción escrita de E6	121
Figura 47 María lanza la pelota.....	144
Figura 48 Gráfica de la función cuadrática	145
Figura 49 Identifique gráficas	146
Figura 50 Grafico de concavidad de una parábola.....	146
Figura 51 Grafico de concavidad	147
Figura 52 Grafico de concavidad	148
Figura 53 Formulas de concavidad	149
Figura 54 Grafica Máximo y Mínimo	150
Figura 55 Formula Máximo y Mínimo	151
Figura 56 Formula Máximo y Mínimo	152
Figura 57 Contracción y Dilatación	154
Figura 58 Desplazamiento Vertical.....	155
Figura 59 Desplazamiento Vertical.....	156
Figura 60 Desplazamiento Horizontal	157
Figura 61 Desplazamiento Horizontal	158
Figura 62 Mixto	159

Índice de Tablas

Tabla 1 Coherencia horizontal.	28
Tabla 2 Coherencia vertical.	28
Tabla 3 Fases del diseño metodológico de la investigación.	50
Tabla 4 Elementos conceptuales y procedimentales asociados a las transformaciones de la función cuadrática	52
Tabla 5 Análisis de resultados preguntas 1 y 3.	59
Tabla 6 Análisis de resultados pregunta 2.	61
Tabla 7 Análisis de las respuestas de los estudiantes.....	69
Tabla 8 Preguntas 1 y 2. Identificación de máximos y mínimos	79
Tabla 9 Preguntas 3 y 4.....	82
Tabla 10 Análisis de las preguntas de la Situación 3.....	88
Tabla 11 Análisis de las respuestas de contracción y dilatación.....	93
Tabla 12 Análisis parte 1 desplazamiento vertical.....	100
Tabla 13 Análisis parte 2. Desplazamiento horizontal	106
Tabla 14 Análisis de las preguntas grupo 1. Estudiante.	113
Tabla 15 Análisis de las preguntas grupo 2.	115
Tabla 16 Construcción de unidades simbólicas pertinentes para el registro gráfico	128
Tabla 17 Progresos y obstáculos de los estudiantes a lo largo de las cinco situaciones.....	129

Resumen

La presente investigación tuvo como propósito favorecer la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Fidelina Echeverry, quienes presentaban dificultades en su aprendizaje. Para ello, se diseñó e implementó una secuencia didáctica fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau e incorporando el software de GeoGebra como recurso mediador.

La metodología utilizada fue el estudio de caso múltiple con enfoque cualitativo, en el que participaron estudiantes seleccionados estratégicamente. La secuencia incluyó cinco situaciones que abordaron las transformaciones de la parábola desde distintos registros de representación (gráfico, algebraico, tabular y verbal), permitiendo observar cómo los estudiantes movilizaban conocimientos al enfrentar situaciones de conversión y tratamiento entre registros, según la teoría de Duval. El análisis evidenció progresos en la comprensión del objeto matemático, así como obstáculos epistemológicos y didácticos que surgieron durante el proceso.

Se concluye que la integración de GeoGebra en un ambiente didáctico estructurado permitió a los estudiantes visualizar y dar sentido a las transformaciones cuadráticas, favoreciendo el paso entre representaciones y la construcción de significados más sólidos. El estudio aporta una propuesta didáctica pertinente y replicable para el fortalecimiento del pensamiento funcional en la educación básica.

Palabras clave: Función cuadrática, transformaciones, registros semióticos, registros movilizados, TSD, GeoGebra.

Abstract

The purpose of this research was to promote the understanding of transformations of the quadratic function in ninth-grade students at the Fidelina Echeverry Educational Institution, who were experiencing learning difficulties. To this end, a teaching sequence was designed and implemented based on Brousseau's Theory of Didactic Situations (TSD) and incorporating GeoGebra software as a mediating resource.

The methodology used was a multiple-case study with a qualitative approach, in which strategically selected students participated. The sequence included five situations that addressed transformations of the parabola from different representational registers (graphical, algebraic, tabular, and verbal), allowing us to observe how students mobilized knowledge when faced with situations involving conversion and processing between registers, according to Duval's theory. The analysis revealed progress in understanding the mathematical object, as well as epistemological and didactic obstacles that arose during the process. It is concluded that the integration of GeoGebra into a structured learning environment allowed students to visualize and make sense of quadratic transformations, facilitating the transition between representations and the construction of more robust meanings. The study provides a relevant and replicable teaching approach for strengthening functional thinking in elementary education.

Keywords: Quadratic function, transformations, semiotic registers, mobilized registers, TSD, GeoGebra.

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas, especialmente en el contexto del álgebra, presenta numerosos desafíos en el ámbito educativo colombiano, donde las dificultades en la comprensión de conceptos fundamentales como las transformaciones de la función cuadrática, son una problemática recurrente. Esta investigación se enfoca en fortalecer dicho aprendizaje mediante el uso de recursos tecnológicos, específicamente el software de GeoGebra, y un enfoque pedagógico basado en las Teorías de situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau y los cambios de registro semiótico de Duval.

Estos marcos teóricos proporcionan una base sólida para el diseño de secuencias didácticas que favorecen la comprensión de las transformaciones algebraicas a través de la visualización y manipulación dinámica de las funciones. GeoGebra, como software interactivo, ofrece diversos beneficios en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Entre sus ventajas más destacadas se encuentra la capacidad de representar funciones matemáticas de manera visual, lo que favorece la comprensión de conceptos abstractos como las transformaciones de la función cuadrática.

Además, permite a los estudiantes manipular la función en tiempo real, promoviendo un aprendizaje activo y participativo. Esta interacción directa no solo mejora la visualización de los cambios en los gráficos, sino que también ayuda a los estudiantes a establecer conexiones entre los diferentes registros de representación (gráfico, algebraico y numérico), lo cual está alineado con las teorías de Duval sobre los cambios de registro.

En este sentido, GeoGebra se presenta como un recurso para apoyar el aprendizaje autónomo y la resolución de problemas, favoreciendo la comprensión de conceptos.

En términos generales, la investigación permitió concluir que la secuencia didáctica diseñada favoreció la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en los estudiantes de grado noveno. El uso de GeoGebra, junto con los cambios de registro planteados por Duval y las situaciones didácticas de Brousseau, facilitó la transición entre representaciones algebraicas, gráficas y verbales. De esta manera, los estudiantes lograron identificar la influencia de los coeficientes en la forma y posición de la parábola, superando algunas dificultades habituales en este aprendizaje.

Estos resultados evidencian la pertinencia de integrar recursos tecnológicos y marcos teóricos complementarios en el aprendizaje y enseñanza de la función cuadrática.

La investigación se organiza en cinco capítulos. El primer capítulo ofrece una contextualización del problema, haciendo un barrido histórico de las dificultades en el aprendizaje del álgebra en Colombia, así como la justificación de la necesidad de mejorar la enseñanza de las transformaciones de la función cuadrática. En el segundo capítulo se exploran los fundamentos teóricos que sustentan esta propuesta, explicando las teorías de Brousseau, Duval y como pueden ser aplicadas al contexto del aprendizaje algebraico.

El tercer capítulo describe la metodología seguida para el diseño y aplicación de la secuencia didáctica en GeoGebra, detallando las estrategias empleadas para favorecer el aprendizaje. Finalmente, se presentan las referencias bibliográficas que sustentan el marco teórico y metodológico de la investigación.

El cuarto capítulo describe el análisis de las cinco situaciones presentada por los estudiantes.

Por último, el quinto capítulo describe las conclusiones relacionadas con la comprensión que los estudiantes alcanzaron acerca de las transformaciones de la función cuadrática, a partir de las situaciones diseñadas.

Capítulo I. Aspectos generales

1.1 Contextualización del problema y justificación

La enseñanza del álgebra en Colombia ha transitado por distintas etapas que reflejan cambios en las orientaciones curriculares y en la concepción misma de las matemáticas escolares. Durante gran parte del siglo XX prevaleció un enfoque formalista, centrado en la repetición de reglas y en el dominio algorítmico (Franco Urrea & Torres Rengifo, 2021). Este modelo, basado en la memorización, redujo la posibilidad de que los estudiantes comprendieran el sentido del lenguaje algebraico, generando una percepción negativa de la matemática como un saber abstracto y poco útil para la vida cotidiana. A nivel internacional, la UNESCO (1997) advertía que los países latinoamericanos enfrentaban dificultades estructurales para garantizar aprendizajes significativos en matemáticas, en particular en la transición del pensamiento aritmético al algebraico.

En Colombia, con la promulgación de la Ley General de Educación (Ley 115 de 1994), se abrió un camino hacia la renovación pedagógica, reconociendo la importancia de un aprendizaje integral que incluyera el desarrollo del pensamiento matemático. Más adelante, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) propusieron la noción de pensamiento variacional como eje para comprender fenómenos de cambio y variación. Los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) consolidaron estos planteamientos, promoviendo el razonamiento algebraico y el modelamiento como herramientas centrales. En los últimos años, los Derechos Básicos de Aprendizaje – DBA (MEN, 2016) y las orientaciones sobre Competencias Siglo XXI han reforzado la necesidad de integrar recursos tecnológicos y metodologías activas. No obstante, como señalan Mejía y Velasco (2020), la aplicación de estas

políticas ha sido desigual, y muchas aulas todavía mantienen prácticas tradicionales que reproducen los mismos obstáculos de décadas anteriores.

El paso hacia el pensamiento algebraico ha sido documentado como una de las transiciones más complejas en la formación matemática. Gómez (1994) y Edel (2003) subrayan que los vacíos en aritmética y geometría generan barreras significativas en el aprendizaje del álgebra. Areces et al. (2017) y Sánchez (2019) muestran que los estudiantes conciben las letras algebraicas únicamente como incógnitas, sin reconocerlas como variables que cambian en dependencia de otras magnitudes. Estas limitaciones explican por qué muchos estudiantes logran resolver procedimientos aislados, pero fracasan al enfrentar problemas contextualizados o al dar sentido a los símbolos que manipulan.

La función cuadrática constituye un objeto matemático central en la educación secundaria. Su forma general se expresa como $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, donde el parámetro a determina la concavidad y apertura de la parábola, el parámetro b incide en la posición del vértice y en la simetría, mientras que el parámetro c corresponde al punto de intersección con el eje y . De esta expresión se deriva la llamada forma canónica: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, en la cual (h, k) representa el vértice de la parábola, y su análisis permite describir de manera más directa los desplazamientos horizontales y verticales respecto a la parábola prototipo $y = ax^2$ (Stewart, 2012). En este sentido, la comprensión de ambas expresiones algebraicas es fundamental para que los estudiantes logren relacionar parámetros simbólicos con características geométricas de la gráfica.

Diversos estudios han mostrado que, aunque los alumnos pueden operar algebraicamente con la fórmula general, encuentran obstáculos al vincular esos cálculos con la representación gráfica. Por ejemplo, suelen identificar el coeficiente cuadrático a como un número sin

significado geométrico, o confundir el parámetro c con cualquier punto de la gráfica (López & Peña, 2015; Rodríguez & Rincón, 2022). Este desfase entre lo algebraico y lo gráfico confirma que no basta con el dominio de procedimientos aislados, sino que se requiere favorecer la articulación de registros de representación que permita un reconocimiento global de la función cuadrática.

La literatura reciente en educación matemática en Colombia reporta que buena parte de las dificultades al trabajar funciones cuadráticas no reside solo en la técnica, sino en articular registros: los estudiantes leen o manipulan la gráfica, pero no consiguen expresar esa misma idea en el registro algebraico y viceversa. En ese sentido, Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013) documentan problemas persistentes al coordinar expresiones simbólicas con gráficos en secundaria, lo que refuerza la necesidad de propuestas didácticas que hagan explícitas las conversiones entre registros.

En este estudio, este vacío se aborda con un diseño que combina la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) y la teoría de registros de representación de Duval. La TSD aporta criterios para diseñar situaciones que van de tareas accesibles a otras más complejas, con momentos de acción, formulación y validación, y con espacios sistemáticos de retroalimentación; esto se materializa en una secuencia progresiva mediada por GeoGebra, donde los estudiantes puedan explorar, conjeturar, contrastar y dar sentido a los conceptos implicados.

El uso de GeoGebra en ese marco no es accesorio: constituye parte del medio que retroalimenta al estudiante y le permite visualizar cómo cambian las parábolas cuando se modifican a , h , k en la forma canónica, relacionando la escritura simbólica con los desplazamientos, dilataciones/contracciones y reflexiones en el plano. Así, cada situación de la

secuencia está pensada para provocar interacciones que conduzcan a la formulación de conjeturas con evidencia gráfica y simbólica.

Desde Duval, el foco está en distinguir entre tratamientos (operar dentro del mismo registro: por ejemplo, calcular en una tabla o transformar una ecuación) y conversiones (pasar de un registro a otro: de la gráfica a la fórmula, del valor tabular al punto). Las situaciones diseñadas permiten anticipar dónde se pueden facilitar y dónde se traban esas conversiones, y cómo el apoyo visual dinamiza el registro gráfico, pero exige andamiaje para ir y volver del registro algebraico.

Un aspecto clave del marco de Duval que esta investigación resalta es la vía de interpretación global: comprender la gráfica como un todo —simetría, vértice, eje y apertura— y no como puntos aislados. Esta vía permite reconocer variables visuales que se corresponden con unidades simbólicas de la escritura algebraica; por eso es tan potente para conectar el movimiento de la parábola con los parámetros que lo generan. Al coordinar registros, esta vía evita recurrir a cálculos y promueve un reconocimiento cualitativo de las unidades simbólicas pertinentes.

Para operativizar lo anterior, la secuencia incorpora una guía de punteo y tareas que demandan reconocer el vértice, los puntos de intersección y el eje de simetría como anclas para describir y justificar transformaciones. La propuesta busca que se exijan justificaciones en un registro distinto del que se observó la regularidad (por ejemplo, explicar en álgebra lo visto en gráfica), tal como propone Duval para consolidar el significado.

La articulación TSD–Duval se plantea así: la TSD define cómo estructurar las situaciones (progresión, roles, tipos de interacción y criterios de evaluación), mientras que Duval define qué procesos semióticos se espera movilizar y cómo se interpretan las producciones (tratamientos vs.

conversiones, obstáculos y desarrollo de la interpretación global). Esta dupla sostiene tanto el diseño como el análisis que se desarrollará.

Finalmente, el diagnóstico de dificultades en conversiones semióticas respaldado por Diaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013), justifica la necesidad de orientar la secuencia didáctica hacia la coordinación explícita de los registros gráfico y algebraico con apoyo del software GeoGebra. En este marco, resulta indispensable promover que los estudiantes produzcan explicaciones en registros distintos al de la observación inicial, de manera que logren articular representaciones y ampliar sus posibilidades de comprensión.

Esta reflexión conduce directamente a la identificación de un vacío persistente en la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, pues en la práctica escolar se ha privilegiado un enfoque mecanicista y algorítmico, centrado en la aplicación de fórmulas, que no favorece la conversión entre registros ni el desarrollo de un razonamiento gráfico significativo. Tal limitación obstaculiza que los estudiantes comprendan la función cuadrática como un objeto matemático integral y no solo como un procedimiento aislado.

En este sentido, la elección del grado noveno responde a un criterio académico y curricular. Según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), en este nivel se introduce de manera formal el estudio de la función cuadrática como parte del desarrollo del pensamiento variacional. Tal como se señala en dichos lineamientos:

“En el grado noveno se introduce de manera formal el estudio de la función cuadrática, como parte del desarrollo del pensamiento variacional, preparando al estudiante para el análisis de fenómenos de cambio y el estudio de funciones más complejas en grados posteriores” (MEN, 1998, p. 67).

De esta manera, se busca no solo favorecer la comprensión de la función cuadrática en sus diferentes registros de representación, sino también fortalecer las bases para aprendizajes de mayor complejidad, como el estudio de funciones generales y el cálculo diferencial e integral en la educación media.

En coherencia con lo anterior, la selección de la Institución Educativa Fidelina Echeverry no obedece a una decisión circunstancial, sino que se sustenta en la experiencia adquirida a través de los procesos de práctica pedagógica realizados en la institución. Dichas prácticas permitieron identificar de primera mano las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la función cuadrática, especialmente en aspectos como la interpretación de la concavidad, los desplazamientos de la gráfica y la comprensión de las transformaciones algebraicas.

Estos hallazgos constituyen una base sólida para el diseño de una propuesta didáctica que responda a las necesidades concretas observadas en la institución, y que al mismo tiempo pueda adaptarse a otros contextos educativos con problemáticas similares.

En concordancia con la teoría de Duval, este es un punto estratégico para fortalecer la capacidad de conversión entre registros semióticos, pues la función cuadrática permite movilizar de manera clara registros algebraicos, gráficos y tabulares. Al mismo tiempo, desde la perspectiva de Brousseau, se configura un escenario propicio para plantear situaciones didácticas en las que el estudiante asuma un rol activo, explorando y validando propiedades de la función cuadrática a través de preguntas diseñadas con intencionalidad matemática.

El marco teórico de Duval y Brousseau proporcionan la base para este propósito: mientras el primero permite identificar las dificultades asociadas a la movilización de registros, el segundo ofrece un marco para diseñar situaciones didácticas que respondan a dichas

dificultades, promoviendo aprendizajes más profundos, inclusivos y equitativos en torno a las transformaciones de la función cuadrática.

En síntesis, la secuencia didáctica diseñada desde la TSD e interpretada con los aportes de Duval busca superar obstáculos de tratamiento y conversión, fortalecer la vía de interpretación global y consolidar la correspondencia entre unidades simbólicas (a, h, k) y variables visuales de la parábola mediante GeoGebra, articulando de esta manera los propósitos pedagógicos con las necesidades reales de los estudiantes y el contexto institucional en el que se desarrolla la propuesta.

Con base en este marco y en el contexto institucional descrito, se presenta la pregunta problema que orienta esta investigación.

A través de este enfoque, los estudiantes podrán participar en un proceso de interacción y reconocimiento de las representaciones en la secuencia didáctica. A partir de esta propuesta surge la siguiente pregunta:

¿Cómo fortalecer la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Fidelina Echeverry que enfrentan dificultades en su aprendizaje, a través de una secuencia didáctica basada en las TSD e incorporando el software de GeoGebra?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General.

Fortalecer la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en estudiantes del grado noveno de La Institución Educativa Fidelina Echeverry que enfrentan dificultades en

su aprendizaje, a través del diseño de una secuencia didáctica basada en las TSD e incorporando el software de GeoGebra.

1.2.2 *Objetivos Específicos*

- Diseñar e implementar una secuencia didáctica desde la Teoría de situaciones Didácticas para favorecer el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática.
- Identificar las unidades simbólicas relevantes del registro algebraico de la función cuadrática que correspondan a las variables pertinentes en el registro gráfico, una vez implementada la secuencia didáctica.
- Caracterizar los aprendizajes de los estudiantes de grado noveno relacionados con el concepto de función cuadrática, a partir del análisis de sus producciones, registros movilizados y estrategias durante la implementación de la secuencia didáctica.

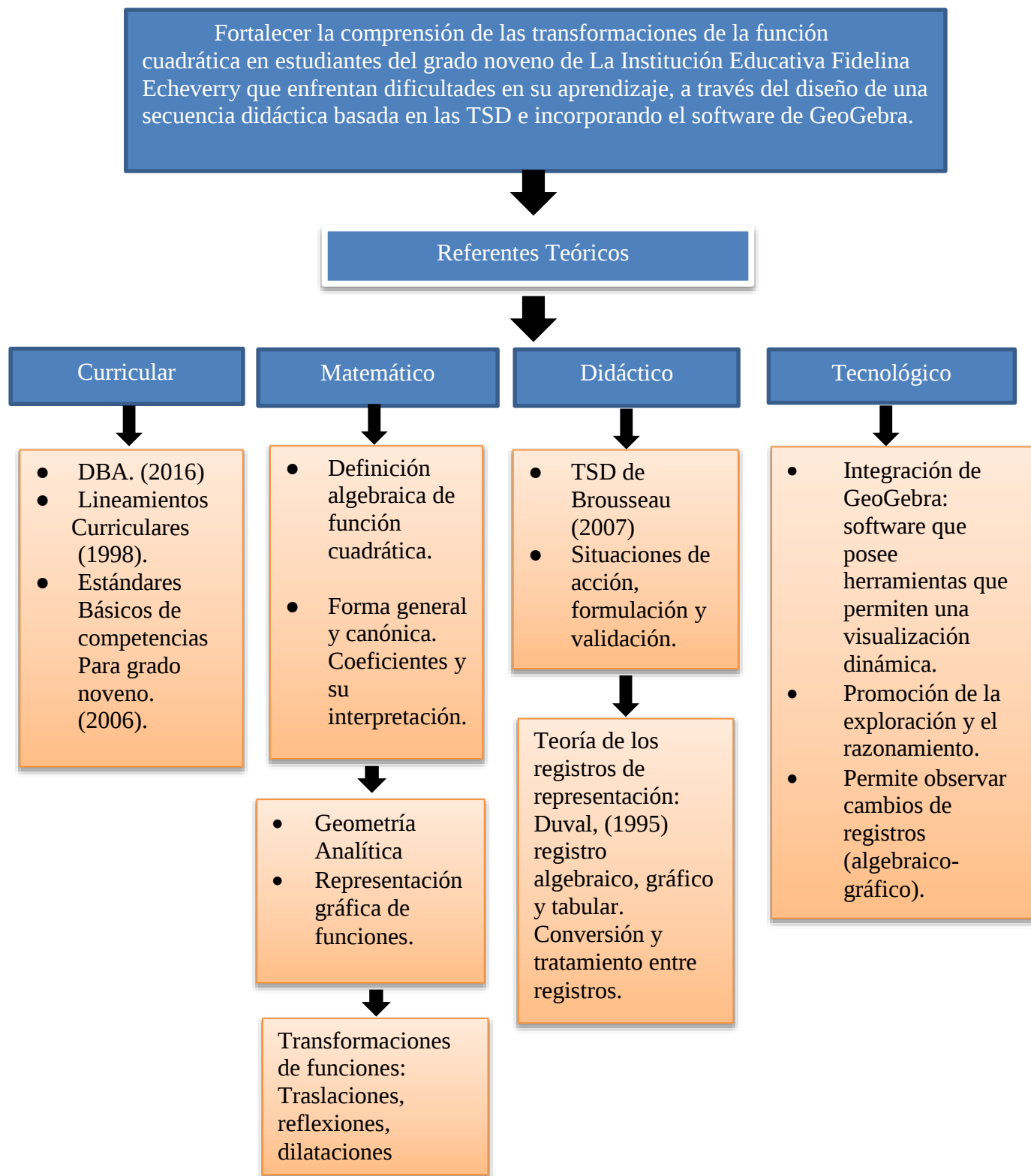
Capítulo II. Fundamentos teóricos

El estudio de la función cuadrática y sus transformaciones es una parte esencial del currículo de matemáticas en la educación secundaria. Esta función no solo tiene un valor teórico, sino que también posee una gran aplicabilidad práctica en diversas áreas, como la física, la economía y la ingeniería.

Con el advenimiento de las tecnologías y el uso de software como GeoGebra, el aprendizaje de este concepto matemático se ha enriquecido al permitir a los estudiantes explorar y visualizar dinámicamente las propiedades de la parábola y sus transformaciones.

Este marco teórico se enfoca en profundizar en los cuatro referentes clave para un aprendizaje integral de la función cuadrática: curricular, matemático, didáctico y tecnológico, con un enfoque particular en el uso de GeoGebra como recurso educativo.

A continuación, se anexa un cuadro sinóptico que moviliza los referentes teóricos en nuestra investigación:



Nota: Elaboración propia

2.1 Referente Curricular

En el contexto educativo colombiano, el referente curricular está definido por los Lineamientos Curriculares, estándares Básicos de Competencias, y Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) en matemáticas. Estos documentos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), proporcionan una guía para el aprendizaje de las funciones cuadráticas, asegurando que los estudiantes desarrollen competencias fundamentales en el área matemática.

Los Lineamientos Curriculares del MEN (1998), para la educación secundaria, plantea que los estudiantes deben ser capaces de representar, analizar y transformar funciones cuadráticas. Estos lineamientos especifican los objetivos que los docentes deben alcanzar con los estudiantes, los cuales incluyen: interpretación gráfica de la parábola, transformaciones, aplicación de las funciones cuadráticas, en cada uno de ellos los estudiantes deben ser capaces de identificar y analizar las características de la gráfica de la función cuadrática, como el vértice, el eje de simetría, los interceptos y el dominio.

Además, se espera que los estudiantes comprendan las transformaciones geométricas que afectan a la parábola, como traslaciones, dilataciones, compresiones y reflexiones. Así como los Estándares Básicos de Competencias (2006), cuyo enfoque se centra en el pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos, los estudiantes deben ser capaces de: Distinguir entre las propiedades de las gráficas y las de las estructuras algebraicas, reconocer la relación entre los cambios en los parámetros de la función cuadrática y la representación algebraica de una familia de funciones y los efectos de estos cambios en las gráficas correspondientes.

Asimismo, deben ser capaces de analizar, en representaciones en el plano cartesiano, los comportamientos de las funciones específicas dentro de las familias de funciones polinómicas.

Estos estándares, como: Reconocer y representar van a ser visualizados en la secuencia didáctica en situaciones donde los estudiantes deben predecir cómo cambiará la gráfica si se modifican los parámetros a , b , c . Permitiéndoles hacer conjeturas y observar el impacto visual de las transformaciones en GeoGebra.

Desarrollar competencias de razonamiento lógico, en situaciones relacionadas con la comprobación de soluciones, los estudiantes comprobarán y verificarán sus conjeturas a través de la comparación de sus resultados y discusiones entre pares. A medida que los estudiantes trabajen en equipo y compartan sus resultados, se fomentará el razonamiento lógico.

De la misma manera, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) del MEN (2016) en matemáticas aseguran que los estudiantes tengan un conocimiento profundo de los conceptos y habilidades necesarias para abordar funciones cuadráticas. En particular, los DBA abordan el análisis de las propiedades algebraicas de la función cuadrática y su representación gráfica. Los estudiantes deben ser capaces de: Reconocer las formas algebraicas de la función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, y su correspondiente gráfico. También, aplicar las transformaciones, es decir, reconocer el impacto de los parámetros a , h , k en la gráfica y ser capaces de identificar las transformaciones relacionadas con la posición gráfica en el plano cartesiano.

A su vez, fortalece la coherencia vertical, ya que permite consolidar los aprendizajes previos sobre funciones lineales y prepara el terreno para el estudio de modelos polinómicos más complejos de grados superiores. De esta manera, la integración de recursos tecnológicos no solo dinamiza la enseñanza y aprendizaje de la función cuadrática, sino que también contribuye a la progresión lógica del currículo, asegurando una transición fluida entre los diferentes niveles de escolaridad en matemáticas.

A continuación, se ilustra la coherencia horizontal y vertical basada en el aprendizaje y enseñanza de la función cuadrática basado en los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Tabla 1

Coherencia horizontal.

Coherencia horizontal	Pensamiento Variacional: Comprensión de la función cuadrática como un modelo de cambio no constante.
	Pensamiento Algebraico: Expresión simbólica de funciones, factorización, resolución de ecuaciones cuadráticas.
	Pensamiento Geométrico: Interpretación de la función cuadrática como parábola y análisis de sus propiedades.
	Representaciones Múltiples: Coordinación entre registros algebraico, gráfico, numérico y verbal según Duval.
	Uso de herramientas digitales: Exploración de transformaciones mediante GeoGebra para fortalecer la intuición matemática.

Nota: Elaboración propia. Con base en Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016).

Tabla 2

Coherencia vertical.

Coherencia Vertical	Grados anteriores (6-8).	Introducción al concepto de función y variación. Análisis y representación de funciones lineales. Operaciones algebraicas y resolución de ecuaciones de primer grado.
	Grado Noveno (punto de articulación).	Introducción y análisis de la función cuadrática como un modelo no lineal.

Continuación tabla No. 2 Coherencia vertical.

Coherencia Vertical		Propiedades de la parábola: Vértice, eje de simetría, intersecciones. Transformaciones de la función cuadrática y su representación gráfica. Resolución de ecuaciones cuadráticas: factorización, Completación de cuadrados, fórmula general.
	Grados posteriores (10-11).	Profundización en funciones polinómicas de mayor grado. Análisis del comportamiento de funciones a partir de sus derivadas (cálculo). Resolución de ecuaciones cuadráticas en el contexto de números complejos. Aplicaciones avanzadas en modelación matemática y física.

Nota: Elaboración propia. Con base en Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016).

En este contexto, el uso de recursos tecnológicos como lo es el software GeoGebra no solo facilita la visualización de las transformaciones de la función cuadrática, sino que también permite a los estudiantes desarrollar competencias claves en la resolución de problemas, el análisis gráfico y la interpretación matemática, alineándose con los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias favoreciendo la coherencia horizontal, ya que en grado noveno se promueve el pensamiento variacional, algebraico y geométrico mediante la articulación de diferentes representaciones de funciones.

2.2 Referente Matemático

Desde el referente matemático, el aprendizaje de la función cuadrática se centra en su comprensión algebraica y su comprensión con la geometría analítica. El estudio de esta función se enmarca en el álgebra y la geometría analítica, ya que es necesario comprender tanto la expresión algebraica como su representación gráfica.

2.2.1 Definición Algebraica

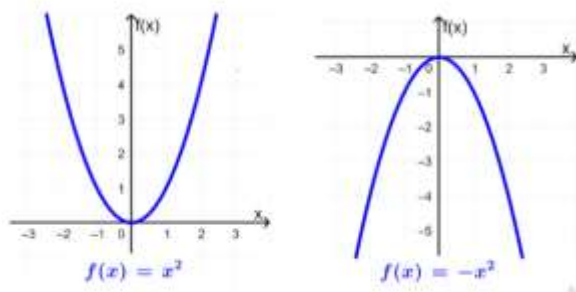
Una función cuadrática es una relación matemática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son constantes y $a \neq 0$ (Stewart, Redlin, & Watson, 2012, p.224). La gráfica de esta función es una parábola, cuyas propiedades geométricas, como el vértice, el eje de simetría y los interceptos, pueden ser analizadas para entender el comportamiento de la función.

El parámetro (coeficiente) a controla la apertura de la parábola (hacia arriba o hacia abajo) y su anchura (contracción y dilatación) como se muestra en la ilustración 1. El valor de b afecta la posición del vértice en el eje x , mientras que c determina el valor de la función en

$$x = 0.$$

Figura 1

Representación de la concavidad de la parábola



Nota. Elaboración propia.

En este sentido, la comprensión de la definición algebraica de la función cuadrática en su forma general y canónica, y el impacto de sus coeficientes en las transformaciones de la parábola se verá enriquecida a través de la utilización de GeoGebra en la secuencia didáctica. Este software permitirá a los estudiantes experimentar de manera interactiva con las variaciones de los coeficientes, promoviendo una visualización más clara de cómo afectan la forma y la posición de la parábola.

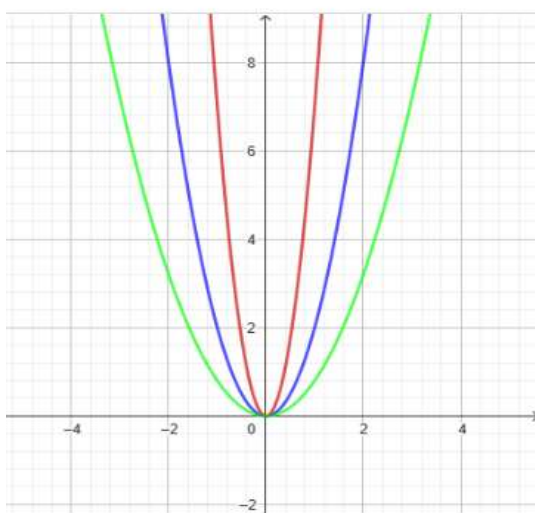
Al integrar el software en el proceso de aprendizaje, se favorece la construcción de conceptos matemáticos de manera más activa, promoviendo el desarrollo de habilidades analíticas y la comprensión de las relaciones algebraicas y geométricas de forma integral. No obstante, su potencial se maximiza cuando el docente diseña y secuencia estratégicamente las situaciones, formulando preguntas orientadoras que dirijan la exploración y fomenten la reflexión. De este modo, la mediación docente no solo guía el uso del software, sino que también asegura que cada interacción con las herramientas del software contribuya a un propósito de aprendizaje.

2.2.2 Geometría Analítica y Transformaciones.

En términos de geometría analítica la función cuadrática es una curva que tiene un vértice que puede ser encontrado usando la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$. La transformación de la parábola ocurre cuando se modifican los parámetros a , h , k en la forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$, (Stewart, Redlin, & Watson, 2012, p.224). Lo que genera traslaciones, dilataciones, contracciones y reflexiones de la gráfica original de la apertura de una parábola como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Dilataciones y contracciones

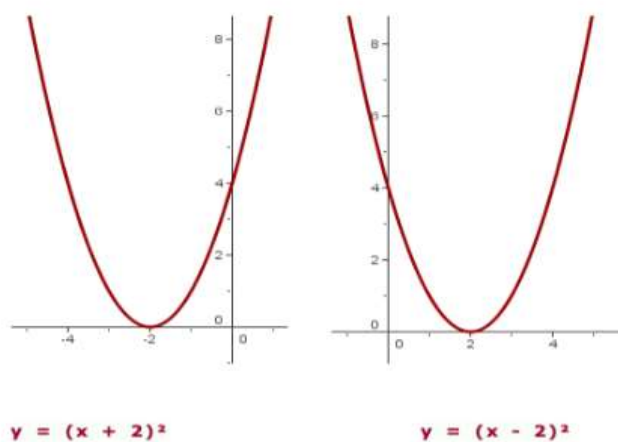


Nota. Elaboración propia

Los estudiantes deben aprender a relacionar las transformaciones algebraicas con las transformaciones gráficas, algo que puede hacerse de forma dinámica mediante herramientas que posea el software de GeoGebra, como se muestra en la ilustración 3.

Figura 3

Desplazamiento horizontal



Nota: Elaboración propia.

2.3 Referente Didáctico

Este referente, se enfoca en cómo enseñar la función cuadrática y sus transformaciones, considerando las necesidades cognitivas de los estudiantes y las mejores prácticas pedagógicas para promover un aprendizaje significativo.

2.3.1 *Las Teorías de Secuencia Didáctica de Guy Brousseau.*

Esta teoría se centra en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Su enfoque se basa en la idea de que el conocimiento se construye a través de un proceso de interacción entre el estudiante y el contenido. Algunos aspectos claves de esta teoría son:

Situaciones didácticas: Brousseau (2007), introduce el concepto de “situaciones didácticas” como el marco fundamental para la enseñanza. Estas situaciones se dividen en tres categorías: situaciones de aprendizaje, de enseñanza y de evaluación. Las Situaciones de Aprendizaje se presentan en contextos en los que los estudiantes interactúan con problemas o situaciones que fomentan el descubrimiento y la construcción de conocimiento; aquí, el enfoque se centra en la actividad del estudiante.

Las Situaciones de Enseñanza se refieren a cómo el docente presenta el contenido y organiza el aprendizaje; el docente debe diseñar actividades que provoquen la reflexión y el razonamiento. Finalmente, las Situaciones de Evaluación, evalúan no solo el resultado, sino el proceso de aprendizaje; esto incluye la validación de conjeturas y la reflexión sobre lo aprendido. En conjunto estas tres situaciones mencionadas en los párrafos anteriores se configuran como elementos claves dentro del modelo de Brousseau, donde cada una cumple una función específica que promueve la construcción del conocimiento en los estudiantes, la situación de aprendizaje en la secuencia promueve la exploración activa, la situación de enseñanza guía el

proceso con un enfoque centrado en el estudiante, y la situación de evaluación permite reflexionar sobre los avances y ajustes necesarios en el proceso.

Al integrarse de manera coherente, estas situaciones favorecen una didáctica dinámica y flexible, que fomenta el desarrollo de competencias matemáticas y el pensamiento variacional y crítico.

Conjeturas y Validación: El aprendizaje se concibe como un proceso en el que los estudiantes hacen conjeturas o hipótesis sobre un problema y luego las validan. Este proceso implica exploración, discusión y revisión. En la exploración, los estudiantes proponen soluciones o ideas, en la discusión se debate y se pone a prueba la validez de las conjeturas y, en la revisión se reflexiona sobre lo que ha funcionado o no mejorando el aprendizaje. En este sentido, el uso de GeoGebra posibilita que los estudiantes experimenten y ajusten las transformaciones de la función cuadrática, lo que favorece la formulación y verificación de conjeturas de manera interactiva. Mediante la manipulación del software los estudiantes pueden modificar los coeficientes y observar cómo alteran la forma y posición de la parábola, promoviendo así un aprendizaje participativo en el que la exploración, el intercambio de ideas y la revisión constante son claves para la consolidación de los conocimientos matemáticos.

Roles del Docente. El docente no solo es un transmisor de conocimientos, sino un mediador que facilita el aprendizaje, es decir, diseña situaciones que estimulan la curiosidad y el pensamiento crítico. Proporciona orientación con guías y preguntas que ayudan a los estudiantes a avanzar en su razonamiento, además, es evaluador, analizando y observando el proceso de aprendizaje para adaptar sus enseñanzas a las necesidades del grupo. En este contexto, el docente no solo actúa como transmisor de conocimientos, sino que se convierte en un mediador que promueve el aprendizaje, orienta a los estudiantes en el uso de GeoGebra y los guía en el

descubrimiento de las transformaciones de la función cuadrática. Además, el uso de este software permite al docente evaluar el progreso individual y grupal de los estudiantes adaptando la enseñanza a las necesidades de aprendizaje y proporcionando retroalimentación inmediata, lo que fomenta un aprendizaje más dinámico y personalizado.

Construcción del Conocimiento. La teoría de Brousseau destaca que el conocimiento se construye de manera activa y contextual. Esto implica: contextualización, es decir relaciona el contenido con situaciones reales; interacción social, promoviendo el trabajo colaborativo, dónde los estudiantes discuten y comparten sus ideas favoreciendo el proceso de aprendizaje. Por último, está la reflexión que tiene por objeto fomentar la metacognición, donde los estudiantes son conscientes de su propio proceso de aprendizaje y se vuelven capaces de autorregularse. De esta manera, el uso de GeoGebra promueve la construcción activa y contextualizada del conocimiento, permitiendo a los estudiantes entre ellos y explorar visualmente las transformaciones de la función cuadrática en situaciones concretas o simuladas. A través de este proceso, los estudiantes no solo desarrollan su comprensión matemática, sino que también reflexionan sobre sus descubrimientos, compartiendo ideas y ajustando sus conjeturas dentro de un entorno de aprendizaje colaborativo, tal como lo propone Brousseau.

2.3.2 Secuencias Didácticas.

Brousseau (2007), sugiere que las secuencias didácticas deben ser diseñadas cuidadosamente para guiar a los estudiantes desde situaciones iniciales, donde se presentan problemas, hasta situaciones finales, donde se espera que integren y apliquen el conocimiento adquirido. Estas secuencias deben ser progresivas, es decir, comenzar con problemas accesibles y avanzar hacia otros más complejos. Incluir diversas situaciones, refiriéndose a variar los tipos

de situaciones para mantener el interés y abordar diferentes estilos de aprendizaje, y permitir la retroalimentación proporcionando espacios para que los estudiantes reciban comentarios sobre su trabajo y reflexionen sobre su aprendizaje.

La teoría de secuencia didáctica de Brousseau es un marco comprensivo que busca transformar la enseñanza de las matemáticas en un proceso más dinámico y centrado en el estudiante. Al enfocar la enseñanza en situaciones reales y fomentar la exploración y la validación de ideas, se busca un aprendizaje más adecuado y significativo.

En este trabajo, las TSD enfatizan la importancia del contexto en el que ocurre el aprendizaje. Define cómo la secuencia didáctica en GeoGebra proporciona un entorno interactivo que permite a los estudiantes explorar y visualizar las transformaciones de la función cuadrática en un contexto dinámico.

Según las TSD, el aprendizaje ocurre en situaciones específicas, por tal motivo se van a diseñar situaciones con el software de GeoGebra que permitan la exploración mediante deslizadores conectados a los parámetros o coeficientes de la función cuadrática, observando las transformaciones tanto en la estructura algebraica como el movimiento en el plano cartesiano, promoviendo así una comprensión más adecuada.

Además, se puede identificar el rol protagonista de los estudiantes en el aula. En este marco, los estudiantes pueden ser protagonistas activos en la construcción de su aprendizaje, mientras que el docente puede actuar como facilitador.

Se fomenta la interacción y colaboración entre estudiantes a través de la plataforma, las TSD destacan la importancia de la interacción social en el aprendizaje. Se podría observar cómo los estudiantes comparten sus descubrimientos y reflexionan juntos sobre las transformaciones.

También se pueden plantear criterios de evaluación que se alineen con las TSD, observando no solo el resultado final, sino también el proceso de aprendizaje, la comprensión conceptual y la capacidad de aplicar lo aprendido en nuevas situaciones.

Además, se podría fomentar la reflexión crítica sobre el propio aprendizaje, es decir, al incluir en la secuencia situaciones en las que los estudiantes analicen sus procesos y estrategias, proporcionando datos valiosos sobre su comprensión y las transformaciones conceptuales obtenidas.

Por último, las TSD de Brousseau se centran en cómo se estructuran las situaciones de enseñanza, para que los estudiantes se enfrenten a situaciones que les permitan construir y reflexionar sobre sus conocimientos. Brousseau, argumenta que “los estudiantes al enfrentarse a situaciones problemáticas deben negociar y reformular sus conceptos dentro de un contexto que estimule la reflexión y la comprensión”.

2.3.3 Registros De Representación En La Teoría De Duval.

La teoría de los cambios de registro de Duval explica cómo los estudiantes deben ser capaces de transformar y manipular la información en diferentes registros semióticos, tales como lo visual, lo simbólico y lo verbal. Este proceso es clave para la comprensión del álgebra, específicamente de las transformaciones de la función cuadrática, ya que los estudiantes deben ser capaces de pasar de un tipo de representación a otro (por ejemplo, de una representación gráfica a una algebraica) para profundizar en su comprensión de los conceptos.

Duval sostiene que los objetos matemáticos no pueden aprehenderse directamente; solo pueden ser accesibles a través de representaciones. Entre los registros clave en matemáticas están: registro visual (gráfico, diagramas, figuras geométricas), registro simbólico (expresiones

algebraicas, ecuaciones, fórmulas), registro verbal (explicaciones orales o escritas en lenguaje natural) y por último el registro numérico (tablas de valores, cálculos concretos).

Para que un estudiante comprenda realmente un concepto, no basta con dominar un solo registro, debe ser capaz de cambiar entre ellos y manipular la información en cada uno.

Duval identifica dos procesos fundamentales para el aprendizaje matemático:

Tratamiento: operaciones dentro de un mismo registro (por ejemplo, resolver una ecuación algebraica sin cambiar de notación). Conversión: transformar la información de un registro a otro (por ejemplo, pasar de una ecuación cuadrática a su gráfica).

El problema es que muchos estudiantes pueden operar dentro de un registro (tratamiento), pero tienen dificultades para convertir entre registros (conversión). Aquí es donde se presentan los principales obstáculos en el aprendizaje.

Duval realizó estudios experimentales de distintos niveles y encontró que: Muchos estudiantes pueden manipular expresiones algebraicas sin comprender su significado gráfico, cuando se les pide que expliquen verbalmente un proceso matemático, su razonamiento suele ser diferente al que usan en el registro simbólico. La dificultad principal no está en los cálculos, sino en la traducción entre ellos.

Estos hallazgos llevaron a Duval a afirmar que el aprendizaje matemático depende más de la coordinación entre registro que el dominio de reglas operacionales.

En esta investigación se van a tomar ambas teorías, ya que ambas se conectan en el hecho de que las situaciones didácticas que propone Brousseau pueden diseñarse de manera que fomenten precisamente estos cambios de registro que plantea Duval. Cuando los estudiantes resuelven problemas dentro de situaciones didácticas, no solo están construyendo conocimientos

matemáticos, sino también ejercitando la capacidad de trasladar sus representaciones de un registro a otro.

Por lo tanto, la combinación de estas dos teorías podría facilitar el proceso de aprendizaje al promover no solo la resolución de problemas, sino también el desarrollo de competencias para manejar diferentes registros de representación y la transposición de estos registros según se planteen en las diferentes situaciones.

Ahora bien, la teoría de Duval se centra en cómo los estudiantes realizan cambios de registro de representación, es decir, cómo interpretan y manipulan las diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos, como los registros simbólicos (algebraico), gráfico (visual) y verbal. En el caso específico de las transformaciones de la función cuadrática, esta teoría resulta relevante porque explica cómo los estudiantes deben ser capaces de manejar las representaciones gráficas y algebraicas de la función cuadrática para comprender sus transformaciones, como el desplazamiento, la expansión, la contracción y las reflexiones.

Dentro de este marco, la interpretación global, y la guía de punteo juegan roles claves al abordar el estudio de las transformaciones de la función cuadrática, que es el objeto de esta investigación.

La interpretación global implica que los estudiantes puedan ver y comprender la función cuadrática en su totalidad, no solo como una ecuación algebraica, sino también como una representación gráfica (la parábola) en el plano cartesiano. Esto es crucial para las transformaciones de la función cuadrática, ya que los estudiantes deben ser capaces de identificar cómo los cambios en la forma algebraica, por ejemplo, cambios en los coeficientes de la ecuación, a , b , c , afectan la forma global de la parábola: su dirección, amplitud y posición en el plano.

La guía de punteo en este contexto se refiere a la utilización de puntos claves en la gráfica de la función cuadrática para guiar la comprensión de las transformaciones. Por ejemplo, el vértice de la parábola, los puntos de intersección con los ejes, o los puntos de simetría pueden servir como referencias para ayudar al estudiante a seguir y analizar cómo una transformación (como un desplazamiento vertical u horizontal) afecta la gráfica. Estos puntos claves actúan como indicadores para visualizar y seguir los cambios que ocurren cuando los coeficientes de la función cuadrática se modifican.

De este modo, la guía de punteo y la interpretación global conocidos como tratamientos en la teoría de Duval son esenciales para el análisis de los datos que se van a recolectar en esta investigación.

2.4 Referente Tecnológico: Integración De GeoGebra

En el marco del referente tecnológico, GeoGebra se constituye en un recurso didáctico esencial para la visualización y la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática, ya que integra de manera simultánea los registros algebraico y gráfico.

Entre las herramientas de GeoGebra más utilizadas en el desarrollo de esta investigación se destacan la **entrada algebraica**, mediante la cual se introducen las funciones en su forma general y canónica, y los **deslizadores**, que permiten asignar valores dinámicos a los parámetros a , h , y k , facilitando la exploración de la concavidad, los desplazamientos y las variaciones de amplitud de la parábola.

Asimismo, la herramienta de **gráfica de funciones** posibilita la superposición y comparación entre la función base $y = x^2$ y sus transformaciones, mientras que el uso de **puntos en objeto** favorece el análisis del vértice, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes

coordenados. Finalmente, la opción de **texto dinámico** fortalece la conexión entre los valores algebraicos y la representación gráfica, permitiendo que el estudiante observe en tiempo real la relación entre el cambio de parámetros y la ecuación correspondiente.

De este modo, la integración de GeoGebra como referente tecnológico no solo favorece el aprendizaje visual e interactivo, sino que también potencia el tránsito entre registros semióticos, aspecto central en el marco teórico de Duval.

Figura 4

Deslizador



Nota: Elaboración propia

GeoGebra se constituye en un recurso tecnológico fundamental para el desarrollo de la investigación, pues permite articular la visualización dinámica con la exploración algebraica y gráfica, aspectos que resultan esenciales en el estudio de las transformaciones de la función cuadrática. Su carácter interactivo favorece la experimentación, el análisis de conjeturas y la validación de propiedades, promoviendo así una mejor comprensión de los conceptos matemáticos.

2.4.1 Representación Gráfica.

Según las Teorías de situaciones Didácticas (TSD), las representaciones desempeñan un papel fundamental en la construcción del conocimiento matemático, en tanto median entre el objeto y la actividad cognitiva del estudiante. En este sentido, GeoGebra constituye un recurso idóneo, ya que integra múltiples entornos de representación (ventana algebraica, gráfica,

numérica y de hoja de cálculo), lo que favorece la articulación entre registros simbólicos, tabulares y visuales en un mismo espacio de trabajo.

Una de las herramientas más potentes es el uso de deslizadores, que permiten a los estudiantes manipular en tiempo real los parámetros de la función cuadrática (a, h, k) y observar inmediatamente cómo se modifican las propiedades de la parábola.

Esta visualización interactiva facilita la comprensión de conceptos abstractos, tales como la concavidad, la dirección de apertura y las transformaciones geométricas asociadas al desplazamiento de la gráfica en el plano cartesiano. De esta manera, el software convierte nociones algebraicas complejas en experiencias gráficas intuitivas, reduciendo la brecha entre el registro simbólico y el registro visual.

Adicionalmente, GeoGebra ofrece herramientas de construcción geométrica que permiten representar puntos notables de la parábola, como el vértice, el eje de simetría y las intersecciones con los ejes coordenados, promoviendo así un aprendizaje exploratorio y experimental. La posibilidad de superponer diferentes gráficas y compararlas facilita la identificación de patrones y la generalización de propiedades, aspectos que, desde la perspectiva de Duval, resultan esenciales para el desarrollo de la capacidad de conversión entre registros.

En el ámbito didáctico, el software también potencia la labor del docente al permitir el diseño de actividades interactivas y evaluaciones dinámicas. A través de applets o tareas digitales, los estudiantes pueden experimentar con problemas en tiempo real, recibir retroalimentación inmediata y corregir errores durante el proceso de aprendizaje. Esto no solo enriquece la evaluación formativa, sino que también consolida un ambiente de aprendizaje activo en el que, como lo plantea Brousseau, el conocimiento emerge de la interacción entre el estudiante, el medio y la situación didáctica.

En suma, las bondades de GeoGebra en la representación gráfica no se limitan a la visualización de funciones, sino que se extiende a la manipulación de parámetros, la exploración de propiedades geométricas, la construcción de situaciones interactivas y la generación de retroalimentación inmediata.

Estas características lo convierten en un mediador privilegiado para favorecer la comprensión de la función cuadrática y sus transformaciones, articulando de manera efectiva los registros semióticos (Duval) con el diseño de situaciones didácticas significativas (Brousseau).

En general, el aprendizaje de la función cuadrática y sus transformaciones puede potenciarse de manera significativa cuando se aborda desde una mirada integral que articule lo curricular, lo matemático, lo didáctico y lo tecnológico. En este sentido, GeoGebra no solo favorece la representación gráfica y el tránsito entre registros semióticos, sino que además se alinea con los propósitos curriculares de la educación básica secundaria al favorecer la comprensión de contenidos algebraicos fundamentales.

Desde el punto de vista matemático, el software permite evidenciar con claridad la influencia de los coeficientes en la forma y posición de la parábola, mientras que, en el plano didáctico, se convierte en un mediador que posibilita la experimentación, la validación de conjeturas y la interacción activa de los estudiantes. De este modo, la integración de GeoGebra en la presente investigación se justifica no como un elemento accesorio, sino como un componente que fortalece la relación entre los diferentes referentes teóricos y potencia el aprendizaje.

Capítulo III. Metodología

En este capítulo se expone la metodología empleada para el desarrollo de la presente investigación, la cual se enmarca en un enfoque cualitativo, con un diseño de estudio de casos múltiples.

Esta metodología se considera pertinente debido a la necesidad de comprender cómo los estudiantes de grado noveno construyen significados en torno a las transformaciones de la función cuadrática, a partir de su participación en una secuencia didáctica fundamentada en las Teorías de Situaciones Didácticas de Brousseau y en los registros de representación semiótica de Duval.

El capítulo se estructura en cuatro apartados principales. En primer lugar, se describe el enfoque metodológico y se justifica la elección del estudio de casos como estrategia de investigación, enfatizando su valor para el estudio de procesos individuales y colectivos en contextos educativos reales.

En segundo lugar, se presenta una caracterización de los estudiantes y de la institución Fidelina Echeverry, contextualizando así el entorno en el que se llevó a cabo la intervención.

En tercer lugar, se explican las fases de diseño de la secuencia didáctica, las cuales incluyen la planificación, implementación y recolección de datos, especificando los instrumentos utilizados para el registro de la información (producciones escritas, capturas de pantalla, observaciones y grabaciones audiovisuales).

Finalmente, se realiza una descripción de cada una de las situaciones que componen la secuencia didáctica, destacando su intención pedagógica, los conceptos matemáticos abordados y el tipo de interacción esperada por parte de los estudiantes.

Este capítulo constituye, por tanto, la base estructural que permite dar cuenta del rigor metodológico de la investigación y sustenta los análisis que se presentan en el capítulo siguiente.

3.1 Enfoque de la Investigación

Está centrado en cómo fortalecer el aprendizaje del estudiante a través de la secuencia didáctica y el uso de GeoGebra, se utilizó una metodología cualitativa, específicamente el estudio de casos, este permite investigar de manera profunda cómo se desarrollan ciertos procesos de aprendizaje en un contexto específico.

Esta investigación, se enfoca en estudiar cómo los estudiantes interactúan con la secuencia didáctica diseñada en GeoGebra, basada en las TSD y en cómo los cambios de Registro de Duval; permiten observar detalladamente los procesos de comprensión de las transformaciones de la función cuadrática.

Al utilizar el estudio de casos, esta investigación se centró en situaciones específicas en la que los estudiantes interactúen con las herramientas del software y permite observar cómo estas potencian el aprendizaje al hacer cambios de un registro algebraico a un registro gráfico (visual). Además, esta metodología permitió recoger datos cualitativos (como preguntas, observaciones y análisis de las interacciones de los estudiantes con el software) que proporciona una comprensión sobre los efectos de la secuencia didáctica.

El estudio de casos, como lo describe Camargo (2013):

Permite una investigación profunda y detallada de un proceso de enseñanza-aprendizaje, dónde se observan las interacciones en un contexto específico, lo que permite identificar las dificultades y los avances en el proceso de comprensión de los estudiantes (p. 108).

La investigación se realizó en una institución educativa enfocándose en estudiantes de noveno grado que presentan dificultades en la comprensión de la función cuadrática. Este nivel académico es crucial, pues el currículo de matemáticas introduce conceptos algebraicos avanzados, incluyendo la representación y análisis de funciones cuadráticas, que son fundamentales para entender temas más complejos. Sin embargo, muchos estudiantes presentan dificultades al aprender funciones cuadráticas debido a su naturaleza abstracta y a la falta de recursos interactivos que faciliten su comprensión.

Por este motivo, se seleccionó un grupo de estudiantes del grado noveno en un contexto en el cual la falta de acceso a recursos tecnológicos suele dificultar el aprendizaje de conceptos matemáticos abstractos.

Esta investigación busca aprovechar el uso del software GeoGebra, que podría solventar dificultades que se presentan en el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática. La intervención se diseñó para abordar de manera secuencial problemáticas que los estudiantes presentan al interpretar gráficas y al tratar de comprender cómo cambios en los coeficientes de la función afectan su posición en el espacio y su estructura algebraica.

Para apoyar el aprendizaje de la función cuadrática, se diseñó una secuencia didáctica específica en el concepto matemático antes mencionado que integre el uso de GeoGebra y que permite a los estudiantes interactuar con las gráficas en tiempo real. La secuencia didáctica está organizada en torno a tres objetivos de aprendizaje principales: comprender el impacto del coeficiente cuadrático en la forma de la parábola, el efecto del coeficiente lineal en la posición y orientación de la gráfica, y el papel del intercepto en "y" para determinar el punto de corte con el eje vertical. Cada uno de estos objetivos fue abordado a través de situaciones interactivas y de exploración con el software GeoGebra.

La secuencia didáctica incluye situaciones paso a paso que guían a los estudiantes en la manipulación de los coeficientes de la función cuadrática. Por ejemplo, la situación inicial consistió en modificar solo el coeficiente cuadrático para que los estudiantes observen cómo afecta el sentido de la parábola, otro su contracción y dilatación. Más adelante, se exploró el coeficiente lineal, permitiendo que identifiquen cómo influye en la inclinación y la posición de la parábola respecto a los ejes. Al finalizar la secuencia, los estudiantes realizaron una situación de síntesis en la que manipulan todos los coeficientes para observar los cambios completos en la gráfica, y los cambios en la estructura algebraica, lo que reforzó una comprensión integral de las funciones cuadráticas.

La implementación de la secuencia didáctica se llevó a cabo en una sesión de clase estructurada, con un objetivo claro y un conjunto de situaciones en GeoGebra. La primera parte estuvo distribuida en una serie de situaciones, que permitió a los estudiantes familiarizarse progresivamente con los conceptos y las herramientas del software. En la segunda parte de la sesión, se hizo una inducción a los estudiantes en el uso de GeoGebra, explicando su interfaz y las funciones que utilizaron.

A medida que avanzó la sesión, los estudiantes realizaron de exploraciones en situaciones más complejas. Esto con el fin de fomentar la colaboración y el intercambio de ideas, incentivando a los estudiantes a discutir sus observaciones y reflexionar en grupo.

También exploraron con deslizadores en situaciones que permiten observar cómo cambia al mismo tiempo la posición vertical y horizontal de la gráfica en el plano cartesiano en conjunto con la estructura algebraica de la función. Al final de cada situación, se reservó un tiempo para que los estudiantes presenten sus discusiones, promoviendo así un aprendizaje activo y colaborativo.

Para evaluar el impacto de la secuencia didáctica y el uso de GeoGebra en el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática, se recolectaron datos durante la implementación de la secuencia. La selección de los estudiantes con dificultades en el aprendizaje fue a criterio del docente encargado del área. Durante las sesiones, se realizaron preguntas formativas que permitieron observar el progreso de los estudiantes y ajustar las situaciones en función de sus necesidades.

Además, se hicieron preguntas abiertas y cerradas al final de la secuencia didáctica para recopilar información de los estudiantes sobre su experiencia con GeoGebra. Las preguntas están enfocadas en identificar cómo interactúan con las representaciones gráficas y algebraicas de las transformaciones de la función cuadrática que los estudiantes perciben con el uso del software durante su proceso de aprendizaje.

El análisis de los resultados de los datos cualitativos obtenidos de las pruebas y las preguntas, sirvieron para identificar mejoras en la comprensión de los conceptos relacionados con la función cuadrática.

Además, los datos cualitativos recolectados en las preguntas permitieron interpretar las experiencias de los estudiantes y su percepción sobre la utilidad de GeoGebra en su proceso de aprendizaje. Los comentarios sobre la facilidad de uso de las herramientas del software y la interacción gráfica brindaron una perspectiva sobre la efectividad de la tecnología como recurso didáctico.

Finalmente, a partir del análisis de los datos, se elaboraron conclusiones sobre el impacto de la secuencia didáctica y el uso de GeoGebra en el aprendizaje de la función cuadrática.

3.2 Descripción De La Institución Educativa y Estudiantes

La presente investigación se llevó a cabo en la Institución educativa Fidelina Echeverry, una institución oficial de carácter público ubicada en Puerto Tejada, Cauca, que ofrece formación desde primaria hasta la educación media. La institución atiende principalmente una población estudiantil afrodescendiente, lo cual le otorga una riqueza cultural significativa, al tiempo que plantea desafíos relacionados con la equidad educativa y el reconocimiento de la diversidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El entorno sociocultural en el que se encuentra se caracteriza por ciertas condiciones de vulnerabilidad económica, lo que influye en los recursos disponibles tanto para estudiantes como para docentes. A pesar de ello, la comunidad educativa demuestra un fuerte sentido de pertenencia y compromiso con la mejora continua de los procesos pedagógicos.

En el área de matemáticas, se han identificado dificultades recurrentes en la comprensión de conceptos abstractos, particularmente en lo referente a funciones, y más específicamente, a la función cuadrática y sus transformaciones. Estas dificultades han motivado la necesidad de implementar estrategias didácticas innovadoras que fortalezcan la comprensión conceptual a través de representaciones múltiples y tecnologías educativas.

La selección de los estudiantes se realizó mediante un muestreo por conveniencia, el cual se caracteriza por elegir a los sujetos que cumplen con los criterios previamente definidos y que resultan accesibles para el investigador. En este caso, los estudiantes fueron escogidos por el docente encargado del curso, considerando que enfrentan dificultades en el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática.

Esta elección responde a la intencionalidad de la investigación, en la medida en que dichos estudiantes representan casos importantes para analizar el impacto de la secuencia

didáctica propuesta y el papel de los registros semióticos en la comprensión de este concepto matemático. Estos estudiantes participaron en la implementación de una secuencia didáctica mediada por el software de GeoGebra, lo cual permitió recopilar evidencias significativas sobre su proceso de aprendizaje.

3.3 Fases Del Diseño Metodológico De La Investigación

Para el desarrollo de esta investigación se estructuró una metodología dividida en tres fases articuladas de manera coherente con los objetivos planteados y el enfoque cualitativo adoptado.

Cada fase responde a una etapa clave del proceso investigativo: desde la planeación y diseño de la secuencia didáctica, pasando por su implementación en el aula con el apoyo del software GeoGebra, hasta la recolección y análisis de la información obtenida. A continuación, se presenta la tabla 3 que describe de manera resumida las acciones y propósitos correspondientes a cada fase.

Tabla 3

Fases del diseño metodológico de la investigación.

Fase.	Descripción.
1. Planeación.	En esta fase se diseñó la secuencia didáctica centrada en las transformaciones de la función cuadrática. Se definieron las situaciones de aprendizaje, los objetivos y las preguntas orientadoras, con base en los marcos teóricos de Brousseau y Duval. También se seleccionaron los estudiantes y se programó la implementación.
2. Implementación.	Se desarrolló la secuencia didáctica con los estudiantes del grado noveno en un entorno mediado por el software de GeoGebra. Durante esta fase se registraron las producciones escritas, gráficas y audiovisuales generadas por los estudiantes, además observaciones de los investigadores.
3. Recolección y análisis de la información.	Se organizaron y analizaron los datos recogidos, identificando los registros semióticos movilizados, los tipos de conversión, las evidencias de comprensión y los obstáculos observados. Esta fase permitió interpretar cómo los estudiantes comprendieron y aplicaron las transformaciones de la función cuadrática.

Nota: Elaboración propia.

Las tres fases del diseño metodológico permitieron estructurar de manera coherente y progresiva el desarrollo de la investigación. Cada fase cumplió un propósito específico que aportó a la comprensión de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, asegurando la recolección de datos relevantes y el análisis riguroso de sus producciones y comportamientos frente a las situaciones propuestas.

Desde la teoría de Duval, se reconoce que la comprensión matemática no se limita al dominio de un único registro, sino que implica la coordinación entre varios sistemas semióticos. Por ello, las situaciones diseñadas buscaron promover la conversión entre representaciones, con el fin de favorecer la comprensión del objeto matemático en estudio.

A continuación, se presentan los elementos tenidos en cuenta (ver tabla 4) así como los análisis de los casos seleccionados, a partir de las producciones escritas, las interacciones observadas durante la implementación y los registros audiovisuales, con el objetivo de identificar las unidades simbólicas relevantes del registro algebraico de la función cuadrática que correspondan a las variables pertinentes en el registro gráfico en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes, enfocado en la comprensión de las funciones cuadráticas desde una perspectiva multi representacional.

Tabla 4

Elementos conceptuales y procedimentales asociados a las transformaciones de la función cuadrática

elementos conceptuales y procedimentales enmarcados en la teoría semiótica cognitiva de Duval y la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, que favorecen el aprendizaje de las transformaciones de la función cuadrática				
Configuraciones de las representaciones y términos asociados a la función cuadrática	1. Conceptos asociados a las transformaciones de la función cuadrática.			
	1.1 Traslaciones.	1.2 Reflexiones.	1.3 Dilataciones y compresiones.	1.4 Composición de transformaciones.
	La función: $f(x) = a(x - h)^2 + k$ permite identificar traslaciones horizontales (valor de h) y verticales (valor de k). Estas transformaciones desplazan el vértice y la gráfica sin cambiar su forma.	La reflexión respecto al eje x ocurre cuando $a < 0$, lo que implica un cambio en la concavidad de la parábola. La gráfica se invierte verticalmente.	Cambios en el valor absoluto de a afectan la apertura de la parábola. Si $a > 1$, hay una compresión horizontal (gráfica más estrecha); si $0 < a < 1$, hay una dilatación horizontal (gráfica más ancha).	Las transformaciones pueden combinarse en una sola expresión general de la parábola. El orden en que se aplican (traslaciones, reflexiones, dilataciones) afecta la comprensión del comportamiento gráfico.
	2. Transformación de los registros de representación en las funciones cuadráticas.			
	2.1 Cambio del registro gráfico al algebraico y viceversa.		2.2 Coordinación entre registros y situaciones didácticas.	
	Se favorece el aprendizaje al hacer que el estudiante establezca correspondencias entra la gráfica y la expresión algebraica, como identificar el vértice o la concavidad a partir de la forma canónica.		En el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas, se diseñan situaciones adidácticas que promueven la coordinación entre registros, fomentando que los estudiantes validen sus respuestas al cambiar de uno al otro (por ejemplo, probar con GeoGebra si la transformación fue correcta).	

Nota: Elaboración propia.

3.4 Descripción De Las Situaciones

Situación 1: Reconocimiento de la función cuadrática a partir del lanzamiento de una pelota.

El objetivo de esta situación es que los estudiantes reconozcan que ciertos fenómenos del mundo físico, como el lanzamiento de una pelota, pueden ser modelados mediante una función cuadrática. Para ello, se busca que interpreten el movimiento desde una perspectiva funcional, usando una tabla de valores y una representación gráfica que les permite identificar la relación entre el tiempo y las alturas del objeto.

A los estudiantes se les plantea una situación en la que deben registrar o estimar la altura en distintos instantes de tiempo. Con esos datos construyen una tabla y representan gráficamente la trayectoria. Luego, a partir de la curva obtenida, se les guía para que infieran que el comportamiento del fenómeno es cuadrático, relacionando así la representación empírica con el modelo matemático.

Situación 2: Determinación de la concavidad de la parábola.

Esta situación tiene como objetivo que los estudiantes comprendan cómo el signo del coeficiente cuadrático a en la función $y = ax^2 + bx + c$ determina la concavidad de la parábola. Se busca que reconozcan si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo y cómo esto influye en la interpretación del fenómeno representado.

Para ello, se les presentan diferentes expresiones cuadráticas con valores positivos y negativos de a , y se les pide observar sus gráficas en GeoGebra. Los estudiantes deben analizar la orientación de la parábola.

Situación 3: Relación entre concavidad, Máximos y Mínimos de la Función Cuadrática, contracción y dilatación.

Esta situación tiene como objetivo promover la comprensión del efecto del coeficiente cuadrático a en la gráfica de la función cuadrática, específicamente en lo relacionado con la concavidad (si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo) y con los fenómenos de contracción y dilatación (variación en la abertura de la parábola). A través de la manipulación de deslizadores en GeoGebra y el análisis de distintas expresiones algebraicas, se busca que los estudiantes identifiquen cómo el valor de a influye en la forma de la trayectoria, transitando entre registros gráfico, algebraico y verbal para consolidar el concepto.

Situación 4: Desplazamiento horizontal y vertical.

El objetivo de esta situación es favorecer la comprensión de los desplazamientos verticales y horizontales en la gráfica de una función cuadrática mediante la manipulación del modelo algebraico y su representación gráfica en GeoGebra, dentro del contexto del lanzamiento de una pelota. Se busca que los estudiantes reconozcan cómo la variación del término c y h afecta la posición del vértice y la trayectoria del objeto, movilizandoregistros algebraicos, gráficos y verbales.

Situación final: Desplazamiento mixto.

El objetivo de esta situación es consolidar la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática mediante un ejercicio de razonamiento inverso, en el cual los estudiantes deben determinar la expresión algebraica de una parábola dada su representación gráfica. Esta situación les exige identificar elementos clave como el vértice, la concavidad y los desplazamientos horizontales y verticales, para luego traducirlos al lenguaje simbólico en la forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$.

Se busca que los estudiantes articulen registros gráficos, algebraicos y verbales, favoreciendo conversiones semióticas (Duval, 1995) en una dinámica donde el saber surge de la necesidad de resolver un problema, en el marco de una situación adidáctica (Brousseau, 1998).

Capítulo IV Análisis y resultados

El presente capítulo expone y analiza los resultados obtenidos a partir de la implementación de la secuencia didáctica para favorecer la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Fidelina Echeverry.

A lo largo del capítulo se examinan las producciones de los estudiantes frente a las cinco situaciones propuestas en la secuencia, considerando tanto como los registros movilizados (gráfico, verbal, tabular y algebraico), como las evidencias de comprensión y las dificultades observadas. Cada situación es analizada en relación con los tipos de preguntas planteadas, las respuestas de los estudiantes seleccionados como casos de estudio y los aprendizajes que se evidencian en el proceso de resolución.

Asimismo, se presentan tablas de síntesis con unidades simbólicas, variables gráficas e interpretaciones, construidas a partir del análisis cualitativo de las respuestas. Estas tablas permiten observar patrones, avances y obstáculos comunes, y ofrecen elementos clave para valorar el impacto de la propuesta en el desarrollo del pensamiento funcional de los estudiantes.

Finalmente se realiza una interpretación global desde la teoría de Duval, destacando cómo los estudiantes lograron, en diferentes niveles, coordinar registros y construir significados matemáticos a partir de las situaciones contextualizadas y el uso del software GeoGebra.

Este análisis permite responder a la pregunta problema y valorar el cumplimiento de los objetivos específicos de la investigación.

La investigación se fundamentó en las Teorías de Situaciones Didácticas de Brousseau y en la Teoría de los registros de Representación de Raymond Duval, siendo esta última el eje central del análisis de los resultados.

4.1 Análisis De Los Resultados De La Situación 1. Reconocimiento De La Función

Cuadrática A Partir Del Lanzamiento De Una Pelota.

Acercamiento al concepto de la función cuadrática

Descripción de la intención de las preguntas en la Situación 1:

1. ¿A qué altura estará la pelota a los 3 segundos?

Esta pregunta busca que los estudiantes accedan al registro **tabular o algebraico** y hagan una lectura puntual de datos. También permite verificar si son capaces de **interpolan** o **calcular valores a partir de una expresión matemática o tabla**.

2. ¿Después de cuántos segundos estará a 9 metros de altura? ¿Cómo encontraste este valor?

Aquí se propone una situación inversa: partir de un valor de altura (registro gráfico o numérico) y deducir el valor del tiempo asociado. Esta pregunta es clave porque pone a prueba la capacidad de los estudiantes para realizar un **cambio de registro**. Pasando del valor de la variable dependiente (altura) al valor de la variable independiente (tiempo), lo que requiere interpretar gráficamente o resolver la ecuación asociada.

3. “Completa la tabla con los siguientes valores en segundos 2,3,6”

Esta pregunta refuerza el **registro tabular** y permite verificar si los estudiantes comprenden la relación funcional entre el tiempo y la altura, al calcular y completar valores faltantes, posiblemente apoyados por una fórmula o por observación gráfica.

Parámetros de la Teoría de Duval para el análisis:

1. Registros de representación semiótica involucrados:

- Registro tabular (tabla de valores).
- Registro gráfico (curva o trayectoria de la pelota en el plano cartesiano).

2. Tipos de tratamiento y conversión:

- Tratamiento dentro de un mismo registro, por ejemplo, calcular o interpolar

dentro de una tabla.

- Conversión entre registros, como pasar de un valor en una tabla a su

representación en el gráfico. O interpretar un punto del gráfico para deducir valores en la tabla.

3. Identificación de dificultades en el uso de representaciones matemáticas:

- Dificultades para cambiar del valor de altura (eje y) al tiempo (eje x).
- Confusión entre variable dependiente e independiente.
- Lecturas erróneas del gráfico o la tabla.

Respuestas de la Situación 1: Acercamiento al concepto de la función cuadrática Con el objetivo de analizar cómo los estudiantes movilizan distintos registros de representación semiótica en torno a la función cuadrática, se diseñaron tres preguntas problema en una situación cotidiana con ayuda del software de GeoGebra en una secuencia didáctica fundamentada en la Teoría de situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1986) y en los aportes de Duval (1995) sobre los registros de representación semiótica.

Estas preguntas permitieron observar tanto los tratamientos y conversiones entre registros como los obstáculos que enfrentaron los estudiantes en la interpretación de fenómenos modelados con funciones cuadráticas.

El uso de GeoGebra permitió observar con mayor claridad los procesos de conversión entre registros, por ejemplo, de la gráfica a la fórmula algebraica o del valor tabular al punto en la gráfica, así como la presencia de tratamientos incorrectos dentro de un mismo registro, como ocurre cuando un estudiante manipula una tabla sin comprender su estructura funcional.

Para esta situación se agrupan las preguntas 1 y 3 en cuánto a comprensión y uso de información tabular/algebraica. Y la segunda pregunta en cuánto a la interpretación inversa y conversión entre registros.

La tabla 5 sintetiza los resultados obtenidos a partir de las preguntas 1 y 3, y la tabla 6 los resultados obtenidos en la pregunta 2. En dichas tablas se categorizan los registros movilizados (gráfico, algebraico, tabular y verbal), el tipo de operación realizada (tratamiento o conversión), la evidencia de comprensión y las observaciones u obstáculos detectados en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 5

Análisis de resultados preguntas 1 y 3.

Estudiante	Registro(s) movilizado(s)	Tipo de tratamiento.	Evidencia de comprensión.	Observaciones/ Obstáculos.
E1.	Tabular/ Algebraico.	Cálculo y lectura directa.	Si.	Completa la tabla y responde correctamente.
E2.	Gráfico/ Tabular.	Conversión y estimación gráfica.	Parcial.	Llena correctamente la tabla, pero no justifica los procesos.
E3.	Tabular.	Tratamiento y estimación gráfica.	Parcial.	Omite cálculos y no justifica.
E4.	Tabular/verbal.	Tratamiento más verbalización.	Si.	Responde con argumentos claros
E5.	Algebraico.	Tratamiento con fórmula cuadrática.	Si.	Sustituye correctamente.
E6.	Tabular.	Tratamiento y estimación gráfica/Verbal.	Parcial.	Se vale de la gráfica, pero hace una mala interpretación de ella.

Nota. Elaboración propia.

Las tablas 5 y 6, tienen como propósito sistematizar el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, cada fila corresponde a un estudiante y permite registrar información clave en relación con la movilización de registros semióticos y los posibles obstáculos encontrados durante la situación. La tabla se estructura de la siguiente manera:

Estudiante: Se consigna el código asignado al estudiante para preservar el anonimato.

Registro Movilizado: Se indica el tipo de representación utilizada o transformada por el estudiante (por ejemplo, gráfico, algebraico, tabular, verbal).

Tipo de conversión: Se especifica si el estudiante realizó una conversión (entre diferentes registros) o un tratamiento (dentro del mismo registro), según la teoría de los registros de representación semiótica de Duval.

Evidencia de comprensión: Se valora la respuesta del estudiante en cuanto a su comprensión de la consigna, clasificándola en tres niveles: Comprensión completa (si), comprensión parcial (responde, pero no justifica o lo hace con errores) o incomprensión (no responde o lo hace de manera errónea sin justificación).

Observaciones y obstáculos: Se anotan comentarios relevantes sobre la estrategia, errores frecuentes, obstáculos semióticos detectados, y cualquier aspecto cualitativo que complemente el análisis.

Tabla 6

Análisis de resultados pregunta 2.

Estudiante	Registro movilizado	Tipo de conversión	Evidencia de comprensión	Observaciones/Obstáculos
E1.	No se evidencia registro.	No hay conversión.	No hay justificación, solo da la respuesta.	Respuesta sin sustento, posible observación o conjetura.
E2.	No se evidencia registro.	No hay conversión.	No hay justificación. Solo da la respuesta.	Igual que E1: ausencia de argumentación o referencia a representaciones.
E3.	Algebraico (función cuadrática).	Verbal-Algebraico.	Explica que usó una función cuadrática para hallar la altura.	Reconoce el modelo, pero no menciona representación gráfica o numérica.
E4.	Gráfico.	Gráfico-Verbal.	Indica que obtuvo el valor a través de la gráfica.	Interpreta el gráfico, pero no menciona el modelo algebraico.
E5.	Algebraico.	Verbal-Algebraico.	Menciona uso de la función cuadrática.	Similar a E3, pero sin detalle de procedimiento.
E6.	Gráfico.	Gráfico-Verbal.	Dice que lo encontró en la gráfica.	Similar a E4, uso correcto del gráfico sin mención del modelo algebraico.

Nota. Elaboración propia.

A continuación, se presenta tres casos representativos que ilustran distintos niveles de comprensión y desempeño frente a las preguntas propuestas.

Estudiante E4: Integración de registros tabular y verbal con argumentación clara.

En la pregunta 1, el estudiante moviliza los registros tabular y verbal, y realiza un tratamiento correcto de la información, articulado con una verbalización precisa que permite justificar claramente su respuesta.

Este caso es relevante porque muestra cómo el paso del tratamiento al registro verbal facilita la argumentación matemática y evidencia comprensión conceptual.

Desde la teoría de Duval (1995), este proceso se interpreta como un **tratamiento** dentro del registro tabular donde el estudiante organiza e interpreta los datos sin cambiar de sistema de representación seguido de una **conversión** al registro verbal, mediante la cual expresa de manera

coherente y argumentada la información procesada. Esta articulación entre registros permite no solo validar su razonamiento sino también construir significado matemático a partir de la interacción entre distintas representaciones.

Figura 5

Producción escrita de E4

1.-R// La altura es de 9. El valor se le encuentra reemplazando el valor original.	Segundos	metros
2.-R// Después de 3 segundos. A través de la gráfica encuentro este valor.	1	1
3.-R// En 2 segundos el valor de altura fueron 4 metros.	2	4
El valor de 3 segundos el valor de altura es de 9 metros. Y el valor de 6 sería de 36 metros.	3	9
	4	16
	5	25
	6	36

Nota: Anexos situación 1

Esta evidencia permite observar cómo el estudiante no solo obtiene el resultado correcto, sino que justifica adecuadamente el proceso, integrando el lenguaje matemático con el natural.

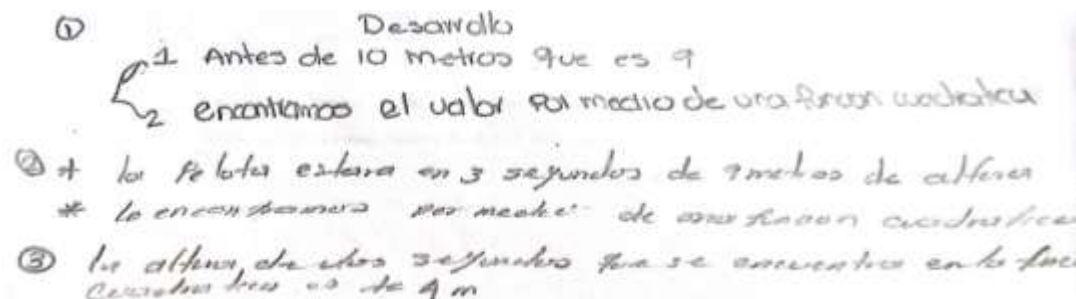
Este tipo de respuesta puede considerarse como el inicio de una situación adidáctica superada, en la medida en que el estudiante opera autónomamente y valida su respuesta sin intervención docente (Brousseau, 1986).

Estudiante E3: Reconocimiento del modelo algebraico sin justificación.

En la segunda pregunta, E3 afirma que la altura de la pelota a los tres segundos es de nueve metros y que la “encontramos por medio de una función cuadrática”, lo que indica que el estudiante identifica correctamente el tipo de función subyacente en la situación, pero no presenta justificación ni tratamiento algebraico visible. Este caso revela un proceso de conversión implícita entre el gráfico o el contexto verbal y el modelo algebraico, sin evidencia explícita de los pasos intermedios.

Figura 6

Fragmento de la respuesta de E3



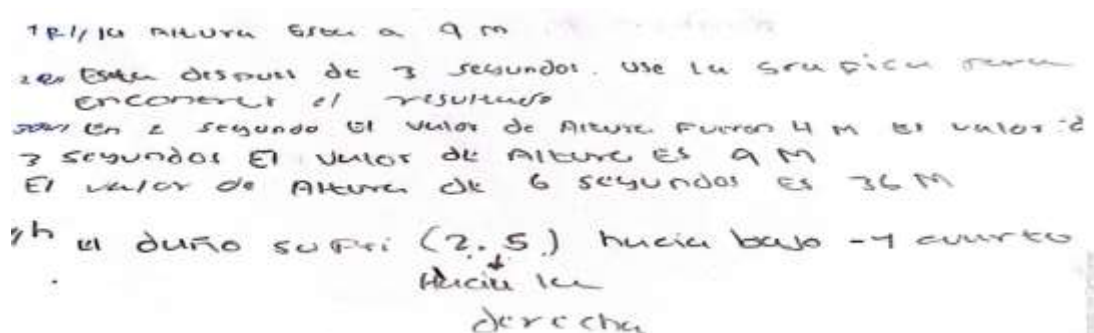
Desde la perspectiva de Duval (1995), este caso ilustra una conversión incompleta: el estudiante accede al registro algebraico, pero no realiza ni muestra el tratamiento correspondiente dentro de ese registro. Si bien la identificación del modelo es un indicio de comprensión estructural, la ausencia de justificación limita la validación del proceso.

Estudiante E6: Uso incorrecto del registro gráfico

En contraste, el estudiante E6 recurre al registro gráfico para responder la pregunta dos, pero hace una interpretación errónea del valor en la gráfica, lo que lleva a dar una respuesta incorrecta. Esta situación representa un obstáculo semiótico, en el sentido de que el estudiante confía en la representación visual sin comprender su correspondencia funcional con los valores reales del fenómeno.

Figura 7

Producción escrita por E6



Este tipo de error es coherente con lo que plantea Duval (1998) sobre la ilusión de transparencia en los gráficos: aunque las gráficas parecen ofrecer información directa, su correcta lectura requiere de una conversión semántica hacia otros registros o contextos. La evidencia también muestra que el uso del software GeoGebra no garantiza comprensión si no se acompaña de una articulación efectiva entre registros.

Finalmente, los resultados obtenidos evidencian la diversidad de estrategias y niveles de comprensión que emergen cuando se movilizan distintos registros en el estudio de funciones cuadráticas. El uso de GeoGebra favoreció la exploración gráfica y tabular, pero también reveló las dificultades de conversión y los obstáculos relacionados a una interpretación superficial de lo visual. Casos como el de E4 muestran cómo la integración de registros y la argumentación verbal fortalecen la comprensión matemática, mientras que ejemplos como los de E3 y E6 ponen en evidencia la importancia de propiciar justificaciones formales y conversiones explícitas entre registros.

Este análisis refuerza la necesidad de diseñar situaciones didácticas que no solo promuevan la manipulación de representaciones, sino que generen conflictos cognitivos que impulsen el cambio de registro y la argumentación, en línea con lo propuesto por Duval (1995) y Brousseau (1986).

Al finalizar la Situación 1, se propuso una situación de validación destinada a que los estudiantes consolidaran la correspondencia entre la representación gráfica y la expresión algebraica de una función cuadrática. Se les presentaron 6 gráficas correspondientes a funciones distintas, lineales cúbicas y dos cuadráticas. La situación consistía en identificar cuál de ellas representaba una función cuadrática, basándose exclusivamente en la forma general de la expresión algebraica: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

En este punto del proceso, los estudiantes solo habían trabajado con esta estructura algebraica básica y su gráfica asociada, sin haber abordado aún temas como concavidad, vértice o transformaciones.

Esta situación se enmarca en la fase de validación de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (2007), en la que el estudiante debe poner a prueba sus conocimientos para justificar una elección o conclusión. En este caso, el medio constituido por las diferentes gráficas exige al estudiante movilizar los saberes construidos previamente para distinguir visualmente la parábola que representa la función cuadrática. Según Brousseau, “la validación es la fase en que el conocimiento debe ser sometido a pruebas a través de su aplicación y su confrontación con otras soluciones posibles” (Brousseau, 2007, p.47).

De los seis estudiantes participantes, cinco de ellos (E1, E2, E3, E4, y E6) seleccionaron correctamente la gráfica correspondiente a una función cuadrática, mientras que uno de ellos (E5) eligió erróneamente una gráfica correspondiente a una función cúbica. Este error sugiere una dificultad en la discriminación visual entre tipos de gráficas, lo que pone en evidencia una validación incompleta o basada en características superficiales.

Análisis de los registros de representación semiótica

Desde el enfoque de Duval (2006), esta actividad involucra un cambio de registro entre el registro algebraico (la forma general de la función cuadrática) y el registro gráfico (la forma de su representación en el plano cartesiano). Para lograr identificar la parábola correcta, el estudiante debía reconocer en las gráficas la forma característica de una función cuadrática, curva, simetría, con un solo punto máximo o mínimo; y vinculada con la estructura algebraica aprendida.

El éxito de cinco estudiantes al hacer esta correspondencia, evidencia que lograron realizar el cambio de registro de manera adecuada. En cambio, el error de E5 indica una dificultad en esta conversión semiótica. Como señala Duval, “comprender un concepto matemático implica poder cambiar de un registro de representación a otro y coordinar al menos dos registros diferentes” (2006, p.123). La elección de una gráfica cúbica por parte de E5 puede interpretarse como una identificación incompleta de los invariantes visuales que caracterizan a las funciones cuadráticas.

A continuación, se presentan las evidencias correspondientes al acierto de los estudiantes E1, E2, E3, E4, y E6, y el error cometido por E5 en la situación de validación.

Figura 8

Evidencia fotográfica de acierto de estudiantes E1, E2, E3, E4, y E6

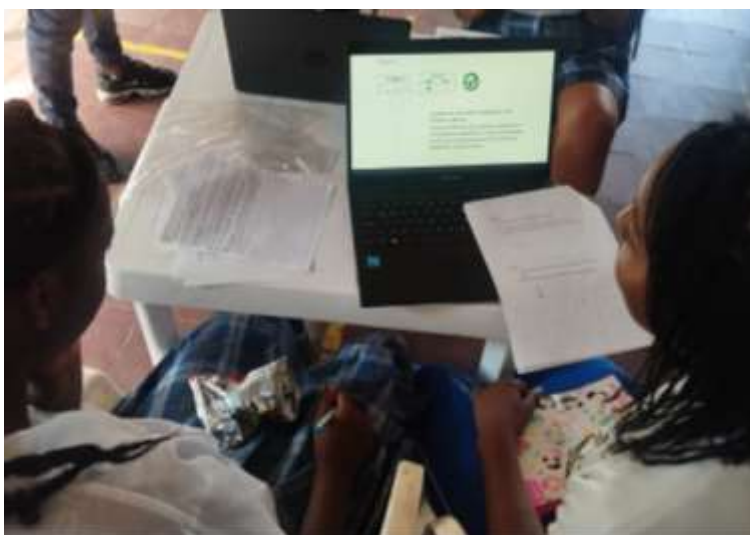
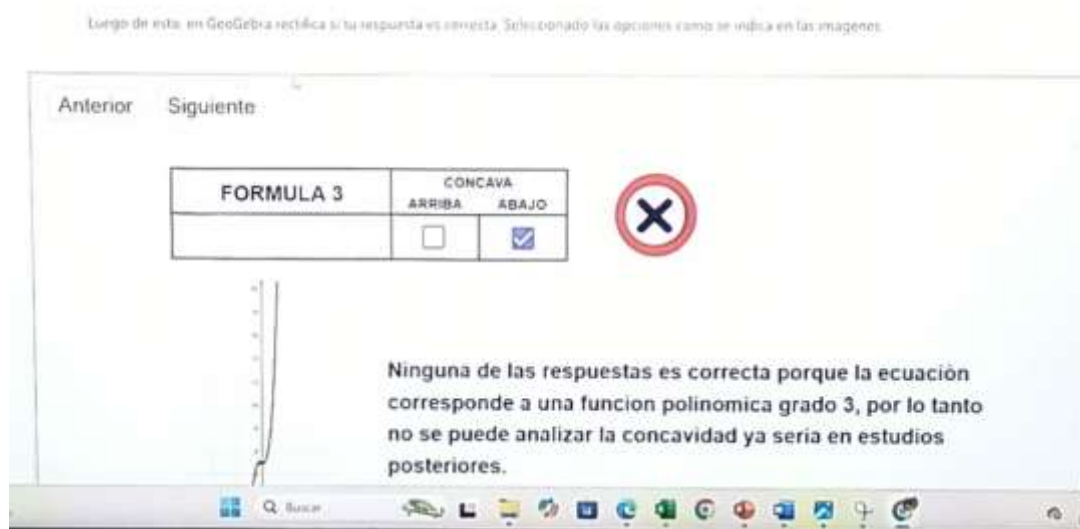


Figura 9

Evidencia fotográfica del error de E5

4.2 Análisis de los resultados de la Situación 2: Determinar la concavidad de una parábola

Descripción de la intención de las preguntas en la situación 2.

El objetivo de esta situación es que el estudiante pueda **visualizar y verbalizar** el cambio en la forma de la parábola, y comprender cómo el signo del coeficiente a influye en dicha representación.

La primera pregunta: ¿Cómo se vería la trayectoria si la pelota cayera en lugar de subir? Busca activar la fase de acción de la situación didáctica, tal como lo define Brousseau (2007), en la que el estudiante interactúa con el problema desde su intuición y conocimientos previos. Esta pregunta permite anticipar la forma gráfica de una parábola con concavidad hacia abajo (coeficiente $a < 0$), aún sin haber formalizado el concepto. En términos de registros de representación (Duval 2006), se activa el registro gráfico y verbal, ya que el estudiante debe imaginar o describir visualmente cómo cambia la forma de la trayectoria.

La segunda pregunta: ¿Cómo influye el signo del coeficiente a en la dirección del movimiento de la pelota? Permite avanzar hacia la fase de formulación, en la que el estudiante debe explicitar y justificar su observación anterior con base en la estructura algebraica de la función cuadrática. Aquí se favorece el cambio entre lo visual (concavidad de la gráfica) y lo simbólico-algebraico (signo de a), en coherencia con la teoría de Duval (2006). Este cambio de registro es esencial para que el estudiante no solo reconozca gráficamente el comportamiento de la parábola, sino que pueda atribuirle una causa matemática concreta: el signo del coeficiente principal.

Este tipo de situación favorece lo que Duval denomina coordinación de registros: “la comprensión conceptual requiere la capacidad no solo de operar dentro de un registro, sino de articular al menos dos registros diferentes” (Duval, 2006, p. 125). A su vez, Brousseau detecta que el proceso de formulación permite pasar de una solución intuitiva a una justificada dentro del sistema matemático escolar.

Así, la secuencia de preguntas en esta situación está diseñada para conducir progresivamente al estudiante desde una representación intuitiva, contextual y visual (acción), hacia una interpretación algebraica (formulación), sentando las bases para una validación posterior cuando se retome el análisis del coeficiente en otros contextos o con apoyo del software de GeoGebra.

Respuestas de los estudiantes a la Situación 2:

Para estructurar el análisis, se tomaron las respuestas de ambos ítems y se integraron por estudiante, de manera que se pudiera observar su proceso de pensamiento de forma completa y cómo se movilizan entre diferentes representaciones.

Ambas preguntas apuntan a la concavidad de la parábola y al significado del coeficiente cuadrático a , desde un enfoque cualitativo, gráfico y algebraico. Por eso, en lugar de analizarlas por separado, las respuestas se agruparon por estudiante para tener una visión más holística del nivel de comprensión de cada uno y así identificar mejor los registros que movilizan, los obstáculos que enfrentan, y el tipo de razonamiento que emplean.

Para el análisis se diseña la tabla 7 que permite evaluar tanto la profundidad conceptual como la articulación de representaciones que logran los estudiantes frente a un fenómeno cuadrático contextualizado.

Tabla 7

Análisis de las respuestas de los estudiantes.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones.	Obstáculos identificados.
E1.	Verbal (trayectoria), noción cualitativa de gráfico.	Verbal-Gráfico implícito.	Parcial. Identifica que la trayectoria cambia al caer, pero confunde negativa con orientación.	Usa lenguaje informal (forma negativa) sin relacionarlo con el coeficiente cuadrático.	Obstáculo semiótico: “negativo” sin dirección sin representar o interpretar el gráfico.
E2.	Verbal.	Verbal-Gráfico implícito.	Similar a E1. Reconoce cambio de trayectoria, pero emplea lenguaje ambiguo (“se ve negativa”).	Intenta explicar concavidad con cambio de contracción y apertura.	Obstáculo epistemológico: confunde concavidad con variación del ancho o amplitud.
E3.	Verbal-Algebraico (menciona signo de a).	Verbal-algebraico-Gráfico implícito.	Alta, relaciona correctamente el signo de a con la concavidad hacia abajo.	Usa términos más precisos. Refleja comprensión estructural.	Ninguno evidente. Buena integración de registros.
E4.	Verbal.	Verbal-Gráfico implícito.	Parcial. Describe la caída como “forma cuadrática” pero no explicita relación con a .	Reconoce forma general pero no profundiza en el concepto.	Obstáculo de formalización: intuye, pero no articula con el lenguaje algebraico.
E5.	No responde		No hay evidencia.	Falta de participación o comprensión.	Posible obstáculo afectivo o de comprensión inicial.
E6.	Verbal-Algebraico.	Verbal-Algebraico-Gráfico implícito.	Parcial. Menciona “función cuadrática” pero no aclara relación signo-concavidad.	Usa elementos correctos, pero con expresiones vagas.	Obstáculo semántico: usa “cuadrática” sin concretar significado gráfico o algebraico.

Nota: Elaboración propia.

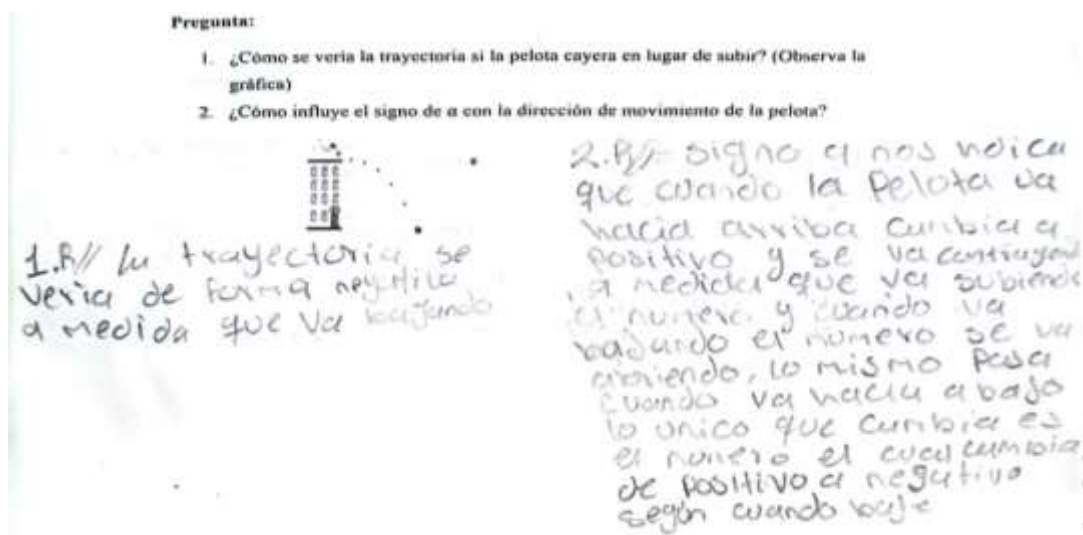
A continuación, se presentan las producciones escritas de los estudiantes analizados en la tabla anterior. Estas evidencias sustentan los registros movilizados, los tipos de conversión y las observaciones señaladas previamente.

Figura 10

Producción escrita de E1 y E2

Pregunta:

1. ¿Cómo se vería la trayectoria si la pelota cayera en lugar de subir? (Observa la gráfica)
2. ¿Cómo influye el signo de a con la dirección de movimiento de la pelota?

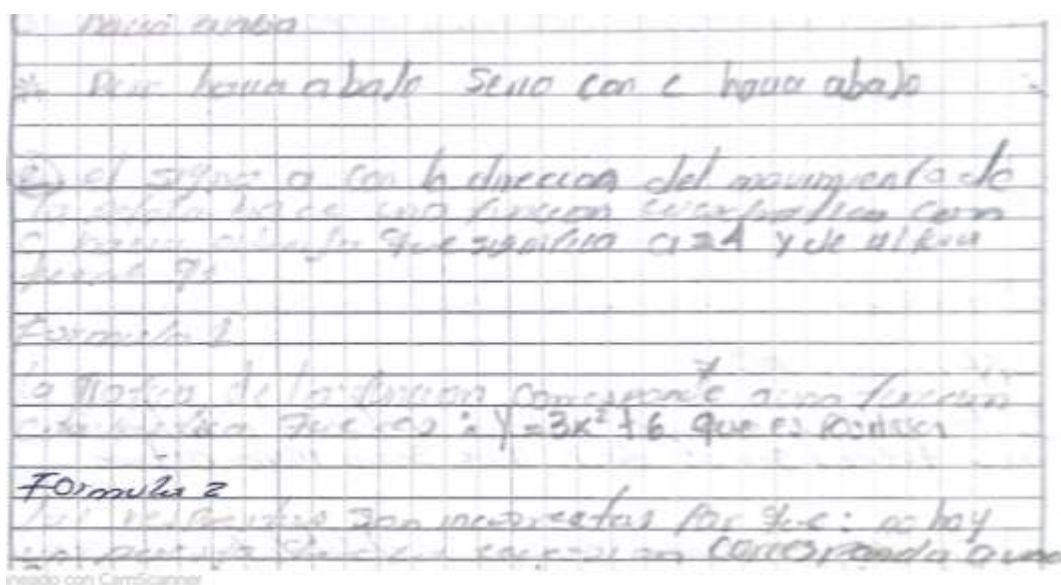


1.R// la trayectoria se vería de forma negativa a medida que va bajando

2.R// signo a nos indica que cuando la Pelota va hacia arriba cambia a positivo y se va aumentando a medida que va subiendo el número y cuando va bajando el número se va bajando, lo mismo pasa cuando va hacia abajo lo único que cambia es el número el cual cambia de positivo a negativo según cuando baje

Figura 11

Producción escrita de E3



Para hacia arriba signo con a hacia abajo

El signo a con la dirección del movimiento de la pelota indica una función cuadrática con a hacia arriba que significa $a > 0$ y de abajo

Formula 1

la forma de la función cuadrática con $a > 0$ que es $y = 3x^2 + 6$ que es positiva

Formula 2

la forma de la función cuadrática con $a < 0$ que es $y = -3x^2 + 6$ que es negativa

Figura 12

Producción escrita de E4

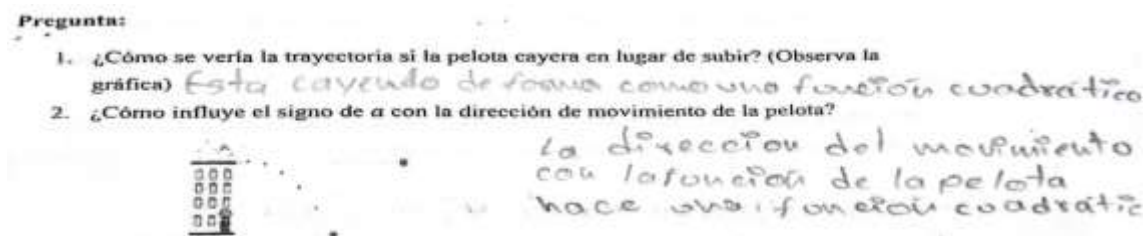


Figura 13

Producción escrita de E5

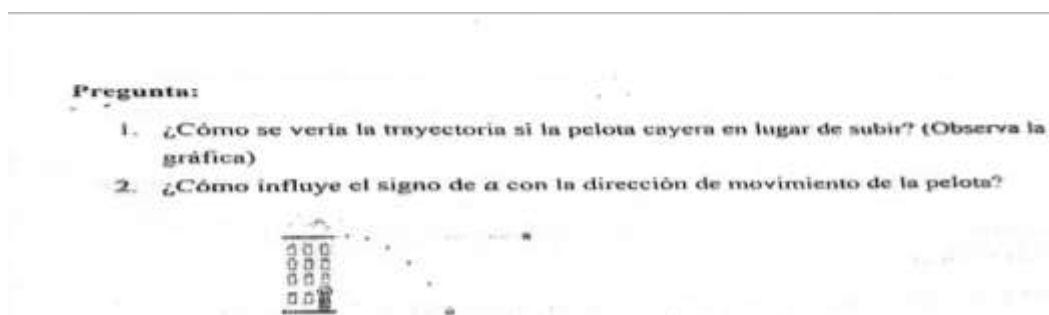
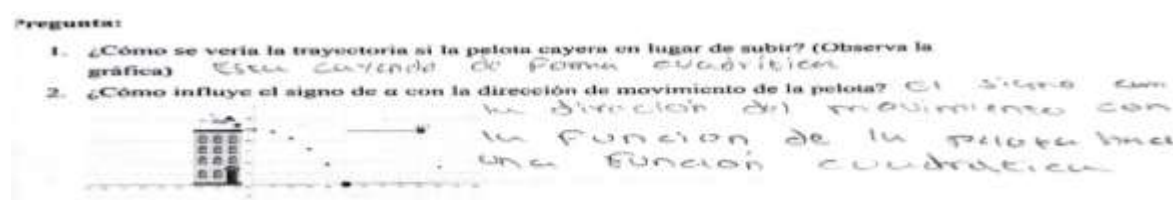


Figura 14

Producción escrita de E6



Desde la TSD de Brousseau, se observa que la situación propició momentos de **acción**, donde los estudiantes intentaron resolver el problema utilizando sus conocimientos previos; y momentos de **formulación**, donde algunos lograron establecer relaciones entre la situación física y el modelo cuadrático.

Sin embargo, aparecen indicios de obstáculos epistemológicos y didácticos (Brousseau, 1998). Particularmente en estudiantes como E1, E2 y E4. Estos estudiantes presentaron

dificultades para vincular con claridad el signo del coeficiente cuadrático con la dirección de apertura de la parábola, lo cual evidencia una ruptura entre la situación contextual y la representación algebraica.

Desde la teoría de Duval, se hace evidente que muchos estudiantes se mantienen en el **registro verbal**, con referencias implícitas al gráfico, pero sin lograr una conversión clara al **registro algebraico**. Según Duval (2006), “La comprensión matemática requiere no sólo manipular símbolos, sino traducir significados entre registros diferentes”. Este punto es especialmente claro en E3, quién si logra realizar una coordinación entre los registros verbal, gráfico y algebraico, mostrando una comprensión estructural del fenómeno.

Al finalizar la Situación 2 se propuso una fase de validación, en esta se busca que los estudiantes consoliden y validen los conocimientos construidos en las fases de acción y formulación, específicamente en torno al reconocimiento de la **forma general de la función cuadrática** y la **concavidad de su gráfica**. El objetivo de esta actividad es que el estudiante sea capaz de **discriminar entre funciones que sí representan parábolas y las que no**, y que en los casos afirmativos puedan **determinar su concavidad** con base en el coeficiente cuadrático.

Desde la Teoría de Situaciones didácticas de Brousseau, esta fase corresponde a un momento en el que el estudiante debe poner a prueba sus conjeturas y justificar sus respuestas, contrastándolas con el medio (en este caso simbólico y gráfico), ya sin depender de la intervención directa del docente. Aquí se espera un paso hacia la autonomía intelectual.

Además, la actividad promueve la **coordinación de distintos registros de representación**-algebraico (la expresión simbólica de la función), gráfico (con el uso de GeoGebra para verificar la concavidad) y verbal- como lo plantea Duval (2006), la identificación de la concavidad implica pasar del registro algebraico al gráfico, o incluso realizar un

razonamiento dentro del mismo registro algebraico, interpretando el signo del coeficiente cuadrático.

El uso de GeoGebra puede apoyar esta validación, ya sea para ver la representación de las funciones dadas o para comprobar visualmente las conjeturas realizadas, favoreciendo el razonamiento y la argumentación desde múltiples registros.

En la situación propuesta se solicitó a los estudiantes identificar, a partir de un conjunto de funciones, cuáles representaban una parábola y, en caso afirmativo, determinar si eran cóncavas hacia arriba o hacia abajo.

- Los estudiantes E1, E2, E3 y E6 identificaron correctamente las funciones cuadráticas (F1 y F4) y determinaron adecuadamente su concavidad: cóncava hacia arriba en ambos casos, ya que los coeficientes cuadráticos son positivos.
- Los estudiantes E4 y E5, en cambio, seleccionaron como parábolas funciones que no lo eran: E4 eligió la función cúbica (F3) y E5 la función lineal (F2).

Estos errores son especialmente valiosos desde un enfoque didáctico. Lejos de representar una falla del diseño, se convierte en evidencia de que aún hay dificultades en la identificación estructural de la forma cuadrática dentro del registro algebraico.

Asimismo, el error favoreció una instancia espontánea de retroalimentación y discusión grupal, reforzando el objetivo de la situación y permitiendo volver a conectar con los significados centrales del concepto.

Análisis de los registros de representación semiótica

Desde la perspectiva de Duval, esta actividad moviliza principalmente el **registro algebraico**, pero puede enriquecerse con el paso al **registro gráfico**, especialmente con el apoyo de software como GeoGebra. De hecho, en los casos de error al utilizar GeoGebra los estudiantes

pudieron confrontar su representación simbólica con una visual, los que les permitió corregir sus concepciones iniciales. Este tipo de cambio o coordinación de registros es crucial para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que permite construir un significado más real y flexible de los objetos matemáticos involucrados.

Además, se observó que la posibilidad de representar las funciones en GeoGebra ayudó a clarificar visualmente que, por ejemplo, una función cúbica tiene una gráfica diferente a una parábola (no simétrica respecto a un eje vertical, y con crecimiento en ambos extremos), y que una función lineal no representa concavidad alguna.

Evidencia fotográfica del trabajo de los estudiantes:

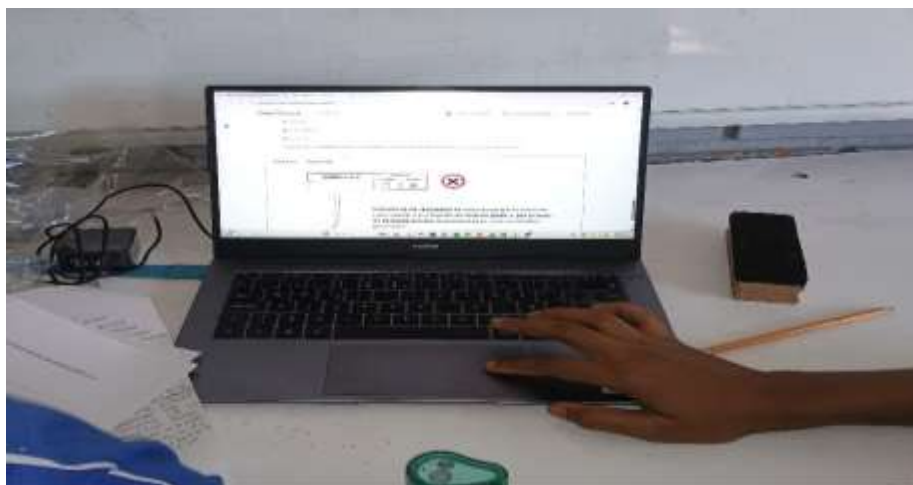
Figura 15

Selección de los estudiantes E1, E2, E3 y E6



Figura 16

Selección del estudiante E4



La fase de validación cumplió un papel clave en el proceso de construcción del conocimiento matemático, al permitir que los estudiantes confrontaran sus ideas con la estructura formal de la función cuadrática. Los aciertos de la mayoría de los participantes evidencian una apropiación adecuada del concepto de concavidad y de la identificación de funciones cuadráticas a partir de su expresión simbólica. Al mismo tiempo, los errores cometidos por algunos de los estudiantes no fueron un obstáculo, sino una oportunidad didáctica que permitió reforzar el objetivo de la situación a través del análisis conjunto y la comparación entre funciones de diferentes tipos.

El uso de GeoGebra resultó ser una herramienta pedagógica eficaz, no sólo para validar gráficamente las conjeturas de los estudiantes, sino también como recurso que favoreció el cambio de registros propuestos por Duval, fortaleciendo la comprensión de las relaciones entre forma algebraica y representación gráfica. Esta interacción entre teoría, tecnología y práctica educativa demuestra la pertinencia del diseño de la situación y la coherencia con los marcos teóricos adoptados.

4.3 Análisis De Los Resultados De La Situación 3: Relación Entre Concavidad, Máximos Y Mínimos, Contracción Y Dilatación.

Descripción de la intención de las preguntas.

En el caso del lanzamiento de la pelota, ¿Cuál es el punto máximo? Mueva el deslizador k .

Esta pregunta invita al estudiante a explorar gráficamente el comportamiento de una parábola con concavidad hacia abajo (coeficiente cuadrático negativo), asociando la representación gráfica con una situación física concreta (el lanzamiento de una pelota). Al mover el deslizador k , el estudiante observa el cambio de posición del vértice, visualizando directamente el punto máximo de la trayectoria.

Desde la teoría de Duval (1993): se busca que el estudiante realice una **conversión de registros**, del registro **gráfico (trayectoria de la pelota)** al **algebraico (forma de la función y su vértice)**. Esta conversión permite articular la interpretación visual con la expresión simbólica.

Desde las TSD de Brousseau (2007): Esta pregunta corresponde a la fase de acción del modelo didáctico, donde el estudiante interactúa con un entorno dinámico y formula conjeturas a partir de la manipulación del objeto matemático.

“La comprensión en matemáticas depende esencialmente de la capacidad de coordinar al menos dos registros de representación semiótica.” (Duval, 1993).

1. En el caso en el que deja caer la pelota, ¿Cuál es el punto mínimo? Mueva el deslizador m .

Aquí se aborda la concavidad positiva (función cuadrática hacia arriba), ahora en el contexto de una caída libre. El objetivo es que el estudiante reconozca que, al modificar

parámetros mediante el deslizador m , el gráfico cambia y el punto más bajo (mínimo) representa el vértice.

Desde la teoría de Duval, nuevamente se propone una conversión gráfica-algebraica, permitiendo identificar el mínimo sin depender únicamente del cálculo formal, sino a través de la **intuición visual**.

Desde la teoría de Brousseau, la pregunta también se inscribe en la fase de acción, pero con elementos de la fase de formulación, ya que se espera que el estudiante empiece a establecer regularidades (“cuando la parábola abre hacia arriba, el vértice es el mínimo”).

“El conocimiento matemático no puede construirse solamente a partir de manipulaciones simbólicas; se requiere un trabajo constante de interpretación entre registros.” (Duval, 1993).

2. ¿Cómo identificar el punto más alto o bajo de la trayectoria?

Esta pregunta promueve la **explicación del fenómeno observado**, integrando lo visual, lo simbólico y lo verbal. Es una transición hacia la **formalización del conocimiento: el estudiante debe expresar verbalmente criterios que permiten** reconocer el vértice según la concavidad.

De acuerdo con Duval, el estudiante realiza un **tratamiento dentro del registro gráfico** (compara concavidades) y una **conversión al registro verbal**, desarrollando así una mayor flexibilidad cognitiva.

Asimismo, desde la teoría de Brousseau, corresponde a la **fase de validación**, pues se espera que el estudiante confirme su hipótesis o regla general, contrastándola con el comportamiento observado en GeoGebra.

“Las diferentes fases de la situación didáctica permiten a los alumnos actuar, formular, y validar progresivamente el conocimiento.” (Brousseau 2007).

3. ¿Cómo se representa esta trayectoria en una expresión algebraica?

Aquí se busca establecer el **vínculo definitivo entre la situación física, su representación gráfica y su expresión algebraica**. El estudiante debe deducir o identificar la forma general de la función cuadrática que modela la trayectoria (por ejemplo: $y = ax^2 + bx + c$).

Aquí se presenta una **conversión del registro gráfico al algebraico**, y también puede haber un **tratamiento algebraico** si el estudiante ajusta parámetros o interpreta coeficientes.

Esta pregunta se ubica en la fase de **institucionalización**, donde el conocimiento se formaliza y se conecta con los objetos matemáticos establecidos.

“La institucionalización permite estabilizar los saberes adquiridos por el alumno, ligándolos a los conceptos matemáticos ya validados por la institución escolar.” (Brousseau, 2007).

Una vez planteadas las preguntas y agrupadas según su intención, preguntas 1 y 2 en una tabla, y las preguntas 3 y 4 en otra. Se procede a analizar las respuestas de los estudiantes para identificar cómo interpretan los conceptos clave de la situación: máximos y mínimos, concavidad y representación algebraica. Este análisis permite evidenciar: si logran hacer conversión entre registros. En qué fase de la situación didáctica se encuentran y qué errores o dificultades emergen durante la exploración y la justificación.

La siguiente tabla muestra las respuestas obtenidas en el desarrollo de la situación.

Tabla 8

Preguntas 1 y 2. Identificación de máximos y mínimos

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones.	Obstáculos identificados.
E1.	Gráfico-verbal.	Conversión gráfico verbal.	Máximo 20 metros mínimo 0.	Describe ambos puntos según el contexto.	No articula con ecuaciones; mínima generalización.
E2.	Gráfico-verbal.	Conversión gráfico-verbal.	Máximo 20, mínimo 0.	Idéntico a E1.	No desarrolla el porqué del valor mínimo.
E3.	Gráfico, verbal, tentativa algebraica.	Conversión gráfico verbal/algebraico.	Máximo: $k=20$; mínimo: “es cero porque de distancia “e no tiene un término.	Usa términos contextuales, mezcla registros.	Confusión conceptual. “no hay término de distancia”.
E4.	Ninguno.	-	No responde.	-	No se puede evaluar.
E5.	Ninguno.	-	No responde.	-	No se puede evaluar.
E6.	Gráfico verbal.	Conversión gráfico verbal.	Máximo 20 metros. Mínimo: no hay distancia es cero.	Usa ideas intuitivas, reconoce extremos.	Obstáculo para justificar algebraicamente el mínimo.

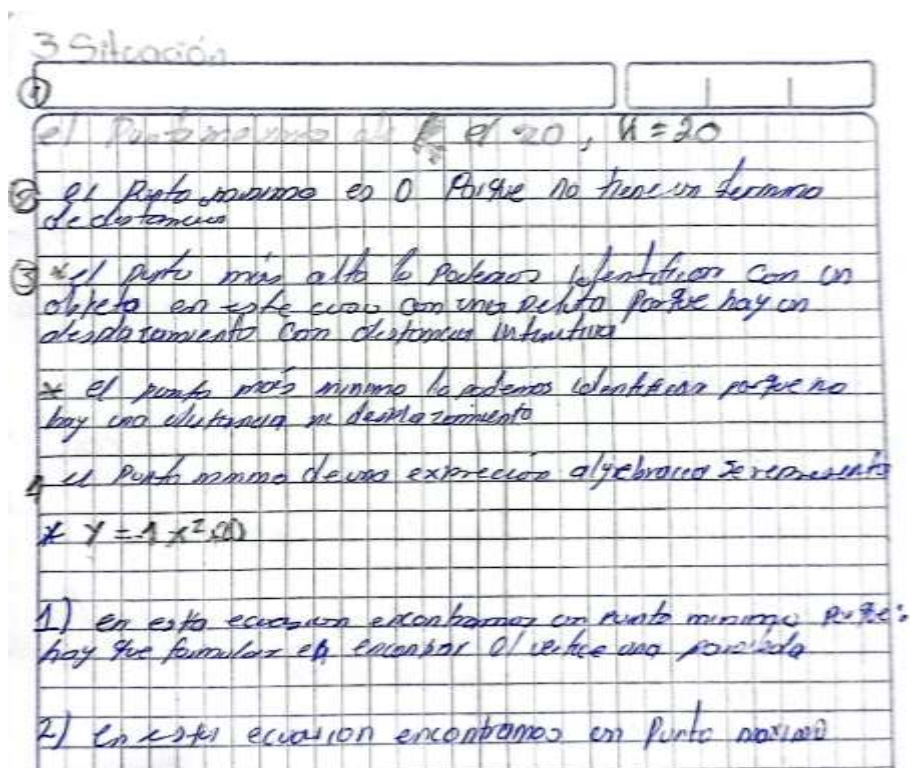
Nota: *Elaboración propia.*

Registros movilizados y conversiones. La mayoría de los estudiantes trabaja en el registro gráfico, con descripciones verbales.

E3 intenta entrar al registro algebraico, pero su expresión es ambigua, a continuación, se muestra la respuesta de E3, donde se evidencia su razonamiento.

Figura 17

Producción escrita de E3



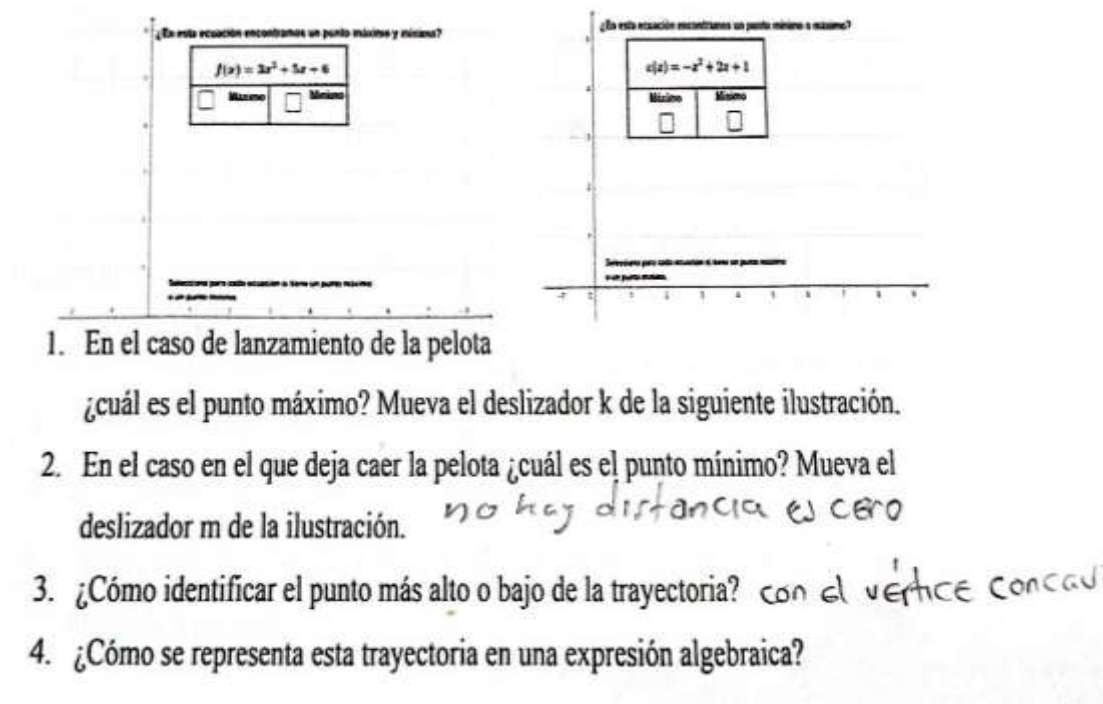
Las conversiones son mayoritariamente gráfico-verbal, con pobre conexión a lo algebraico.

Comprensión del vértice en contexto físico: Los estudiantes reconocen el punto máximo o mínimo como la altura más alta o baja, lo cual evidencia una comprensión intuitiva-contextual del vértice.

La interpretación como “cero” para el punto mínimo muestra una asociación concreta con el suelo, pero sin formalización.

Figura 18

Evidencia fotográfica de E6



Obstáculos comunes: Falta de articulación con la expresión algebraica o con el valor de los parámetros.

Algunos estudiantes como E3 evidencian obstáculos epistemológicos (Brousseau): confusión entre representación simbólica y significado físico.

Dentro del contexto de la situación planteada, se alinea con lo que Brousseau (1986) describe como un saber previamente válido, que impide la apropiación de un conocimiento más complejo.

Tabla 9

Preguntas 3 y 4.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones.	Obstáculos identificados.
E1.	Gráfico-verbal algebraico.	Conversión gráfico algebraico.	Describe la acción con el deslizador y da dos ecuaciones con distinto signo en x^2 .	Reconoce que la concavidad depende del signo del coeficiente.	No relaciona el vértice con la fórmula general.
E2.	Gráfico-verbal, algebraico.	Conversión gráfico-algebraico.	Similar a E1: describe el punto más alto y da expresiones como: $y = \pm x^2 + 20$.	Muestra correspondencia entre forma gráfica y ecuación.	Falta explicación de cómo se obtiene el vértice.
E3.	Gráfico-verbal.	Conversión gráfico-verbal.	Da explicación intuitiva del vértice y la trayectoria con “desplazamiento.”	Usa lenguaje contextual, confunde algunas ideas.	Obstáculo de formalización algebraica.
E4.	Ninguno.	-	No responde.	-	No se puede evaluar.
E5.	Gráfico-verbal, algebraico.	Conversión gráfico-algebraico.	“Con el deslizador en la gráfica”, da ecuación. $y = x^2 + 20$.	Articula forma gráfica con la ecuación.	No se menciona concavidad ni vértice explícitamente.
E6.	Gráfico-verbal.	Conversión gráfico-verbal.	“Con el vértice cóncavo” (confusa expresión).	Intenta relacionar vértice y concavidad, aunque no precisa.	Conceptualización imprecisa; obstáculo en el lenguaje matemático.

*Nota: Elaboración propia.***Interpretación**

En las preguntas 3 y 4 se evidencia la movilización del registro algebraico, a través del análisis de expresiones cuadráticas, por parte de estudiantes como E1, E2 y E5. Estos estudiantes logran establecer conversiones entre el registro gráfico (la parábola representada en GeoGebra) y el registro algebraico (la forma $y = ax^2 + bx + c$), apoyándose en la manipulación del entorno

dinámico que ofrece el software GeoGebra. Esta interacción les permite identificar regularidades y relaciones funcionales, articulando lo visual con lo simbólico.

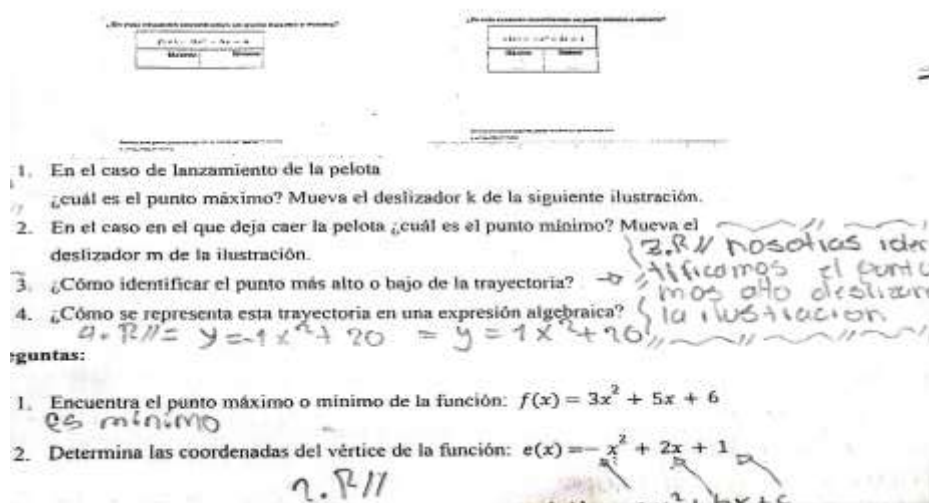
En contraste, estudiantes como E3 y E6 permanecen en la relación entre el registro verbal y gráfico, sin lograr transitar con éxito hacia una comprensión algebraica del fenómeno. En estos casos se observan dificultades para abstraer el significado del coeficiente cuadrático y relacionarlo con propiedades geométricas de la gráfica, como la concavidad o la ubicación del vértice. Este estancamiento puede asociarse a obstáculos epistemológicos en el sentido propuesto por Brousseau (1986), ya que el uso reiterado de explicaciones verbales o intuitivas en etapas previas del aprendizaje puede dificultar la apropiación del lenguaje algebraico como herramienta de modelación.

Comprensión de la concavidad y el vértice, estudiantes como E1, E2 y E5 muestran una comprensión adecuada de la relación entre el signo del coeficiente cuadrático y la forma de la parábola, reconociendo que un coeficiente positivo implica una parábola cóncava hacia arriba (mínimo) y uno negativo, una parábola cóncava hacia abajo (máximo). Este reconocimiento indica una articulación efectiva entre registros, y el uso del entorno gráfico favoreció la verificación inmediata de sus hipótesis, consolidando la noción de concavidad como propiedad fundamental de la función cuadrática.

A continuación, se presenta un fragmento de la producción escrita del estudiante E2 que respalda lo anterior:

Figura 19

Producción escrita de E2



Por su parte, el estudiante E6 realiza un intento por conceptualizar elementos clave como el vértice y la concavidad de la parábola, aunque lo hace utilizando un lenguaje impreciso. Esta producción refleja un esfuerzo por atribuir significado a los elementos gráficos, pero sin alcanzar una formalización adecuada en términos algebraicos. En este caso, se identifican obstáculos epistemológicos (Brousseau, 1986), relacionados con la dificultad de abandonar explicaciones intuitivas y avanzar hacia una comprensión formal del vértice como el punto $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$, dentro del modelo cuadrático.

Además, desde la perspectiva de Duval (1995), se evidencian obstáculos semióticos, ya que E6 no logra efectuar una conversión del registro gráfico al registro simbólico. Aunque reconoce la posición del vértice visualmente en la parábola, no es capaz de expresarlo mediante la fórmula algebraica correspondiente.

Esta limitación revela una ruptura en la articulación entre registros, lo que restringe el acceso a un conocimiento más abstracto y generalizable sobre la función cuadrática.

Esta dificultad contrasta con el desempeño de estudiantes como E1, E2 y E5, quienes logran superar los obstáculos semióticos y epistemológicos mediante una articulación más sólida entre los registros gráfico y algebraico. Estos estudiantes no solo reconocen regularidades en la representación visual, sino que también intentan establecer relaciones explícitas entre esas observaciones y las expresiones simbólicas que las modelan. En términos de la teoría de Brousseau (1998), sus producciones pueden ubicarse en los momentos de formulación y validación, ya que no se limitan a actuar sobre el medio (momento de acción), sino que buscan generalizar, justificar y validar sus ideas a partir de propiedades estructuradas del modelo cuadrático.

Otros estudiantes aún permanecen en la fase de **acción** con el material.

Desde la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, la mayoría de los estudiantes movilizaron principalmente los **registros gráfico y verbal**, especialmente al describir los puntos máximos y mínimos de la trayectoria observada en GeoGebra.

En menor medida, algunos (E1, E2, E5) accedieron al **registro algebraico**, escribiendo expresiones cuadráticas como $y = -x^2 + 20$, mostrando intentos de conversión entre lo visual y lo simbólico.

Se observaron conversiones parciales **gráfico-verbales y gráfico-algebraicas**, aunque limitadas por la falta de justificación formal del vértice y del significado de los parámetros.

Esto evidencia que los estudiantes aún están en proceso de articular las representaciones de manera coordinada. Como señala Duval (2006), la comprensión matemática profunda no ocurre solo dentro de un registro, sino cuando se logra una conversión entre ellos.

Desde la perspectiva de las TSD de Brousseau, la manipulación con los deslizadores en GeoGebra permitió que la mayoría de los estudiantes entrara en la **fase de acción**, observando y describiendo el comportamiento gráfico de la parábola según el contexto propuesto.

Algunos estudiantes (E1, E2, E5) comenzaron a transitar hacia la **fase de formulación**, produciendo expresiones algebraicas que representaban el movimiento.

Sin embargo, no se evidenció con claridad una **fase de validación**, ya que no justificaron ni alcanzaron de manera general el papel del coeficiente cuadrático ni la fórmula del vértice $x = \frac{-b}{2a}$. Lo anterior confirma que la situación propicia una situación didáctica rica. Pero requiere intervenciones del docente para ayudar a institucionalizar los conocimientos descubiertos empíricamente.

También, se evidenció la dificultad para transitar del registro gráfico al algebraico de forma autónoma y consistente, confusión entre la representación gráfica y el significado físico o contextual del vértice y del coeficiente cuadrático.

Expresiones como “no hay término de distancia” o “vértice cóncavo” revelan nociones intuitivas aún no formalizadas.

Al final de la situación se plantea a los estudiantes la resolución de dos preguntas que involucran funciones cuadráticas definidas en forma general.

1. Encuentra el punto máximo o mínimo de la función: $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$
2. Determina las coordenadas del vértice de la función: $e(x) = -x^2 + 2x + 1$

El propósito es que los estudiantes validen sus procedimientos previos mediante el cálculo del vértice y la identificación de si dicho punto representa un **máximo o un mínimo** en la gráfica de la función. La intención de estas preguntases favorecer la consolidación de significados en torno al vértice de una parábola, no solo desde una perspectiva algorítmica, sino

también desde una interpretación semántica asociada a la **concavidad**, determinada por el signo del coeficiente cuadrático.

En esta fase se espera que el estudiante confronte y justifique sus respuestas, poniendo en juego conocimientos matemáticos previos, observaciones experimentales y argumentaciones fundamentadas. La validación no se limita a una comprobación empírica, sino que involucra el uso de propiedades de la función cuadrática y el paso por diversos registros de representación.

Análisis de los registros de representación semiótica.

Esta fase exige que el estudiante realice **conversiones y tratamientos entre registros de representación semiótica**: del **registro algebraico** (forma general de la función y fórmula del vértice), al **registro gráfico** (observación de la parábola en GeoGebra), y al **registro verbal**, en el que debe argumentar si el vértice corresponde a un valor máximo o mínimo. La integración de GeoGebra como recurso tecnológico permite dinamizar estos cambios de registro, facilitando la visualización de la concavidad y del comportamiento global de la parábola, lo cual refuerza la validez de las conclusiones a las que llegan los estudiantes.

A continuación, se presenta la tabla 10 que combina las respuestas a las dos preguntas de la fase de validación, seguida de un análisis que articula las teorías de Duval, Brousseau y el uso de GeoGebra.

Tabla 10

Análisis de las preguntas de la Situación 3.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones.	Obstáculos identificados.
E1.	Gráfico (GeoGebra), Verbal, algebraico parcial.	Parcial (gráfico-verbal); intento de algebraico-verbal.	Reconoce mínimo. (P1); intenta razonar con coeficientes, pero no concluye correctamente. (P2).	Usa GeoGebra para visualizar la parábola, pero no logró formalizar completamente.	No logra consolidar la relación entre la forma algebraica y la gráfica.
E2.	Gráfico (GeoGebra), verbal.	Gráfico-verbal.	Identifica correctamente el mínimo (P1) y máximo (P2), usando la gráfica como base.	Se apoya visualmente, pero no menciona razones algebraicas ni la fórmula del vértice.	Limitado a la observación gráfica; no articula propiedades matemáticas explícitas.
E3.	Gráfico (GeoGebra).	Gráfico sin conversión verbal o algebraica.	No responde verbalmente, pero realizó la actividad en GeoGebra.	Evidencia de participación gráfica, pero sin acompañamiento escrito.	No se verbaliza el conocimiento; posible dificultad para pasar de la observación al lenguaje escrito.
E4.	Gráfico (GeoGebra)-Verbal.	Gráfico-Verbal.	Identifica correctamente los extremos; mínimo en (P1) y máximo en (P2) a partir de la visualización.	Usa términos informales; no utiliza procedimientos formales.	Valida empíricamente, pero sin argumentación algebraica.
E5.	Gráfico (GeoGebra).	Gráfico (sin conversión verbal o algebraica).	No responde verbalmente.	Participa gráficamente, pero no produce explicaciones.	Posible inseguridad al expresarse o desconocimiento de los términos claves.
E6.	Gráfico (GeoGebra)-Verbal.	Gráfico-Verbal.	Da respuestas correctas basándose en la observación del gráfico.	Usa adecuadamente GeoGebra para interpretar, pero no traslada a procedimiento algebraico.	Falta articulación entre registros gráfico y algebraico, no aplica fórmula del vértice.

Nota: *Elaboración propia.***Interpretación:**

Los estudiantes movilizaron el registro gráfico mediante el uso de GeoGebra lo cual representa un avance importante. Sin embargo, las conversiones hacia el registro verbal o

algebraico fueron limitadas o incompletas. Esto sugiere que la conversión entre registros, que según Duval es esencial para el desarrollo del conocimiento matemático aún no está consolidada.

En particular, solo algunos estudiantes (E1, E2, E4, E6) realizaron conversiones gráfico-verbal, y únicamente E1 intentó movilizar también el registro algebraico, aunque sin éxito total. La mayoría de las validaciones se dieron de **forma visual**, sin argumentación matemática explícita, lo cual indica una dependencia de la observación sin profundizar en el razonamiento estructural.

La fase de validación debía promover una justificación matemática del conocimiento adquirido en fases anteriores. Aunque los estudiantes utilizaron GeoGebra para validar gráficamente los puntos extremos, **no se produjo una validación formal en términos de propiedades teóricas**. Las respuestas indican una validación pragmática (“porque se ve en la gráfica”) más que una basada en el control del saber (uso del coeficiente cuadrático, fórmula del vértice).

En cuanto al uso de GeoGebra favoreció porque permitió a los estudiantes acceder al comportamiento gráfico de las funciones. No obstante, su uso se mantuvo como medio de observación más que como herramienta de validación matemática. Esto sugiere que, aunque GeoGebra facilita el acceso al registro gráfico, es necesario acompañen su uso con situaciones que obliguen a articularlo con otros registros y a verbalizar y justificar las conclusiones obtenidas visualmente.

A continuación, se presentan evidencias fotográficas de la producción de los estudiantes.

Figura 20

Fotografía de acierto del estudiante E2

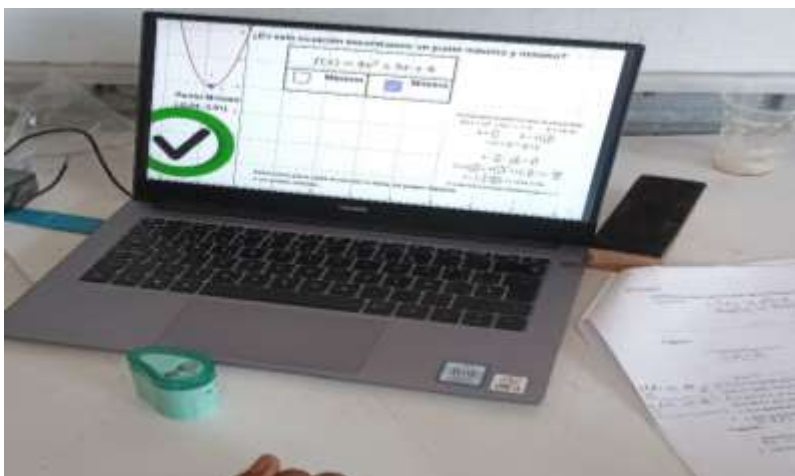


Figura 21

Producción escrita de E1

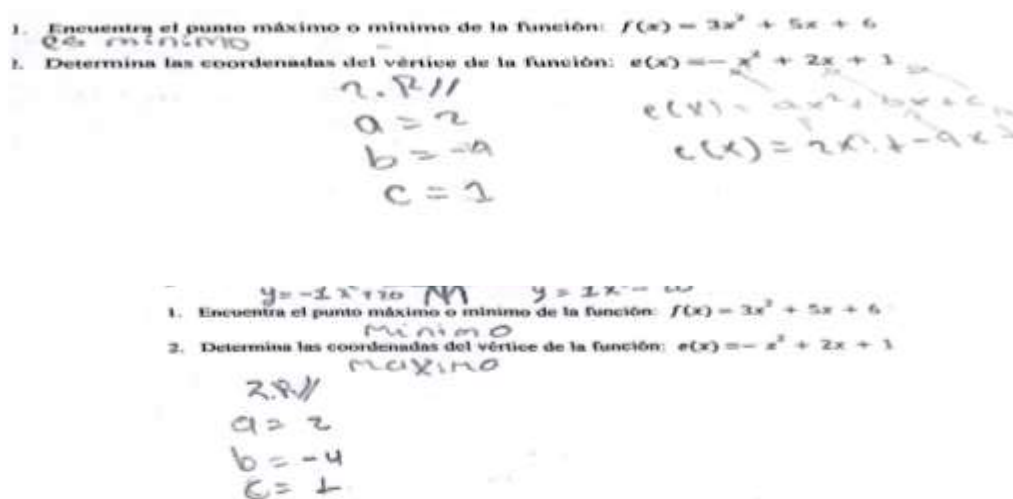


Figura 22

Producción escrita de E2

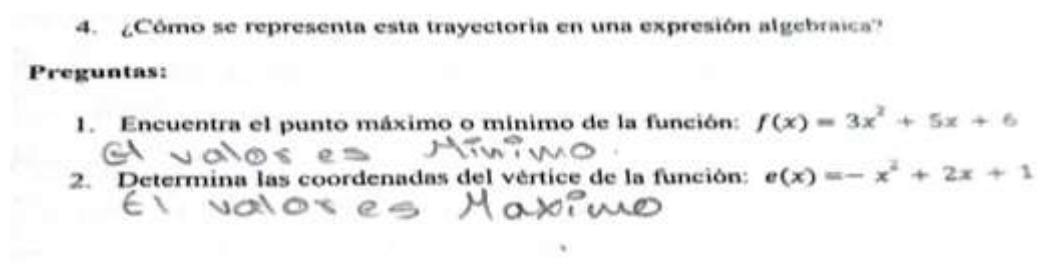


Figura 23

Producción escrita de E4

tra el punto máximo o mínimo de la función: $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ El valor es mínimo
 na las coordenadas del vértice de la función: $e(x) = -x^2 + 2x + 1$ El valor es máximo

Resultados de la Situación 3: Contracción y Dilatación

En esta segunda parte de la situación 3, se retoma el contexto del lanzamiento de una pelota para explorar cómo varía la gráfica de una función cuadrática según los cambios en el coeficiente cuadrático a .

El objetivo es analizar cómo afecta la intensidad del lanzamiento (representada en el modelo matemático por el valor absoluto de a) a la forma de la parábola y, específicamente a su altura máxima.

A través de preguntas contextualizadas, se invita a los estudiantes a razonar sobre los efectos del **coeficiente cuadrático** tanto en la **forma de la parábola** (abertura) como en su **comportamiento gráfico general**, incentivando la exploración mediante GeoGebra.

Descripción de la intención de las preguntas.

1. ¿Cómo cambiaría la altura máxima de la pelota si la lanzamos con más fuerza?

Intención: Estimular la observación de la relación entre el valor de a y la altura máxima de la parábola en un contexto físico. Se espera que los estudiantes exploren con funciones en GeoGebra y comprendan que lanzar con más fuerza puede aumentar o reducir la altura.

2. ¿Qué sucede si el lanzamiento es más débil?

Intención; Contrastar con la pregunta anterior para profundizar la noción de **dilatación** y cómo afecta la altura alcanzada. El objetivo es que identifiquen gráficamente una parábola más abierta o achatada.

3. ¿Qué ocurriría con la gráfica si el valor del coeficiente a fuera negativo?

Intención: Estimular la identificación de la **concavidad** de la parábola y su relación con el signo de a . Se busca que el estudiante asocie el signo negativo con una parábola que abre hacia abajo, lo cual se conecta con la idea de un lanzamiento que tiene un punto máximo.

4. Comparando $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = 10x^2$, ¿Cuál de las dos parábolas está más contraída y por qué?

Intención: Promover el análisis comparativo en el registro algebraico y gráfico. Se espera que los estudiantes interpreten que, a mayor valor absoluto de a , la parábola está más cerrada (contraída), y que puedan justificar esta afirmación en términos gráficos y simbólicos.

Se espera que los estudiantes movilicen al menos dos registros de representación semiótica: el gráfico (a través de GeoGebra) y el algebraico (las expresiones de las funciones). El foco estará en si logran **convertir** información del registro algebraico (el valor de a) al gráfico (forma y concavidad de la parábola), y viceversa. Este análisis revelará si los estudiantes comprenden el rol del coeficiente cuadrático en la transformación de la gráfica.

Esta fase puede considerarse parte de una **acción didáctica intermedia entre la acción y la formulación**, donde el estudiante pone a prueba hipótesis mediante la exploración directa en GeoGebra. Se pretende identificar si los estudiantes son capaces de formular regularidades funcionales entre los parámetros y la forma geométrica, pasando del juego experimental a una construcción de conocimiento más estructurada.

A continuación, se presenta la tabla 11 con el análisis de las respuestas de los estudiantes, teniendo en cuenta los registros movilizados, el tipo de conversión realizada, las evidencias de comprensión, observaciones específicas y los obstáculos identificados en el proceso.

Tabla 11

Análisis de las respuestas de contracción y dilatación.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones.	Obstáculos identificados.
E1.	Verbal, físico, gráfico, (GeoGebra).	Físico-verbal-gráfico.	Reconoce relación entre fuerza y trayectoria, pero no vincula explícitamente con la altura en la P1; identifica concavidad en P3.	Producción escrita ambigua en P1-P2; fortalece respuesta en P3. P4.	Confusión inicial entre fuerza y dirección. Ausencia de respuesta en P4.
E2.	Verbal-Gráfico (GeoGebra).	Físico-verbal-algebraico y gráfico.	Similar a E1, reconoce concavidad y parábola más contraída en $h(x)$.	Mejora progresiva en respuestas. Identifica correctamente la función más contraída.	Lenguaje repetitivo en P1-P2. No profundiza en justificaciones.
E3.	Verbal.	Verbal-Gráfico (implícito).	Contradicciones en P1 y P2; reconoce apertura en P3.	En P4 menciona contradicción, posiblemente quiso decir contracción.	Malinterpretación conceptual en P1-P2. Dificultad para usar términos precisos.
E4.	Verbal, gráfico (GeoGebra).	Verbal-Gráfico.	En P1-P2 describe cambios gráficos; en P3 correcta descripción de concavidad; justifica P4 con parámetro a .	Usa GeoGebra de manera visual. Poca claridad en P1 (se abriría) puede ser ensanchamiento o mayor altura.	Ambigüedad léxica. En P2 confunde debilidad con desviación.
E5.	-	-	No responde a tres de las cuatro preguntas.	Participación mínima.	Falta de implicación o desconexión con la actividad.
E6.	Verba, Gráfico (GeoGebra).	Verbal-Gráfico.	Reconoce la relación entre fuerza y altura, identifica que $h(x)$ es más contraída por mayor valor de a .	Argumentos más breves, pero en general correctos. Usa bien el lenguaje matemático.	Expresión vaga en P2 ("se abre"), podría aclararse con apoyo gráfico.

Nota: *Elaboración propia. P1: pregunta 1, P2: pregunta 2, P3: pregunta 3, P4: pregunta 4.*

Interpretación

Durante esta fase intermedia entre los momentos de acción y formulación, los estudiantes exploraron mediante GeoGebra los efectos del coeficiente cuadrático a en la gráfica de una función cuadrática en el contexto del lanzamiento de una pelota. Esta exploración permitió observar cómo las variaciones en el valor absoluto de a generan fenómenos de contracción y dilatación en la gráfica, afectando la “abertura” de la parábola y, por ende, la trayectoria presentada.

Las evidencias se registraron en producciones escritas, observaciones directas y capturas de pantalla de GeoGebra.

Análisis de los registros de representación semiótica:

Se observaron múltiples **cambios de registro**: del verbal al gráfico, del físico (intuitivo) al algebraico, y entre lo gráfico y algebraico. Los estudiantes que movilizaron correctamente al menos dos registros (especialmente E2, E4 y E6) lograron establecer con mayor claridad las relaciones funcionales, como la apertura de la parábola en función del valor absoluto de a .

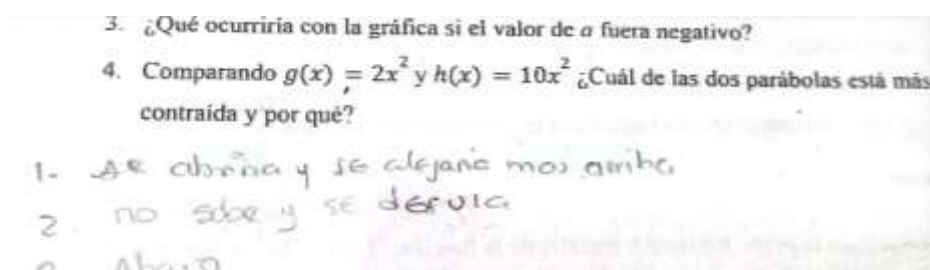
Desde la Teoría de Situaciones Didácticas, se evidencia que la manipulación en GeoGebra actuó como un **medio retroalimentador** que favoreció el paso de la experimentación hacia la formulación. Aquellos estudiantes que lograron generar una **regla verbal generalizada** (como E4 y E6 en la pregunta 4) se aproximaron a una fase de **validación** del conocimiento construido.

Se evidencio confusión entre conceptos físicos y matemáticos (fuerza, velocidad, desviación versus altura y curvatura); ambigüedad léxica al usar términos como “abrir”, la forma gráfica, especialmente en estudiantes con baja participación escrita (E5) o con contradicciones internas (E3).

En las respuestas a las preguntas propuestas se identificaron diversos niveles de comprensión funcional. Por ejemplo, el estudiante E4 señaló que, al aumentar la fuerza de lanzamiento, la parábola “se abriría y se alejaría más arriba”. Aunque el término “abrir” puede ser ambiguo, su producción escrita sugiere una interpretación gráfica del cambio en la altura máxima, como se observa en el siguiente fragmento

Figura 24

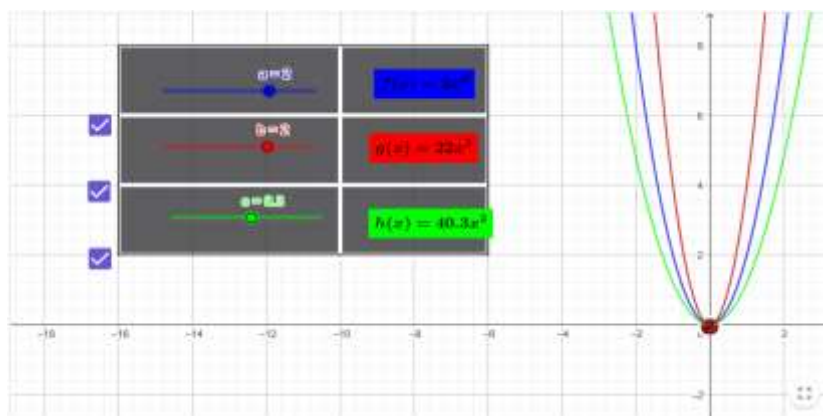
Producción escrita de E4



Esta interpretación fue reforzada mediante el uso de GeoGebra, donde este estudiante modificó el parámetro a y observó los cambios en tiempo real. En la siguiente captura de pantalla se puede observar cómo manipuló diferentes funciones.

Figura 25

Trabajo de E4 en GeoGebra

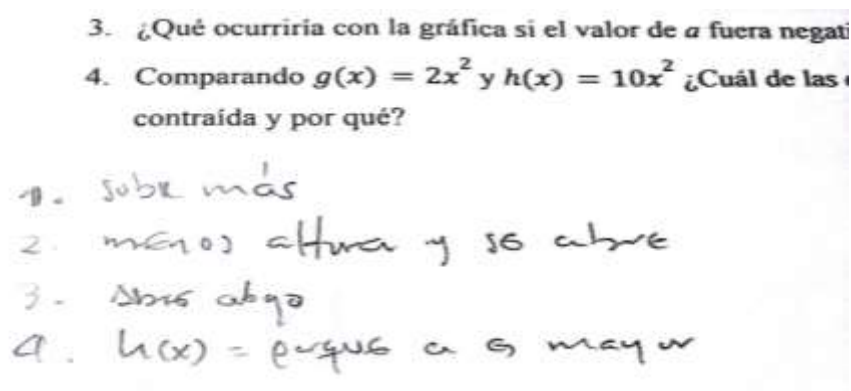


Por otro lado, el estudiante E6 respondió que “sube más” al incrementar la fuerza y que $h(x)$ es la más contraída porque a es mayor, mostrando una relación directa entre el valor del

coeficiente cuadrático y la curvatura de la parábola. Esta respuesta evidencia una comprensión funcional más estructurada. En su producción escrita se puede leer:

Figura 26

Producción escrita de E6



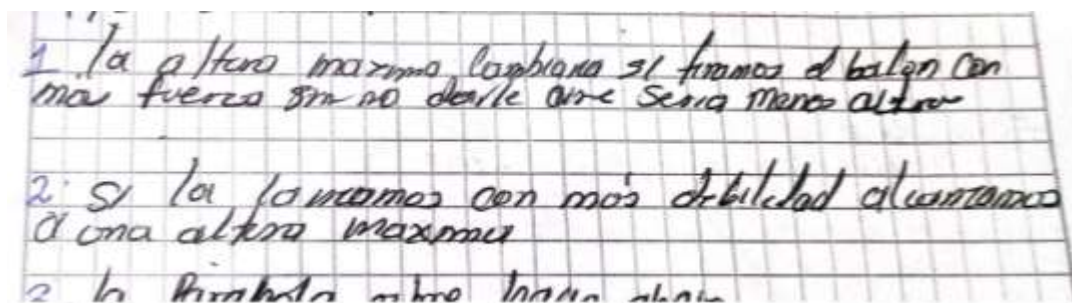
A través de estas producciones, se constata que la experimentación con el software facilitó la transición desde una representación física-intuitiva hacia una formulación más abstracta.

Esto coincide con lo planteado por Brousseau (2007), quién resalta la importancia del medio en la fase de formulación, ya que permite al estudiante validar o refutar conjeturas en un entorno controlado.

Los cambios de registro observados incluyen gráfico-verbal describir lo que observan en la gráfica, algebraico-gráfico al modificar el valor del coeficiente cuadrático y analizar el efecto visual, y físico-algebraico al relacionar la fuerza del lanzamiento con el coeficiente en la ecuación.

Estas transposiciones cognitivas no siempre fueron exitosas. Por ejemplo, algunos estudiantes como E3 presentaron confusiones, indicando que una mayor fuerza resultaría en “menos altura”, lo que sugiere una interpretación inversa del efecto del parámetro. Esta producción puede observarse a continuación:

Figura 27 Producción escrita de E3



Este tipo de evidencia refuerza la necesidad de integrar más apoyos visuales y discusión guiada durante la formulación de reglas generales.

4.4 Análisis de los resultados de la situación 4: Transformaciones

La situación 4 se diseñó con el propósito de favorecer la comprensión de los desplazamientos horizontales y verticales en la gráfica de la función cuadrática, en el marco contextual del lanzamiento de una pelota. Esta situación se desarrolló en dos momentos, en la primera parte, los estudiantes exploraron el desplazamiento vertical de la parábola, asociado a la variación del término independiente c en la expresión $y = ax^2 + bx + c$, y su efecto sobre la altura máxima o mínima alcanzada por el objeto.

En la segunda parte se abordó el desplazamiento horizontal, el cual implicó analizar cómo se modifica la posición del vértice al introducir un término de la forma $(x - h)^2$ en la ecuación, lo que genera una traslación de la gráfica a la izquierda o a la derecha en el eje x .

Parte 1: desplazamiento Vertical:

Esta situación tiene como propósito profundizar en la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática, específicamente en relación con el desplazamiento vertical de la parábola. La actividad se desarrolla a partir de un contexto familiar para los estudiantes: el lanzamiento de una pelota, pero ahora introduciendo una variante significativa en

el escenario, al suponer que la niña lanza la pelota desde una plataforma elevada o desde un ángulo diferente. Esta variación permite explorar los efectos que tiene el cambio en el valor del término c sobre la gráfica de la parábola.

Desde el enfoque de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, esta situación se concibe como una situación de acción y formulación, donde los estudiantes interactúan con un software dinámico GeoGebra, que les permite **manipular directamente el valor de c** mediante el uso de un deslizador. Esta manipulación genera una modificación inmediata en la representación gráfica, lo cual promueve un espacio para la formulación de conjeturas y explicaciones que vinculan el contexto físico con la representación algebraica y gráfica de la función cuadrática. En este sentido, el estudiante enfrenta un medio que le exige tomar decisiones, formular hipótesis y validar sus observaciones, promoviendo el paso de una **acción empírica a una institucionalización del conocimiento matemático**.

Las preguntas formuladas en esta parte tienen intenciones específicas:

1. ¿Qué pasa si la niña lanza la pelota desde una altura mayor?

Invita a establecer una correspondencia entre el contexto físico y el cambio en la gráfica, activando una primera conversión entre el **registro natural (lenguaje verbal)** y el **registro gráfico (la parábola en el plano cartesiano)**. Aquí se espera que el estudiante relacione intuitivamente una mayor altura con una traslación hacia arriba de la parábola.

2. ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando el término c es positivo, negativo o cero?

Esta pregunta promueve una conversión más explícita entre los **registros algebraico y gráfico**, permitiendo identificar el papel del coeficiente c como parámetro que afecta la altura del

vértice y la intersección con el eje y . Se busca aquí avanzar hacia una generalización del efecto de c en la ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

3. ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática?

Esta pregunta lleva al estudiante a reflexionar sobre la construcción misma de la herramienta tecnológica utilizada, fomentando una actividad metacognitiva que articulan registros y refuerza la conciencia sobre la variable manipulada. A su vez, refuerza el carácter didáctico del entorno como un medio de control que limita o focaliza la atención del estudiante sobre un elemento específico de la función.

En relación con la teoría de Duval, esta situación busca propiciar múltiples **conversiones entre registros**: del **registro verbal** (contexto del lanzamiento) al **gráfico** (representación de la parábola en el plano), y de este al **algebraico** (forma general de la función cuadrática). Estas conversiones son fundamentales para el desarrollo de la comprensión matemática, ya que permiten al estudiante no solo reconocer los objetos matemáticos en diferentes formas, sino también establecer relaciones entre ellos, condición necesaria para una comprensión de las transformaciones de las funciones.

Además, al utilizar GeoGebra se favorece el uso del registro gráfico-dinámico, lo que permite a los estudiantes visualizar en tiempo real los efectos de modificar el parámetro c . Esto cumple un papel crucial en la construcción de significados, ya que permite superar las limitaciones de una representación estática y facilita la emergencia de invariantes perceptibles.

A continuación, se presenta la tabla 12 del análisis de la primera parte desplazamiento vertical, organizada como en las situaciones anteriores.

Tabla 12

Análisis parte 1 desplazamiento vertical.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipos de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones.	Obstáculos identificados.
E1.	Verbal, gráfico (implícito).	Verbal-gráfico.	Reconoce que lanzar desde mayor altura implica que la parábola sube más. Relaciona “positivo” con que “sube” y “negativo con que “baja”.	Su discurso es intuitivo y coherente con el comportamiento del término c .	Confusión leve en la formulación verbal (“no sube ni baja”), falta de precisión matemática.
E2.	Verbal, gráfico (implícito).	Verbal-gráfico.	Repite argumentos de E1. Muestra comprensión básica del efecto del término c .	Se evidencia influencia del trabajo en grupo.	Poca elaboración personal, podría indicar comprensión parcial o dependencia del otro estudiante.
E3.	Verbal, Gráfico, algebraico.	Algebraico -gráfico-verbal.	Relaciona el término c con altura del punto máximo, identifica que $c > 0$ sube, $c < 0$ baja. Responde que c afecta al eje y .	Respuesta más técnica. Usa lenguaje matemático adecuado.	No identifica explícitamente la coordenada del vértice ni formaliza el papel de c como ordenada al origen.
E4.	Verbal, Gráfico.	Verbal-Gráfico.	Interpreta que mayor altura genera más impacto (contextualización física). Dice que la función se va hacia arriba si es positiva.	Vincula el fenómeno físico con la gráfica. Usa nociones cualitativas.	Dificultad para distinguir entre concavidad y desplazamiento vertical. Mezcla de ideas entre a y c .
E5.	No se movilizan registros.	-	No responde.	Posible desconexión con la situación o falta de comprensión.	No hay participación. Falta de apropiación de la situación.
E6.	Verbal, Gráfico.	Verbal-Gráfico.	Similar a E4. Cree que c afecta si abre o cierra. Confunde roles de los coeficientes.	Usa lenguaje cotidiano. Hay intención de explicar el efecto visual.	Confusión entre el rol de a y c , interpretación incorrecta de la apertura.

*Nota: Elaboración propia.***Interpretación.**

En la Situación 4, en su primera parte, se promueve en los estudiantes un trabajo activo con la noción de desplazamiento vertical mediante la manipulación del coeficiente c en un

entorno dinámico. Como lo afirma Brousseau (2007), una situación didáctica bien diseñada debe permitir que los estudiantes **actúen, formulen y validen hipótesis**, lo cual se refleja en las respuestas de los estudiantes E1, E3 y parcialmente en E4, quienes logran establecer relaciones entre la manipulación del deslizador y el comportamiento gráfico de la parábola.

Análisis de los registros de representación semiótica:

La mayoría de los estudiantes realiza **conversiones entre registros verbales y gráficos**, aunque de forma aún intuitiva o incompleta. El caso de E3 destaca por realizar una conversión desde el registro algebraico al gráfico y luego al verbal, lo que evidencia un nivel más avanzado de comprensión semiótica. Según Duval, “comprender un objeto matemático requiere cambiar de un registro de representación a otro, manteniendo la invarianza del objeto” (Duval, p. 49), E3 logra este cambio, mientras que otros como E6 presentan dificultades al confundir el rol de los coeficientes.

Se observa en varios estudiantes una interpretación cualitativa válida del desplazamiento (la parábola sube o baja), pero sin una formalización matemática completa. Esto concuerda con la noción de “**contrato didáctico implícito**” de Brousseau, en el cual el estudiante actúa en función de las expectativas de la situación, pero sin necesariamente formular de manera explícita las leyes matemáticas subyacentes. En particular, estudiantes como E4 y E6 intentan responder desde el contexto físico, lo que indica una apropiación parcial, aunque mezclan conceptos como concavidad (asociada al coeficiente a) con desplazamiento vertical (asociado a c).

La no participación de E5 señala un posible obstáculo epistemológico o afectivo, que debe considerarse en la interpretación general del grupo.

Evidencias fotográficas y producciones escritas.

Figura 28

Producción escrita de E1

2. ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando c es positivo, negativo o cero?
3. ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática?

R// = la pelota sube un poco más

R// cuando la parábola es positiva sube y cuando la parábola es negativa baja. Pero cuando está en cero ella no sube ni baja se queda en su estado inicial o sea el comienzo.

R// porque el c es el encargado el desplazamiento de arriba y abajo

Figura 29

Producción escrita de E2

4. Comparando $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = 10x^2$, ¿Cuál de las dos parábolas está contrada y por qué?

1. R// = la Pelota tendría una velocidad muy alta lo cual altera su lanzamiento ya sea desviándose

2. R// = la Pelota no tendría una velocidad máxima y se caería fácil y rápidamente

3. R// = la Parábola abriría hacia abajo y si fuera positiva abriría hacia arriba

4. R// =

Figura 30

Producción escrita de E3

3. Ejercicio N° 4

1. la altura máxima cambia si fuerzas el balón con más fuerza sin no darle más sería menos altura

2. si la fuerza con más debilidad disminuiría o una altura máxima

3. la Parábola abre hacia abajo

4. la que más se contrade es la $h(x)$

1. Abre un punto máximo y con poca altura

2. cuando c es positivo va hacia arriba y cuando c es negativo va hacia abajo.

Figura 31

Producción escrita de E4

1. ¿Qué pasa si la niña lanza la pelota desde una altura mayor?
 2. ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando c es positivo, negativo o cero?
 3. ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática?
- 1-2 // Si lo lanza desde una altura mayor el impacto de caída es más fuerte.
- 2-3 // Cuando es positivo la función se abre hacia arriba o la función es negativa abajo.
- 3- Porque cada uno da 30 grados y cada deslizamiento tiene su fuerza además entre más va aumentando más se va cerrando y entre más se va cerrando más se va abriendo porque se cambia el término c .

Figura 32

Evidencia de no participación de E5

Situación 4:

Desplazamiento Vertical

La niña ahora lanza la pelota desde una plataforma elevada o desde un ángulo diferente.

Preguntas:

1. ¿Qué pasa si la niña lanza la pelota desde una altura mayor?
2. ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando c es positivo, negativo o cero?
3. ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática?

Figura 33

Producción escrita de E6

- La niña ahora lanza la pelota desde una plataforma elevada o desde un ángulo diferente.
- 
- Preguntas:
1. ¿Qué pasa si la niña lanza la pelota desde una altura mayor?
 2. ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando c es positivo, negativo o cero?
 3. ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática?
- 1- ¿Qué pasa si la niña lanza la pelota desde una altura mayor? El impacto de caída es más fuerte.
- 2- ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando c es positivo, negativo o cero? Cuando c es positivo la función se abre hacia arriba o la función es negativa abajo.
- 3- ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática? Porque cada uno da 30 grados y cada deslizamiento tiene su fuerza además entre más va aumentando más se va cerrando y entre más se va cerrando más se va abriendo porque se cambia el término c .

Parte 2: Desplazamiento Horizontal.

En esta segunda parte de la situación 4, se propone a los estudiantes explorar cómo se ve afectada la representación gráfica y algebraica de la función cuadrática cuando se realiza un **desplazamiento horizontal** del punto de lanzamiento de una pelota.

Esta transformación se expresa en la función canónica $y = a(x - h)^2 + k$, donde el parámetro h determina el desplazamiento horizontal del vértice de la parábola.

La Situación se enmarca en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), particularmente en la fase de **acción**, donde el estudiante interactúa con un medio en este caso, un deslizador de GeoGebra que permite modificar el valor de h para establecer regularidades por sí mismo.

Asimismo, se integra el enfoque de Registros de representación semiótica propuesto por Duval (1993), al inducir a los estudiantes a movilizar distintos registros (gráfico, verbal y algebraico) y realizar conversiones entre ellos para comprender el efecto del parámetro h sobre la función cuadrática.

Las preguntas diseñadas buscan favorecer un proceso de desestabilización y posterior reconstrucción del conocimiento. Por ejemplo:

Pregunta 1: Invita a establecer una relación directa entre un cambio físico (moverse hacia adelante) y su implicación en la expresión algebraica.

Pregunta 2: Exige interpretar el parámetro h como un medio de control de la posición horizontal del vértice.

Pregunta 3: Busca que los estudiantes relacionen el signo de h con el sentido del desplazamiento en el plano cartesiano.

Pregunta 4: Plantea un contraste conceptual al pedir analizar si el desplazamiento afecta propiedades como la concavidad, lo cual obliga a discernir entre los distintos parámetros de la función cuadrática y sus efectos gráficos.

Estas preguntas no solo se apuntan a la comprensión del concepto de desplazamiento, sino que permiten observar cómo los estudiantes realizan **conversiones de registros** (Duval, 1993) y enfrentan posibles **obstáculos epistemológicos**, especialmente al interpretar el efecto de h en el comportamiento gráfico de la parábola.

A continuación, se presenta la tabla 13 con el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a la segunda parte de la situación 4.

Tabla 13

Análisis parte 2. Desplazamiento horizontal

Estudiante	Registros movilizados	Tipos de conversión	Evidencia de comprensión	Observaciones	Obstáculos identificados
E1.	Gráfico, verbal, algebraico.	Gráfico-Verbal-Algebraico.	Reconoce que el cambio en el signo de h afecta el desplazamiento, pero invierte el sentido (izquierda-derecha), identifica que $h=-5$ implica desplazamiento a la derecha. Comprende que h no modifica la concavidad.	Respuestas coherentes, pero confunde el sentido del desplazamiento horizontal en la primera pregunta.	Obstáculo semiótico en la interpretación del signo dentro de la expresión $(x-h)$.
E2.	Gráfico, verbal, algebraico.	Gráfico-Verbal-Algebraico.	Similar a E1. Comprende que $h=-5$ genera desplazamiento a la derecha. No confunde la concavidad con el desplazamiento.	Buen uso de registros, pero repite la confusión inicial del sentido de desplazamiento.	Obstáculo en conversión gráfico-verbal del desplazamiento horizontal.
E3.	Gráfico, verbal.	Gráfico-Verbal.	Describe correctamente el efecto del signo de h (pregunta 3) y reconoce que la concavidad no cambia. (pregunta 4).	Omite profundizar en algunos ítems.	Dificultad para expresar relaciones algebraicas precisas.
E4.	Gráfico, verbal, algebraico.	Algebraico-Gráfico-Verbal.	Muestra comprensión clara sobre el rol de h en el desplazamiento y sobre que la concavidad depende de a .	Usa terminología ambigua como “se va al negativo”, pero hay comprensión estructural.	Posible confusión en la representación simbólica (expresión vs. Efecto gráfico).
E5.	-	-	No responde.	No se recopila evidencia para analizar.	Falta de participación.
E6.	Gráfico, verbal, algebraico.	Algebraico-Gráfico-Verbal.	Identifica correctamente que $h=-5$ desplaza a la derecha. Reconoce que la concavidad no depende de h , sino de a .	Usa expresiones parecidas a E4 (“pasa hacia...”), lo que sugiere representación operativa.	Puede existir un obstáculo en la lectura del signo en la forma canónica.

Nota: elaboración propia.

Interpretación:

Análisis de los registros de representación semiótica:

Se observa que los estudiantes movilizan principalmente los registros **gráfico, algebraico y verbal**. La Situación diseñada en GeoGebra, favorece la generación de **conversiones de registro**, especialmente del **gráfico al verbal** (cuando observan el desplazamiento de la parábola al modificar h) y del **algebraico al gráfico** (al analizar la forma $y = a(x - h)^2 + k$).

Sin embargo, algunos estudiantes presentan Obstáculos semióticos, especialmente al interpretar el signo de h dentro de la expresión $(x-h)$. Este tipo de error es común y se debe a que los estudiantes no logran coordinar la estructura algebraica con su representación gráfica (Duval, 1993, p.78). Por ejemplo, E1 y E2 invierten el sentido del desplazamiento horizontal, lo que indica una **lectura literal del signo** en lugar de una interpretación funcional.

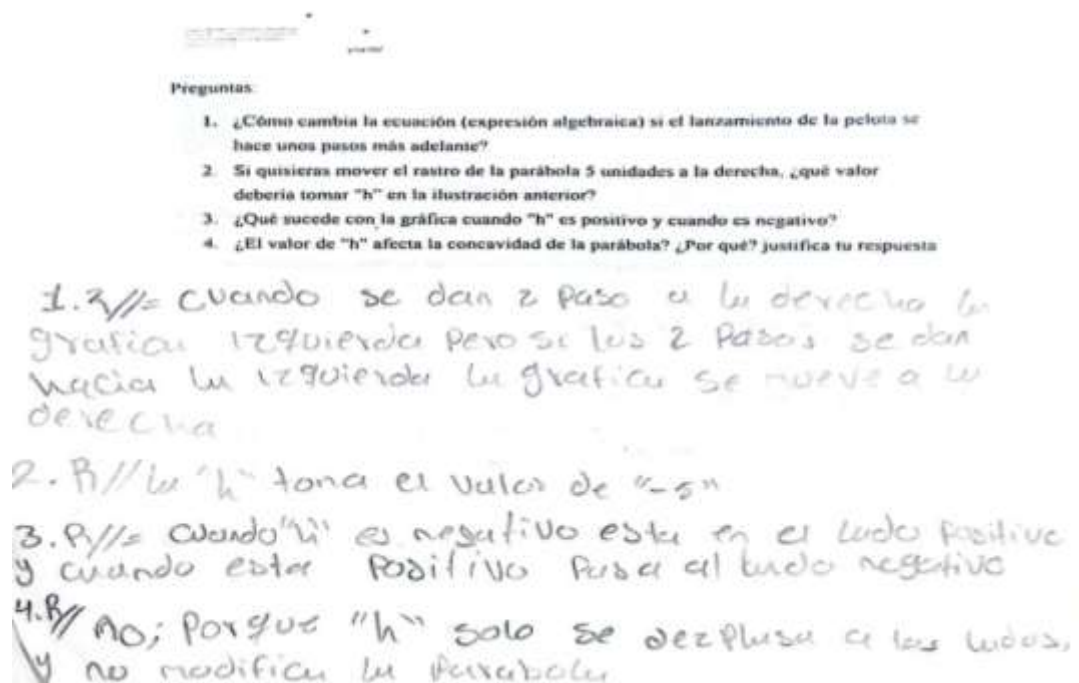
Los estudiantes están inmersos en una situación de **acción** en la que manipulan el valor de h a través de GeoGebra. Esto les permite observar regularidades y establecer invariantes operacionales, como el hecho de que **el valor de h desplaza la gráfica sin afectar su concavidad**. La secuencia también propicia una fase de institucionalización implícita, al pedirles justificar si h afecta la concavidad (pregunta 4), lo que obliga a distinguir el rol de cada parámetro en la función cuadrática.

Cabe destacar que el uso de GeoGebra actúa como medio didáctico privilegiado (Brousseau, 2007, p. 38), pues facilita la experimentación directa con la función y permite construir nociones desde la acción y la visualización, articulando registros simultáneos.

A continuación, se anexa la producción escrita de los estudiantes.

Figura 34

Producción escrita de E1



Handwritten student response for Figure 34. The page shows a set of four questions and four handwritten answers. The questions are about the effect of changing the launch point 'h' on a parabolic trajectory. The answers are written in Spanish.

Preguntas:

1. ¿Cómo cambia la ecuación (expresión algebraica) si el lanzamiento de la pelota se hace unos pasos más adelante?
2. Si quisieras mover el rastro de la parábola 5 unidades a la derecha, ¿qué valor debería tomar "h" en la ilustración anterior?
3. ¿Qué sucede con la gráfica cuando "h" es positivo y cuando es negativo?
4. ¿El valor de "h" afecta la concavidad de la parábola? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

1. $\checkmark$ Cuando se dan 2 pasos a la derecha la grafica izquierda pero si los 2 pasos se dan hacia la izquierda la grafica se mueve a la derecha.

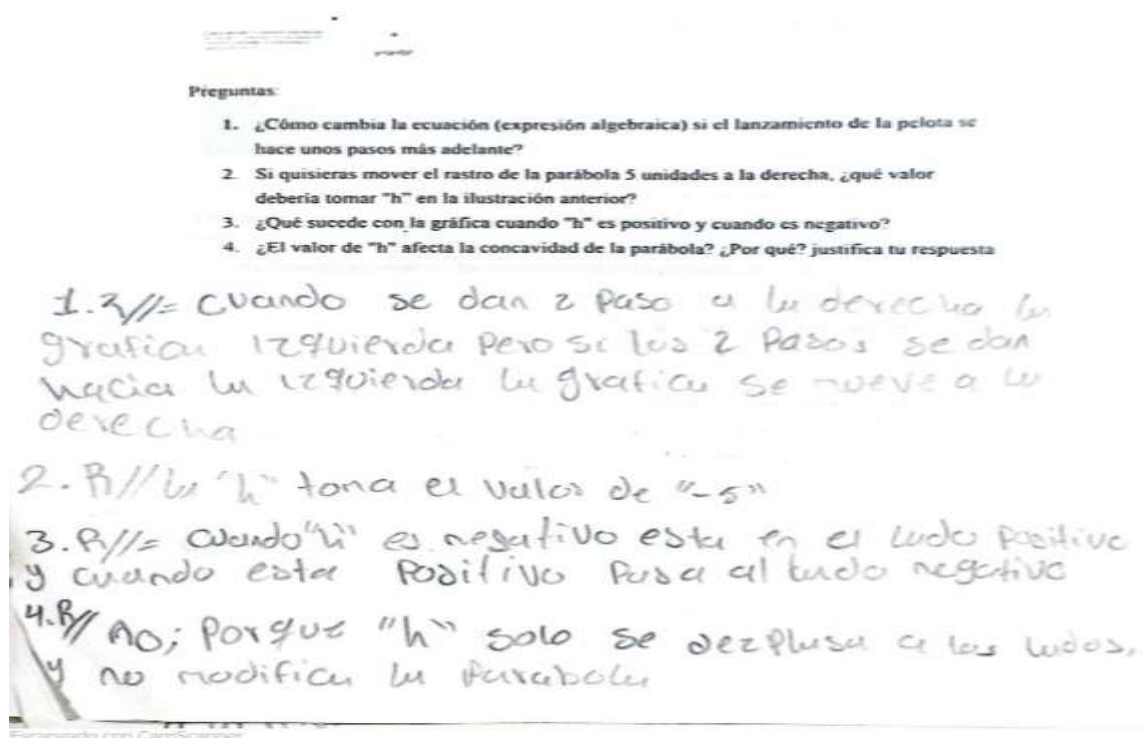
2. $\checkmark$ La "h" toma el valor de "-5".

3. $\checkmark$ Cuando "h" es negativo esta en el lado positivo y cuando esta positivo pasa al lado negativo.

4. $\checkmark$ No; porque "h" solo se desplaza a los lados, y no modifica la parábola.

Figura 35

Producción escrita de E2



Handwritten student response for Figure 35. The page shows a set of four questions and four handwritten answers, identical to Figure 34. The questions are about the effect of changing the launch point 'h' on a parabolic trajectory. The answers are written in Spanish.

Preguntas:

1. ¿Cómo cambia la ecuación (expresión algebraica) si el lanzamiento de la pelota se hace unos pasos más adelante?
2. Si quisieras mover el rastro de la parábola 5 unidades a la derecha, ¿qué valor debería tomar "h" en la ilustración anterior?
3. ¿Qué sucede con la gráfica cuando "h" es positivo y cuando es negativo?
4. ¿El valor de "h" afecta la concavidad de la parábola? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

1. $\checkmark$ Cuando se dan 2 pasos a la derecha la grafica izquierda pero si los 2 pasos se dan hacia la izquierda la grafica se mueve a la derecha.

2. $\checkmark$ La "h" toma el valor de "-5".

3. $\checkmark$ Cuando "h" es negativo esta en el lado positivo y cuando esta positivo pasa al lado negativo.

4. $\checkmark$ No; porque "h" solo se desplaza a los lados, y no modifica la parábola.

Figura 36

Producción escrita de E3

1. Se desplaza hacia el lado izquierdo
 2. Tomaría el valor de -5
 3. cuando es positiva se corre al lado derecho
 y cuando es negativo se corre al lado izquierdo
 4. No le afecta la cavida de la parábola
 porque no cambia su forma

Figura 37

Producción escrita de E4

Preguntas:

1. ¿Cómo cambia la ecuación (expresión algebraica) si el lanzamiento de la pelota se hace unos pasos más adelante?
2. Si quisieras mover el rastro de la parábola 5 unidades a la derecha, ¿qué valor debería tomar "h" en la ilustración anterior?
3. ¿Qué sucede con la gráfica cuando "h" es positivo y cuando es negativo?
4. ¿El valor de "h" afecta la concavidad de la parábola? ¿Por qué? justifica tu respuesta

1-R// Cuando el termino se mueve hacia el lado positivo va al negativo y viceversa.

2-R// El valor de h toma el valor de -5

3-R// Cuando el valor de h es positivo pasa a la izquierda y cuando es negativo, pasa a la derecha.

4-R// En realidad no afecta en nada, lo único que cambia es la letra a que es lo cambia el sentido de la palabra

Figura 38

Producción escrita de E5

Desplazamiento Horizontal:



Preguntas:

1. ¿Cómo cambia la ecuación (expresión algebraica) si el lanzamiento de la pelota se hace unos pasos más adelante?
2. Si quisieras mover el rastro de la parábola 5 unidades a la derecha, ¿qué valor debería tomar "h" en la ilustración anterior?
3. ¿Qué sucede con la gráfica cuando "h" es positivo y cuando es negativo?
4. ¿El valor de "h" afecta la concavidad de la parábola? ¿Por qué? justifica tu respuesta

Figura 39

Producción escrita de E6



Preguntas:

1. ¿Cómo cambia la ecuación (expresión algebraica) si el lanzamiento de la pelota se hace unos pasos más adelante? *cuando el lanzamiento se hace hacia la derecha va uno positivo y cuando se mueve hacia la izquierda va uno negativo*
2. Si quisieras mover el rastro de la parábola 5 unidades a la derecha, ¿qué valor debería tomar "h" en la ilustración anterior? *El valor de h toma el valor de -5*
3. ¿Qué sucede con la gráfica cuando "h" es positivo y cuando es negativo?
4. ¿El valor de "h" afecta la concavidad de la parábola? ¿Por qué? justifica tu respuesta

3A) cuando el valor de h es positivo pasa hacia izquierda y cuando es negativo pasa hacia derecha

4B) En realidad no afecta en nada solo lo único que cambia es la letra (a) es la que cambia el sentido de la parábola por que cada vez más es ecuación

4.5 Análisis de los resultados de la Situación Final: Desplazamiento mixto

La situación final de la secuencia didáctica propone consolidar la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en su forma canónica, considerando **desplazamientos mixtos** (horizontal y vertical) y su relación con los coeficientes a , h , k . El contexto plantea el

lanzamiento de una pelota desde cierta altura y con un ángulo, lo cual ofrece un escenario físico coherente con una trayectoria parabólica en un entorno dinámico con GeoGebra.

Desde el enfoque de Brousseau, esta Situación se enmarca en una situación didáctica que incluye momentos adidácticos, en los estudiantes interactúan con el medio (en este caso, el software y el contexto físico) para construir significados sin la intervención directa del docente como transmisor del conocimiento. Esto permite que el conocimiento matemático emerja como una necesidad dentro de la resolución del problema planteado:

“El conocimiento matemático aparece como una respuesta adecuada a una situación que lo exige, y es en ese contexto donde el alumno encuentra sentido a lo que aprende” (Brousseau, 1998, p.30).

Por otro lado, en términos del marco teórico de Duval, esta situación favorece el paso por distintos registros de representación semiótica (algebraico-gráfico-verbal) y exige conversiones entre estos. GeoGebra permite visualizar el comportamiento de la parábola al modificar los coeficientes, y las preguntas orientan al estudiante a verbalizar y generalizar los efectos de estos cambios.

Según Duval, la comprensión matemática requiere la coordinación entre registros:

“El verdadero problema del aprendizaje en matemáticas no es la adquisición de representaciones, sino la posibilidad de coordinarlas mediante conversiones” (2006, p. 123).

Así, esta situación no solo promueve la experimentación y generalización, sino que también obliga a los estudiantes a ver, expresar y justificar transformaciones en distintos lenguajes, favoreciendo una construcción más robusta del concepto de transformación de funciones cuadráticas.

A continuación, se agrupan las preguntas en dos grupos de acuerdo con su intención:

Grupo 1: Exploración y comprensión gráfica de los coeficientes.

Preguntas:

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos?
2. ¿Cómo afectan los valores de a , h , k a la trayectoria de la pelota?
3. En la forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$, si reemplazo h por 2 y k por 3, ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.

Intención: guiar a los estudiantes en la exploración y descripción de la relación entre la forma algebraica y la gráfica, espacialmente el efecto de los coeficientes en la ubicación y la forma de la parábola. Se promueve la conversión entre registros algebraico-gráfico-verbal, favoreciendo una comprensión conceptual del significado de los parámetros en contextos visuales y cotidianos.

Grupo 2: Aplicación de transformaciones y razonamiento inverso.

Preguntas:

4. Para desplazar la parábola 5 lugares hacia arriba y 3 hacia la izquierda, describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$, describe ¿Qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

Intención: fomentar la **aplicación y generalización** de transformaciones conocidas en forma algebraica. El estudiante debe aplicar los efectos de desplazamientos y también inferir a partir de una expresión algebraica no canónica, lo que implica una conversión entre la forma general y la forma canónica, además de una interpretación gráfica implícita.

Análisis de las respuestas de los estudiantes grupo 1 (preguntas 1, 2, 3).

Tabla 14

Análisis de las preguntas grupo 1. Estudiante.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones y obstáculos identificados.
E1.	Verbal.	Verbal-Gráfico (implícito)	Reconoce que h y k permiten modelar lanzamientos distintos. Distingue el rol de a , h , k . Interpreta el gráfico con desplazamiento positivo.	No usa representación simbólica ni gráfica. No cuantifica el desplazamiento en la pregunta 3.
E2.	Verbal.	Verbal-Gráfico (implícito).	Similar a E1. Describe roles de coeficientes correctamente.	Respuestas breves, sin elaboración propia. Falta conversión clara.
E3.	Verbal.	Verbal-Gráfico (erróneo).	Enfatiza aspectos físicos (velocidad, altura). Confunde sentido del desplazamiento de h en la pregunta 3.	No menciona a ni k en la pregunta 2. Error sistemático: interpreta $(x - 2)$ como desplazamiento a la izquierda.
E4.	Verbal.	Verbal-Gráfico (erróneo).	Menciona explícitamente h y k . describe cambio “del centro a la izquierda”.	Presenta la misma confusión que E3 sobre el desplazamiento. No convierte a representación simbólica.
E5.	Verbal.	No hay conversión clara.	Reconoce que hay distintas trayectorias y posiciones. Interpreta movimientos en varias direcciones.	Uso de lenguaje impreciso (“traumáticas”). No reconoce los roles de los coeficientes con claridad.
E6.	Verbal.	Verbal-Gráfico (erróneo).	Dice que h y k diferencian movimientos. En la pregunta 3, repite la confusión sobre el desplazamiento a la izquierda.	Falta de precisión conceptual. No usa registros simbólicos ni gráficos.

Nota: *Elaboración propia.***Interpretación:**

En conjunto, las respuestas muestran que los estudiantes **reconocen** que los coeficientes a , h , k **modelan** diferentes aspectos del movimiento parabólico, especialmente h y k como desplazamientos.

Sin embargo, la mayoría se mantiene en el registro verbal y no logra realizar conversiones claras a los registros simbólico o gráfico, lo cual limita su comprensión.

Según Duval (2006), una verdadera comprensión matemática requiere no solo la coordinación entre registros (por ejemplo, verbal-gráfico), sino la capacidad de convertir activamente entre ellos. En este grupo, hay indicios de intención de conversión (por ejemplo, cuando se describe el desplazamiento de la gráfica), pero en los casos de E3, E4 y E6 estas conversiones resultan erróneas, mostrando una comprensión inversa o ambigua del desplazamiento horizontal. Este tipo de error puede considerarse un obstáculo epistemológico derivado de la sobrecarga de inferencias desde el lenguaje natural hacia lo algebraico, posiblemente relaciona el signo negativo con la dirección izquierda.

Desde la teoría de Brousseau (2007), estos resultados pueden interpretarse como un producto del proceso de adaptación a la situación adidácticos. El uso de GeoGebra y el, contexto de lanzamiento sirvió como situación didáctica, pero aún no se ha consolidado una institucionalización que clarifique formalmente el rol del efecto de cada parámetro.

También se observa que los estudiantes no distinguen con claridad el rol del coeficiente cuadrático, centrando su atención en h y k . Esto podría deberse a que en la actividad final se enfatizó en el desplazamiento más que la concavidad o la apertura, lo que sugiere la necesidad de una revisión más equilibrada de las situaciones anteriores de la secuencia.

En resumen, se evidencian errores sistemáticos en la interpretación del signo de h . Las respuestas se mantienen en un registro verbal débil, sin ejemplos simbólicos ni representaciones gráficas precisas.

Hay una comprensión funcional básica, pero no una comprensión estructural de la forma canónica.

Análisis de las respuestas de los estudiantes grupo 2 (preguntas 4 y 5)

Tabla 15

Análisis de las preguntas grupo 2.

Estudiante.	Registros movilizados.	Tipo de conversión.	Evidencia de comprensión.	Observaciones y obstáculos identificados.
E1.	Simbólico, verbal.	Verbal-Simbólico.	Escribe correctamente la expresión $g(x) = (x + 3)^2 + 5$. En la pregunta 5 propone la forma canónica con vértice correcto.	Evidencia de comprensión algebraica. No justifica por qué $5/2$ y $-1/4$.
E2.	Simbólico, verbal.	Verbal-Simbólico.	Respuesta idéntica a E1. Usa la forma canónica correctamente.	Repite sin explicación, posible respuesta compartida.
E3.	Simbólico, verbal (confuso).	Parcial Simbólico-Verbal (incorrecto).	En la pregunta 4 introduce error de signos. En la pregunta 5, describe cambios sin justificación simbólica.	Dificultad en el uso correcto de la sintaxis algebraica.
E4.	Simbólico, verbal.	Simbólico-Verbal.	En las preguntas 4 y 5 da forma incorrecta: $(x + 5)^2 + 3$. Interpreta el daño como $-1/4$ y el desplazamiento como 2.5 a la derecha,	Confunde h y k interpretación parcial del vértice.
E5.	Verbal (confuso), simbólico.	Simbólico-Verbal (confuso).	Copia respuesta errónea de E3 en las preguntas 4 y 5, describe múltiples movimientos, pero con un lenguaje impreciso.	Lenguaje informal, sin precisión matemática. Posiblemente lo relaciona con el contexto físico.
E6	Simbólico (solo en la pregunta 4), verbal.	No hay conversión en la pregunta 5.	En la pregunta 4, da la misma respuesta incorrecta de E4. En la pregunta 5, omite la respuesta.	Omisión completa de la respuesta a la pregunta 5. Posible no comprensión del vértice en la forma canónica.

Nota: Elaboración propia.

Interpretación:

Las preguntas 4 y 5 exigían a los estudiantes aplicar y revertir transformaciones en la forma canónica de la función cuadrática, lo cual implicaba identificar y expresar

algebraicamente desplazamientos horizontales y verticales a partir del gráfico. En este caso el uso de GeoGebra brindó un entorno de exploración visual que favorecía la observación directa de estos cambios y facilitaba el tratamiento dentro del registro gráfico, pero también **demandaba la conversión activa al registro simbólico**, es decir, traducir la información visual del software en una expresión matemática formal.

Análisis de los registros de representación semiótica.

Los estudiantes E1 y E2 lograron **coordinar correctamente los registros** movilizados. A partir de la manipulación en GeoGebra, identificaron correctamente que el vértice de la parábola transformada era (-3,5) y construyeron la expresión algebraica: $g(x) = (x + 3)^2 + 5$, que corresponde con dicha transformación.

En la pregunta 5, aplicaron la forma canónica del vértice con coordenadas decimales (-2.5,-0.25), resultando en la expresión: $g(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$, lo cual indica que supieron

trasladar los movimientos observados dinámicamente en GeoGebra al plano simbólico.

Según Duval (2006), esta es una conversión compleja que requiere descontextualizar la imagen visual y reconstruirla en términos algebraicos, lo que ellos lograron de forma adecuada.

Sin embargo, en los casos de E3, E4, E5 y E6, se observan obstáculos recurrentes, pese al soporte visual de GeoGebra. Por ejemplo:

- E3 y E5 presentan una sintaxis simbólica incorrecta en la expresión $g(x) = (x \pm 3)^2 + 5$, lo cual muestra que, aunque pudieron identificar visualmente el vértice, **no lograron realizar correctamente el tratamiento algebraico del registro simbólico**. Esto evidencia que el entorno dinámico ayudó al tratamiento gráfico, pero **no garantizó la conversión exitosa**.

- E4 y E6 escriben expresiones como $g(x) = (x + 5)^2 + 3$, lo que revela una confusión en la dirección del desplazamiento horizontal (confunden $h = -5$ con $h = 5$). Aunque usaron el software, su interpretación del gráfico no fue rigurosamente cuantitativa ni traducida correctamente al lenguaje simbólico.

- En la pregunta 5, varios estudiantes hacen descripciones exclusivamente verbales del movimiento, como “se movió hacia la izquierda, la derecha, arriba, abajo”, o “el daño fue $-1/4$ ”, sin relacionarlo con el punto específico del vértice o con una forma algebraica precisa. Esta falta de articulación puede deberse, según Duval, a que los estudiantes no establecieron correspondencias precisas entre los elementos del gráfico y los coeficientes simbólicos, y se quedaron en un tratamiento exclusivamente gráfico, favorecido por GeoGebra.

- Estas respuestas revelan que, aunque la situación adidáctica con GeoGebra permitió que los estudiantes experimentaran la dependencia del saber respecto del docente, la institucionalización del conocimiento formal aún no se ha logrado completamente. La exploración libre en GeoGebra permitió identificar patrones visuales, pero no todos los estudiantes consolidaron una regla matemática explícita que relacione el vértice con la forma $y = a(x - h)^2 + k$.

Finalmente, se detecta en varios casos una contaminación semántica del contexto físico del lanzamiento: se habla de “daños” o “movimientos” sin cuantificación ni conexión explícita con los coeficientes, lo que limita la generalización algebraica.

A continuación, se anexa evidencia fotográfica de la producción escrita de los estudiantes en la situación final.

Figura 40

Producción escrita de E1

Situación final

Desplazamiento Mixto:

La niña decide lanzar la pelota con un ángulo y desde una altura determinada.

1. Podemos modelar diferentes lanzamientos utilizando el desplazamiento mixto el cual requiere de mover horizontal y vertical.

Pregunta: 2 R// *a curvatura vertical*
h movimiento horizontal
k movimiento vertical

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos?
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota?
3. En la fórmula canónica $y = a(x - h)^2 + k$ Si reemplazamos h por dos y k por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.
4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

3. R// $a(x - 2)^2 + 3$ el rastro quedaría en una posición positiva hacia arriba

4 R// $g(x) = (x + 3)^2 + 5$

5 R// $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{24}{4} \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$



Figura 41

Producción escrita de E2

Situación final

Desplazamiento Mixto:

La niña decide lanzar la pelota con un ángulo y desde una altura determinada.

1. R// podemos modelar diferentes lanzamientos utilizando el desplazamiento mixto el cual requiere de mover horizontal y vertical.

2. R// a es el signo de la concavidad

Pregunta: *h movimiento horizontal*
k movimiento vertical

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos?
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota?
3. En la fórmula canónica $y = a(x - h)^2 + k$ Si reemplazamos h por dos y k por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.
4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

3. R// $a(x - 2)^2 + 3$ el rastro quedaría en una posición positiva hacia arriba

4 R// $g(x) = (x + 3)^2 + 5$

5. R// $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{24}{4} \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$



Figura 42

Producción escrita de E3

Situación final

Desplazamiento Misto:

La niña decide lanzar la pelota con un ángulo y desde una altura determinada.

Pregunta:

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos? *con diferentes alturas y velocidades*
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota?
3. En la fórmula canónica $y = a(x - h)^2 + k$ Si reemplazamos h por dos y k por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.
4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

2. tiene desplazamiento para cualquier ca de los lados sea izquierdo o derecho

3 se desplaza hacia a la izquierda y sube

4) $g(x) = (x + 3)^2 + 5$

5) se movio hacia la izquierda, la derecha, arriba hacia abajo y el dato total fue $\frac{1}{4}$ hacia abajo

Figura 43

Producción escrita de E2

Situación final

Desplazamiento Misto:

La niña decide lanzar la pelota con un ángulo y desde una altura determinada.

Pregunta:

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos? *se puede cambiar el valor de a, h y k que se puede mover las parábolas*
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota? *al cambiando los valores originales de (a, h, k) .*
3. En la fórmula canónica $y = a(x - h)^2 + k$ Si reemplazamos h por dos y k por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.
4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

3- B // Del centro 3 a la izquierda y sobre 2 a la arriba.

4. // $g(x) = (x + 5)^2 + 3$

5. // El dato que sufrió fue $-\frac{1}{4}$ hacia abajo y hacia la derecha 2.5.

Escaneado con CamScanner

Figura 44

Producción escrita de E4

Situación final

Desplazamiento Mixto:

La niña decide lanzar la pelota con un ángulo y desde una altura determinada.



Pregunta:

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos?
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota?
3. En la fórmula canónica $y = a(x - h)^2 + K$ Si reemplazamos h por dos y K por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.
4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

Handwritten answers:

1. haciendo diferentes posiciones y diferentes trayectorias para hacer un mejor lanzamiento
2. Tiene desplazamientos en varios lados derecha y izquierda y diferentes posiciones
3. La grafica nos muestra que si lo reemplazamos por números o letras tendría varias posiciones y diferentes movimiento se reemplaza a ambos lados y sube y va o hacia los lados

Figura 45

Producción escrita de E5

Handwritten work:

4. $g(x) = (x + -3)^2 + 5$

5. Se movió hacia arriba hacia abajo hacia la derecha hacia la izquierda y cambiaba diferentes graficas.

El daño que sufrió fue $\frac{1}{4}$ hacia abajo $-\frac{1}{4}$ y 2,5 hacia la derecha.

Figura 46

Producción escrita de E6

Pregunta:

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos?
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota?
3. En la fórmula canónica $y = a(X - h)^2 + K$ Si reemplazamos h por dos y K por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.
4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?
5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

1 lo que cambia el valor de h y K que se puede diferenciar los movimientos
 2 cambiando los valores originales de $(a), H, K$
 3 del centro cambia 3 hacia la izquierda y subió 2 hacia arriba
 4 $g(x) = (x + 5)^2 + 3$

La teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1999, 2006) plantea que la comprensión en matemáticas no se alcanza únicamente mediante el tratamiento de información en un solo registro (como el algebraico), sino mediante la capacidad de realizar conversiones entre diferentes registros, tales como el gráfico, el tabular y el verbal.

Esta perspectiva fue clave para analizar las situaciones didácticas implementadas en esta investigación.

En la guía de punteo utilizada en el análisis de cada situación, se registraron tanto los **registros movilizados** como las **conversiones efectuadas por los estudiantes**. A partir de esta información, se evidenciaron patrones relevantes en el comportamiento semiótico de los participantes:

En la situación 1, centrada en el reconocimiento de la función cuadrática a partir del lanzamiento de una pelota, los estudiantes lograron con mayor facilidad realizar conversiones **tabular-gráficas**. Por ejemplo, el estudiante E3 pudo identificar que “la gráfica tiene un punto

máximo” al observar los valores de la altura en una tabla y su representación en GeoGebra. Sin embargo, al momento de explicar verbalmente el fenómeno, su respuesta fue limitada a “sube y baja”, lo cual sugiere un obstáculo en la conversión **gráfico-verbal**.

En la situación 2 y 3, que abordaban la concavidad y las transformaciones de la parábola, se exigía la conversión entre lo **algebraico y lo gráfico**. En este punto, se identificaron más dificultades. Por ejemplo, E2 reconocía que “si el número delante de x^2 es negativo, la parábola se abre hacia abajo”, pero no lograba explicar por qué ni cómo eso se reflejaba en la gráfica al cambiar el valor de a . Como indica Duval (1999), “la conversión entre registros no es automática y constituye una fuente de errores cuando el alumno no ha construido equivalencias entre representaciones”.

En la situación 4, centrada en desplazamientos horizontales y verticales, se evidenciaron errores de interpretación relacionados con el sentido de los desplazamientos. Por ejemplo, E1 afirmó: “cuando se dan dos pasos a la derecha la gráfica se mueve hacia la izquierda”, lo cual muestra una confusión en la lectura de los parámetros desde el registro algebraico hacia el gráfico (conversión algebraico-gráfico). Esta dificultad fue recurrente en varios estudiantes y sugiere un obstáculo en la apropiación del modelo de función cuadrática transformada.

En la situación final, que exigía razonamiento inverso (gráfico-algebraico y verbal), los estudiantes presentaron mayores desafíos. E4 no logró deducir correctamente la ecuación de la parábola a partir de su vértice desplazado, mientras que E6 respondió acertadamente sobre el tipo de desplazamiento, pero sin justificar su procedimiento. Tal como señala Duval (2006), “la comprensión matemática exige poder generar una representación en otro registro sin perder la estructura semántica del objeto”.

En términos generales, el análisis permitió identificar que: El **registro Gráfico** fue el más accesible para los estudiantes, posiblemente debido al uso de GeoGebra, que favoreció la visualización inmediata de las transformaciones. Las **conversiones hacia el registro algebraico**, especialmente desde lo gráfico y verbal, fueron más desafiantes.

Las situaciones que promovieron la coordinación entre al menos dos registros (por ejemplo, tabular-gráfico-verbal) generaron mejores niveles de comprensión conceptual. Por ejemplo, E5, aunque no siempre justificaba verbalmente sus respuestas, mostró progresos al identificar patrones en los desplazamientos cuando manipulaba las gráficas con GeoGebra.

La guía de punteo fue útil para sistematizar esta información, ya que permitió vincular cada producción con los procesos semióticos implicados.

Por tanto, se confirma que la teoría de Duval no solo sirvió como base teórica para diseñar las situaciones, sino también como herramienta interpretativa para analizar las producciones estudiantiles y comprender los obstáculos epistémicos presentes en la construcción del concepto de función cuadrática.

Más allá del análisis por situación, se hace necesario interpretar de forma global los procesos de aprendizaje observados, especialmente a la luz del marco teórico de Duval. La comprensión de las transformaciones de la función cuadrática no se limita a reconocer sus representaciones, sino a coordinar los diferentes registros en los que aparece: verbal, gráfico, tabular y algebraico.

En este sentido, la secuencia didáctica propuesta, basada en las TSD de Brousseau y los registros de Duval, permitió a los estudiantes desarrollar progresivamente una mayor familiaridad con el objeto parabólico. Desde la primera situación, se evidenció que los estudiantes tenían intuiciones razonables sobre la forma de la parábola y su comportamiento en

el espacio gráfico. Esto les dio un punto de partida para enfrentarse luego a situaciones más abstractas.

Uno de los avances más notables fue el fortalecimiento del **registro gráfico**, en parte gracias al uso de GeoGebra, que favoreció la percepción visual de transformaciones como la concavidad, desplazamientos y cambios en la amplitud de la parábola. Muchos estudiantes como E3 y E5, lograron anticipar correctamente estos cambios, incluso antes de formalizarlos algebraicamente.

No obstante, como plantea Duval (2006), la comprensión matemática auténtica exige pasar de un registro a otro sin perder el significado. Y es justamente en este punto donde se concentraron los principales obstáculos:

La **conversión gráfico-algebraico** fue una de las más complejas. Aunque los estudiantes podían manipular gráficas y describir lo que veían, les costaba representar eso mismo con expresiones simbólicas precisas.

La **lectura estructural de los parámetros de la forma canónica** (h , k) fue también una fuente de errores, particularmente en los desplazamientos, como se evidenció en la situación 4 con E1 y E2.

Persistió una **dificultad para justificar verbalmente los procedimientos**, especialmente en estudiantes como E4 y E6, lo que sugiere la necesidad de seguir trabajando en la articulación del registro verbal con los otros registros semióticos.

Esta interpretación global permite afirmar que, aunque la secuencia logró ampliar el repertorio representacional de los estudiantes, sigue siendo indispensable diseñar situaciones que promuevan de manera explícita la **coordinación entre registros**, tal como lo plantea Duval. En consecuencia, el uso de software como GeoGebra debe ir acompañado de preguntas orientadoras

que impulsen a los estudiantes a expresar, justificar, y traducir sus observaciones gráficas al lenguaje algebraico y verbal.

En síntesis, la implementación de esta secuencia contribuyó a que los estudiantes construyeran una comprensión más rica de la función cuadrática. Sin embargo, tal como lo advirtió Duval, esta comprensión no es automática ni acumulativa, sino que exige trabajar constantemente sobre las conversiones, los tratamientos y la significación conjunta de las representaciones.

A lo largo de la secuencia didáctica diseñada, estructurada en cinco situaciones consecutivas centradas en la exploración de las transformaciones de la función cuadrática, se promovió progresivamente el establecimiento de correspondencias entre el registro gráfico y el algebraico, en particular respecto a las unidades simbólicas a , h , y k presentes en la forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

Desde la primera situación centrada en la identificación de los elementos básicos de la parábola, los estudiantes comenzaron a reconocer gráficamente propiedades como la concavidad y el vértice. No obstante, en esta etapa inicial, dichas observaciones no siempre se tradujeron en unidades simbólicas precisas, por lo que aún no se puede hablar de una conversión de registros en el sentido planteado por Duval (2006).

Al desarrollar la segunda situación enmarcada en un contexto físico (la caída de una pelota), que se empezó a consolidar la relación entre el coeficiente a y la dirección de apertura de la parábola. Esta asociación se fortaleció mediante la manipulación directa en GeoGebra, que permitió visualizar variaciones de la gráfica al modificar el valor de a , favoreciendo un tratamiento en el registro gráfico con intentos incipientes de conversión hacia el registro simbólico.

La tercera situación propició un análisis más detallado del coeficiente cuadrático como unidad simbólica que controla no solo la concavidad sino también la amplitud o “apertura” de la parábola.

Aunque algunos estudiantes lograron interpretar esta variación simbólicamente, muchos continuaron operando de manera empírica, verbalizando observaciones sin formalización algebraica, lo que indica un tratamiento limitado al registro gráfico, sin una conversión efectiva.

Las situaciones cuarta y final fueron clave para el cumplimiento del objetivo específico 2.

En la cuarta se trabajó el desplazamiento vertical y horizontal del vértice mediante los parámetros h y k , donde varios estudiantes empezaron a reconocer con claridad la forma canónica $f(x) = a(x - h)^2 + k$ como una representación estructurada de dichos movimientos. GeoGebra resultó fundamental en esta fase, al permitir observar de forma dinámica cómo se modificaba la gráfica al alterar estos parámetros, lo cual generó un espacio favorable para la conversión entre registros, en línea con lo que Duval define como una actividad de alto valor cognitivo: reconstruir un objeto matemático en un sistema de representación distinto.

En la situación final, los estudiantes enfrentaron situaciones de aplicación directa y razonamiento inverso, debiendo expresar simbólicamente las gráficas a partir de expresiones dadas.

Esta fue la instancia más exigente en cuanto a la articulación simbólico-gráfica. Solo algunos estudiantes lograron realizar esta conversión con precisión, expresando correctamente funciones del tipo $g(x) = (x + 3)^2 + 5$ o $g(x) = (x + \frac{5}{2})^2 - \frac{1}{4}$, identificando con claridad el vértice de la parábola. Sin embargo, otros mantuvieron una fuerte dependencia del entorno gráfico, limitándose a tratamientos visuales o descripciones verbales sin formalización algebraica adecuada.

Desde la perspectiva de Brousseau (2007), las situaciones planteadas permitieron configurar un medio adidáctico que favoreció la producción del saber en interacción con el entorno. No obstante, la institucionalización plena del conocimiento matemático, es decir, su explicitación formal y transferible, no se alcanzó de manera homogénea en todos los estudiantes.

En síntesis, el análisis de las cinco situaciones permite concluir que el objetivo específico 2 se cumplió parcialmente. Si bien se observaron avances en la identificación de las unidades simbólicas a , h , k , y su correspondencia con propiedades gráficas pertinentes de la función cuadrática, la conversión entre registros no se consolidó en todos los casos. Esto confirma que el uso de tecnologías como el software de GeoGebra potencia el tratamiento gráfico y la intuición visual, pero requiere de intervenciones didácticas adicionales para garantizar la formalización simbólica del conocimiento.

Construcción de unidades simbólicas a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes.

A partir del análisis de las respuestas de los estudiantes, se buscó identificar las **unidades simbólicas relevantes del registro algebraico** de la función cuadrática, tales como coeficientes, signos y estructuras expresivas, que los estudiantes logran o no logran asociar con **variables gráficas pertinentes**, como el vértice, eje de simetría, la concavidad y los puntos de corte con los ejes.

Este análisis se fundamenta con la teoría de Duval sobre los registros de representación semiótica y sugiere que la comprensión de un objeto matemático requiere la coordinación entre diferentes registros.

De este modo, se pretende:

Reconocer **qué elementos algebraicos** (por ejemplo, el coeficiente a en $y = ax^2 + bx + c$) son interpretados gráficamente (como concavidad o abertura)

Analizar cómo los estudiantes realizan **conversiones** entre el registro algebraico y gráfico, y detectar **obstáculos semióticos** cuando dicha conversión no ocurre correctamente.

Establecer una red de correspondencias que permita definir un conjunto de **variables didácticamente pertinentes** para el aprendizaje de la función cuadrática desde una perspectiva semiótica.

Con el fin de alcanzar este objetivo específico se presenta la siguiente tabla:

Tabla 13 de correspondencia: Registro algebraico vs. Registro gráfico de la función cuadrática.

Tabla 16

Construcción de unidades simbólicas pertinentes para el registro gráfico

Unidad simbólica (algebraico).	Significado funcional.	Variable gráfica correspondiente.	Interpretación gráfica.
a (en $y = ax^2 + bx + c$).	Coeficiente cuadrático.	Concavidad y abertura de la parábola.	Si $a > 0$, concavidad hacia arriba; si $a < 0$, hacia abajo. Mayor valor absoluto, la parábola es más cerrada.
b (en $y = ax^2 + bx + c$).	Coeficiente lineal.	Influye en la posición horizontal del vértice y eje de simetría.	Afecta el valor de x , en el vértice $x = \frac{-b}{2a}$.
c (en $y = ax^2 + bx + c$).	Término independiente.	Punto de corte con el eje y .	Coordenada de y del punto donde la parábola al eje y : $(0, c)$.
$\frac{-b}{2a}$.	Fórmula del vértice (x).	Eje de simetría, coordenada x del vértice.	Línea vertical que pasa por el vértice; eje de simetría de la parábola.
Valor de y al sustituir $\frac{-b}{2a}$.	Coordenada y del vértice.	Vértice de la parábola.	Punto de máximo o mínimo (según el signo de a). Coordenadas: $(\frac{-b}{2a}, f(\frac{-b}{2a}))$.
h (en $y = a(x - h)^2 + k$).	Traslación horizontal.	Coordenada x del vértice.	Si $h > 0$, la parábola se desplaza a la derecha; si $h < 0$, a la izquierda.
k (en $y = a(x - h)^2 + k$).	Traslación vertical.	Coordenada y del vértice.	Si $k > 0$, se traslada hacia arriba; si $k < 0$, hacia abajo.

Nota: *elaboración propia*.

La construcción de esta tabla se realizó a partir del análisis detallado de las respuestas escritas y orales de los estudiantes frente a las preguntas propuestas en cada una de las situaciones de la secuencia didáctica. A través fue este proceso, fue posible identificar y sistematizar diversas unidades simbólicas que los estudiantes movilizaron al enfrentarse a las transformaciones de la función cuadrática. Estas unidades, que incluyen expresiones algebraicas, interpretaciones gráficas, y descripciones verbales, fueron relacionadas con su significado funcional y con la variable gráfica correspondiente, lo cual permitió establecer vínculos claros entre los registros semióticos y los objetos matemáticos implicados.

De esta manera, la tabla no solo sintetiza los elementos simbólicos relevantes en el proceso de aprendizaje, sino que también evidencia cómo los estudiantes construyen significado al articular múltiples registros de representación, en correspondencia con la teoría de Duval.

A continuación, se presenta una tabla que describe los avances y las dificultades observadas en los estudiantes durante el desarrollo de las situaciones planteadas.

Tabla 17 Progresos y obstáculos de los estudiantes a lo largo de las cinco situaciones.

Estudiante	Progresos principales	Obstáculos identificados
E1	Reconoció con facilidad la forma de la parábola en la situación 1. Identificó la concavidad y logró usar los deslizadores para explorar cambios en el coeficiente a . En la situación 5 logró deducir la ecuación de la gráfica.	Presentó dificultades en la ubicación exacta de puntos (S1) y en la justificación algebraica de la concavidad (S2). Su explicación verbal en la situación 4 fue limitada.
E2	Avanzó en la comprensión de los máximos y mínimos en S3. Logró describir con claridad los desplazamientos horizontales y verticales en S4.	En S2, confundió el efecto del signo de a . En S5 mostró errores al expresar la forma canónica completa.

Estudiante	Progresos principales	Obstáculos identificados
E3	Mostró seguridad en la construcción de tablas de valores (S1) y en la identificación de contracción y dilatación (S3). Integró bien lo algebraico y lo gráfico en (S4).	En la situación 5 no logró relacionar la gráfica con la ecuación de manera precisa.
E4	Logró justificar algunos desplazamientos en S4.	Dificultades en la interpretación de máximos y mínimos (S3) y en la argumentación algebraica en general. En S5 su deducción fue incompleta.
E5	Reconoció claramente la concavidad y su relación con el coeficiente a en S2. En S4 describió bien los desplazamientos y logró explicar la posición del vértice.	Problemas con la precisión gráfica S1 y con la asociación de a en la amplitud de la parábola S3. En S5 cometió errores de cálculo al expresar la ecuación.
E6	Avances constantes en todas las situaciones. En S3 comprendió la relación entre el valor absoluto de a y la amplitud. En S5 logró deducir la ecuación de la gráfica con seguridad.	Sus principales obstáculos estuvieron en el lenguaje verbal S4, ya que, aunque comprendía los cambios, no siempre lograba expresarlos con claridad en el lenguaje matemático.

Nota: Elaboración propia. S1, S2, S3, S4, S5 corresponden a las situaciones planteadas.

El análisis comparativo de los seis estudiantes a través de las cinco situaciones evidencia un proceso de aprendizaje progresivo en la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática, aunque con diferencias individuales en los logros alcanzados.

En general, todos los estudiantes mostraron avances en el reconocimiento gráfico inicial de la parábola y en la identificación de la concavidad, así como en el uso de GeoGebra como apoyo para la exploración dinámica. No obstante, se identificaron obstáculos recurrentes relacionados con la argumentación algebraica y la precisión en la expresión de la forma canónica, especialmente en la situación cinco.

De manera particular, estudiantes como E1 y E6 lograron articular con mayor claridad el razonamiento gráfico-algebraico, mientras que otros, como E3 y E4, presentaron dificultades en la determinación de máximos y mínimos, y en la justificación formal de sus respuestas.

Asimismo, Se evidenció que el lenguaje verbal constituyó un obstáculo transversal, ya que varios estudiantes, a pesar de comprender las transformaciones, no lograron expresarlas con rigor matemático.

En conclusión, la secuencia didáctica permitió constatar progresos significativos en la comprensión de los desplazamientos y cambios en la concavidad de la parábola, pero también reveló la necesidad de fortalecer estrategias que apoyen la argumentación algebraica y el uso del lenguaje matemático formal.

Capítulo V. Conclusiones

La implementación de la secuencia didáctica fundamentada en las TSD de Brousseau y en la teoría de los registros de representación semiótica de Duval, complementada con el uso del software de GeoGebra, logró favorecer en varios estudiantes la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática. Las situaciones diseñadas permitieron una evolución en la forma en que los estudiantes interpretaron y representaron los elementos fundamentales de dicha función (concavidad, vértice, desplazamientos verticales y horizontales).

Aunque algunos estudiantes persistieron en dificultades relacionadas con la coordinación entre registros y el uso riguroso del lenguaje algebraico, se evidenciaron avances concretos en la capacidad de predecir, describir y justificar los cambios en la gráfica de la función cuadrática al modificar sus coeficientes. La secuencia propuesta no solo propició la participación, sino también la apropiación paulatina de herramientas simbólicas y gráficas.

Respecto al objetivo específico 1: Diseñar e implementar una secuencia didáctica.

La secuencia didáctica diseñada logró responder a los principios de las TSD al generar situaciones adidácticas donde los estudiantes se enfrentaron a problemas matemáticos contextualizados que exigían acción, formulación y validación. Las preguntas abiertas, el uso de GeoGebra y los retos progresivos promovieron momentos genuinos de investigación y toma de decisiones. Se promovió así un ambiente en el cual el conocimiento emergió de la interacción entre los estudiantes, el medio y los conceptos matemáticos, cumpliendo con los postulados de Brousseau.

Respecto al objetivo específico 2, el análisis de las respuestas de los estudiantes en las cinco situaciones evidenció progresos en la identificación y correspondencia entre coeficientes y

elementos gráficos. En particular, los estudiantes lograron asociar el coeficiente a con la concavidad y los coeficientes h y k con los desplazamientos horizontal y vertical respectivamente.

Los estudiantes, al interactuar con las representaciones en GeoGebra, lograron establecer estas relaciones con mayor claridad, evidenciando progresos en la interpretación funcional. No obstante, se observaron dificultades puntuales en la lectura de signos, la construcción de expresiones algebraicas a partir de la gráfica y la coordinación entre registros.

Con relación al objetivo específico 3, se caracterizaron los aprendizajes movilizados por los estudiantes en cada una de las cinco situaciones de la secuencia. A través del análisis de sus producciones, se evidenció un avance progresivo en la comprensión del concepto de función cuadrática, especialmente en el reconocimiento del vértice, la concavidad y los desplazamientos.

Las situaciones permitieron visibilizar tanto las representaciones correctas como los errores persistentes, lo que fue clave para identificar obstáculos semióticos como la fijación en un solo registro o el uso erróneo del lenguaje algebraico, y para valorar los momentos en los que los estudiantes lograron superar estas barreras mediante la interacción con el software o el dialogo entre pares.

En conjunto, los resultados indican que una secuencia didáctica basada en las TSD, complementada con la teoría de Duval y mediada por GeoGebra, favorece la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática, al permitir que los estudiantes experimenten, construyan, argumenten y comuniquen sus ideas en múltiples registros, en un entorno donde el error no es penalizado sino aprovechado como parte del proceso de aprendizaje.

La presente investigación e implementación didáctica representó un aporte significativo para la Institución Educativa Fidelina Echeverry, al introducir una propuesta pedagógica

innovadora centrada en la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática mediante el uso de registros de representación semiótica y el apoyo del software GeoGebra.

Esta experiencia permitió no solo fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas, sino también ofrecer a los docentes una alternativa metodológica que articula lo algebraico, lo gráfico y lo verbal de manera coherente.

A nivel institucional, la secuencia didáctica diseñada contribuyó a visibilizar las dificultades reales que enfrentan los estudiantes en el paso entre registros y en la interpretación de objetos matemáticos complejos, generando reflexiones valiosas sobre la práctica pedagógica. Además, al contextualizar el aprendizaje de la función cuadrática en fenómenos físicos cercanos a los estudiantes y mediante el trabajo activo con recursos tecnológicos, se promovió una mayor motivación y participación en el aula.

De manera general, esta investigación favoreció a la institución al consolidar una experiencia pedagógica replicable, teóricamente fundamentada y adaptada a las características de su población estudiantil, particularmente en un contexto con alta diversidad étnica y desafíos de equidad educativa. Asimismo, abrió posibilidades para el desarrollo de futuras propuestas basadas en la teoría de Duval y las situaciones didácticas de Brousseau, orientadas a fortalecer la comprensión matemática desde un enfoque más inclusivo, funcional y representacional.

El análisis comparativo de los seis estudiantes a través de las cinco situaciones evidencia un proceso de aprendizaje progresivo en la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática, aunque con diferencias individuales en los logros alcanzados.

En general, todos los estudiantes mostraron avances en el reconocimiento gráfico inicial de la parábola y en la identificación de la concavidad, así como en el uso de GeoGebra como apoyo para la exploración dinámica. No obstante, se identificaron obstáculos recurrentes

relacionados con la argumentación algebraica y la precisión en la expresión de la forma canónica, especialmente en la situación cinco.

De manera particular, estudiantes como E1 y E6 lograron articular con mayor claridad el razonamiento gráfico-algebraico, mientras que otros, como E3 y E4, presentaron dificultades en la determinación de máximos y mínimos, y en la justificación formal de sus respuestas.

Asimismo, Se evidenció que el lenguaje verbal constituyó un obstáculo transversal, ya que varios estudiantes, a pesar de comprender las transformaciones, no lograron expresarlas con rigor matemático.

En conclusión, la secuencia didáctica permitió constatar progresos significativos en la comprensión de los desplazamientos y cambios en la concavidad de la parábola, pero también reveló la necesidad de fortalecer estrategias que apoyen la argumentación algebraica y el uso del lenguaje matemático formal.

El análisis de los progresos y obstáculos de los seis estudiantes a lo largo de las cinco situaciones permite afirmar que los objetivos planteados en la investigación fueron alcanzados de manera significativa. En relación con el primer objetivo, se lograron establecer criterios claros para el diseño e implementación de una secuencia didáctica que, apoyada en GeoGebra y en los principios de las TSD y de los registros semióticos, permitió articular de manera progresiva las transformaciones de la función cuadrática con situaciones de exploración, análisis y justificación.

En cuanto al segundo objetivo, se elaboraron unidades simbólicas pertinentes en el registro gráfico que adquirieron un significado funcional para los estudiantes, quienes reconocieron en la representación de la parábola elementos clave como la concavidad, la amplitud, el vértice, y los desplazamientos vertical y horizontal.

Finalmente, respecto al tercer objetivo, se caracterizó la comprensión de los estudiantes a través de sus avances y dificultades: Se evidenciaron progresos en la identificación y manipulación de los parámetros a , h , k , así como en el tránsito entre lo algebraico y lo gráfico; sin embargo, persistieron obstáculos en la argumentación algebraica, en la precisión al expresar la forma canónica y en el uso del lenguaje matemático formal.

De manera general, los hallazgos confirman lo señalado por Duval, en cuanto a que la comprensión matemática se construye a través de la movilización y conversión entre diferentes registros semióticos, y que las dificultades de los estudiantes se asocian precisamente a la ausencia de estos procesos de conversión. Así, la secuencia didáctica implementada no solo permitió superar dificultades iniciales, sino que también visibilizó la importancia de integrar recursos tecnológicos como GeoGebra y de diseñar actividades que promuevan el tránsito entre registros, consolidando una comprensión significativa de las transformaciones de la función cuadrática.

5.1 Recomendaciones

1. Diseñar más secuencias didácticas con base en la teoría de situaciones didácticas, pues su estructura fomenta la participación, el cuestionamiento y la apropiación del conocimiento matemático en ambientes colaborativos.
2. Fortalecer el trabajo con registros múltiples desde grados anteriores, para que los estudiantes adquieran mayor fluidez en las conversiones entre representaciones (gráfica, algebraica, verbal), aspecto fundamental para la comprensión funcional.

3. Profundizar en el análisis de los obstáculos semióticos en futuras investigaciones, con el fin de diseñar intervenciones específicas que aborden las dificultades persistentes en la interpretación del lenguaje algebraico y la lectura de gráficos.

4. Formar a los docentes en el uso didáctico de GeoGebra y en los fundamentos teóricos de Duval y Brousseau, para que puedan diseñar e implementar propuestas innovadoras que promuevan el aprendizaje conectado con las prácticas matemáticas reales.

5. Continuar integrando recursos tecnológicos como GeoGebra en la enseñanza de funciones y transformaciones, ya que potencian la visualización, la exploración autónoma y el desarrollo de intuiciones matemáticas, especialmente en estudiantes con dificultades de aprendizaje.

Esta experiencia investigativa permitió constatar que los procesos de comprensión en matemáticas, particularmente sobre la función cuadrática, pueden ser transformados cuando se introducen intencionalmente elementos didácticos fundamentados en teorías sólidas y en recursos digitales. La articulación entre las TSD de Brousseau, la teoría de los registros de Duval y el uso del software GeoGebra, generó una dinámica de aprendizaje en la que los estudiantes dejaron de ser simples receptores de procedimientos para convertirse en exploradores activos de los conceptos.

Además, esta investigación reafirma la importancia de reconocer que las dificultades de aprendizaje no deben abordarse desde el déficit, sino desde la necesidad de construir puentes entre lo que el estudiante ya sabe y lo que puede llegar a comprender mediante experiencias contextualizadas. El contexto escolar, los saberes previos, los lenguajes matemáticos y los modos de interacción con los objetos y recursos digitales son variables fundamentales que deben integrarse en el diseño de propuestas didácticas verdaderamente inclusivas y transformadoras.

Sugerencias para futuras investigaciones.

Explorar las transformaciones de otras funciones (lineales, cúbicas, exponenciales) desde una secuencia similar incorporando cambios progresivos de registros y apoyos visuales como GeoGebra.

Ampliar el estudio a una muestra mayor de estudiantes de diferentes contextos educativos, para observar cómo incide el diseño didáctico en diversos entornos socioculturales y académicos.

Analizar la evolución de los aprendizajes en el tiempo, haciendo seguimiento longitudinal para determinar si las comprensiones alcanzadas se sostienen y transfieren a nuevos contenidos.

Profundizar en el rol del docente como mediador didáctico en el marco de las situaciones adidácticas, indagando cómo sus intervenciones favorecen o limitan la autonomía de los estudiantes en la construcción del conocimiento.

Investigar las emociones y actitudes frente a las matemáticas en el desarrollo de estas secuencias, especialmente en estudiantes de bajo rendimiento, para vincular los procesos cognitivos con los afectivos.

Referencias

- (MEN), M. d. (2015). Lineamientos curriculares de la educación básica secundaria en matemática. <https://www.mineducación.gov.co>.
- (MEN), M. d. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje: Matemáticas*. Bogotá.
- Areces, D., Cueli, M., García, T., Rodríguez, C., & González-Castro, P. (2017). Intervención en dificultades de aprendizaje de las matemáticas: incidencia de la gravedad de las dificultades. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Benítez, A. ((2004)). *Estudio exploratorio sobre la construcción de la expresión algebraica (el caso de polinomios) a través de la interpretación global de las representaciones gráfica, numérica y algebraica*.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas/Introduction to study the theory of didactic situations: didáctico/didactic to algebra study*. Libros del Zorzal.
- Camargo Uribe, L. (2021). *Estrategias cualitativas de investigación en educación. Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática: Recursos para la captura de información y el análisis*. Bogotá.
- Córdoba Perdomo, A. (2018). *Desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso del programa matemático GeoGebra en estudiantes de noveno grado*. Manizales - Caldas, Colombia.
- Díaz Torres, M. (2018). *GeoGebra como herramienta para fortalecer el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos*. Universidad Autónoma de Bucaramanga.

- Díaz Torres, M. L. (2018). *GeoGebra como herramienta para fortalecer el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos en los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa Nuestra Señora de las Angustias del municipio de Labateca*. (Tesis Magister, Universidad Autónoma de Bucaramanga.):
:https://repository.unab.edu.co/bitstream/handle/20.500.12749/2526/2018_Tesis_Diaz_Torres_Martha_Ligia.pdf?sequence=1&isAllowed=y.
- Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2013). La dificultad en la articulación de registros algebraicos con gráficos: Un análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 103-121.
- Duval, R. (1998). Una teoría de la enseñanza y el aprendizaje basada en el tratamiento de los registros de representación semiótica. *Revista de Educación Matemática*. 12(1), 9-35.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. *Peter Lang S.A. Editions Scientifiques Europeanness*, 1995. *Universidad del Valle, Instituto de Educación Y pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Edición en castellano*.
- Edel, R. (2003). El rendimiento académico: concepto, investigación y desarrollo. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 1(2).
- Franco Urrea, J., Torres Rengifo, L. A. (2021). *El aprendizaje del álgebra y la resistencia al cambio en los enfoques pedagógicos y La enseñanza del álgebra en Colombia: desafíos históricos y el papel de la historia de las matemáticas*.
- Franco Urrea, J. &. (desde 1951 hasta 2017). *Franco Las concepciones de currículo y enfoques del álgebra escolar en la historia de la educación matemática colombiana*. Memorias del VI Congreso Internacional de Historia de la Educación M.

- Galvis, L. A., & Bonilla Mejía, L. (2012). Desigualdades regionales en el nivel educativo de los profesores en Colombia. *Revista de Economía Institucional Universidad Externado de Colombia*, 14(26), 223-240.
- Gómez Iribar, N. &. (2011). *Orientaciones metodológicas para contribuir a mejorar el aprendizaje de la Matemática*.
- Lozano, M. E. ((2015)). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA*, 19
<http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/644/379>.
- Pérez Gómez, Y. &. Vega Fiol, L. (2010). *El aprendizaje de las funciones cuadráticas mediante la vinculación de los contenidos físicos*. Edu EduSol, 10 (32).
- Perrenoud, P. (2004). *Construir competencias desde la escuela: Lo que se puede hacer con y por los alumnos*. Barcelona: Graó.
- Piaget, J. (1992). *La psicología y la pedagogía en la educación*. Barcelona: Ediciones Morata.
- Pineda, Á. M. (2022). *Promoviendo el desarrollo del pensamiento algebraico desde una aplicación para Android*.
- Román Aguilar, MM, Jumbo Castillo, EM, Cunalata, M. Á., Tusa Jumbo, FE, & Maza Cordova, J. (2023). Integración de tecnologías educativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7 (4), 345.
- Salcedo Valdés, R. E., & Vidal Cándelo, E. (2021). *El currículo de matemáticas: Una mirada a su estructura en algunas investigaciones durante los últimos diez años en Colombia*. Trabajo de grado. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Buenaventura Colombia.

- Socas, M. (2011). La enseñanza del álgebra en la educación obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.
- Surichaqui-Gutierrez, F., Quispe, H., Surichaqui, M., Torpoco, D., Ticse, D., & Suárez, C. (2022). *Uso del software GeoGebra en el aprendizaje de las funciones cuadráticas*. Instituto Universitario de Innovación Ciencia y Tecnología.
- Valero, R. (2015). *Dificultades por parte de alumnos de educación media superior y superior en la conversión de los registros algebraico y gráfico y viceversa: el caso de la función cuadrática*.
- Stewart, J., Rendlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo Matemáticas Para El Cálculo*. México: Ediciones OVA.

Anexos: Diseño de la secuencia didáctica

Área: Matemáticas / Asignatura: Álgebra	Grado: 9	Tiempo: 4 horas
Conocimientos Básicos	Pensamiento variacional	
Contexto	De la vida diaria	
Procesos generales	Resolución de problemas y modelación	
Situaciones	Función Cuadrática	
Estándares Básicos de Competencias:	• Diferenciar entre las propiedades de las gráficas y las de las estructuras algebraicas. • Reconocer la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones cuadráticas y los efectos de estos cambios en las gráficas correspondientes. • Analizar, en representaciones en el plano cartesiano, los comportamientos de las funciones específicas dentro de las familias de funciones cuadráticas.	
Derechos Básicos De Aprendizaje DBA Volumen II	• Reconocer las formas algebraicas de la función cuadrática. • Aplicar las transformaciones en la función cuadrática. • Interpretar gráficamente las características de la función cuadrática. • Distinguir entre propiedades gráficas y algebraicas • Resolver problemas mediante la representación gráfica y algebraica.	
Objetivo general	• Fortalecer la comprensión de las transformaciones de la función cuadrática en estudiantes del grado noveno que enfrentan dificultades en su aprendizaje, a través del diseño de una secuencia didáctica basada en las TSD e incorporando el software de GeoGebra.	
Recursos	Recursos audiovisuales software de GeoGebra.	

Diseño secuencia didáctica

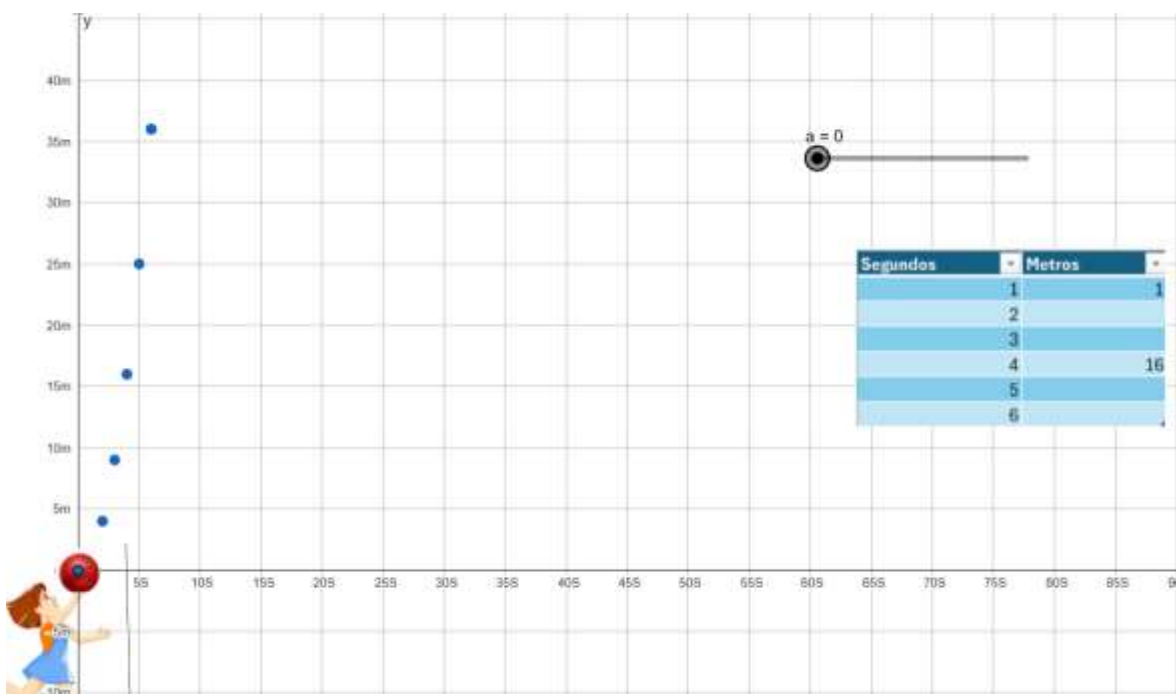
Situación 1. Explorando la función cuadrática a partir del lanzamiento de una pelota.

Objetivo: Tabular y representar gráficamente datos con una situación cotidiana.

María está jugando con una pelota y la lanza directamente hacia arriba desde el suelo. En la Figura 1. Se presenta la altura en metros en el eje y , y el tiempo en segundos que tarda en alcanzar esta altura en el eje x .

Figura 47

María lanza la pelota



Elaboración propia

Preguntas:

1. ¿A qué altura estará la pelota después de 3 segundos? ¿Cómo encontraste ese valor?
2. ¿Después de cuántos segundos la pelota estará a 9 metros de altura? ¿Cómo encontraste ese valor?

3. Complete la tabla de la figura 1. Con los siguientes valores en segundos 2, 3, 6 segundos y encuentre la posición (altura) en que se encuentra la pelota.

El movimiento de la pelota puede modelarse con la ecuación:

$$y = x^2$$

En álgebra, una función cuadrática, es un polinomio cuadrático de grado 2, es una función polinómica con una o más variables en la que el término de grado más alto es de segundo grado. Una función o ecuación cuadrática univariada su expresión o estructura algebraica corresponde a: $ax^2 + bx + c$ en su forma general y $a(x - h)^2 + k$, en su forma canónica.

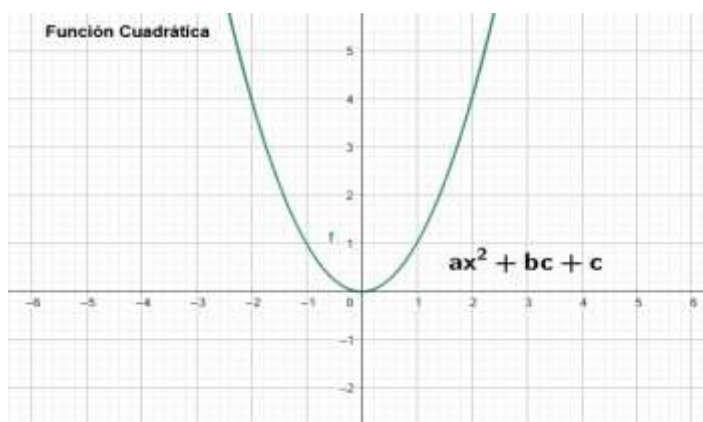
Donde:

- ***a*** es el coeficiente de la variable de mayor exponente.
- ***b*** es el coeficiente de la variable de grado 1.
- ***c*** es el término constante o intercepto con el eje Y.

Y la representación gráfica de una función cuadrática es una parábola, por ejemplo, la representación de $y = x^2$:

Figura 48

Gráfica de la función cuadrática

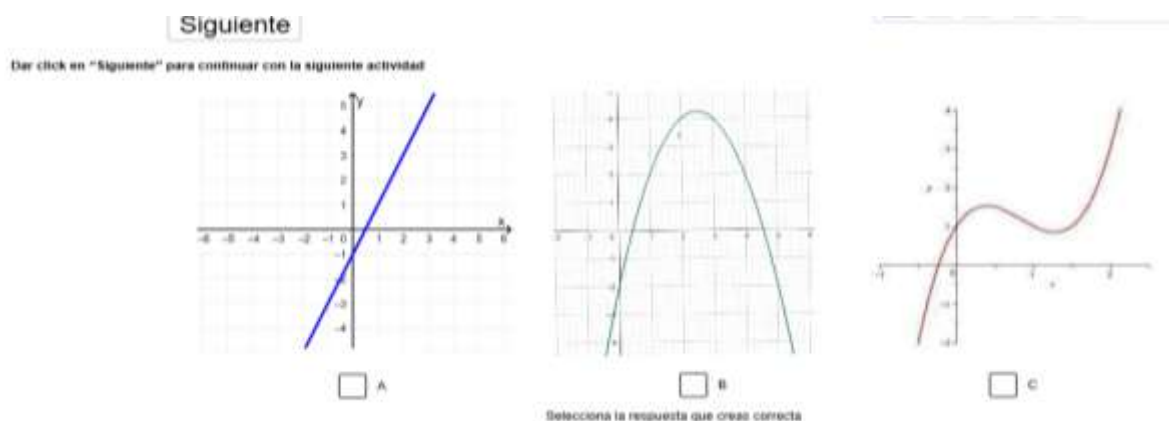


Nota: Fuerte propia

5. Identifique en la ilustración 3, ¿cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función cuadrática?

Figura 49

Identifique gráficas



Nota: Fuente propia

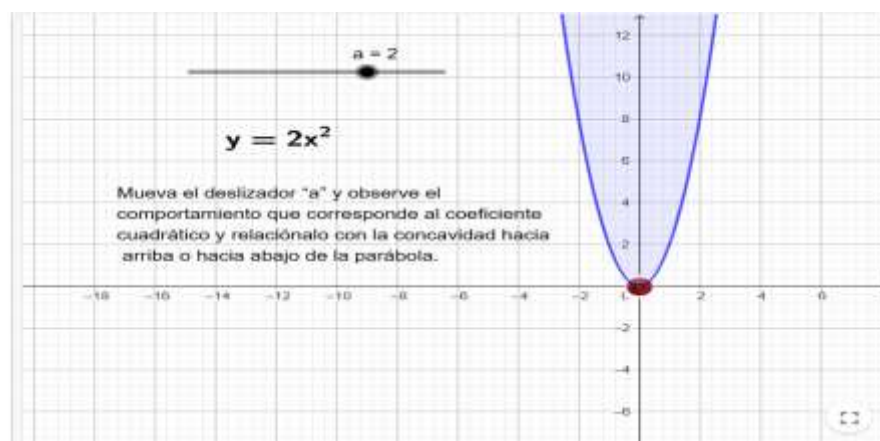
Situación 2: Determinar la concavidad de una parábola

Objetivo: Identificar la concavidad de una función cuadrática y determinar su comportamiento según el coeficiente cuadrático.

1. Mueva el deslizador a y describa qué sucede con la gráfica.

Figura 50

Grafico de concavidad de una parábola



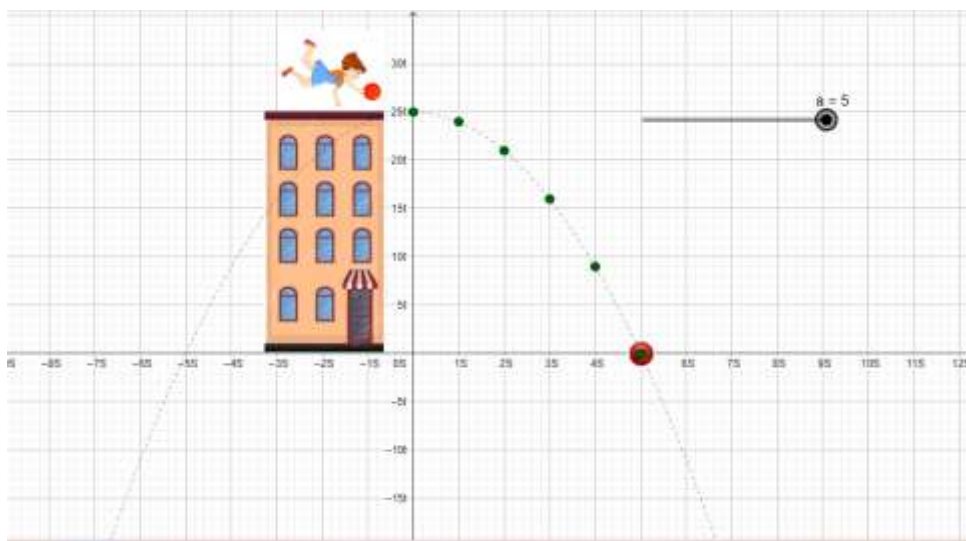
Nota: Elaboración propia

Si en lugar de lanzar la pelota, la niña la deja caer desde cierta altura. ¿Su trayectoria se invertirá? Mueva el deslizador

2. como se muestra en la siguiente figura.

Figura 51

Gráfico de concavidad



Nota: Elaboración propia

Pregunta:

3. ¿Cómo se vería la trayectoria si la pelota cayera en lugar de subir? (Observa la gráfica)
4. ¿Cómo influye el signo de a con la dirección de movimiento de la pelota?

La función corresponde a la ecuación de la forma, $ax^2 + bx + c$, donde " a " es el coeficiente cuadrático, este determina su concavidad.

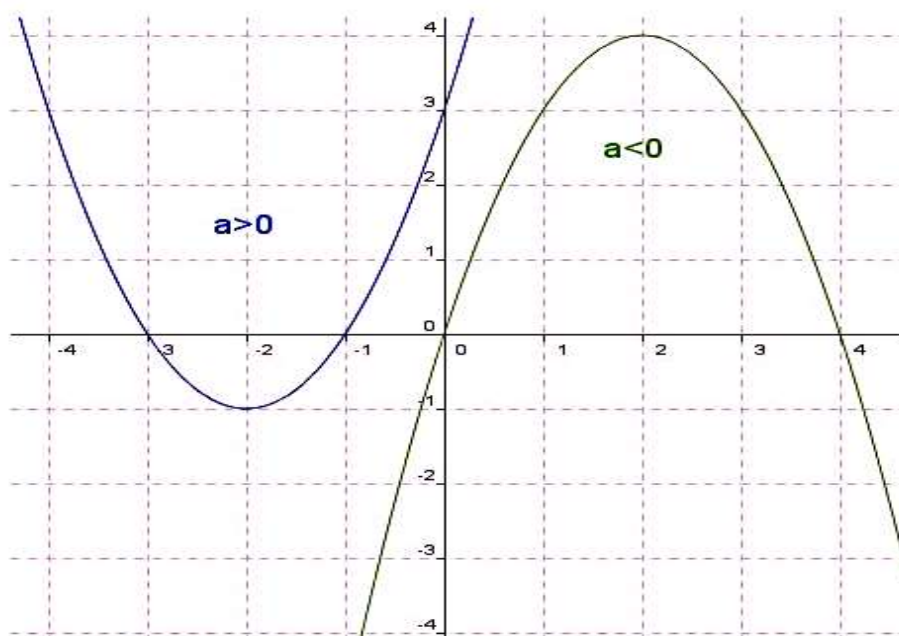
Cuando:

- $a > 0$ la parábola es cóncava hacia **arriba**, se puede determinar un **punto mínimo** y se dice que la **función es creciente**.
- $a < 0$ la parábola es cóncava hacia **abajo**, se puede determinar un **punto máximo** y se dice que la **función es decreciente** $a \neq 0$.

Como se muestra en la siguiente ilustración:

Figura 52

Gráfico de concavidad



Nota: Fuente propia

5. Con base en los conocimientos adquiridos en la situación anterior, identifica si las siguientes funciones representan una parábola, si es así, determina si es cóncava hacia arriba o hacia abajo:

- F1: $y = 3x^2 + 6$
- F2: $3y - 2x = 4$
- F3: $y = 7x^2 + 2x^3 + 5$
- F4: $y + 2x^2 = 9$

Selecciona tu respuesta y justifícala.

Luego de esto, en GeoGebra rectifica si tu respuesta es correcta. Seleccionado las opciones como se indica en las imágenes:

Figura 53

Formulas de concavidad

FORMULA 1	CÓNCAVA	
	ARRIBA	ABAJO
$y = 3x^2 + 6$	☐	☐

FORMULA 2	CÓNCAVA	
	ARRIBA	ABAJO
$3y - 2x = 4$	☐	☐

FORMULA 3	CÓNCAVA	
	ARRIBA	ABAJO
$y = 7x^3 + 2x^2 + 5$	☐	☐

FORMULA 4	CÓNCAVA	
	ARRIBA	ABAJO
$y + 2x^2 = 9$	☐	☐

Nota: Elaboración Propia

Nota

“Al seleccionar cualquiera de las opciones, ya sea Máximo o Mínimo, se mostrará si la respuesta es correcta o incorrecta. Una vez revelado el resultado, deben hacer clic para ocultarlo antes de continuar con la siguiente situación. De esta manera, no se superpone con la situación anterior”.

Situación 3: Relación entre concavidad, Máximos y Mínimos de la Función

Cuadrática.

Objetivo: Determinar los puntos máximos y mínimos de una función cuadrática y analizar las transformaciones que pueden modificar su representación gráfica.

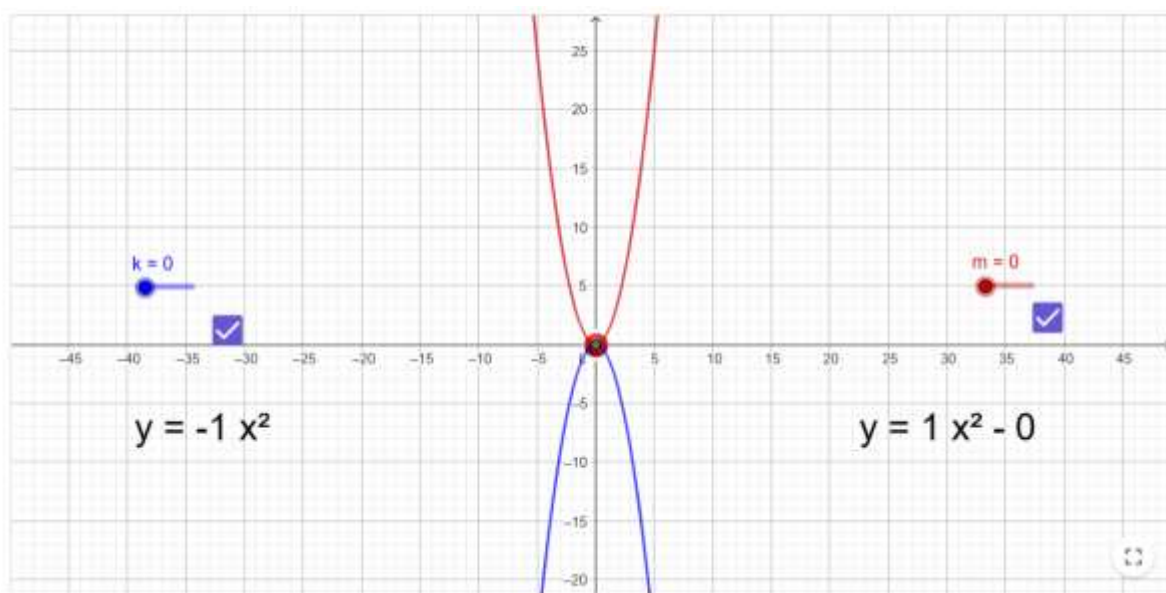
La niña quiere saber ¿cuál es la altura máxima que alcanza la pelota en su lanzamiento?

Preguntas:

1. En el caso de lanzamiento de la pelota ¿cuál es el punto máximo? Mueva el deslizador **k** de la siguiente ilustración.
2. En el caso en el que deja caer la pelota ¿cuál es el punto mínimo? Mueva el deslizador **m** de la ilustración.
3. ¿Cómo identificar el punto más alto o bajo de la trayectoria?
4. ¿Cómo se representa esta trayectoria en una expresión algebraica?

Figura 54

Grafica Máximo y Mínimo



Nota: Elaboración Propia

Para hallar el punto mínimo o máximo de una función cuadrática de la forma: $ax^2 + bx + c$ usamos las coordenadas del vértice:

- $h = -\frac{B}{2A}$
- $k = f\left(-\frac{B}{2A}\right)$

El vértice V (h, k) corresponde al punto máximo si $a < 0$ o al punto mínimo si $a > 0$

Preguntas:

1. Encuentra el punto máximo o mínimo de la función: $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$
2. Determina las coordenadas del vértice de la función: $e(x) = -x^2 + 2x + 1$

Figura 55

Formula Máximo y Mínimo

¿En esta ecuación encontramos un punto máximo y mínimo?

$f(x) = 3x^2 + 5x + 6$

☐ Máximo ☐ Mínimo

Selecciona para cada ecuación si tiene un punto máximo o un punto mínimo.

-2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8

Nota: Elaboración Propia

Figura 56

Formula Máximo y Mínimo

¿En esta ecuación encontramos un punto mínimo o máximo?

$$e(x) = -x^2 + 2x + 1$$

Máximo	Mínimo
☐	☐

Selecciona para cada ecuación si tiene un punto máximo o un punto mínimo.

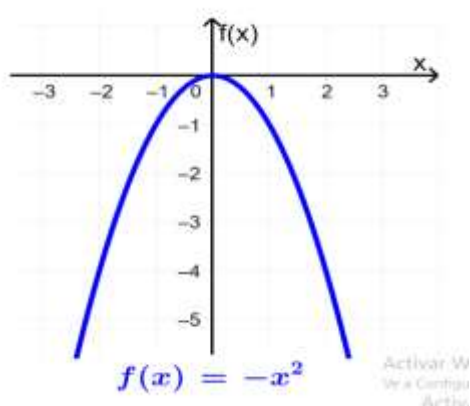
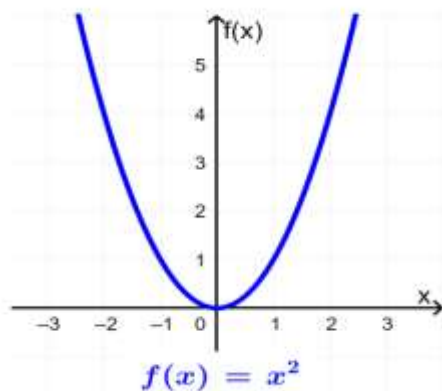
*Nota: Elaboración propia***Reflexión:**

Identifica en cada caso la concavidad de cada función

1. $y = 2x - 3x^2$
2. $y = 2x^2 + 4x + 2$

Si el coeficiente cuadrático es positivo la función se abre hacia arriba o si es negativo y del mismo valor la función abre hacia abajo Ejemplo:

- $y = x^2 (a > 0)$
- $y = -x^2 (a < 0)$



- Si el coeficiente cuadrático es positivo, la función se abre hacia **arriba**.
- Si el coeficiente cuadrático es negativo, la función se abre hacia **abajo**.

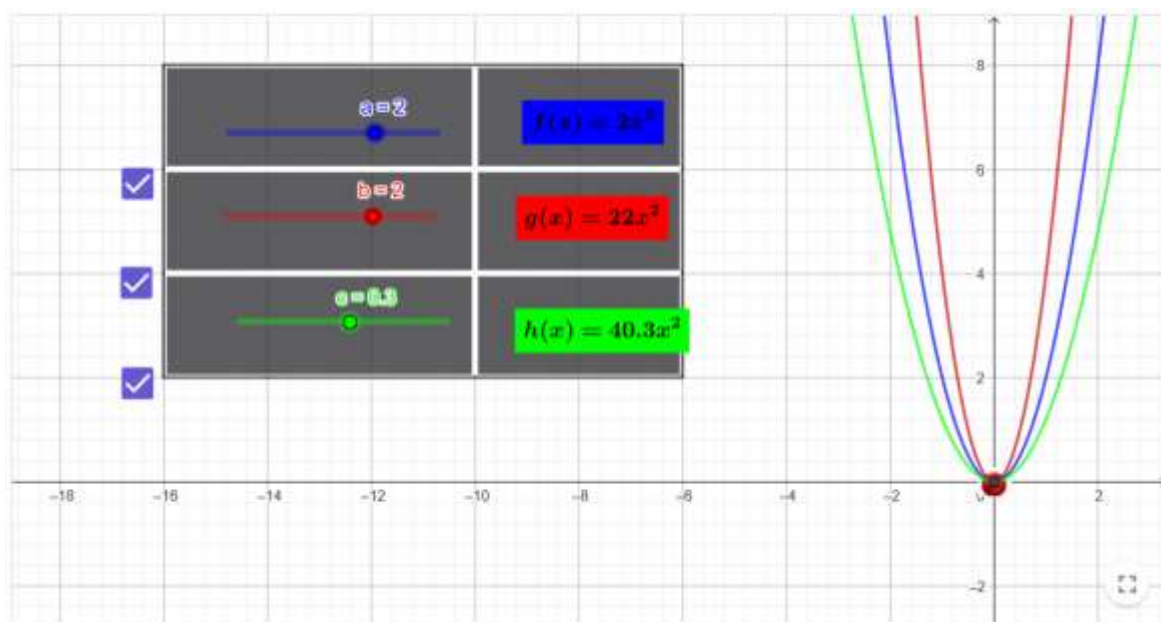
Contracción y dilatación:

Si la niña lanza la pelota con diferente fuerza, dependiendo de la potencia del lanzamiento la pelota alcanza más altura o menos altura.

Preguntas:

1. ¿Cómo cambiaría la altura máxima de la pelota si la lanzamos con más fuerza?
2. ¿Qué sucede si el lanzamiento es más débil?

Figura 57

Contracción y Dilatación

Nota: Elaboración propia.

3. ¿Qué ocurriría con la gráfica si el valor de a fuera negativo?
4. Comparando $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = 10x^2$ ¿Cuál de las dos parábolas está más contraída y por qué?

Cuando el coeficiente cuadrático es ($a \leq 1$) o sea un fraccionario de la forma p/q donde q es mayor que p , la gráfica de la función se dilata, si el coeficiente cuadrático es ($a > 1$), la función se contrae.

Ejemplo:

$$y = 4x^2 \quad (a > 1)$$

$$y = \frac{x^2}{2} \quad (a \leq 1)$$

Situación 4: Transformaciones

Objetivo: Identificar cuál coeficiente está directamente relacionado con el desplazamiento vertical y cuál con el desplazamiento horizontal.

Desplazamiento Vertical

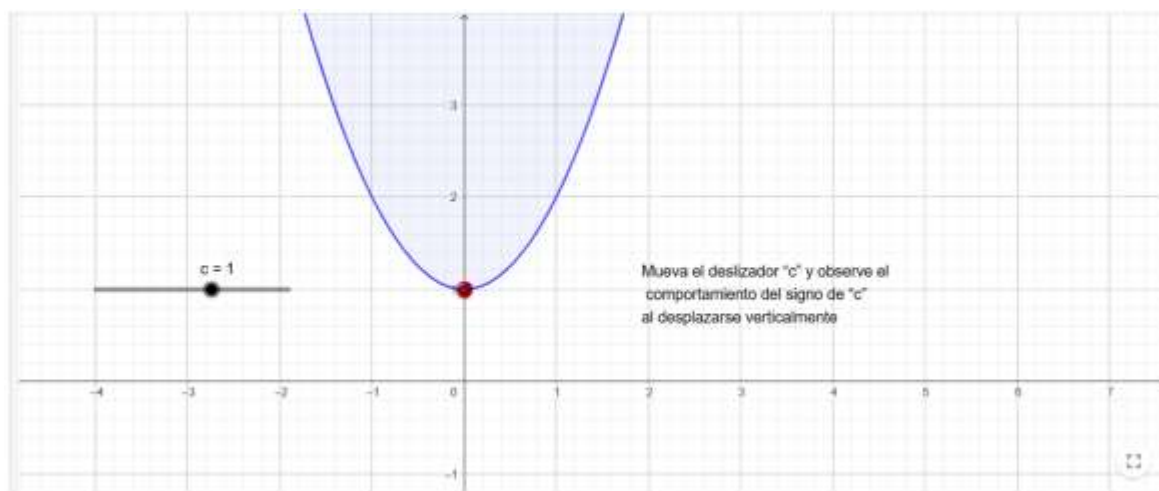
La niña ahora lanza la pelota desde una plataforma elevada o desde un ángulo diferente.

Preguntas:

1. ¿Qué pasa si la niña lanza la pelota desde una altura mayor?

Figura 58

Desplazamiento Vertical



Nota: Elaboración propia.

2. ¿Cómo cambia la posición del rastro de la parábola cuando c es positivo, negativo o cero?
3. ¿Por qué el deslizador solo modifica el término c y no los otros coeficientes de la ecuación cuadrática?

$y = x^2 + 2$ Se desplaza dos unidades hacia arriba desde su origen.

$y = x^2 - 2$ Se desplaza dos unidades hacia abajo desde su origen.

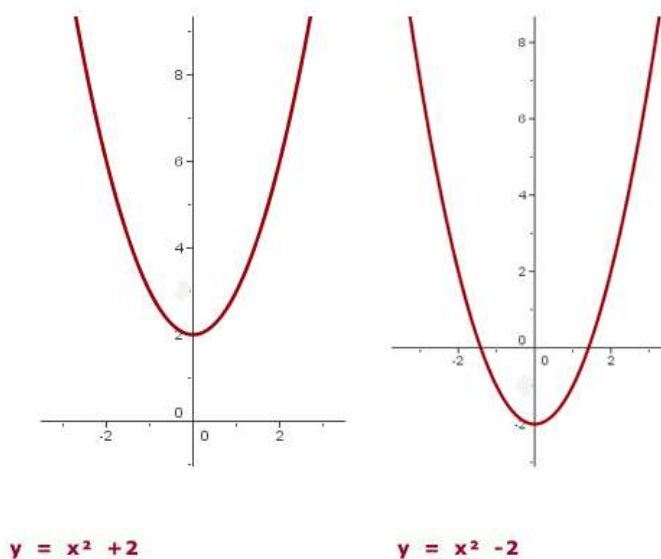
Empezando desde la función original x^2

Si se sumará una constante positiva (> 0) la gráfica se desplaza en eje y hacia arriba, sentido positivo.

Si se le resta una constante (< 0) La gráfica se desplaza en el mismo eje y en el sentido contrario.

Figura 59

Desplazamiento Vertical



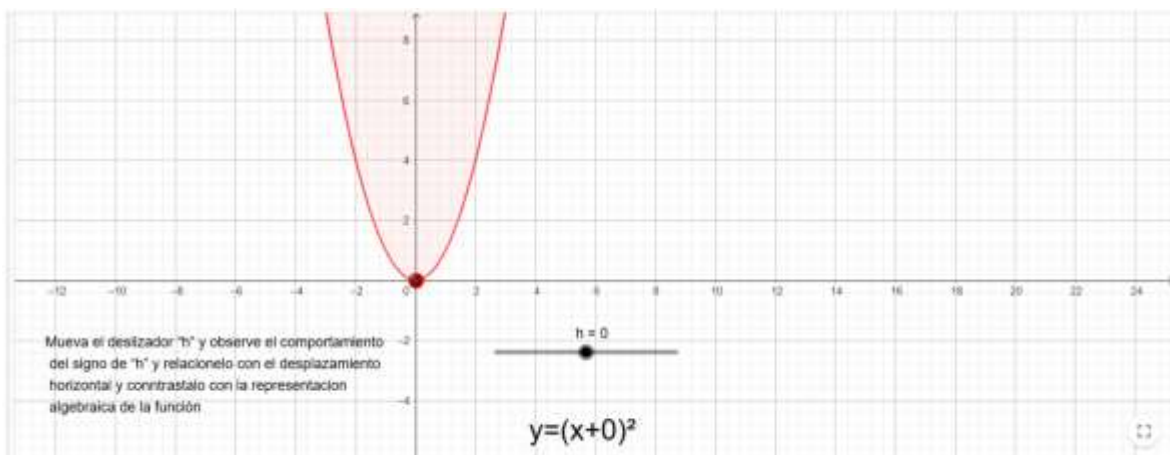
Nota: Elaboración propia.

Desplazamiento Horizontal:

Preguntas:

1. ¿Cómo cambia la ecuación (expresión algebraica) si el lanzamiento de la pelota se hace unos pasos más adelante?

Figura 60

Desplazamiento Horizontal

Nota: Elaboración propia.

2. Si quisieras mover el rastro de la parábola 5 unidades a la derecha, ¿qué valor debería tomar "h" en la ilustración anterior?

3. ¿Qué sucede con la gráfica cuando "h" es positivo y cuando es negativo?
4. ¿El valor de "h" afecta la concavidad de la parábola? ¿Por qué? justifica tu respuesta

Empezando desde la función original $(x + 2)^2$

Al sumar una constante positiva dentro de la variable cuadrática (> 0) la gráfica se desplaza hacia izquierda en eje x.

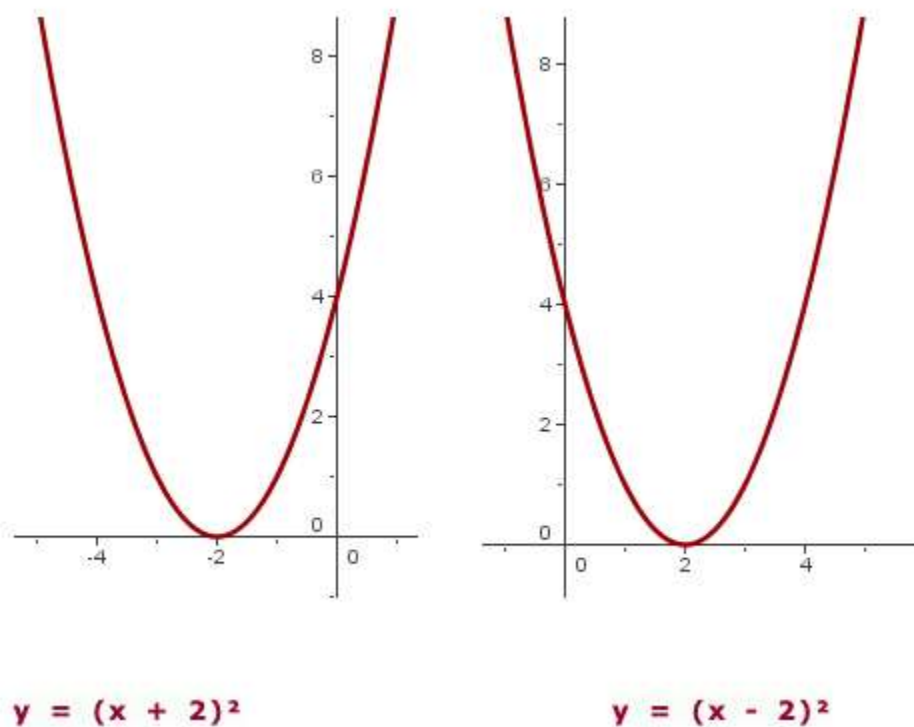
Si se le resta una constante (< 0) la gráfica se desplaza en el mismo eje hacia la derecha.

Ejemplo:

$y = (x + 2)^2$ se desplaza dos unidades hacia la izquierda desde su origen.

$y = (x - 2)^2$ se desplaza dos unidades hacia la derecha desde su origen.

Figura 61

Desplazamiento Horizontal*Nota: Elaboración propia***Situación final**

Objetivo: Determinar la relación de los coeficientes de la expresión algebraica con los desplazamientos gráficos de la parábola en el plano cartesiano.

Desplazamiento Mixto:

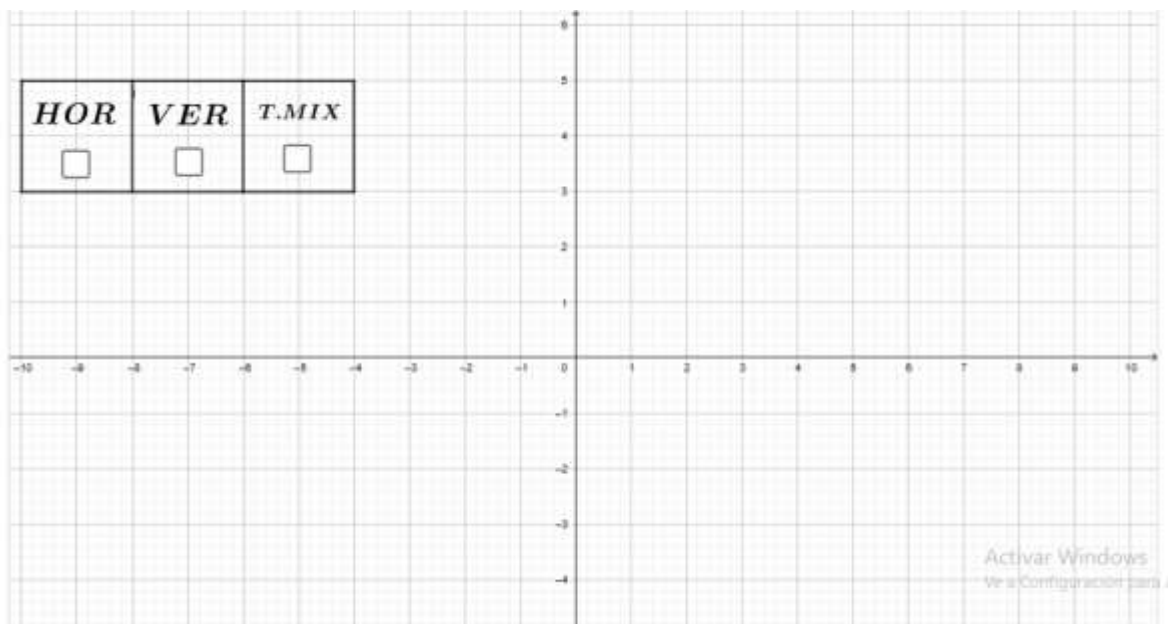
La niña decide lanzar la pelota con un ángulo y desde una altura determinada.

Pregunta:

1. ¿Cómo podemos modelar diferentes lanzamientos?
2. ¿Cómo afectan los valores de (a, h, k) a la trayectoria de la pelota?

Figura 62

Mixto



Nota: Elaboración propia.

3. En la fórmula canónica $y = a(X - h)^2 + K$ Si reemplazamos ***h*** por dos y ***K*** por tres ¿En qué posición quedaría el rastro de la parábola en el plano cartesiano? Describe con tus propias palabras.

4. Para desplazar la parábola cinco lugares hacia arriba y tres hacia la izquierda describe ¿Cómo quedaría la expresión algebraica de la función?

5. Dada la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$ describe ¿qué movimientos sufrió la expresión algebraica original?

Enlace de GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/ysm2fqc3>