



Propuesta de una secuencia didáctica alrededor del razonamiento combinatorio: el caso de la combinación sin repetición.

Luisa Fernanda Torres Castelblanco
Angela Marin Orozco

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Licenciatura en Matemáticas
2024



Propuesta de una secuencia didáctica alrededor del razonamiento combinatorio: el caso
de la combinación sin repetición.

Luisa Fernanda Torres Castelblanco
Angela Marin Orozco

Mg. Diego Díaz Enriquez
Director Trabajo de Grado

Universidad del Valle
Facultad de Educación y Pedagogía
Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas
Licenciatura en Matemáticas
2024

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a Dios, por haberme permitido llegar hasta este punto, por darme la salud, el entendimiento y la perseverancia necesarias para alcanzar esta meta.

A mis padres y hermana, por su apoyo, amor, paciencia y constante motivación en cada etapa de mi vida.

A mis profesores de la carrera, quienes además de compartir conocimientos y experiencia, sus enseñanzas lograron dejar una huella inolvidable en mi formación.

A mi compañera de trabajo Angela, por compartir conmigo ideas, aprendizajes y retos, además de poseer un gran compromiso y dedicación en la elaboración de este trabajo, pero sobre todo por su compañerismo y su gran amistad.

A nuestro tutor Diego Diaz, por su paciencia y orientación la cual resultó ser clave para el desarrollo exitoso de este trabajo.

Finalmente a todas aquellas personas que de manera directa o indirecta aportaron a mi formación y culminación de este trabajo, les extiendo mis más sinceros agradecimientos.

Luisa Fernanda Torres Castelblanco

Agradezco a Dios por todas las bendiciones que me da, por ser mi guía y fortaleza principal en todos los proyectos de mi vida.

A mis padres, por su apoyo y sacrificio en todo mi proceso académico para lograr culminar cada etapa.

A mi familia, por siempre estar presente brindándome su apoyo y amor incondicional.

A mi prometido, por su compañía, comprensión y amor en todo el proceso de este proyecto.

A mi compañera Luisa, por su compromiso, paciencia y dedicación para superar cada reto en este tiempo y aprender juntas.

A nuestro profesor Diego Diaz, por su paciencia, guía y compañía para llevar a cabo este proyecto.

Angela Marin Orozco

Tabla de Contenidos

	Pág.
Agradecimientos	3
Resumen	8
Introducción	9
Capítulo I: Aspectos Generales del Trabajo	11
Formulación del Problema	11
Objetivos	16
<i>Objetivo General</i>	16
<i>Objetivos Específicos</i>	16
Justificación	16
Antecedentes	17
Capítulo II: Marco Teórico	21
Referente Matemático	21
Referente Didáctico	24
Referente Curricular	32
Capítulo III: Metodología	34
Diseño secuencia didáctica	36
Implementación secuencia didáctica	41
Capítulo IV: Análisis	42
Momento de Acción	43
Momento de Formulación	55
Momento de Validación	59
Momento de Institucionalización	65
Capítulo V: Conclusiones	74
Referencias	77
Anexos	80

Lista de Figuras

	Pág.
Figura 1. Mapa conceptual sobre las diferentes nociones involucradas en la combinatoria.	23
Figura 2. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación introductoria.	44
Figura 3. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 1, situación introductoria.	44
Figura 4. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación introductoria.	44
Figura 5. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación introductoria.	45
Figura 6. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 1, situación introductoria.	45
Figura 7. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 1, situación introductoria.	46
Figura 8. Respuesta de E2 al punto 3 de la tarea 1, situación introductoria.	46
Figura 9. Respuesta de E3 al punto 3 de la tarea 1, situación introductoria.	46
Figura 10. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 2, situación introductoria.	47
Figura 11. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 2, situación introductoria.	47
Figura 12. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 2, situación introductoria.	48
Figura 13. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 2, situación introductoria.	48
Figura 14. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 2, situación introductoria.	49
Figura 15. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 2, situación introductoria.	50
Figura 16. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación 1.	51
Figura 17. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación 1.	51
Figura 18. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación 1.	52
Figura 19. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 1, situación 1.	52
Figura 20. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 1, situación 1.	53
Figura 21. Respuesta de E2 al punto 3 de la tarea 1, situación 1.	53
Figura 22. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 2, situación 1.	54
Figura 23. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 2, situación 1.	54
Figura 24. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 2, situación 1.	54
Figura 25. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 2, situación 1.	55
Figura 26. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación 2.	56
Figura 27. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 1, situación 2.	57
Figura 28. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación 2.	57
Figura 29. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación 2.	58
Figura 30. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 1, situación 2.	58
Figura 31. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 1, situación 2.	58
Figura 32. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación 3.	60
Figura 33. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 1, situación 3.	60
Figura 34. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación 3.	61
Figura 35. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación 3.	62
Figura 36. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 1, situación 3.	62
Figura 37. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 1, situación 3.	62
Figura 38. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 1, situación 3.	63
Figura 39. Respuesta de E2 al punto 3 de la tarea 1, situación 3.	63
Figura 40. Respuesta de E3 al punto 3 de la tarea 1, situación 3.	64
Figura 41. Respuesta de E1 al punto 1.a de la tarea 1, situación 4.	66
Figura 42. Respuesta de E2 al punto 1.a de la tarea 1, situación 4.	66
Figura 43. Respuesta de E3 al punto 1.a de la tarea 1, situación 4.	66

Figura 44. Respuesta de E1 al punto 1.b de la tarea 1, situación 4.	66
Figura 45. Respuesta de E2 al punto 1.b de la tarea 1, situación 4.	66
Figura 46. Respuesta de E3 al punto 1.b de la tarea 1, situación 4.	67
Figura 47. Respuesta de E1 al punto 1.c de la tarea 1, situación 4.	67
Figura 48. Respuesta de E2 al punto 1.c de la tarea 1, situación 4.	67
Figura 49. Respuesta de E3 al punto 1.c de la tarea 1, situación 4.	67
Figura 50. Respuesta de E1 al punto 1.d de la tarea 1, situación 4.	68
Figura 51. Respuesta de E2 al punto 1.d de la tarea 1, situación 4.	69
Figura 52. Respuesta de E3 al punto 1.d de la tarea 1, situación 4.	69
Figura 53. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 2, situación 4.	70
Figura 54. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 2, situación 4.	71
Figura 55. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 2, situación 4.	71
Figura 56. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 2, situación 4.	72
Figura 57. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 2, situación 4.	73
Figura 58. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 2, situación 4.	73

Lista de Tablas

	Pág.
Tabla 1. Determinadas nociones y definiciones presentes en la combinatoria.	22
Tabla 2. Organización de la Secuencia Didáctica	37
Tabla 3. Organización implementación de la Secuencia Didáctica	40

Resumen

La investigación que se presenta a continuación se desarrolla con el fin de promover el razonamiento combinatorio en estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa General José María Cabal. Para esto, se propone el diseño e implementación de una secuencia basada en la teoría de Situaciones Didácticas. La investigación resalta la importancia de enseñar la combinatoria en la escuela, por las habilidades que le puede otorgar al estudiante en matemáticas y, además, la necesidad de ir más allá de la enseñanza tradicional enfocada en la memorización de fórmulas y ejercicios repetitivos. Es así como, la secuencia didáctica se enfoca en la relación entre combinación sin repetición y el Binomio de Newton, para conectar el álgebra con la estadística.

Considerando esto, la investigación realizada que también toma en consideración el juego de dominó como base para la secuencia permitió que los estudiantes adquiriesen un dominio apropiado de diversas nociones presentes en estadística. Además, que comprendieran la construcción de las fórmulas que posee cada una de las operaciones combinatorias trabajadas y lograran tener un primer acercamiento a la relación que tienen los coeficientes binomiales con el Triángulo de Pascal

Palabras clave: Razonamiento combinatorio, Secuencia Didáctica, Enseñanza de la Combinatoria, Binomio de Newton, Triangulo de Pascal.

Introducción

El presente trabajo se desarrolla en el campo de la didáctica de la estadística, el cual es de gran importancia para la comprensión de la adquisición y procesamiento de los conocimientos matemáticos en los estudiantes, además, se encarga de proponer estrategias que permitan mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ellos. Es así, como entra en juego el razonamiento combinatorio, que dota a los estudiantes de habilidades para fomentar sus competencias críticas al momento de resolver problemas en diversas áreas de las matemáticas y de la vida cotidiana.

Es en este sentido, que este trabajo presenta una investigación orientada a promover el razonamiento combinatorio. Para esto, se diseña una secuencia didáctica a partir de la adaptación de actividades presentes en otros trabajos y teniendo en cuenta la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau. Esta teoría apoya la intención de que los alumnos adquieran un saber determinado desde un enfoque más centrado, teniendo como actor principal al estudiante.

La secuencia didáctica, tiene como tema central la combinatoria, pero específicamente se centra en el trabajo con las variaciones, permutaciones y combinaciones sin repetición, para finalmente llegar a tocar la relación presente entre los números combinatorios (Binomio de Newton) y las combinaciones sin repetición.

Por lo que se requiere un análisis posterior al diseño e implementación de la secuencia didáctica, para evaluar su efectividad en torno al objetivo principal que es el promover el razonamiento combinatorio. Este análisis tiene en cuenta el trabajo desarrollado por los estudiantes en torno las características principales de los conceptos presentes, como lo son el orden, la población y muestra. Además, detectar en los estudiantes determinados errores

teniendo en cuenta los modelos combinatorios de selección, partición y colocación trabajados por Batanero.

El trabajo se encuentra dividido en 5 capítulos. En el primer capítulo se presentan los aspectos generales del trabajo, en un primer momento se presenta la formulación del problema, partiendo desde los referentes que argumentan la presencia de una problemática en torno a la enseñanza de la combinatoria en la escuela, para finalmente presentar la pregunta problema que orienta el trabajo. En un segundo momento se presentan los objetivos, tanto el general como los específicos. Posteriormente se encuentra la justificación de la selección del tema a abordar y el cómo abordarlo a través del diseño de una secuencia didáctica y por último se sitúan los antecedentes que han abordado la problemática en cuestión, estos son a nivel nacional e internacional.

El segundo capítulo presenta el marco teórico, donde se hayan los referentes matemáticos, en el cual se abordan los conceptos y nociones presentes en la combinatoria y la relación que estos tienen con el Binomio de Newton. También se encuentra los referentes didácticos, en donde se presenta la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y se abordan diversos trabajos en torno a la combinatoria. Del mismo modo se considera el referente curricular, en el que se toman en cuenta los estándares básicos de competencias en matemáticas, los lineamientos curriculares y los derechos básicos de aprendizaje.

En el tercer capítulo se presenta la metodología que se usa para la investigación, el proceso de diseño e implementación de la secuencia.

El cuarto capítulo aparece el análisis de la implementación de la secuencia, a partir de un estudio de casos, donde se retoman los referentes presentados en el marco teórico.

En el quinto y último capítulo, se realizan las conclusiones que evidencian los alcances y sugerencias para posibles mejoras.

Capítulo I: Aspectos Generales del Trabajo

Formulación del Problema

El pensamiento aleatorio o también conocido como pensamiento estocástico es uno de los cinco importantes tipos de pensamiento matemático que debe manejar una persona competente en matemáticas. El MEN (2006) se refiere al pensamiento aleatorio como una herramienta que ayuda a tomar decisiones en situaciones donde el azar y la incertidumbre son los pilares y por ende no se sigue un patrón o esquema específico al momento de repetir un suceso o evento. Además, en el MEN (2006) también se menciona que este pensamiento se apoya en conceptos y procedimientos basados en teorías estadísticas como lo son la teoría de probabilidades, la estadística inferencial, la estadística descriptiva y la combinatoria.

Teniendo en cuenta estas teorías mencionadas, es de interés la combinatoria, la cual no es solamente una herramienta para calcular probabilidades ya que, para Piaget & Inhelder (1980) esta rama de las matemáticas es una parte importante y vital de la teoría del desarrollo cognitivo. Esta teoría trabajada por Piaget menciona que, el desarrollo cognitivo de un niño ocurre en una sucesión de “estadios” los cuales están caracterizados por razonamientos y pensamientos únicos.

Es en uno de estos estadios, que se manifiesta una transformación del pensamiento donde el sujeto pasa de un método de búsqueda empírico a un nivel de pensamiento formal, este estadio se presenta al final de la infancia, en el periodo de los once a los doce años.

El sujeto es capaz de razonar correctamente sobre proposiciones en las que no cree o no cree aún, o sea, que considera a título de puras hipótesis; y saca las consecuencias necesarias de verdades simplemente posibles, lo que constituye el principio del pensamiento hipotético deductivo o formal. (Piaget & Inhelder, 1980, p.133)

Según Morales (2014) las operaciones combinatorias, comúnmente conocidas como Combinatoria debido a su generalización, emergen al inicio del pensamiento formal. El trabajo con la combinatoria es esencial para expandir y amplificar este modelo de pensamiento porque, una vez establecido, además de permitir combinar entre sí objetos o factores, también permitirá hacerlo entre ideas o proposiciones, lo cual hace necesario aclarar que la combinatoria no solo se trata de combinar “elementos”.

En Combinatoria, basada en el razonamiento multiplicativo, se cuentan grupos de posibilidades mediante una acción sistemática, ya sea mediante el uso de una fórmula o mediante el desarrollo de una estrategia que pueda cumplir con los requisitos de este tipo de problemas, como lo es la constitución de agrupaciones, la determinación de posibilidades y su conteo. (Pessoa & De Souza Rosa Borba, 2010, p.2).

Se esclarece que para llegar a realizar dichas técnicas de conteo se vuelve necesario trabajar con los principios de la teoría combinatoria (Regla de la suma y la regla del producto) y a su vez con su figura representativa por medio del diagrama de árbol. Asimismo, se tiene en cuenta que para abordar lo presentado anteriormente es necesario abordar otras nociones las cuales serán un fundamento para la comprensión de dichas técnicas de conteo, como lo son el conjunto, la relación y el orden. (Maldonado & Rivera, 2012)

Debido a los diversos usos que se le pueden dar a la combinatoria, en cada uno de estos se puede ver reflejado un tipo razonamiento determinado de acuerdo la realidad en la que se está trabajando. Por tanto, teniendo en cuenta los diferentes trabajos de Navarro-Pelayo et al. (1996) y Batanero et al. (1994), entorno al razonamiento combinatorio además, las definiciones previas de combinatoria, las autoras de este trabajo entenderemos *razonamiento combinatorio* como la habilidad del sujeto de analizar y relacionar los problemas o situaciones de la vida cotidiana, presentes en diferentes disciplinas y contextos, con los elementos de la combinatoria, como por ejemplo, esto puede ser abarcado desde la planificación de menús, la organización de armarios o vestimenta, en la codificación y seguridad informática, diseños de experimentos en investigaciones científicas, entre muchos otros. Es decir, reconocer que estos problemas presentan características de la combinatoria y pueden ser resueltos a través de las diversas técnicas, métodos y demás contenidos que las matemáticas brindan a través de esta rama.

Tomando en consideración lo mencionado anteriormente, se vuelve necesario presentar los argumentos por los cuales es fundamental la enseñanza de la combinatoria en la escuela. Kapur (1970) presenta diversas razones a favor de la enseñanza de esta temática, de entre las cuales se resalta aquella que propone una variedad de campos para su aplicación, ya sean dentro de las propias matemáticas, como externas a esta.

En las matemáticas una de las aplicaciones más conocida de la combinatoria es en el Triángulo Aritmético (o Triángulo de Pascal) ya que, aunque normalmente es reconocido por su famoso patrón de números, la construcción de dicho triángulo expone una correspondencia con los coeficientes binomiales, los cuales además de estar presentes en el Teorema Binomial descubierto por Newton (1642-1727), son fundamentados por los números combinatorios.

Sin embargo, dicha aplicación y relación entre la combinatoria y Binomio de Newton no es usualmente trabajado en la escuela, esto puede deberse por diversos motivos, uno de ellos es el presentado por Zapata et al. (2010) afirmando que:

Así como los estudiantes tienen dificultades para entender la combinatoria, los profesores tenemos gran dificultad para enseñarla de manera comprensiva y duradera. Esta dificultad está asociada a varios factores, (1) no hay mucha investigación en este campo que oriente a los profesores (Kavousian, 2005), (2) no hay muchos recursos didácticos para apoyar la enseñanza de la combinatoria, (3) los libros de texto que se usan para enseñar estadística dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido (Ortiz, Batanero, & Serrano, 2007). (p. 1)

Otro motivo es el manifestado por Villanueva (2015) donde se define la disposición de la enseñanza de la combinatoria en Colombia por medio de un aprendizaje exclusivo de fórmulas y el desarrollo de actividades semejantes; este comportamiento omite a su vez el desarrollo de un diseño curricular en el cual los distintos tipos de pensamiento matemático descritos por el MEN son integrados y trabajados conjuntamente.

Por otra parte, si se tiene en cuenta dicho vínculo entre estos dos distintos tipos de pensamiento, se tiene que “En la integración de los temas de la combinatoria y el álgebra surgen ciertos inconvenientes, iniciando que es un campo de investigación poco estudiado...” (Rodríguez, 2021. p. 4). Para el presente caso, este aspecto puede ser trabajado a través de un sistema de actividades, donde se relaciona la combinatoria y el binomio de Newton.

Debido a esto, surge la elección de trabajar dicha relación a través de una secuencia didáctica a partir de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Acerca de la situación didáctica se puede decir que es “construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los

alumnos un saber determinado” (Panizza, 2003. p.4) lo cual otorga la posibilidad de abordar la relación de una manera más centrada, con un objetivo más específico, en donde se trabaja también el sentido que le otorga la teoría de situaciones didácticas a la construcción del conocimiento del estudiante, el cual, tiene el papel de actor principal.

Para la implementación de la secuencia, se escogió la Institución Educativa José María Cabal, ubicada en la ciudad de Cali. Esta selección se basó en dos aspectos clave. El primero de ellos es que la institución se enmarca como uno de los lugares para llevar a cabo las prácticas de la Licenciatura en Matemáticas que realiza la Universidad del Valle. Este aspecto es importante debido a que los estudiantes están familiarizados al hecho de interactuar con individuos distintos a sus docentes habituales.

El segundo aspecto está asociado a los resultados que suministra el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación, también conocido como ICFES, en el examen saber 11°. Pese a que los resultados de la prueba de la institución en el área de matemáticas han mostrado un aumento en los últimos cuatro años, los puntajes obtenidos siguen siendo bajos. Por tal motivo, se ha decidido abordar estos temas de combinatoria desde grados inferiores, como es el grado octavo, ya que en la educación colombiana son poco estudiados y así impulsar el desarrollo académico de la institución.

Teniendo presente todo lo descrito anteriormente, surge la siguiente pregunta como medio de movilización para la elaboración del presente trabajo:

¿Cómo promover el razonamiento combinatorio en los estudiantes de grado octavo (8°) de la Institución Educativa General José María Cabal?

Objetivos

Objetivo General

- Promover el razonamiento combinatorio en los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa General José María Cabal.

Objetivos Específicos

- Diseñar una secuencia didáctica relacionada con el razonamiento combinatorio, usando los modelos de combinatoria en las combinaciones sin repetición y la relación con el Binomio de Newton.
- Detectar determinados errores presentes en los estudiantes a partir de la implementación de la secuencia didáctica en grado octavo.
- Evaluar la efectividad de la secuencia didáctica en la combinación sin repetición a partir de las nociones relacionadas al pensamiento estocástico que son adquiridas por los estudiantes.

Justificación

La enseñanza de la combinatoria en la escuela es una necesidad fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante, particularmente en el contexto del pensamiento estocástico. A pesar de que en Colombia el MEN (2006) tiene presente el trabajar este concepto y las nociones que lo acompañan, queda en evidencia que no son implementados en el plan de estudios habitual ya que su primera aparición se da en los últimos años de escolaridad y no se presentan una coherente relación con los diferentes tipos de pensamiento matemático con los que el estudiante está relacionado.

Se sabe que las matemáticas surgieron de la necesidad de contar, medir y calcular, pero la disciplina evolucionó para incluir la abstracción, el razonamiento lógico y la búsqueda y análisis de patrones (Maher et al., 2011, p. 10) Aunque dichas nociones presentan una sólida base en otras líneas de pensamiento matemático distinto al estocástico, En países como España actualmente los investigadores presentan una atención continuamente mayor a la hora de realizar planes de estudio que relacionan este tipo de pensamiento con las nociones ya previamente planteadas. (Batanero, 2001).

Comprendiendo que existen elementos compartidos entre la combinatoria y el álgebra como lo presenta Rodríguez (2021), este trabajo de investigación propone una secuencia didáctica que tiene como objetivo el impulsar el razonamiento combinatorio del estudiante para posteriormente relacionar este tipo de pensamiento con el pensamiento variacional y así presentar alternativas para beneficiar mucho más el trabajo del pensamiento estocástico en la escuela.

Antecedentes

Tomando en consideración los tres aspectos centrales del presente trabajo como lo son el razonamiento combinatorio, la enseñanza de la combinatoria en la escuela, y la estrecha relación que esta puede presentar con el álgebra, resulta necesario recopilar y exponer de manera precisa los trabajos e investigaciones que fundamentan el desarrollo del presente trabajo.

Lopes & Rezende (2010) desarrollan una propuesta didáctica para la investigación del razonamiento combinatorio, específicamente las estrategias de conteo mediante el uso de diagramas de árbol, en el último ciclo de Educación Primaria. Esto se realiza por medio de la adaptación de un juego comúnmente conocido como Tres en línea y la metodología utilizada es la de resolución de problemas; Aunque se resalta la originalidad de juego, los mismos

autores afirman que este presenta una amplia semejanza al ajedrez debido a que las piezas de su juego presentan similitudes con el peón y la torre del ajedrez.

Si bien esta propuesta se vuelve un apoyo en los docentes para la enseñanza de estos contenidos ya que promueve la comunicación entre los estudiantes puesto a que convierte el aula de clase en un ambiente donde la participación se vuelve el centro atención y por tanto los estudiantes se vuelven activos en la construcción de su propio conocimiento, queda en evidencia que para los estudiantes en asuntos conceptuales se le es complicado distinguir entre la regla de la suma y la regla del producto presentes a la hora de realizar las técnicas de conteo para calcular las probabilidades de un suceso.

Otro aporte significativo para el desarrollo de estrategias de conteo por medio de diagrama de árbol en Educación Primaria es el presentado por Bailera & Sáez-Benito (2021), ya que, dicha situación es introducida por medio de actividades basadas en el uso del ajedrez (juego que además de ser ampliamente conocido alrededor del mundo, puede ser usado como un recurso matemático debido a su forma de juego el cual se basa en la lógica) y son realizadas a distancia en un formato sincrónico. Se vuelve necesario puntualizar que, al realizar la investigación de manera sincrónica a causa de la situación presentada en el año 2020 a nivel mundial por la contingencia, para la recolección de datos se realizó por medio de un estudio de casos, donde en cada sesión de implementación solo estaba presente el estudiante, el recurso y el investigador.

En consecuencia, aunque dichas actividades son útiles debido a la facilidad presentada en el momento de introducir la combinatoria en estudiantes con nulos conocimientos previos, es necesario resaltar la falta de interacción que este presenta a la hora de comparar respuestas o indagar sobre los diversos métodos de resolución del problema con otros estudiantes ya que

al tratarse de una situación a distancia y sincrónica en la realización de las actividades va a limitar este aspecto.

Por otro lado, Ruiz (2021) diseña e implementa una estrategia didáctica por medio de un juego de mesa para la enseñanza de conceptos de permutación y variación en estudiantes de noveno grado (9°). Es imprescindible resaltar que dicha elaboración además de presentar de manera precisa varios aspectos relacionados a la combinatoria, esto se expone de una manera fluida y lineal, donde queda en evidencia el avance progresivo del estudiante en el momento de trabajar estas distintas actividades en las cuales estas se relacionan con la situación didáctica presentada por Brousseau.

A su vez, dicha elaboración e implementación dejan en evidencia cómo los estudiantes por medio de esta herramienta lograron comprender la construcción de las distintas técnicas de conteo presentes en la combinatoria, por último, es necesario precisar que, debido al reducido tiempo de planeación, no se logró concluir la situación de institucionalización presentada en la teoría de situaciones didácticas y por tanto no se llegaron a formalizar las fórmulas de la variación y combinación.

En este orden de ideas, Bonilla & Rueda (2011) diseñan y presentan un instrumento de análisis para identificar diversos elementos relacionados al razonamiento combinatorio, su metodología se basa en un enfoque mixto de análisis de datos, donde por medio de 5 distintos niveles, con sus respectivas categorías, se espera identificar las rutas que surgen en el razonamiento combinatorio del estudiante para resolver una serie de ejercicios determinados.

Se vuelve innovadora la creación de su matriz para realizar la respectiva clasificación de las respuestas presentadas por los estudiantes y poder distinguir en qué nivel de razonamiento combinatorio se encuentran ellos, un aspecto no tan a favor de su trabajo son las limitadas preguntas o problemas presentados a los estudiantes para realizar la respectiva

clasificación ya que al presentarse tan pocas respuestas para analizar, se puede llegar a omitir algún razonamiento presente en el estudiante que no llegó a compartirse en la solución de las actividades.

Finalmente, para señalar la relación que se encuentra entre la combinatoria y las estructuras algebraicas, se tiene el trabajo presentado por Rodríguez (2021) donde se exponen los elementos que comparten estas dos distintas ramas a través de la resolución de problemas. En dicho documento se define que los elementos del álgebra con los cuales se trabajan están relacionados al Binomio de Newton, dicho objeto matemático tiene como objetivo hallar y calcular las potencias de un binomio, a su vez, queda en evidencia en su fórmula matemática el uso de coeficientes binomiales los cuales simultáneamente estos son números combinatorios que están situados en el triángulo de Pascal.

De los resultados obtenidos por Rodríguez (2021) se resaltan que, al utilizar la fórmula de combinación sin repetición algunos estudiantes presentan dificultades aritméticas y aunque resuelven correctamente la operación para llegar a los números combinatorios, se les dificulta describir que tiene en común este objeto matemático con los coeficientes binomiales y así mismo con el Triángulo de Pascal, así mismo se destaca que una de estas dificultades aritméticas es la de confundir el factorial de un número al cancelar un número sin factorial y el confundir la escritura del número combinatorio con la división.

Para finalizar y siguiendo esta línea de relación entre la combinatoria y las estructuras algebraicas se tiene el trabajo de Cohecha (2014) ya que por medio de una situación problema se espera establecer una fórmula matemática para los coeficientes binomiales, aunque su trabajo es un gran aporte para el aprendizaje de dicho contenido matemático, se vuelve un poco complejo el abordaje de dicha problemática en estudiantes de octavo grado (8°). En consecuencia, aunque dicha interpretación no es posible aplicarla en un aula de clase,

resulta práctico el uso de la propuesta didáctica para la enseñanza del Teorema del Binomio, debido a que fomenta el trabajo de los elementos de la combinatoria relacionados con el álgebra, como lo son factorial de un número, los coeficientes binomiales, el Teorema del Binomio y sus posibles aplicaciones.

Capítulo II: Marco Teórico

Tomando en consideración el sentido del presente trabajo, se muestran ahora las ideas tomadas de los referentes teóricos que se encuentran enfocadas en tres aspectos principales que son, los referentes matemáticos que aborda los conceptos y nociones presentes en la combinatoria y la relación que estos tienen con el Binomio de Newton, el referente didáctico, donde se encuentra la teoría de situaciones didácticas y se plantean diversos aspectos del razonamiento combinatorio y finalmente el referente curricular.

Referente Matemático

Para la presentación y selección de los contenidos matemáticos que se van a utilizar en el presente trabajo se toma en consideración el uso de un mapa conceptual en el cual se va a evidenciar la relación entre los diversos contenidos procedimentales y conceptuales desde un mismo núcleo de saberes. La aplicación de dicho mapa presenta diversas ventajas, Rico et al. (2007) destaca que “Establece una jerarquía de nociones dentro de cada concepto, que se expresa por su ordenación dentro de una lista mediante una representación lineal secuenciada” (p. 6). A continuación, se presentarán los diversos conceptos y posteriormente se expondrán en un mapa conceptual.

Como se ha precisado anteriormente, cuando se habla del razonamiento combinatorio, implícitamente se está trabajando con elemento de la combinatoria, Wilhelmi (2004) define la combinatoria como “El arte de contar sin enumerar directamente todos los casos” (p. 13), dicho arte está caracterizado por las diversas técnicas y métodos para realizar esa acción. A

su vez, la combinatoria presenta diversas nociones las cuales vuelven sencilla la tarea de realizar el recuento en diversas clases de problemas. Por consiguiente, en la Tabla 1 se presentarán las diversas nociones con sus respectivas definiciones tomando en consideración lo presentado por Wilhelmi (2004).

Tabla 1

Determinadas nociones y definiciones presentes en la combinatoria.

Nociones	Definiciones
Variaciones	Sobre un conjunto de datos, es la modificación de algunos de los elementos del conjunto con respecto al orden en el que se presentan
Permutaciones	Sobre un conjunto de datos, es la variación de la disposición u orden de todos los elementos del conjunto.
Combinaciones	Sobre un conjunto de datos, es el cambio en disposición de algunos elementos de un conjunto, reconociendo que no se tiene en cuenta su orden.

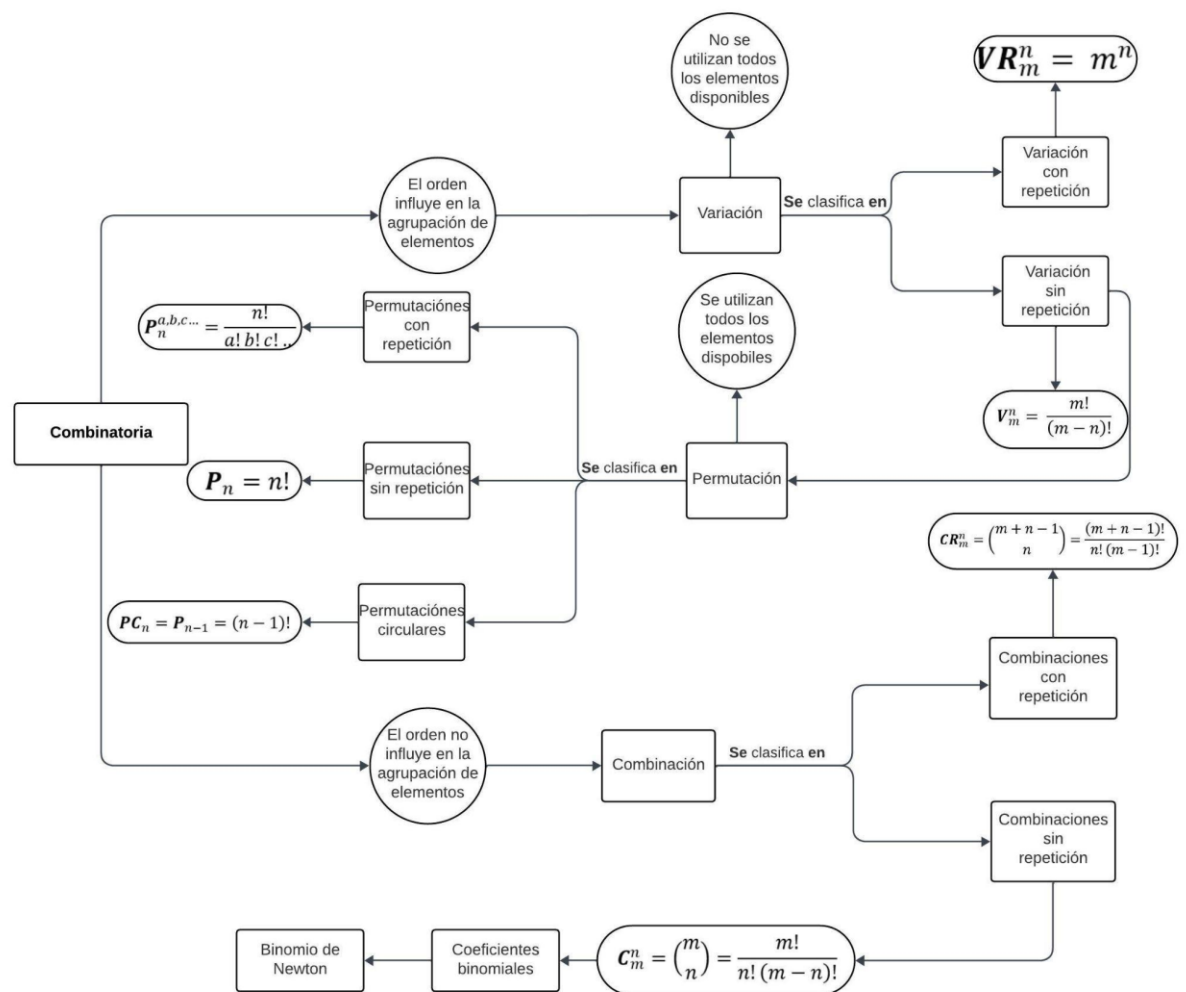
Nota. Esta tabla presenta los tres distintos casos presentes en la combinatoria con sus respectivas descripciones.

Se vuelve necesario aclarar que, en los casos presentes en las variaciones y permutaciones, al momento de agrupar los elementos seleccionados se vuelve imprescindible tener en cuenta el orden en el que esta operación se puede realizar. A su vez, estos tres

principios presentan diversas categorías, donde además de tener presente el orden de los elementos, se tiene en cuenta si se realiza o no la repetición del hecho.

En el caso particular de este trabajo se tiene como una idea principal la relación presente entre la combinación sin repetición y el Binomio de Newton por medio de los coeficientes binomiales. Por tal motivo en la Figura 1 se presenta un mapa conceptual donde se relaciona.

Figura 1. Mapa conceptual sobre las diferentes nociones involucradas en la combinatoria.



Nota. El mapa conceptual representa las diversas nociones presentes al trabajar con la combinatoria, además expone estructuralmente el vínculo entre la combinación sin repetición y el Binomio de Newton. Autoría propia.

Referente Didáctico

En Batanero et al. (1994) se habla de la necesidad de una Teoría de Situaciones Didácticas para abordar la enseñanza limitada de las matemáticas, enfocada en la labor del docente como un facilitador de aprendizaje, que se encarga de buscar y seleccionar los problemas que considere significativos para sus estudiantes. Es por esto que se presenta la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau con una teoría cognitiva del aprendizaje más integradora que se puede aplicar en la enseñanza de las matemáticas.

Además, estos autores mencionan de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau les parece que trabaja los tres aspectos que consideran importantes dentro de las matemáticas, que son actividad, lenguaje y red conceptual, abordadas a través del diseño de las situaciones dividido en acción, formulación, validación e institucionalización.

La teoría de Situaciones Didácticas formulada por Brousseau constituye desde nuestro punto de vista, una teoría de aprendizaje organizado de las matemáticas, esto es, una teoría de la instrucción matemática, en consonancia con los presupuestos epistemológicos y psicológicos expresados anteriormente. Describe un entorno de aprendizaje potente en el que no solo se presta atención al saber matemático puesto en juego en las tareas, sino también a las actividades de comunicación en el aula, todo ello en una secuencia organizada de situaciones didácticas (Batanero et al., 1994, p. 99)

Por otro lado, Zapata et al. (2010) desarrollan una propuesta que se fundamenta en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau, en donde toman en cuenta que:

Esta teoría resulta relevante para la propuesta dado a que posee un elevado potencial educativo a causa de que le da al estudiante la mayor parte de la responsabilidad en la construcción del conocimiento ya que al estar sustentada en el constructivismo se plantea que el conocimiento no se transmite de una persona a otra, si no que cada individuo lo desarrolla por cuenta propia. Es necesario resaltar que el hecho de otorgarle al estudiante la mayor parte de responsabilidad en la construcción del conocimiento no reduce la responsabilidad del profesor. Al contrario, la labor del profesor es clave y decisiva (Zapata et al. 2010)

Además, es necesario recalcar que dentro de esta teoría hay otro elemento importante, el cual es el medio, presente en algunas de las situaciones de la Teoría, que se explican a continuación.

Dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas, se encuentran dos tipos de situaciones la didáctica y a-didáctica. Vidal (2016) se refiere a la primera situación como aquella que es construida por el profesor con la intención de que los estudiantes adquieran un conocimiento, sin embargo, dentro de esta situación hay “momentos” que serían las denominadas situaciones a-didácticas, que su enfoque se encuentra en el estudiante, en la interacción de este con el problema propuesto, lo que incluye la socialización con sus compañeros y el medio dispuesto por el profesor.

En estas situaciones a-didácticas, se puede encontrar una clasificación de “momentos” presentes en el proceso de la aprehensión de un conocimiento según Vidal (2016).

Para el alumno:

- **Acción:** en esta situación es el estudiante quien interactúa con el medio un poco más allá en búsqueda de la solución de un problema, lo cual será basado fundamentalmente en su experiencia, es decir, sus conocimientos previos o implícitos.
- **Formulación:** para esta situación se presentan dos elementos importantes, el primero es lo que cada estudiante tiene como estrategia para la solución del problema propuesto, que sería la situación anterior, pero lo fundamental en esta situación es el trabajo en diferentes grupos, donde cada una de las ideas o estrategias se comunican entre los compañeros y entre estos mismos discutirán cada una de ellas, refutando, aprobando o cuestionando sus estrategias.
- **Validación:** en esta etapa final que se enfoca en los estudiantes, estos deberán presentar las ideas que han trabajado en las situaciones anteriores, pero esta vez frente a todos los estudiantes, donde el estudiante presenta sus argumentos o justificaciones, y se discute entre estudiantes. Es importante recalcar que, en este momento, lo ideal es que el docente no entre en la discusión pues de cierta manera, se presenta su autoridad e interviene en la idea de discusión entre estudiantes.

Para el profesor:

- **Institucionalización:** este momento corresponde al cierre que se debe dar a la situación didáctica, donde interviene finalmente el profesor recogiendo las ideas y conclusiones de los estudiantes, para de esta manera formalizar el tema o concepto trabajado, y que los estudiantes puedan relacionarlo a futuro con otros saberes.

Por otro lado, al momento de tratar el razonamiento combinatorio, se tiene en cuenta por naturaleza el combinatorio, sin embargo, al trabajar el combinatorio, no necesariamente se está abordando el razonamiento combinatorio. Este es un aspecto importante de resaltar en un primer momento, ya que, algunas de las investigaciones encontradas presentan un enfoque

orientado a trabajar la combinatoria y del razonamiento combinatorio solo se pueden encontrar elementos implícitos y de manera escasa.

Es decir, el enfoque que se le otorga a la enseñanza de la combinatoria es un enfoque tradicional como menciona Melgosa de Arce (2020) donde se evidencian en los libros de textos escolares que se sigue con frecuencia una estructura y secuencia de contenidos, además, que en los enunciados propuestos presentan implícitamente la técnica combinatoria requerida para su solución, lo que impide una verdadera exploración por parte de los estudiantes para hallar el contenido combinatorio necesario.

Del mismo modo, Martínez & Mayorquín (2022) mencionan en las conclusiones de su investigación que hace falta en los libros de texto trabajar en las interpretaciones de los modelos combinatorios, pues se enfocan en el modelo tradicional de exposición de contenidos, además, la enseñanza de las operaciones combinatorias se queda en el sentido único de operación, y es necesario trabajar en los estudiantes la imaginación, dejando de lado un poco la memorización y mecanización de fórmulas que no tienen algún sentido práctico.

En complemento a lo anteriormente mencionado, Navarro-Pelayo et al. (1996) mencionan que en España la enseñanza de La Combinatoria se desarrolla separadamente de los demás contenidos curriculares, salvo la relación con la Probabilidad, además que, “Esta enseñanza ha estado centrada en el aprendizaje de las definiciones y fórmulas de las operaciones combinatorias y en hacer ejercicios de cálculo con expresiones combinatorias” (p. 2).

Además, Roa et al. (1997) se refieren al razonamiento combinatorio como una representación de algo más que una simple parte de las matemáticas, presentando a este como un esquema general que emerge a partir de los 12 o 13 años. A su vez, el desarrollo del

razonamiento combinatorio se puede relacionar con la Teoría de los estadios de Piaget, como se menciona a continuación:

De acuerdo con Inhelder y Piaget (1955), el razonamiento hipotético-deductivo opera con las posibilidades existentes en una situación problemática, las cuales son descubiertas y evaluadas por el sujeto por medio de operaciones combinatorias. Esta capacidad puede relacionarse con los estadios descritos en la teoría de Piaget: después del período de las operaciones formales, el adolescente descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque para las permutaciones es necesario esperar hasta la edad de 15 años. Para estos autores, la combinación supone la coordinación de la seriación y la correspondencia, la permutación implica una reordenación respecto a un sistema de referencia móvil y reversible; por tanto, las operaciones combinatorias son operaciones sobre operaciones, características del nivel del pensamiento formal. (Roa et al., 1997, p. 1)

Sin embargo, también se dice que esta capacidad de resolver problemas combinatorios, no necesariamente se alcanza en el nivel de las operaciones formales, pues esto depende de la enseñanza que se le otorgue. Por lo cual, Navarro-Pelayo et al. (1996) realizan una investigación en torno al razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria que han tenido y que no han tenido una enseñanza del tema. Es en esta investigación donde presenta la descripción de los principales tipos de errores en los estudiantes en el momento de resolver problemas sobre el tema. Estos errores, son significativos para lo que es la evaluación del razonamiento combinatorio.

En la investigación mencionada en torno al razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria, los autores Navarro-Pelayo et al. (1996) realizan una clasificación de los errores

más comunes teniendo en cuenta los diferentes modelos combinatorios implícitos en los enunciados.

Los de *Selección* destacan la noción del muestreo, en donde a partir de una población de m elementos se va a retirar una muestra de n elementos. Los de *colocación* hacen referencia a los conceptos de posición, en los cuales se va a asignar a una serie de n elementos en m espacio. Por último, los de *partición* destacan la división de un conjunto m en varios subconjuntos n .

Para presentar los errores obtenidos se tiene en cuenta la nomenclatura E que hace referencia al error, teniendo así:

E1: Cambio del tipo de modelo matemático.

E2: Error de orden.

E3: Error de repetición.

E4: Confundir el tipo de objetos.

E5: Enumeración no sistemática.

E6: Respuesta intuitiva errónea.

E7: No recordar la fórmula correcta.

E8: No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula.

E9: Interpretación errónea del diagrama en árbol.

Finalmente, dos errores que los presentan como una adición en relación con los problemas específicos de colocación y partición.

E10: Confusión en el tipo de celdas. **E11:** Error en las particiones formadas.

Para efectos de este trabajo, aunque no se van a detectar todos los errores de los estudiantes, se podría tener la hipótesis de que será una de las principales características a destacar al momento de la realización y presentación de las tareas o actividades pertenecientes a cada uno de los momentos de la Secuencia Didáctica y su posterior análisis. Es por ello por lo que se toman en consideración, de los errores anteriormente mencionados, únicamente E2 - E5 - E6 - E7 - E8 - E9 y E11.

Ahora bien, respecto a cada uno de estos errores Navarro-Pelayo et al. (1996) presentan una pequeña descripción, para los errores de nuestro interés se tiene que:

E2: Error de orden: Hace referencia a uno de los criterios principales que ayuda a distinguir cada uno de los modelos matemáticos, en los cuales se determina si el orden importa o no importa para la solución del problema.

E5: Enumeración no sistemática: En este error los estudiantes buscan la solución del problema por medio del método de ensayo error, donde realizan diferentes pruebas y no dan uso de un procedimiento en concreto que les permita obtener todas las posibles soluciones.

E6: Respuesta intuitiva errónea: En este error los estudiantes no justifican la solución que dan al problema, y a su vez, esta respuesta que otorgan es errónea.

E7: No recordar la fórmula correcta: Finalmente en este error los estudiantes a pesar de haber identificado la operación combinatoria que se necesita para la solución del problema no la recuerdan correctamente.

E8: No recordar el significado de los valores de los parámetros en la fórmula combinatoria: En este error los estudiantes no son capaces de identificar qué elementos vendrían siendo m y cuales n .

E9: Interpretación errónea del diagrama en árbol: En este error los estudiantes dejan en evidencia que no comprenden la utilidad de un diagrama de árbol, por lo que al momento de construirlo o interpretarlo lo hacen de manera incorrecta.

E11: Error en las particiones formadas: Este error se enfoca en el modelo de partición y se presentan dos casos, por un lado, en el primer caso los estudiantes a la hora de dividir un conjunto en partes, estas no siempre incluyen completamente los elementos del conjunto principal. En el segundo caso, se habla del error que cometen los estudiantes al dividir un grupo en subgrupos, pues algunos consideran sólo un subconjunto de las posibles particiones.

Por otro lado, en Batanero et al. (1994) se habla sobre la relación entre la relación del Binomio de Newton con las combinaciones, donde se toma en cuenta lo que se presenta en el currículo oficial de matemáticas de Bachillerato en España.

Además, en este programa oficial, se incluye el Binomio de Newton, que constituye un tópico matemático que usa la fórmula de cálculo de las combinaciones. La relación de las combinaciones con esta importante identidad matemática y el uso de las fórmulas combinatorias para el recuento de los “casos posibles” y “casos favorables” en la regla de Laplace, usada en el cálculo de probabilidades, son las únicas conexiones matemáticas que han hecho posible una cierta supervivencia de la Combinatoria en el currículo (Batanero et al., 1994, p. 80)

Teniendo en cuenta también las investigaciones mencionadas anteriormente y esta relación entre el Binomio de Newton con las combinaciones, se logra ver que las aplicaciones

y trabajos están sustentados hacia el desarrollo del razonamiento algebraico del estudiante, más que el razonamiento combinatorio de este.

Referente Curricular

En Colombia el Ministerio de Educación Nacional (MEN) es la encargada de dirigir la educación conforme los mandatos constitucionales, reconociendo la Ley 715 como una consideración en la reforma de la Ley General de Educación, se vuelve necesario presentar los documentos por los cuales desde una perspectiva curricular se preserva una calidad en la educación.

Tomando en cuenta lo presentado anteriormente sobre cómo el MEN se refiere al pensamiento aleatorio, es necesario a su vez presentar su concepción sobre el pensamiento variacional; por ello el MEN (2006) presenta que:

Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con él reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. (p.66)

Es necesario resaltar la estrecha relación que posee este tipo de pensamiento con los otros propuestos por el MEN, esto es debido a que la variación y el cambio requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos, geométricos, de medidas y de datos.

Debido a la estrecha relación que tiene los coeficientes binomiales para la construcción del Teorema de Newton (o también conocido como el teorema del binomio), se presenta una selección de estándares en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, los

cuales pudieran abordar la combinatoria sin repetición y de ahí poder evidenciar la relación que posee este tema con los coeficientes binomiales y todo el contenido matemático que se puede abordar desde este ámbito algebraico.

Para poder tratar la combinatoria sin repetición en la escuela es necesario primero, teniendo en cuenta los Estándares Básicos de Competencias presentados por el MEN, identificar en conjunto de grados se imparte este tema, para esto, el estándar más relacionado al aprendizaje del estudiante con dicha temática está situado en el intervalo de grado 10° y 11°, en el pensamiento aleatorio y sistemas de datos, ya que dicho estándar hace referencia a “Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con reemplazo)” (MEN, 2006, p. 89).

Por otra parte, para llegar a cumplir este estándar es necesario tener en cuenta que los estudiantes en grado 8° y 9° van a comprender y trabajar el tema de la combinatoria desde un formato más simple puesto a que el estándar de ese intervalo de grados dice que los estudiantes van a ser capaces de “Calculo probabilidades de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo)-” (MEN, 2006, p. 85).

Por otro lado, se tiene presente que en el conjunto de grados de 8° y 9° desde el pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, los estudiantes ya han realizado una aproximación a los coeficientes binomiales desde el trabajo realizado con el triángulo de Pascal o en la solución de la potencia de los binomios, ya que el estándar de dicho intervalo presenta que ellos van a ser capaces de “Construir expresiones algebraicas equivalente a una expresión algebraica dada” (MEN, 2006, p. 85).

Inicialmente, para relacionar los dos estándares presentados previamente sobre el pensamiento aleatorio, el MEN (2006) presenta lo que ellos denominan como una

“*Coherencia Vertical*” la cual abarca la relación progresiva entre un estándar en un intervalo determinado de grado, con los demás estándares del mismo pensamiento en un intervalo diverso. Además, también presentan una “*Coherencia Horizontal*” la cual abarca la relación que tiene un estándar determinado en un pensamiento matemático particular con estándares diversos estándares presentados en los otros pensamientos matemáticos, pero desde un mismo conjunto de grado.

En este caso, se vuelve evidente que el presente trabajo, aunque está centrado en estudiantes de grado 8°, siguiendo los planteamientos presentados por el Ministerio de Educación Nacional, los estándares que cumplen los requisitos necesarios para el desarrollo del mismo hacen parte de un intervalo de grado superior al establecido.

Capítulo III: Metodología

Teniendo presente los objetivos del trabajo de investigación en cuestión, se determinó un enfoque cualitativo en donde se implementa una estrategia de diseño, la cual según Camargo (2019) consiste en realizar un análisis sobre el potencial impacto de aquellos diseños que tienen como propósito el aprovechamiento de cambios apropiados en circunstancias que normalmente no se presentan, por lo cual se vuelve necesario monitorear el impacto que este genera.

Los investigadores proponen una hipótesis de trabajo en la que predicen qué podría pasar si se introducen ciertas condiciones o circunstancias que no están presentes en un momento dado. A partir de la hipótesis, diseñan una situación para poner en funcionamiento dicha hipótesis y estudian los efectos logrados. Estas estrategias son empleadas para obtener evidencias del efecto de un nuevo programa, currículo, artefacto, material educativo, conjunto de problemas, normas, etc. (Bakker & Van Eerde, 2015, como se citó en Camargo, 2019, pp 3-4)

Con relación a esta estrategia, en el presente trabajo se parte de la intención de promover el razonamiento combinatorio a partir de la relación entre la combinación sin repetición y el Binomio de Newton, a tal efecto se realiza el diseño de la secuencia didáctica fundamentada en la Teoría de Situaciones Didácticas y de la cual se pretende analizar los efectos o resultados obtenidos en su implementación.

Ahora bien, en lo que compete sobre la recolección y selección de la información que servirá para el análisis final, es importante tener en cuenta lo que Stake (1999) presenta como un estudio de caso, afirmando que “El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 13). Nuestro trabajo al tratarse de la implementación de una secuencia didáctica, tomaremos como objeto de estudio a un selecto grupo de estudiantes para analizar así la resolución que ellos dan a cada uno de los problemas planteados, por tal motivo en palabras de Stake (1999) nuestra investigación se clasifica como un *estudio instrumental de casos* ya que nos centraremos en el análisis detallado de cada caso para poder comprender cuestiones más amplias.

Para efectos de la investigación se requiere tener en cuenta unas fases, que permitan llevar una orientación y organización de las actividades a realizar. De acuerdo a esto y teniendo en cuenta los elementos mencionados en los apartados anteriores se presentan las siguientes fases:

Fase 1 de planificación: En esta fase se realiza el reconocimiento de la problemática de interés y se plantean los objetivos. Además, se adapta el instrumento a implementar, que en este caso es la secuencia didáctica. Es necesario esclarecer que para la adaptación se tienen en cuenta diferentes trabajos de investigación.

Fase 2 de recolección de datos: En esta fase, se realiza la aplicación de la secuencia didáctica. Esta secuencia no cuenta con una estimación de tiempo, por lo que se aplica en las

clases necesarias, realizando el acompañamiento a los estudiantes. En esta intervención se recogen las evidencias por escrito de los estudiantes, además, algunas evidencias de fotografía y audiovisuales.

Fase 3 de análisis: En esta fase, se realiza el análisis basado en los objetivos establecidos, y a partir de un estudio de casos, se toman en consideración algunas de las evidencias presentadas por todos los estudiantes implicados.

Fase 4 de conclusiones: En esta última fase, se realizan las conclusiones según lo analizado en la fase anterior, donde se determina la efectividad de la secuencia didáctica y se presentan algunas recomendaciones.

Diseño secuencia didáctica

Para el diseño de la Secuencia Didáctica, se tiene en cuenta como se mencionó anteriormente, la teoría de situaciones didácticas de Brousseau, donde se consideran los momentos que esta teoría presenta, de acción, formulación, validación e institucionalización, presentándose así determinadas actividades para cada uno. Por otro lado, algunas de las preguntas, están orientadas según los modelos de combinatoria, entre ellos, el de selección, colocación y partición.

Además, la secuencia didáctica se encuentra estructurada en cinco situaciones, en donde la Situación Introdutoria presenta ejercicios sobre variación y permutación, la Situación 1, Situación 2 y Situación 3, abordan el dominó en torno a la combinación sin repetición y por último la Situación 4 introduce a los números combinatorios y la relación con el Triángulo de Pascal.

Tabla 2

Organización de la Secuencia Didáctica.

Estructura en Situaciones	Modelos de combinatoria	Teoría de situaciones didácticas
Situación Introdutoria: Explorando la variación y permutación.	Tarea 1. Punto 4. Modelo de selección. Tarea 2. Punto 2. Modelo de colocación.	Acción
Situación 1: Reconociendo el dominó.		
Situación 2: El orden de la combinación.		Formulación
Situación 3: Descubriendo las combinaciones.	Tarea 1. Punto 1. Modelo de partición. Punto 2. Modelo de colocación. Punto 3. Modelo de selección.	Validación
Situación 4: Combinatoria y Pascal.		Institucionalización

Nota. Esta tabla presenta de una manera estructurada la división de la Secuencia Didáctica.

Ahora bien, en cuanto al contenido de la secuencia didáctica, se presenta a continuación el propósito de cada una de las situaciones y una idea de lo que en ellas se aborda.

Momento de Acción

Situación Introdutoria: Explorando la variación y permutación.

Propósito: Comprender las definiciones o conceptos sobre la variación y permutación.

¿Qué aborda? En la Tarea 1 se trabajan ejercicios sobre variación y en la Tarea 2 sobre permutación. En cada una de las tareas, se abordan elementos claves como orden, población y muestra.

Situación 1: Reconociendo el dominó

Propósito: Reconocer las características de las fichas del juego de dominó.

¿Qué aborda? La Tarea 1 de esta situación, se trabaja en torno al reconocimiento del dominó y las características de las fichas que lo componen, esta información será fundamental para la realización de los próximos ejercicios. En la Tarea 2, se trabaja la población, muestra y se da inicio al reconocimiento del orden en la combinación sin repetición, dando uso del dominó.

Momento de Formulación

Situación 2: El orden de la combinación.

Propósito: Aplicar e interpretar representaciones icónicas y no icónicas para reconocer el papel que juega el orden en diferentes situaciones.

¿Qué aborda? Esta situación solo contiene la Tarea 1, la cual aborda de manera más enfática el papel que juega el orden en la combinación sin repetición, en donde esté no

importa. Para esto, se hace uso del diagrama de árbol y se presenta un ejercicio básico de combinatoria usando el juego.

Momento de Validación

Situación 3: Descubriendo las combinaciones.

Propósito: Aproximarse y reconocer las características de la combinación sin repetición.

¿Qué aborda? En esta situación también se presenta solo la Tarea 1, en esta se abordan ejercicios de combinación sin repetición, que tienen como base el dominó, usando contextos en torno al juego. Aquí se busca que el estudiante aplique los elementos claves trabajados anteriormente, que son la población, muestra y cuando el orden importa o no.

Momento de Institucionalización

Situación 4: Combinación sin repetición y el Triángulo Pascal.

Propósito: Formalizar los conceptos de variación, permutación y combinación sin repetición, además, descubrir la relación entre dichas combinaciones y el Triángulo de Pascal (Binomio de Newton)

¿Qué aborda? En esta última situación, por un lado, se encuentra la Tarea 1, donde se presentan una serie de preguntas que abordan población, muestra y orden. Esta tarea se realiza previo a una clase expositiva, donde se les expone a los estudiantes las definiciones de los conceptos trabajados con sus respectivas fórmulas, aplicaciones. Además, se retoman los ejercicios trabajados para mejor comprensión de los conceptos.

Por otro lado, la Tarea 2, presenta una manera distinta de exponer las combinaciones sin repetición, viéndolos ya como números combinatorios, para que los estudiantes logren ver la presencia de los números combinatorios en el Triángulo de Pascal.

Cabe destacar que la estructuración de la Secuencia Didáctica se realizó a partir de la adaptación de preguntas, actividades y propuestas tomadas de Parra & Paucar (2019) y

Rodríguez (2021).

En el primer documento, Parra & Paucar (2019) realizan una propuesta de trabajo con el uso del dominó para abordar la combinación y poder establecer diferencias con respecto a la variación. De este documento se adapta esta idea de trabajo con dicho juego, el cual es el instrumento central en la Secuencia Didáctica. Además, se toman en consideración algunas preguntas, que fueron reestructuradas para un mejor enfoque.

El segundo documento es un trabajo de Rodríguez (2021) donde se aborda la relación entre los números combinatorios y el Binomio de Newton a partir de la construcción del Triángulo de Pascal. En el cual se toma como referente el uso de actividades previas para conectar dichos fundamentos. De este documento se decide adaptar la construcción del Triángulo de Pascal a partir de los números combinatorios.

A continuación, se presenta la tabla, en la cual se muestran los elementos a tener en cuenta para la realización del análisis de la implementación de la secuencia didáctica.

Tabla 3

Organización implementación de la Secuencia Didáctica.

Teoría de situaciones didácticas de Brousseau	Estructura de la secuencia	Noción central trabajada	Posibles errores presentes
Momento de acción	Situación introductoria	Variación y Permutación	Error de orden y enumeración no sistemática

	Situación 1	Orden, población y muestra	Error de orden y enumeración no sistemática
Momento de formulación	Situación 2	Orden, población y muestra	Error de orden y enumeración no sistemática
Momento de validación	Situación 3	Combinación sin repetición	Error en las particiones formadas
Momento de institucionalización	Situación 4	Uso de las fórmulas combinatorias	No recordar la fórmula correcta

Nota: Esta tabla presenta los elementos que se tienen en cuenta al momento de realizar el análisis de la implementación de la secuencia didáctica.

Implementación secuencia didáctica

En un primer momento se presenta la institución focalizada para realizar la implementación del diseño de la Secuencia Didáctica y de donde obtendremos la información para el análisis. Esta es la Institución Educativa General José María Cabal, ubicada en el departamento del Valle del Cauca, en el municipio de Santiago de Cali, Sector El Jordán, barrio Altos Nápoles en la comuna 18. Cabe aclarar que, será la sede de bachillerato, en la cual se encuentra el grado octavo de interés, donde se implementará la Secuencia Didáctica.

Durante el trabajo con la situación introductoria, las situaciones 1, 2 y 3, las investigadoras asumieron un rol pasivo. En estas situaciones el trabajo estaba orientado a que los estudiantes resolvieran los ejercicios a partir de sus saberes previos y las concepciones que tienen, donde solo se les otorgaba una ayuda para

resolver inquietudes en torno a las pautas que debían seguir para la resolución de las actividades propuestas.

Además, en la situación 3 los estudiantes conformaron grupos de trabajo, donde presentaban sus ideas, propuestas y argumentos, según lo trabajado en las situaciones anteriores, y de esta manera poder resolver las actividades de dicha situación.

Finalmente, en la situación 4, las investigadoras realizan una intervención de tipo clase expositiva, donde se presentan los conceptos con sus definiciones y fórmulas, para esclarecer lo trabajado y brindar las bases para las siguientes actividades.

Capítulo IV: Análisis

Aquí se presentan los resultados adquiridos a lo largo de la implementación de la secuencia didáctica, como se mencionó anteriormente, al tratarse de un estudio de casos, aunque se realizó la implementación a un grupo de 22 estudiantes, los cuales tienen edades entre los 12 y 14 años, se toma una muestra intencionada, no aleatoria.

Para la selección de esta muestra, los estudiantes cumplieron dos características, la primera consiste en que estos estuvieron presentes en todas las sesiones de clase en las que se implementó la secuencia didáctica y la segunda característica se basa en la presencia de estos estudiantes en diferentes grupos cuando se trabaja la situación 3.

Finalmente, la muestra seleccionada fue tres estudiantes los cuales se les asigna la siguiente nomenclatura para ser distinguidos en el posterior análisis.

E1: Estudiante n°1

E2: Estudiante n°2

E3: Estudiante n°3

En el análisis se tienen en cuenta las respuestas por escrito de los estudiantes seleccionados, los registros fotográficos y algunas observaciones realizadas por las investigadoras en el momento de la implementación.

Momento de Acción

Situación Introductoria: Explorando la variación y permutación.

En esta situación se presentan 2 tareas, las cuales se desarrollan a partir de un mismo contexto. Las dos tareas poseen tres puntos.

Tarea 1

Punto 1

Este punto presenta un primer acercamiento a la noción de orden. Aunque E1 y E2 afirman que el orden de selección de los estudiantes sí importa, la explicación que ellos suministran lo hacen a partir de sus concepciones acerca de las habilidades e importancia de las posiciones de juego, en lugar de concebirlo como un proceso ordenado y lógico-deductivo, en donde se vuelve irrelevante las aptitudes que tienen cada uno de los jugadores. La esencia del punto es poder distinguir que, aunque los integrantes de los grupos deben poseer solo una posición al momento de su selección, estos pueden ser ubicados en las diferentes posiciones de juego cuando se conforman los grupos, es decir, un mismo estudiante puede estar en las 5 posiciones, pero esto implica que la conformación de los grupos será diferente, ya que, se encuentra en una posición distinta.

Figura 2. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación introductoria.

Si, es importante porque sabiendo que todos tienen las mismas habilidades y potenciales pero si por ejemplo el vio al otro porque elige a una persona (de los) o mas (vicio) en un caso (otro), si importante ejemplo:

A B C

Habría una presencia en una persona y de los otros es como cada uno de los

Figura 3. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 1, situación introductoria.

Siento que es importante porque en algunas ocasiones de esos jugadores uno sabe más sobre la elección que otro y es importante que cada quien tenga un cargo de lo que más se le moviliza.

Figura 4. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación introductoria.

Tarea 4. Si es lo mismo Cambian las 5 posiciones, pero siguen estando pero los personas diferentes posiciones pero los mismos integrantes.

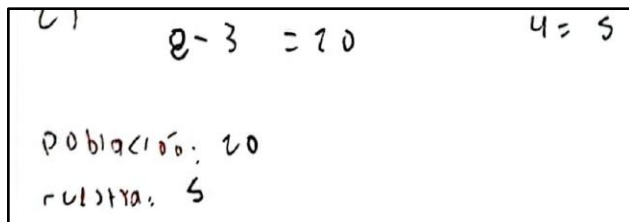
Como se muestra en la figura 4, E3 presenta una respuesta contradictoria, ya que, inicia con un “si” dando a entender que la afirmación del punto uno es correcta, sin embargo, al momento de justificar la respuesta, considera que el orden en la conformación de los grupos no importa, mencionando que sigue siendo el mismo grupo de 5 personas en diferentes posiciones. El estudiante a pesar de que no otorga una respuesta correcta, en comparación a E1 y E2, si tiene un acercamiento al razonamiento lógico-deductivo.

Punto 2.

Este punto presenta un primer acercamiento a la noción de población y muestra, donde E1 y E3 proporcionan la misma respuesta, afirmando que la población en este caso particular sería 20 y la muestra 5. Como se puede observar en la figura 5 E1 logra justificar

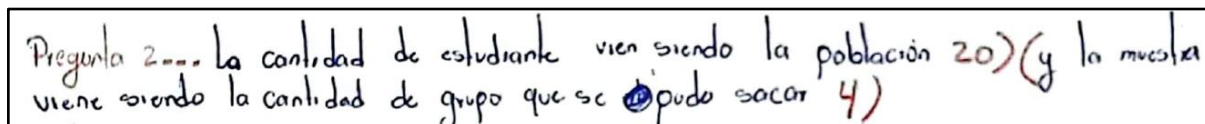
su respuesta, ya que enuncia que los 20 estudiantes del grupo 8-3 son la población y la muestra serían los 5 estudiantes que se necesitan para formar un grupo. Aunque E3 presenta las mismas respuestas, no se suministran una explicación para ello.

Figura 5. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación introductoria.



A pesar de que E2 responde correctamente la pregunta relacionada a la cantidad que representa la población, en la figura 6 se evidencia que para determinar la cantidad de la muestra se confunde entre, el número total de subconjuntos que se pueden generar en la repartición equitativa de los 20 estudiantes, que serían 4 grupos y los elementos que posee cada uno de los subconjuntos, en este caso 5 estudiantes por grupo.

Figura 6. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 1, situación introductoria.



Punto 3

Este punto presenta de manera ilustrativa la noción de orden. E1 y E2 consideran que el orden importa, en el caso de E1, al tener una constante como lo es el 5 en una misma posición, al momento de formar nuevos grupos utiliza distintos números, pero manteniendo su constante, por tanto, reconoce que cada uno de esos grupos son distintos. Por otra parte, E2 considera los mismos 5 estudiantes para formar los distintos grupos, pero lo que cambia son las posiciones en los que cada número está, dando la idea de que el orden sí importa cuando se lleva a cabo la formación de los grupos.

Comparando las respuestas dadas por estos dos estudiantes en el punto 1 a las dadas ahora en el punto 3, se puede apreciar cómo ellos se van aproximando más a la noción de

orden.

Figura 7. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 1, situación introductoria.

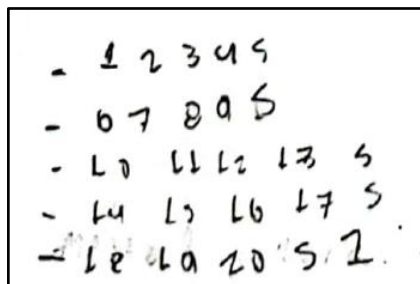
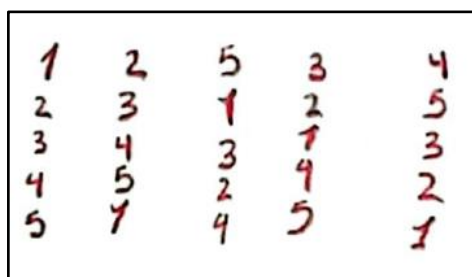


Figura 8. Respuesta de E2 al punto 3 de la tarea 1, situación introductoria.



Para el caso de E3 la situación es diferente, puesto que este estudiante usa distintos números en la conformación de cada uno de los grupos. Si bien, la respuesta suministrada por E3 es correcta, no se puede reflejar un desarrollo en su concepción sobre la noción del orden como se hizo con E1 y E2 previamente.

Figura 9. Respuesta de E3 al punto 3 de la tarea 1, situación introductoria.



Ahora bien, teniendo en cuenta lo que mencionan Navarro-Pelayo et al. (1996) sobre los diversos modelos combinatorios, este punto hace parte al modelo de selección, donde los estudiantes deben extraer una muestra de un grupo de elementos, específicamente, de los 20

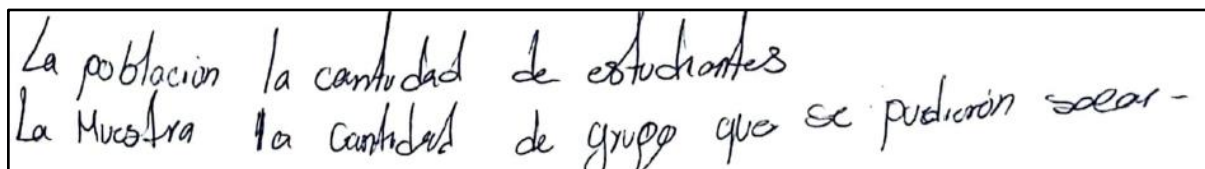
estudiantes que es el total de elementos, deben tomar 5 de ellos para conformar el primer grupo. Teniendo en cuenta las respuestas de los estudiantes, se evidencia que los tres estudiantes, aunque presentan respuestas diversas, no logran caer en algún error común presentes en los diferentes modelos.

Tarea 2

Punto 1

Este primer punto retoma lo trabajado anteriormente sobre las nociones de población y muestra. Si bien E2 presentó una justificación para definir qué elementos hacen parte de la población y la muestra, queda en evidencia que no hay una relación entre este argumento con algún tipo de modelo.

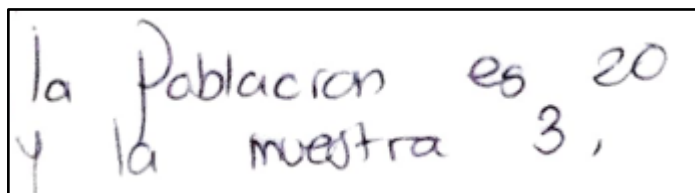
Figura 10. *Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 2, situación introductoria.*



La población la cantidad de estudiantes
La Muestra la cantidad de grupo que se pudieron sacar -

Caso contrario se ve en E1 y E3 donde lo presentado parcialmente es correcto, ya que proporcionan un valor de cantidad con respecto a la población y muestra, pero no presentan una explicación para la selección de esas respuestas.

Figura 11. *Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 2, situación introductoria.*



la Poblacion es 20
y la muestra 3,

Punto 2

Este punto tiene como propósito el de presentar ilustrativamente la noción de orden inmerso en él. Como se evidencia en la figura 12, E1 no solamente es capaz de suministrar la respuesta a partir de la formación de todos los posibles casos, si no también realizarlo por medio de diagramas de árbol. Este formato de respuesta es interesante debido a que “Pocos

estudiantes usan espontáneamente este diagrama para resolver problemas combinatorios, y los que lo usan cometen errores o lo interpretan incorrectamente.” (Batanero et al., 1997, como se citó en Roldan et al., 2018).

Al no exponerse todavía el uso de diagramas del árbol a los estudiantes para que ellos lo utilizaran como una técnica de conteo en la solución de los puntos, se puede inferir que E1 involuntariamente descubrió y aprovechó un método para realizar una técnica de conteo.

Figura 12. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 2, situación introductoria.

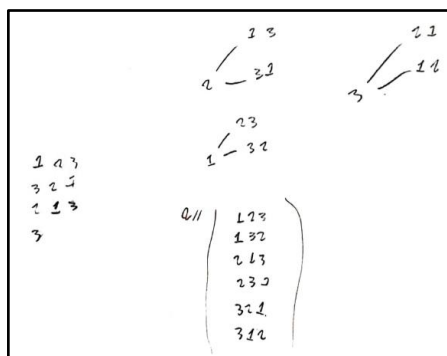
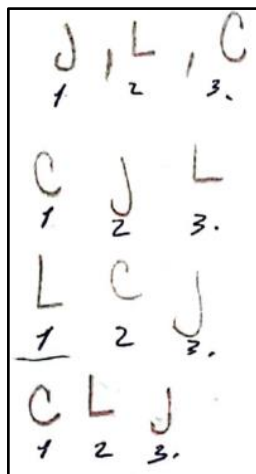
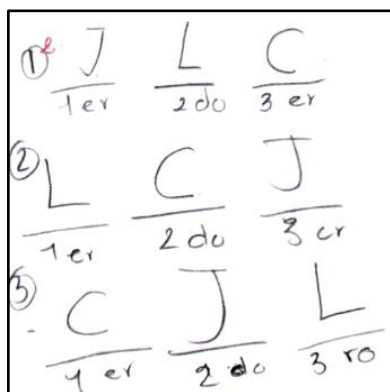


Figura 13. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 2, situación introductoria.



Si bien E2 y E3 presentan algunas soluciones como se muestran en la figura 13 y 14, queda en evidencia que dichos estudiantes manifiestan un error sugerido por Navarro-Pelayo et al. (1996), ya que al tratarse de un modelo de colocación los estudiantes deciden realizar una *enumeración no sistemática*, donde al no tener presente un procedimiento recursivo cabe la posibilidad de omitir algunas formaciones de los elementos.

Figura 14. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 2, situación introductoria.

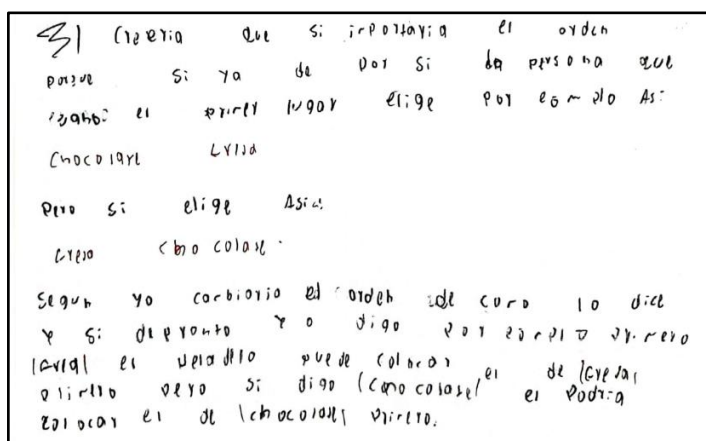


Punto 3

En este punto, siguiendo el orden de ideas presentes en la construcción de la noción de orden, se tienen presente dos aspectos muy importantes, el primero es que E2 y E3 afirman que el orden no importaría, pero al no justificar las respuestas presentadas, no es posible realizar un análisis a estos dos estudiantes.

Por otro lado, E1 asegura que el orden sí importa puesto que para él hace una distinción entre el helado de Chocolate - Fresa y el helado Fresa - Chocolate. Sabiendo que Navarro-Pelayo et al. (1996) presentan como un error común el no considerar el orden de los elementos cuando es relevante o, al contrario, no considerar el orden cuando es esencial. Teniendo en cuenta esto, se plantea la siguiente situación. Como se evidencia en la figura 15, para E1 el orden es esencial a la hora de comerse un helado, a diferencia de E2 y E3 que indican que el orden no importaría, en casos como estos, donde la relevancia del orden se fundamenta en la persona que responde la pregunta, ¿Cuál sería el enfoque correcto para definir si el orden importa o no importa en este tipo de casos?

Figura 15. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 2, situación introductoria.



Situación 1: Reconociendo el dominó.

En esta situación se presentan 2 tareas, donde la tarea 1 posee tres puntos y la tarea 2 posee dos puntos.

Tarea 1

Punto 1

En este primer punto se continúa el trabajo en torno a la comprensión del orden, donde los estudiantes deben tomar en cuenta las características de las fichas de dominó, tomando en consideración los puntos que representan una cantidad.

Teniendo una imagen como referencia donde se presentan algunas fichas, los estudiantes presentan sus ideas acerca de lo que observan sobre cómo se encuentran organizadas estas.

En la respuesta de E1 se puede evidenciar que realiza una descripción sobre la parte física de las fichas. Además, menciona que cada número tiene 7 fichas, donde ilustra que el número 1 lo puede ubicar en una ficha con los números del 0 al 6 y de la misma manera podrá hacerlo con los otros números, lo que al final resulta en 49 fichas.

En esta respuesta no toma en cuenta el orden que tienen las fichas y que según este orden las fichas no se repiten, es decir, si en el primer grupo de fichas con el

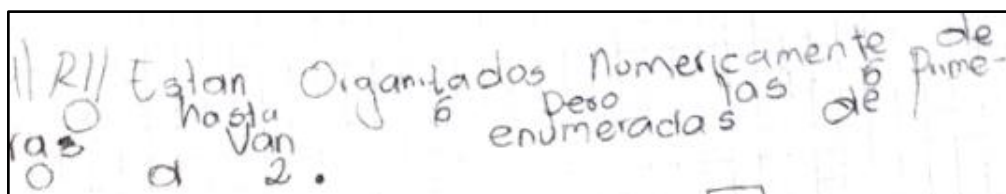
número uno, tiene la ficha con los números uno y dos, en el segundo grupo con el número dos, se repetirá la misma ficha.

Figura 16. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación 1.

Nº	Fichas	Verificables	Con	Verificables	Por
1	1 y 2	Cada	hacer	hacer	2
2	2 y 3	2 y 3	2 y 3	2 y 3	3
3	3 y 4	3 y 4	3 y 4	3 y 4	4
4	4 y 5	4 y 5	4 y 5	4 y 5	5
5	5 y 6	5 y 6	5 y 6	5 y 6	6
6	6 y 7	6 y 7	6 y 7	6 y 7	7
7	7 y 8	7 y 8	7 y 8	7 y 8	8
8	8 y 9	8 y 9	8 y 9	8 y 9	9
9	9 y 10	9 y 10	9 y 10	9 y 10	10
10	10 y 11	10 y 11	10 y 11	10 y 11	11
11	11 y 12	11 y 12	11 y 12	11 y 12	12

Por otro lado, en la respuesta del estudiante E3 se evidencia un acontecimiento que sirve además a modo de conclusión, como sugerencia para mejorar la secuencia, pues a pesar de realizarse la aclaración de que hacen falta fichas en la imagen, toma en consideración solo las fichas presentes en la imagen para dar su respuesta, por lo que deja ver que la descripción que realiza está basada en las 11 fichas que se encuentran en la imagen.

Figura 17. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación 1.

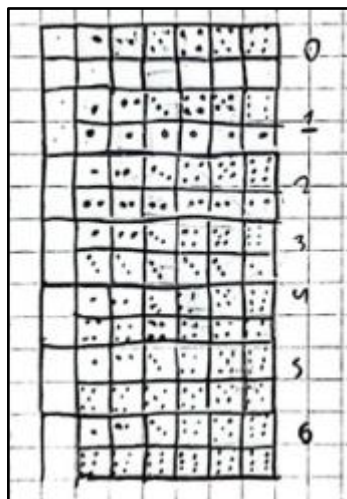


Punto 2

En este punto se busca que el estudiante continúe con la adquisición de información que ha venido desarrollando desde el punto anterior. Pues de acuerdo con esa respuesta, debe completar este punto. Es así, como con la respuesta de E1 en el punto 1 y punto 2, se evidencia que no toma en consideración las fichas que se repiten, sin embargo, en este punto refleja que no hay una concordancia en sus respuestas, debido a que en el punto anterior con su argumento el total de fichas es de 49 y en este punto, si toma en consideración algunas de las fichas que se repiten. Por ejemplo, en las fichas relacionadas con el 1, ya no aparece de

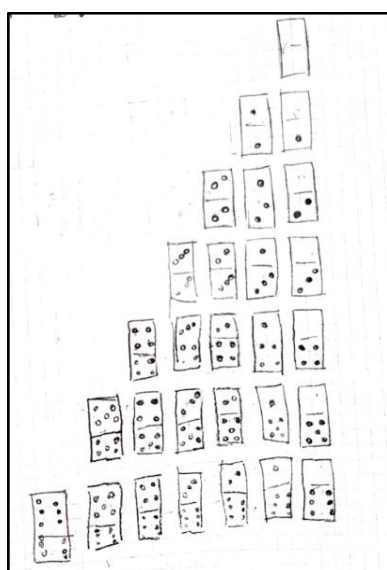
nuevo el 1 junto al 0.

Figura 18. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación 1.



Aunque en la respuesta al punto anterior E3 no presenta un argumento tan sólido, pues solo toma en consideración las fichas presentes en la imagen 1 de la secuencia, en este punto 2 pone en evidencia que tiene un acercamiento a la comprensión de orden. E3 realiza el dibujo tomando en cuenta que hay fichas que se repiten, lo cual se ve reflejado en el esquema que presenta la imagen a seguir.

Figura 19. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 1, situación 1.

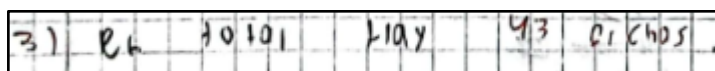


Punto 3

En el último punto de esta tarea, los estudiantes solo deben tomar sus respuestas

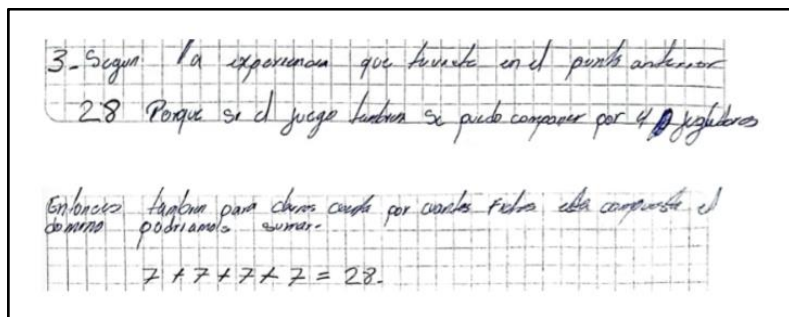
anteriores para dar solución a este punto. En un primer momento, E1 deja en evidencia que sigue el dibujo realizado en el punto 2, pues según este el total de fichas es de 43, sin embargo, como se mencionó anteriormente, según el argumento de la respuesta al punto 1 el total de fichas en un inicio era de 49, aunque él no lo explicita en su respuesta.

Figura 20. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 1, situación 1.



Ahora bien, teniendo en cuenta la respuesta de E2 en este punto, hay un detalle que se deja ver en su respuesta. A pesar de que este estudiante realizó en el punto 2 el dibujo de manera correcta, no lo usó como único argumento para la solución de este punto. E3 toma en consideración un comentario que se realizó en clase, donde se menciona que el dominó es un juego donde máximo pueden participar 4 jugadores, lo cual lo llevó a deducir que, si el dominó tiene 28 fichas, esto es debido a que cada jugador posee la misma cantidad de fichas, y al sumarse el resultado debe darle las 28 fichas.

Figura 21. Respuesta de E2 al punto 3 de la tarea 1, situación 1.



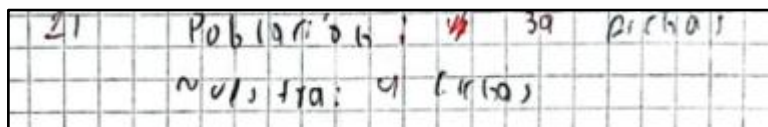
Tarea 2

Punto 1

La singularidad de este punto es que además de trabajar con nociones ya conocidas anteriormente como lo son población y muestra, la respuesta presentada por los estudiantes en este punto va a estar estrechamente relacionada a las proporcionadas por ellos previamente a la hora de definir el total de fichas que componen el juego de dominó.

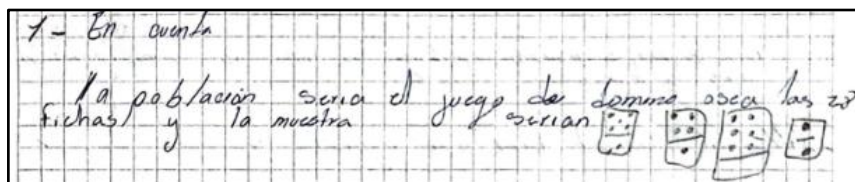
Es necesario aclarar que no se tomará en consideración la respuesta proporcionada por E3 ya que se presentó incompleta, y por ende no es posible realizar su respectivo análisis.

Figura 22. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 2, situación 1.



Por otro lado, como se puede observar en la figura 22 y 23, E1 y E2 son capaces de articular correctamente el concepto de muestra, el cual se vino construyendo en tareas previas. Así mismo se observa que E2 al poder comprender correctamente el número total de fichas que posee el juego de dominó, fue capaz de inferir en este caso, cuál sería la población. Contrariamente E1 no solamente se equivocó al precisar el número total de fichas que posee el juego, si no también, la respuesta presentada en este apartado no es idéntica a la presentada en la tarea anterior. Por tal motivo la respuesta es incorrecta.

Figura 23. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 2, situación 1.



Punto 2

Para finalizar la situación 1 y a su vez el momento de acción se tiene como último punto emplear la noción de orden teniendo en cuenta el juego de dominó. Con tal efecto, E1 y E2 y E3 manifiestan que las fichas serían las mismas, lo único que cambia sería la posición en la que están ubicadas, por tal motivo ellos infieren que se está trabajando con la misma ficha.

Figura 24. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 2, situación 1.

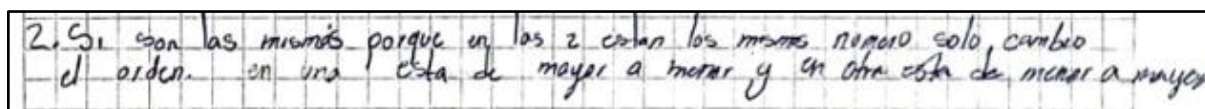
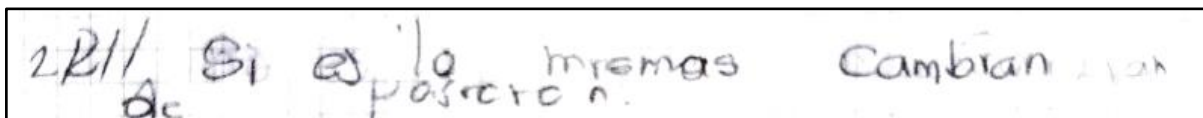


Figura 25. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 2, situación 1.



Al finalizar estas dos primeras situaciones se da por terminado el momento de acción según la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Este momento busca que los estudiantes puedan trabajar individualmente con los problemas presentados y así darles solución únicamente con sus conocimientos previos o implícitos.

Los conceptos matemáticos movilizados en estas dos situaciones son el de orden, la población y la muestra. Al emplear únicamente los conocimientos previos de los estudiantes y las concepciones que ellos tienen en diversas áreas, en un inicio se vuelve complejo el separar ese tipo de razonamiento basado en creencia con uno más hipotético-deductivo. Por tanto, a lo largo de las situaciones se reflejó un avance progresivo en E1 y E2 y E3 para comprender los conceptos matemáticos centrales de este momento, teniendo en cuenta los diversos contextos que se emplearon para trabajar estos únicos temas.

Momento de Formulación

Situación 2: El orden de la combinación.

En esta situación se presenta 1 tarea la cual posee 2 puntos.

Tarea 1

Punto 1

El propósito de este punto es organizar el número total de fichas que tiene el juego de dominó en uno o varios diagramas de árbol.

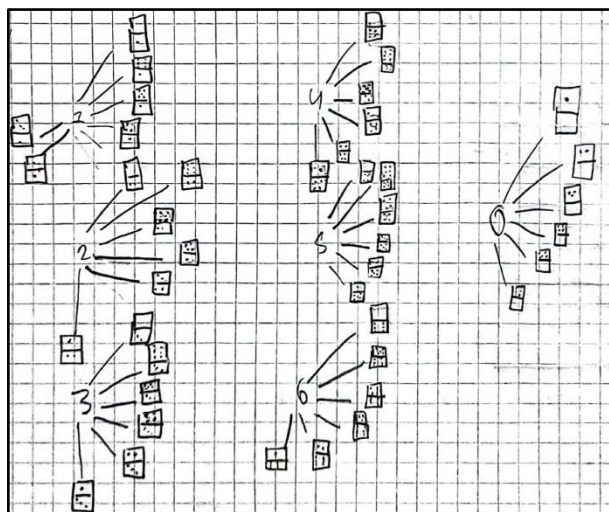
Como se puede evidenciar en la figura 26 y 28, E1 y E3 no distinguen la noción de orden. Por un lado, Navarro-Pelayo et al. (1996) aseguran que dicho error está relacionado cada vez que los estudiantes no son capaces de considerar cuando el orden es esencial en la

solución de un problema. en este caso, al tratarse de fichas de dominó, si se realiza un diagrama de árbol considerando todas las fichas que tienen en común en una cara de ellas el número 1, es indiscutible que al realizar los otros diagramas del árbol se omitan estas fichas debido a que ya se usaron, reflexionando que las fichas de dominó no se repiten si no que cambian de posición.

Siguiendo este orden de ideas aquellos errores relacionados al diagrama de árbol recaen en que “Algunos que dibujan diagramas les sobran o faltan ramas” (Roa, 2001, como se citó en Roldan et al., 2018).

En definitiva, los errores presentes en la construcción del diagrama de árbol tienen como origen las confusiones que poseen los estudiantes a la hora de definir el valor de orden de un objeto.

Figura 26. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación 2.



En cuanto a la respuesta suministrada por E2, aunque se logran observar ligeros errores en la construcción de los diagramas de árbol, en la figura 27 se refleja un mejor manejo relacionado a la noción de orden, en el cual el estudiante es capaz de concluir que la posición de cada ficha influye en su colocación en el diagrama del árbol.

Figura 27. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 1, situación 2.

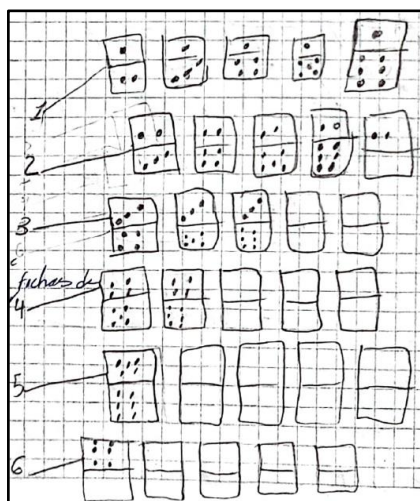
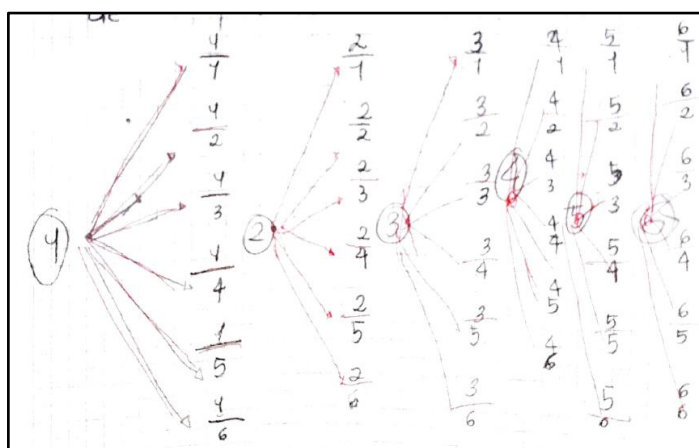


Figura 28. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación 2.



Punto 2

Este punto tiene cierta semejanza y relación con el punto 2, tarea 2 de la situación 1, donde se trabaja el orden en las fichas de dominó, que se refleja en la posición que estas tengan. Aquí se da uso de dos fichas y el elemento a analizar es el orden en la unión de las dos fichas.

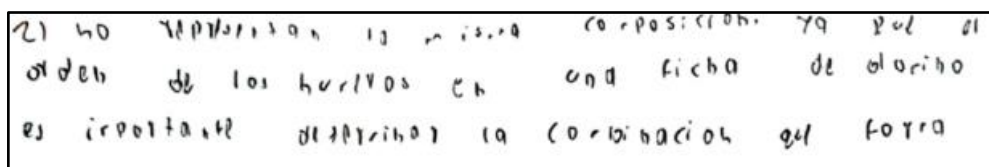
Teniendo en cuenta las respuestas en el punto 2, tarea 2 de la situación 1, E1 y E3, a pesar haber otorgado una respuesta correcta, mencionando que eran las mismas fichas y solo cambiaban de posición, en este punto no manejan el mismo argumento a pesar de tratarse de lo mismo, pues es la misma unión solo cambia de posición.

Esto permite decir que hay una confusión o retroceso en la comprensión del orden en

E1 y E3, donde no tuvieron en cuenta sus respuestas al ejercicio similar o no lograron ver que el primer ejercicio era una base para resolver este punto.

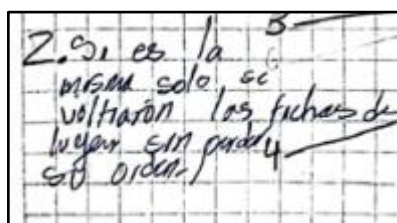
Por el contrario, la respuesta de E2 se mantiene, donde menciona que siguen siendo las mismas fichas para el caso del punto 2, tarea 2 de la situación 1 y la misma composición para el punto aquí trabajado. Esto pone en evidencia que el estudiante avanza en la comprensión del orden.

Figura 29. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación 2.



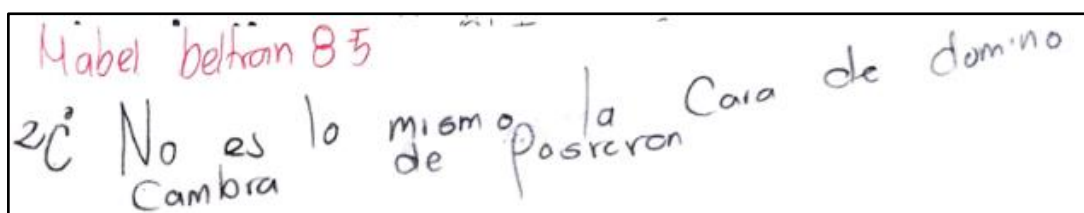
2) No repeticiones la misma composición ya por el orden de los huridos en una ficha de domino es importante distribuir la combinación del foto

Figura 30. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 1, situación 2.



2.º es la misma solo se voltaron las fichas de lugar sin perder su orden.

Figura 31. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 1, situación 2.



Mabel beltran 85
2º No es lo mismo la cara de domino de posaron Cambra

Al finalizar esta situación se da por terminado el momento de formulación según la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. Este momento tiene la intención de introducir un método distinto de conteo, como lo es el diagrama de árbol y continuar con el desarrollo del estudiante con respecto a su noción de orden.

Se debe puntualizar que en este momento los estudiantes fueron separados en grupos de máximo 5 integrantes para que pudiesen compartir sus ideas con respecto a las respuestas que ellos mismos establecen. Igualmente, para la organización de los grupos, E1, E2 y E3 no

estuvieron presentes en un mismo grupo. Por tanto, es notable que diversos estudiantes manifestaron errores similares como los presentados por Roldan et al. (2018) al momento de construir un diagrama de árbol.

En cuanto a la noción de orden, aunque E1 y E3 pudieron socializar la respuesta del punto 2, tarea 1 de la situación 2, con otros estudiantes, se vuelve notable la confusión que se genera en ellos ya que en este punto “consideran el orden de los elementos cuando es irrelevante” (Navarro-Pelayo et al., 1996, p.8)

Momento de Validación

Situación 3: Descubriendo las combinaciones.

En esta situación se presenta 1 tarea la cual posee 3 puntos.

Para el análisis de los siguientes puntos, se tiene en cuenta lo mencionado por Navarro-Pelayo et al. (1996), ya que su construcción y solución están orientados bajo los modelos de selección, colocación y partición, en los cuales se pueden evidenciar errores que presentan los estudiantes.

Se esclarece que al no presentarse hasta el momento la noción de operaciones combinatorias sino solamente los elementos que la componen, quedan en el criterio de cada estudiante la forma de resolver los siguientes puntos.

Tarea 1

Punto 1

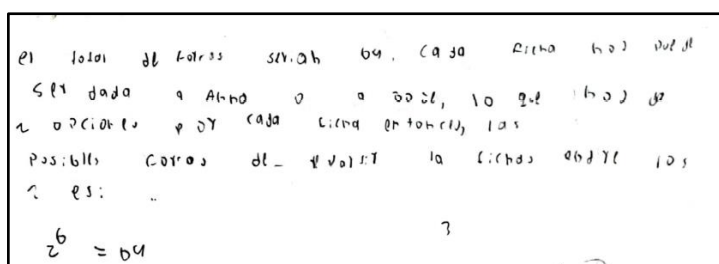
Partición

Como se puede observar en la figura 32, 33 y 34 cada uno de los estudiantes presentan diversas respuestas para una misma pregunta, sin embargo, el razonamiento que estos emplean para solucionarlo es incorrecto.

En la figura 32 se presenta la respuesta suministrada por E1, al no realizar una técnica

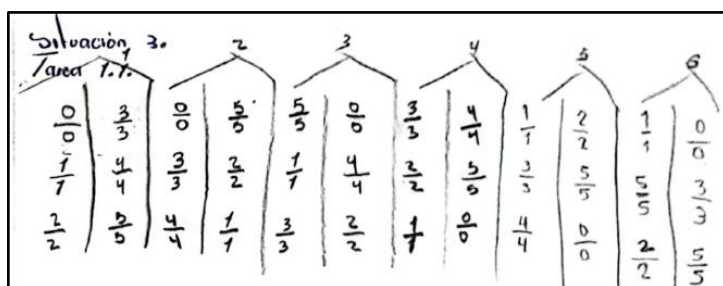
de conteo para hallar el espacio muestral del punto, E1 realiza una operación matemática considerando que el número total de veces que puede repartir 6 fichas entre 2 personas es elevado a la 6, de tal manera que se presenta un error común a la hora de trabajar en este tipo de actividades ya que E1 no recuerda el significado de los valores de los parámetros en la fórmula. Navarro-Pelayo et al. (1996) puesto a que en su razonamiento utiliza el 6 que es el total de elementos, pero no distingue que los subconjuntos que se van a formar van a estar establecidos a partir de 3 fichas ya que en el enunciado del punto se informa que cada uno de los participantes debe de quedar con la misma cantidad de fichas.

Figura 32. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 1, situación 3.



En la figura 33 se presenta la respuesta suministrada por E2 donde se evidencia un error en las particiones formadas. Como expresan Navarro-Pelayo et al. (1996), este tipo de error contiene dos distintos casos, el que aparece en esta respuesta hace referencia a que E2 olvido algunos tipos de posibles particiones ya que por esta técnica de conteo no se llegaron a representar todas las soluciones presentes en el espacio muestral.

Figura 33. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 1, situación 3.



En la figura 34 se expone la respuesta suministrada por E3. Dicha solución presenta similitudes con la manifestada por E1 en la figura 32, lo que difiere una de la otra es que

queda en evidencia que E3 realiza por medio de ensayo y error, posiblemente al no poder encontrar el espacio muestral por este método, se decidió utilizar una operación matemática para justificar su respuesta, en este caso, aunque se toma el número 6 el cual representa la totalidad de las fichas con las que se está trabajando, no se reconoce la importancia de la muestra en la solución de este punto, por tanto al igual que E1, E3 no recuerda el significado de los valores de los parámetros en la fórmula. Navarro-Pelayo et al. (1996).

Figura 34. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 1, situación 3.

Hay 36 formas de repartir por que 6×6

012	- 240
013	- 301
014	- 410
015	- 451
302	- 203
304	034
305	503
501	- 405
502	- 250
503	305
504	054
410	401
404	430
402	450
403	402
405	401

Punto 2

Colocación

Por medio de una representación gráfica E1 y E2 son capaces de encontrar el espacio muestral con el que se está trabajando en este punto, algo a tomar en consideración es lo presentado por E2 en la figura 36, donde además de definir que la respuesta son 4 formas distintas para guardar las 3 fichas de dominó, también afirma que hay un total de 12 formas para guardar individualmente las fichas en las cajas, aunque esta última información además de ser irrelevante para la solución del punto puede llegar a confundir al estudiante en el

aspecto de que no pueda distinguir qué información se le está solicitando.

Figura 35. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 1, situación 3.

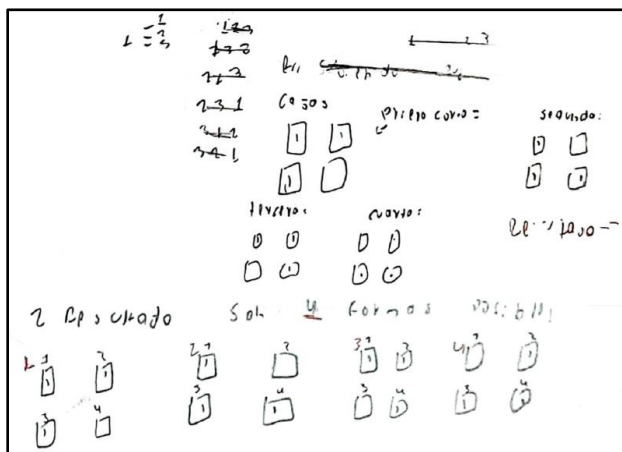
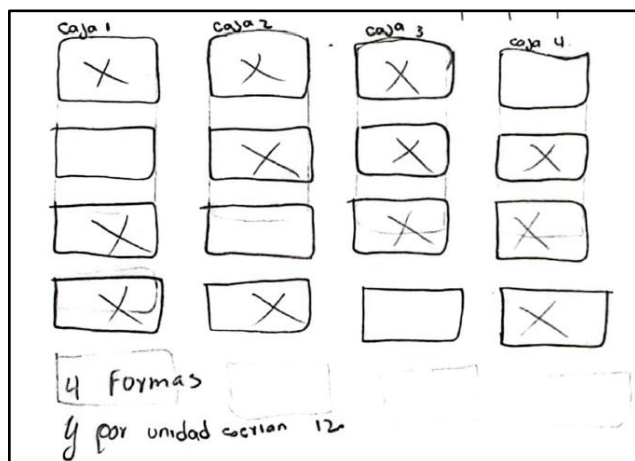
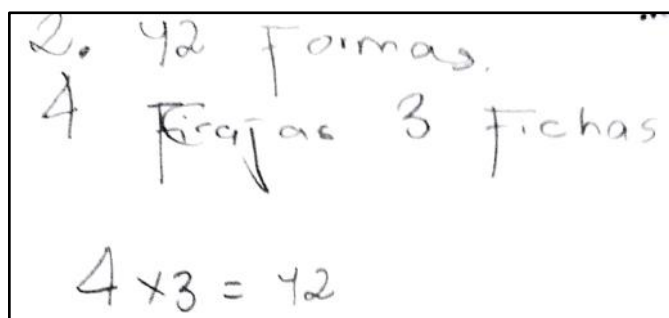


Figura 36. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 1, situación 3.



Del mismo modo que el punto anterior, En la figura 37, E3 ya no solamente omite presentar alguna técnica de conteo para dar solución al punto, si no también reitera un mal uso de operaciones matemáticas para llegar a una posible respuesta.

Figura 37. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 1, situación 3.



Punto 3

Selección

En la figura 38, E1 presenta un total de 16 combinaciones posibles, si bien a lo largo de la secuencia se han presentado puntos donde la noción central a trabajar es el de orden, en esta respuesta se muestra que para E1 las fichas como $4|2 - 6|2 - 6|4 - 8|2 - 8|4$ y $8|6$ son distintas a las fichas $2|4 - 2|6 - 4|6 - 2:8 - 4|8$ y $6|8$ por tal motivo no solamente se presenta un error de orden ya en este apartado el orden de los elementos es irrelevante para su realización, sino que también contradice su idea presentada en la respuesta que dio en el punto 2 de la tarea 2 situación 1, donde afirma que las fichas son las mismas ya que solo cambia la posición en la que están ubicadas.

Figura 38. Respuesta de E1 al punto 3 de la tarea 1, situación 3.

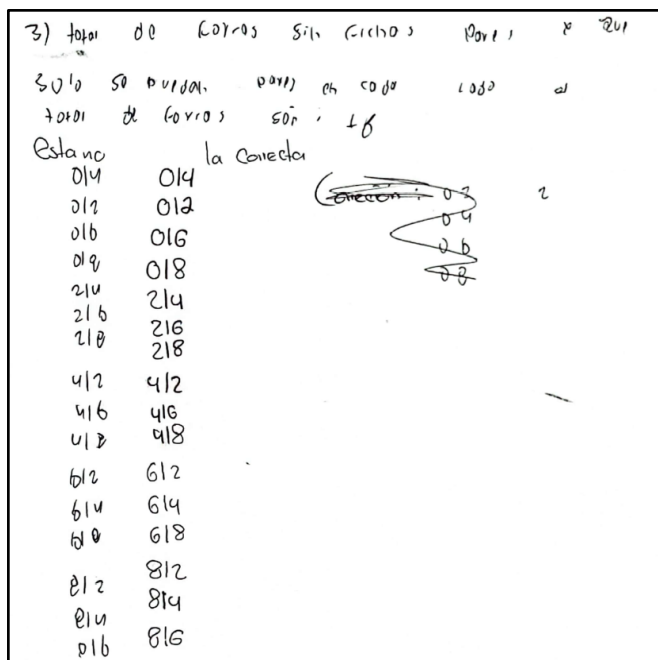
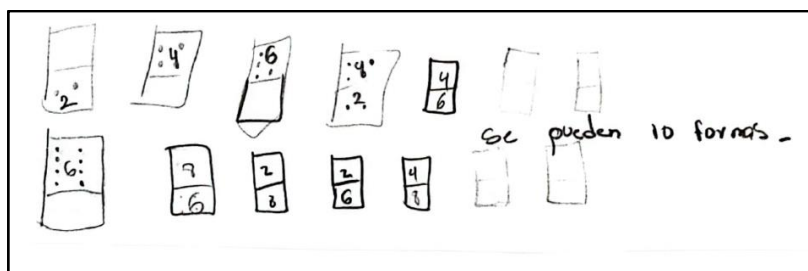


Figura 39. Respuesta de E2 al punto 3 de la tarea 1, situación 3.



Por otra parte, aunque E2 presenta un error al dibujar dos veces la misma ficha, queda

demostrado que E2 además de E3 presentan una buena apropiación a la noción de orden y no presentan errores relevantes a la solución del punto.

Figura 40. Respuesta de E3 al punto 3 de la tarea 1, situación 3.

Handwritten mathematical work showing fractions and a final count. The work is enclosed in a rectangular box. Above the box, the text "= 40 formas" is written. Inside the box, the following fractions are listed in a grid-like fashion:

$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{8}$
$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{8}$	
$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{8}$		
$\frac{6}{8}$			

Al finalizar esta situación se da por terminado el momento de validación según la teoría de situaciones didácticas de Brousseau. En este momento tiene como propósito que los estudiantes se reúnan en grupo para expresar sus ideas y concepciones sobre las nociones trabajadas, a su vez deben de llegar a un consenso sobre la respuesta correcta y posteriormente se presenta al resto del salón para plantear posibles discusiones al respecto.

En la tarea 1 del punto 1 de esta situación ninguno de los tres estudiantes seleccionados presentó la respuesta correcta por lo tanto a la hora de socializar el punto, un integrante de un grupo distinto le explico al salón y a E1, E2 y E3 cuál era la respuesta correcta.

De este mismo modo, en la tarea 2 del punto 1 algunos estudiantes del salón (Los cuales no fueron E1 y E2) le explicaron a E3 y al resto de su grupo el motivo por el cual la respuesta que habían presentado era incorrecta.

Para finalizar, como se puede observar en la figura 38, a la hora de socializar las respuestas de dicho punto, E1 y los integrantes de su grupo se percatan del error que cometieron al colocar una misma ficha dos veces en su conteo y comienzan a corregir dicho

punto.

Es imprescindible notar estas interacciones entre los estudiantes del salón con las soluciones de cada punto, ya que ellos al compartir sus respuestas y justificaciones manifiestan sus formas de razonar y por tanto cuando encuentran respuestas diferentes a las que presentan se abre un debate entre todos para poder entender cuál sería la solución correcta de los puntos.

Momento de Institucionalización

Situación 4: Combinación sin repetición y Triángulo de Pascal.

En esta situación se presentan 2 tareas, donde la tarea 1 posee 4 puntos y la tarea 2 trabaja con 2 puntos.

Retomando lo presentado en la tabla 3, es necesario rememorar que para la solución de las siguientes tareas se va a realizar un trabajo en conjunto con los estudiantes para retomar todas las nociones y elementos trabajados a lo largo de la implementación.

Tarea 1

Punto 1.a

Tomando en consideración lo trabajado a lo largo de la secuencia, se tiene que, aunque E1, E2 y E3 presentan correctamente la respuesta numérica sobre lo que representa la población y la muestra, la justificación que ellos exponen deja vacíos sobre a qué elementos hacen referencia.

En el caso de E1 como se muestra en la figura 41, no justifica el motivo por el cual la muestra es 9 y la justificación que le da a la muestra es insuficiente. En la figura 42 falta información a la explicación que presenta E2 cuando define la cantidad que posee la población y la muestra. Por último, E3 presenta una argumentación apropiada pero no presenta la respuesta numérica esperada.

Figura 41. Respuesta de E1 al punto 1.a de la tarea 1, situación 4.

1. a) la población $\frac{9}{10}$ la muestra $\frac{1}{10}$ (las fichas del 0-9)

Figura 42. Respuesta de E2 al punto 1.a de la tarea 1, situación 4.

1.a. La población sería toda la cantidad que hay 9 y la muestra serían las que fueron seleccionadas o sea 2

Figura 43. Respuesta de E3 al punto 1.a de la tarea 1, situación 4.

1.a. la muestra sería las fichas dobles
2 y la población serían las
fichas del 0-8.

Punto 1.b

El propósito de este punto era observar cómo los estudiantes comprenden el valor que posea la colocación de cada uno de los elementos. Como se puede visualizar en las figuras 44, 45 y 46, los tres estudiantes afirman que el orden en este caso no importaría ya que bastaría con desplazar la ficha en una dirección para obtener su recíproca y tener la cifra que se requiere.

Figura 44. Respuesta de E1 al punto 1.b de la tarea 1, situación 4.

b) no es tan importante porque si cito  si cito  no serviría de nada porque solo sirve volviendo

Figura 45. Respuesta de E2 al punto 1.b de la tarea 1, situación 4.

1.b. No es tan importante porque en si, de todos modos va a estar allí

Figura 46. Respuesta de E3 al punto 1.b de la tarea 1, situación 4.

b No es importante ya que al girar
la Ficha Cambia la cifra que
queremos.

Punto 1.c

A pesar de que la noción de repetición de elementos no fue abordada ni trabajada previamente en la secuencia y tomando en consideración el contexto de la tarea, donde explícitamente se informó que no se tendrá en consideración las fichas dobles, los tres estudiantes son capaces de inferir que no se presentaron fichas con cifras iguales en sus extremos.

Figura 47. Respuesta de E1 al punto 1.c de la tarea 1, situación 4.

c) Si, si algunos van a girar 6160 en Arbol todos
Por ejemplo:  , pero si habíamos de otro tipo de
igual sería  

Figura 48. Respuesta de E2 al punto 1.c de la tarea 1, situación 4.

1. c. No porque en el comunicado no fueron validas los dobles como para que hubieran
fichas con su misma cara.

Figura 49. Respuesta de E3 al punto 1.c de la tarea 1, situación 4.

c. No las fichas dobles no cuentan
al principio de la lectura decra
que no se contaba.

Punto 1.d

Antes de analizar las respuestas presentadas por cada uno de los estudiantes, es necesario aclarar que previo a la solución del problema, se presentó y explicó la fórmula de

Figura 51. Respuesta de E2 al punto 1.d de la tarea 1, situación 4.

Combinación.
orden: No importa
Elementos: Parte de los elementos -
0 1 2 3 4 5 6 7 8
M=9
N=2
 $C(m,n) = \frac{\text{Variación}}{\text{Permutación}} = \frac{n!}{n!(m-n)!}$
Respuesta = 362.880
 $2! \times 7! = 10.080 = 36$
2
5.040

Figura 52. Respuesta de E3 al punto 1.d de la tarea 1, situación 4.

m=9
n=2
 $\frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!}$
= 40080
= 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1
= 362.880
 $\frac{362.880}{2 \times 5040} = \frac{362.880}{10080} = 36$

Tarea 2

Punto 1

En este primer punto, se inicia con la presentación de dos formas para escribir las combinaciones sin repetición, una es la ya trabajada en la clase expositiva y la segunda es una nueva, para de esta manera presentar los números combinatorios. Teniendo en cuenta esto y lo presentado en la clase expositiva sobre las definiciones y fórmulas de los conceptos trabajados, se pretende que el estudiante haga uso de la fórmula de combinaciones sin repetición para resolver los ejercicios, es decir, que continúen el proceso que han iniciado en el punto anterior.

Como se evidencia en las respuestas de los estudiantes, estos logran realizar los

procedimientos de manera correcta. Cabe aclarar que en este ejercicio las investigadoras continúan realizando un acompañamiento a los estudiantes, debido a que la clase expositiva fue inmediatamente momentos antes y los estudiantes sólo han trabajado un ejercicio de este tipo en el punto anterior.

Figura 53. Respuesta de E1 al punto 1 de la tarea 2, situación 4.

Handwritten calculations for combinations of 4 items taken 1, 2, and 3 at a time:

$$C_1^4 = \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \cdot 1} = \frac{24}{6 \cdot 1} = \frac{24}{6} = 4$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{2 \cdot 2} = \frac{24}{4} = 6$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1! \cdot 3!} = \frac{24}{1 \times 2 \cdot 3} = \frac{24}{6} = 4$$

Below the main calculations, there is a smaller, partially obscured calculation:

$$C_4^4 = \frac{4!}{(4-4)! \cdot 4!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{0! \cdot 4!} = \frac{24}{1 \times 24} = 1$$

Figura 54. Respuesta de E2 al punto 1 de la tarea 2, situación 4.

$$a.c(4,0)$$

$$\frac{4}{0!(4)!} = \frac{24}{1 \times 24} = \frac{24}{24} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3!}{3! \times 1!} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{4}{4! \times 0!} = \frac{4}{4! \times 1} = 1$$

Figura 55. Respuesta de E3 al punto 1 de la tarea 2, situación 4.

$$y C(4,0) =$$

$$m=4$$

$$n=0$$

$$\frac{4!}{0!(4-0)!}$$

$$\frac{4}{0!(4)!}$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{0!4!} = \frac{24}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{24}{24} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3!1!} = \frac{24}{3! \times 1!} = \frac{24}{3 \times 2 \times 1 \times 1} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!2!} = \frac{24}{2!2!} = \frac{24}{2 \times 2} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1!3!} = \frac{24}{1!3!} = \frac{24}{1 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{24}{6} = 4$$

Punto 2

En este segundo punto, nuevamente los estudiantes deben dar soluciones del tipo presentado en el punto anterior. Sin embargo, es en este momento donde se empieza a

introducir la relación entre los números combinatorios y el Triángulo de Pascal (Binomio de Newton).

Todos los estudiantes, es decir, E1, E2 y E3 logran resolver las combinaciones de manera correcta, solo E2 muestra evidencia del procedimiento que realiza para llegar a la respuesta, sin embargo, se entiende que los demás estudiantes puedan no mostrar un procedimiento, ya que, las investigadoras explican cómo realizarlo en calculadora, por lo que esta puede ser una razón para no realizarlo.

En cuanto al segundo ejercicio presente en este punto, de establecer una relación entre los resultados de las combinaciones con el triángulo de pascal, se evidencia que los tres estudiantes logran ver que los resultados corresponden a una de las filas del triángulo, sin embargo, E1 y E3 lo realizan de manera correcta, ya que mencionan se encuentra en la fila 3 partiendo desde la fila 0, contrario a E2 que inicia el conteo de filas a partir de 1.

Así mismo, los estudiantes E2 y E3, presentan el Triángulo de Pascal con los números combinatorios, aunque E2 nuevamente no tiene en cuenta la fila 0, las demás filas las realiza de manera correcta. Esto permite evidenciar que los estudiantes logran establecer una relación a partir de los resultados de las combinaciones y el Triángulo de Pascal.

Figura 56. Respuesta de E1 al punto 2 de la tarea 2, situación 4.

Handwritten student work for Figure 56, showing calculations of binomial coefficients and a representation of Pascal's Triangle.

Calculations shown:

$$\binom{3}{0} = 1$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} = 3$$

$$\binom{3}{3} = 1$$

Text annotations in Spanish:

- La relación que tienen que el resultado que son los mismos números que aparecen en la fila del Pascal.

Pascal's Triangle representation (rows 0 to 3):

```

      1
     1 2
    1 3 3 1
   1 4 6 4 1
  
```

The row containing 1, 3, 3, 1 is circled, corresponding to the calculated values.

Figura 57. Respuesta de E2 al punto 2 de la tarea 2, situación 4.

Handwritten mathematical work by student E2. The top part shows four calculations of combinations using factorials and a horizontal line as a separator:

$$\binom{3}{0} \frac{3!}{(3-0)!0!} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3!0!} = 1$$

$$\binom{3}{1} \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2!1!} = 3$$

$$\binom{3}{2} \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1!2!} = 3$$

$$\binom{3}{3} \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{3!}{0!3!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{0!3!} = 1$$

Below these calculations, the student lists the results of combinations for 4 elements, aligned with the 4th row of Pascal's triangle:

4
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

los resultados de las combina-
torias son en
alineacion con la
4 fila del
triangulo de
Pascal.

At the bottom, the student draws Pascal's triangle up to row 6, with each entry written as a combination:

$$\begin{array}{c} \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{0}{0} \end{array}$$

Figura 58. Respuesta de E3 al punto 2 de la tarea 2, situación 4.

Handwritten mathematical work by student E3 on grid paper. The top part shows four calculations of combinations using factorials and a horizontal line as a separator:

$$\binom{3}{0} \frac{3!}{(3-0)!0!} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3!0!} = 1$$

$$\binom{3}{1} \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2!1!} = 3$$

$$\binom{3}{2} \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1!2!} = 3$$

$$\binom{3}{3} \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{3!}{0!3!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{0!3!} = 1$$

Below these calculations, the student lists the results of combinations for 4 elements, aligned with the 4th row of Pascal's triangle:

4
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Con los numeros del ↑ de Pascal

At the bottom, the student draws Pascal's triangle up to row 6, with each entry written as a combination:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \end{array}$$

Igualmente, teniendo en cuenta las evidencias, hay un aspecto clave por destacar que así como E2, varios estudiantes al momento de escribir los números combinatorios lo realizan con una línea intermedia como si se tratara de una división.

Al finalizar esta situación, además de concluir la implementación de la secuencia, también se cierra con el último momento presentado por Brousseau en su teoría de situaciones didácticas, el cual es el momento de institucionalización. Este momento tiene la intención de formalizar y generalizar todas las nociones trabajadas a lo largo de la secuencia, los cuales son: técnicas de conteo (diagrama de árbol), la noción de orden, la población, la muestra y las operaciones combinatorias (variación, permutación y combinación sin repetición).

Como se esclarece anteriormente, en esta situación se presentó un espacio para que los investigadores desarrollaran una clase expositiva donde la formalización y generalización de las nociones trabajadas, se construye a partir de las observaciones y respuesta que dan los estudiantes.

En consecuencia, ellos al estar presentes en la construcción de sus nuevos saberes, a la hora de darle solución a los puntos presentes en esta situación, por parte de ellos no se manifestó ningún error como los descritos por Navarro-Pelayo et al. (1996) a la hora de trabajar con las operaciones combinatorias.

Capítulo V: Conclusiones

En este apartado se presentan las conclusiones de la investigación, las cuales abordan la pregunta problema planteada al inicio, así como los objetivos específicos establecidos. Estas conclusiones se fundamentan en el análisis de los resultados desarrollados en el apartado anterior.

En relación con el primer objetivo específico, el diseño de la secuencia se basó en la propuesta de trabajo presentada por Parra & Paucar (2019), donde utilizan el juego de dominó para abordar algunas nociones de la combinatoria. En este trabajo, se amplió esta idea con el objetivo de evidenciar el razonamiento de los estudiantes al trabajar con algunas

nociones presentes en estadística, tales como el diagrama de árbol, la población, la muestra, el orden, la no repetición de elementos y la fórmula de combinación sin repetición.

Aunque se esperaba trabajar la relación presente entre la combinación sin repetición y el Binomio de Newton, debido a limitaciones de tiempo para realizar el diseño y la implementación de la secuencia, solo se pudo presentar la relación entre los coeficientes binomiales y el Triángulo de Pascal. Además, una de las barreras que se tuvieron al realizar esta última parte de la secuencia es aquella donde se hace la transición y relación entre la construcción de los coeficientes binomiales y el Triángulo de Pascal, ya que, no se encontró viable realizar una actividad usando el juego de dominó para vincular ambos conceptos. Esto contrasta con el trabajo presentado por Rodríguez (2021) donde presenta una misma actividad para realizar esa transición de manera fluida.

Por lo tanto, se recomienda analizar el juego de dominó y sus reglas para poder descubrir si es posible presentar de manera más natural la construcción de los coeficientes binomiales por medio de este.

Con respecto al segundo objetivo específico, los estudios de Navarro-Pelayo et al. (1996) permitieron evidenciar desde el comienzo de la secuencia diversos errores presentes en los estudiantes al momento de manejar operaciones combinatorias. Uno de los errores más comunes fue el error de orden, el cual fue superado por los estudiantes, ya que se pudo demostrar el progreso que ellos tenían cuando identificaban el papel que este jugaba a lo largo de los diversos puntos. Por el contrario, al presentar únicamente un punto para trabajar la noción de conteo mediante diagramas de árbol, no se pudo fortalecer la interpretación que se debía de dar a dicho concepto, lo cual dificultó que algunos estudiantes comprendieran su uso correctamente.

Por tal motivo, se recomienda profundizar en el trabajo de Lopes & Rezende (2010), debido a que es necesario darle un papel más importante al diagrama de árbol como técnica de conteo en este trabajo.

En cuanto al tercer objetivo específico y por ende a la respuesta de la pregunta problema, la cual fue el eje central para la realización de esa investigación, se puede concluir que los estudiantes además de conocer y entender diversas nociones presentes en la estadística lograron un desarrollo significativo en el razonamiento combinatorio. Al inicio de la secuencia, los estudiantes mostraron un razonamiento basado en más sus creencias y experiencias previas que en el uso de la lógica y el razonamiento deductivo.

En definitiva, esta investigación no solo proporciona una alternativa para el trabajo del razonamiento combinatorio, sino que también resalta la importancia de establecer conexiones entre conceptos matemáticos que se encuentran en tipos distintos de pensamiento, para este caso, el pensamiento estocástico y el pensamiento variacional. Lo cual, al tener la doble perspectiva según el enfoque de cada pensamiento, ofrece a los estudiantes una comprensión más completa y significativa de las herramientas matemáticas que utilizan, lo que les permite no solo resolver los problemas que se les plantean en específico, sino también llevar los conocimientos adquiridos a otros contextos.

Además, el hecho de trabajar con el juego de dominó, aunque no se jugara como tal, favoreció el desarrollo de las actividades y así mismo las habilidades cognitivas de los estudiantes. Incluso, el uso del juego como herramienta pedagógica, permitió una enseñanza más dinámica y atractiva, donde los estudiantes interactuaban con las fichas y se involucraban más en el estudio de los conceptos presentados.

Referencias

- Bailera, A. A. & Sáez-Benito, D. M. V. (2021). *Enseñanza de herramientas de combinatoria a través de actividades basadas en el ajedrez en Educación Primaria. Un estudio de caso. Revista Electrónica de Investigación y Docencia Creativa.*
<https://doi.org/10.30827/digibug.66303>
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J.D & V. Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Bonilla, D. & Rueda, M. (2011). *Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios. En XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.*
- Camargo, L. (2019). *Estrategias cualitativas de investigación en Educación Matemática.*
<https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/1061/568>
- Cohecha, C.H. (2014). *Teorema del Binomio y Aplicaciones*. Universidad Nacional de Colombia.
- Kapur, J. N. (1970). *Combinatorial analysis and school mathematics*. Educational Studies in Mathematics Education, 3(1), 111-127
- Lopes, J. & Rezende, J. (2010). *Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade*. Bolema: Boletim de Educação Matemática. 23.

- Maher, Carolyn & Powell, Arthur & Uptegrove, Elizabeth. (2011). Combinatorics and reasoning. Representing, justifying and building isomorphisms. 10.1007/978-94-007-0615-6.
- Maldonado, E. S. & Rivera, M. I. (2012). *Elementos de combinatoria en la educación primaria - Funes*. Funes. <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/elementos-de-la-combinatoria-en-la-educacion-primaria/>
- Martínez, V. y Mayorquín, M. (2022). *Las operaciones combinatorias elementales en los libros de texto “Vamos a aprender matemáticas de 8° y 9°” del Ministerio de Educación Nacional*. Universidad del Valle.
- Melgosa de Arce, I. (2020). CombiMix 2020: mejora del aprendizaje de la combinatoria en secundaria. Ice.
- Ministerio de Educación nacional [MEN] – Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*.
- Ministerio de Educación nacional [MEN] – Colombia. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*.
- Morales, J. A., & Frisancho, S. (2014). *Operaciones combinatorias en estudiantes universitarios de ciclo inicial*. Schème, 5(2), 130-156. <https://doi.org/10.36311/1984-1655.2013.v5n2.p130-156>
- Navarro-Pelayo, V., Bataner, C., & Godino, J. (1996). *RAZONAMIENTO COMBINATORIO EN ALUMNOS DE SECUNDARIA*. 8(1), 26–39.
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf>

- Panizza, M. (2003). Conceptos básicos de la teoría de situaciones didácticas. En M. Panizza, *Enseñar matemática en el nivel inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y propuestas*. Buenos Aires: Paidós.
- Parra Mora, E. T., & Paucar Jara, P. C. (2019). Manual de estrategias didácticas: estrategias, técnicas y juegos didácticos para el aprendizaje de combinatoria. En UCUENCA. <https://dspace.ucuenca.edu.ec/items/7e022ce8-6318-445e-9628-505b78ee70f6/full>
- Pessoa, C. A. D. S., & De Souza Rosa Borba, R. E. (2010). O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA ESCOLARIZAÇÃO BÁSICA. *Em Teia. Revista de Educação Matemática E Tecnológica Iberoamericana*, 1(1). <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/download/2182/1753>
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1980). *Psicología del niño*. Ediciones Morata.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A y Gómez, P. (2007). *Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación*. Universidad de Granada
- Roa, R., Batanero, C., Godino, J., & Jesús, M. (1997). *Estrategias en la Resolución de Problemas Combinatorios por Estudiantes con Preparación Matemática Avanzada*. 36, 433–446. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/combinatoria.pdf>
- Rodríguez, W (2021). *Elementos y argumentos compartidos entre la combinatoria y el álgebra a través de la resolución de problemas*. Universidad Antonio Nariño http://repositorio.uan.edu.co/bitstream/123456789/7969/2/2022_WillingtonRodriguez.pdf
- Roldan López de Hierro, AF., Batanero, C. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Épsilon*, 100, 49-63.

Ruiz Quiñonez, J. (2021). *Implementación de un juego de mesa para apoyar la enseñanza de elementos de combinatoria*. Universidad Nacional de Colombia.

Stake, R. E. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Vidal, R. (2016). *La Didáctica de las Matemáticas y la Teoría de Situaciones*.

<https://educra.cl/wp-content/uploads/2016/01/DOC-La-Didactica.pdf>

Villanueva Pedroza, E. (2015). *Análisis de las dificultades que presentan los estudiantes del grado quinto al resolver problemas de combinatoria simple en la Escuela Normal Superior De Ibagué y en el Colegio La Presentación Ibagué*. Ibagué: Universidad del Tolima, 2015.

Wilhelmi, M. (2004). *Combinatoria y probabilidad*. Universidad de Granada, GEEUG

Zapata, L., Quintero, S., Morales, S. (2010). *La Enseñanza de la Combinatoria Orientada Bajo la Teoría de Situaciones Didácticas*.

<https://core.ac.uk/download/pdf/12341608.pdf>

Anexos

Explorando conexiones matemáticas: la relación entre la combinación sin repetición y el binomio de Newton

Situación introductoria: Explorando la variación y la permutación

Propósito: Comprender las definiciones o conceptos sobre la variación y permutación.

En una institución educativa, el grado 8-3 tiene clases de educación física con el profesor Jorge todos los martes. Para cada clase el profesor tiene planeado que se juegue un deporte

diferente, para lo cual debe organizar el grupo que cuenta con 20 estudiantes, de acuerdo al deporte que se vaya a realizar. Teniendo en cuenta la información, responde las preguntas según lo que se requiera:

Tarea 1

Para la primera clase, el deporte que se va a practicar es el microfútbol, por lo que el profesor decide dividir al salón en 4 grupos de 5 personas cada uno. Para este deporte están las posiciones de: arquero, defensa, lateral derecho, lateral izquierdo y delantero. De esta manera se juega un partido de microfútbol entre dos grupos en la primera parte de la clase, y en la segunda se enfrentan los dos grupos restantes. Ahora bien, para formar los grupos, el profesor decide dividir a los estudiantes de manera aleatoria, a medida que los selecciona ocupan las posiciones de juego en el orden mencionado anteriormente. Teniendo en cuenta la información, responde:

1. Justifica si la afirmación presentada a continuación es correcta o incorrecta: “El orden en que el profesor selecciona el primer grupo de estudiantes importa”.
2. Teniendo en cuenta que el salón 8-3 está compuesto por 20 estudiantes, y deben de formar 4 grupos de 5 personas cada uno, indique y explique la clase de cantidad que son la muestra y la población.
3. A cada uno de los estudiantes se le asigna un peto el cual está demarcado desde el número 01 hasta el 20. Teniendo en cuenta la enumeración que poseen, menciona al menos 5 distintas elecciones que puede realizar el profesor para elegir el primer grupo de 5 estudiantes.

Tarea 2

Para la segunda clase el deporte a practicar es el atletismo, para ello el profesor explica que va a realizar una carrera de velocidad y va a dar una recompensa a los tres primeros

estudiantes que lleguen a la línea de meta. Dicha recompensa va a tener una correlación con respecto a quien llegue de primero, segundo y tercer lugar. Responde la siguiente pregunta:

1. Define y justifica cuál es la población y la muestra.

Finalizando la carrera, Laura, Juan y Camilo la lideran, de tal manera que, entre ellos se definirán los tres primeros lugares a recibir recompensa. Teniendo en cuenta esta información, responde:

2. Ilustre gráficamente de cuántas maneras se pueden organizar los 3 estudiantes en cada una de las posiciones de llegada.
3. El profesor Jorge decide premiar al estudiante que llegó en primer lugar con un helado de dos bolas servido en un vaso, los sabores a elegir están entre chocolate, vainilla y fresa. El vendedor muestra las siguientes opciones para el vaso: Vainilla-fresa; Fresa-Vainilla, Vainilla-Chocolate; Chocolate-Vainilla; Fresa-Chocolate; Chocolate-Fresa. ¿Son correctas estas opciones?

Teniendo en cuenta lo anterior, recuerde:

- Las variación se define como las distintas formas de ordenar **una parte** del total de los elementos en un orden determinado.
Esta se clasifica en variación sin repetición y con repetición.
- Las permutación se define como las distintas formas de ordenar **todos** los elementos en un orden determinado.

Esta se clasifica en permutaciones sin repetición, con repetición y circulares.

Situación 1: Reconociendo el dominó

Propósito: Reconocer las características de las fichas del juego de dominó.

Tarea 1

Exploremos el juego dominó y cómo se compone este.

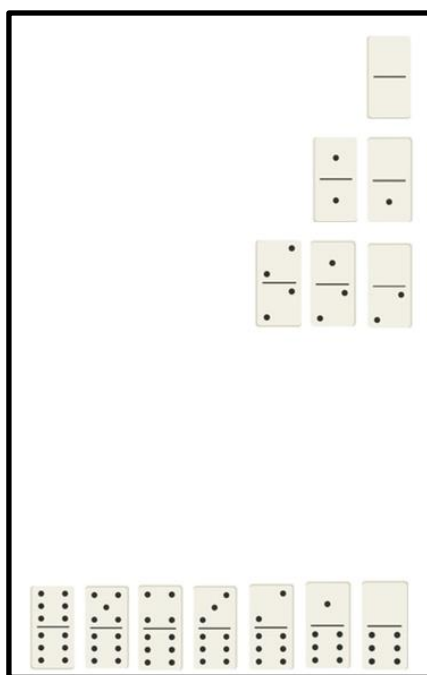


Imagen 1

Teniendo en cuenta la imagen, responde los siguientes puntos:

1. Describe cómo se encuentran organizadas las fichas del dominó, teniendo en cuenta la ubicación de los puntos.
2. Teniendo en cuenta la respuesta a la anterior pregunta, realiza un dibujo que represente las fichas faltantes de la *Imagen 1*.
3. Según la experiencia que tuviste en el punto anterior ¿Cuántas fichas tiene el juego en total?

Tarea 2

Tomando en consideración las respuestas presentadas en la tarea anterior que están relacionadas con la caracterización del juego dominó, responde los siguientes interrogantes:

1. En una ronda de dominó, al repartirse las fichas, a un jugador le corresponden las siguientes 4 fichas:



Identifica y menciona cuál sería la población y la muestra en esta situación.

2. Al observar la siguiente imagen, si tienes en cuenta lo que representan los puntos, el orden y posición en que están las fichas, indica si son las mismas o no y ¿por qué?

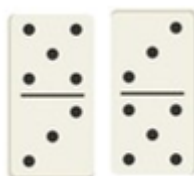


Imagen 2

Situación 2: El orden de la combinación.

Propósito: Aplicar e interpretar representaciones icónicas y no icónicas para reconocer el papel que juega el orden en diferentes situaciones.

Tarea 1

Para el siguiente punto es necesario aclarar que se retiran las siete fichas dobles que presenta el juego dominó, lo que deja un total de 21 fichas con las cuales se trabajará.

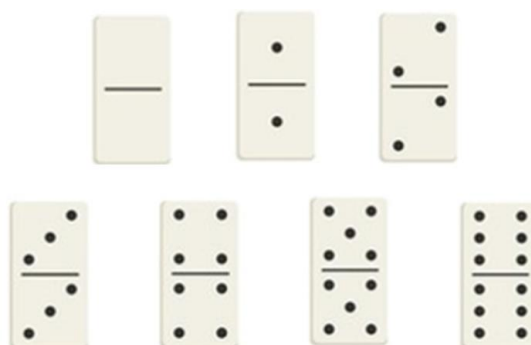


Imagen 3. Fichas dobles del dominó

1. Ilustre de forma numérica, el esquema de organización de las fichas presentado en la imagen 1, tomando como ayuda el dibujo que hiciste para completar las fichas faltantes. Ten en cuenta la siguiente imagen 4 como ejemplo para realizar los diagramas de árbol.

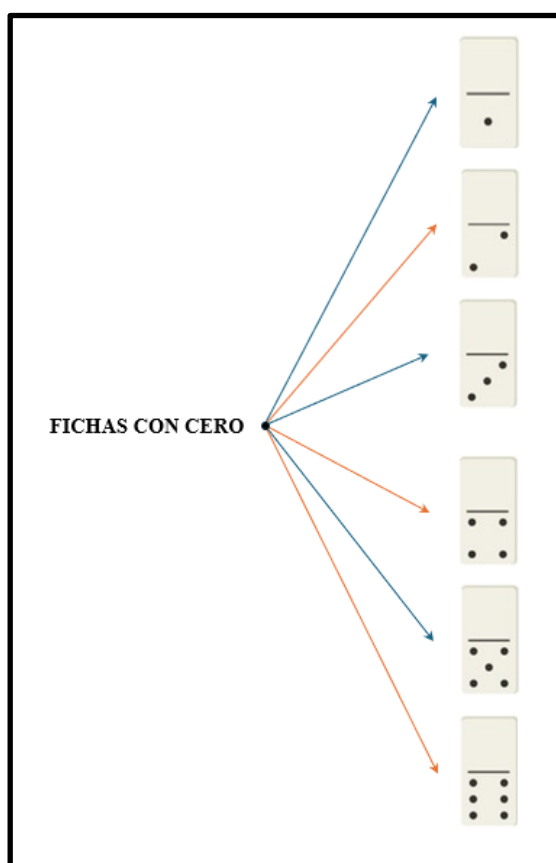


Imagen 4

2. ¿Las fichas  y  al unirse como se ilustran en las imágenes 5 y 6, representan o no la misma composición? Argumente su respuesta.



Imagen 5



Imagen 6

Situación 3: Descubriendo las combinaciones.

Propósito: Aproximarse y reconocer las características de la combinación sin repetición.

Tarea 1

1. Sobre la mesa de juego se encuentra un conjunto de fichas que han quedado, estas fichas son las denominadas “fichas dobles” (son aquellas que tienen el mismo número en ambos lados) excluyendo la siguiente ficha  ya que, con ella se debe dar inicio al juego. Anna y José, deciden repartirse las fichas dobles entre los dos. ¿De cuántas formas pueden repartirse las fichas dobles, de manera que cada uno quede con la misma cantidad de fichas?
2. Encima de la mesa, han quedado 3 fichas de dominó, las cuales se desean colocar en 4 cajitas que se encuentran numeradas del 1 al 4. En cada cajita solo se puede colocar una ficha. ¿De cuántas formas diferentes podemos colocar las 3 fichas en las 4 cajitas?
3. Recordemos que en el dominó están presentes las cifras del 0 al 6. Ahora bien, si trabajamos con un dominó que posea las cifras del 0 al 8, y si tomamos únicamente los números pares, incluyendo el 0 ¿Cuántas fichas diferentes se pueden formar si no se consideran las fichas dobles?

Situación 4: Combinación sin repetición y Triangulo Pascal.

Propósito: Formalizar los conceptos de variación, permutación y combinación sin repetición, además, descubrir la relación entre dicha combinación y el Triángulo de Pascal (Binomio de Newton)

Tarea 1

1. Retomando lo mencionado en uno de los ejercicios anteriores, si se trabaja con un dominó que posea las cifras del 0 al 8, y se desea saber cuántas fichas posee, sin tomar en consideración las fichas dobles, responde los siguientes interrogantes para conocer la cantidad de fichas del nuevo dominó:
 - a. En este caso, ¿cuál consideras sería la población y la muestra para formar las fichas del dominó?
 - b. ¿Es importante el orden en que se colocan las cifras al crear las fichas de dominó, o su disposición es irrelevante para el diseño de las piezas?
 - c. ¿Alguna de las fichas de las cuales se van a construir tendrán la misma cifra en ambos lados?
 - d. ¿Cuántas fichas diferentes obtendremos si trabajamos con un dominó que posea las cifras del 0 al 8?

Tipos de combinatoria sin repetición	Definición	Modelo matemático
Variación sin repetición	Es cuando seleccionamos un subconjunto de elementos en un orden específico	$V(m, n) = \frac{m!}{(m - n)!}$
Permutación sin repetición	Es la forma de ordenar un conjunto de n elementos	$P(n) = n!$
Combinación sin repetición	Solo va a ser de nuestro interés el subconjunto de elementos seleccionados, sin importar el orden en que se seleccionaron. Por eso, se toman las variaciones sin repetición (donde el orden importa) y lo dividimos entre las permutación de esos elementos (que cuentan los diferentes órdenes de los mismos elementos) para eliminar la importancia del	$C(m, n) = \frac{V(m, n)}{P(n)}$ $C(m, n) = \frac{\frac{m!}{(m - n)!}}{n!}$ $C(m, n) = \frac{m!}{n!(m - n)!}$

	orden.	
--	--------	--

Tarea 2:

1. Resuelva los siguientes ejercicios considerando lo trabajado anteriormente:

$C(m, n) = \binom{m}{n}$	$C(m, n) = \frac{m!}{n! (m - n)!}$
--------------------------	------------------------------------

- $C(4,0)$
- $C(4,1)$
- $C(4,2)$
- $C(4,3)$
- $C(4,4)$

2. Resuelva los siguientes ejercicios

- $C(3,0)$
- $C(3,1)$
- $C(3,2)$
- $C(3,3)$

Y establezca una relación entre los resultados que obtuviste con la siguiente imagen
(triángulo de Pascal)

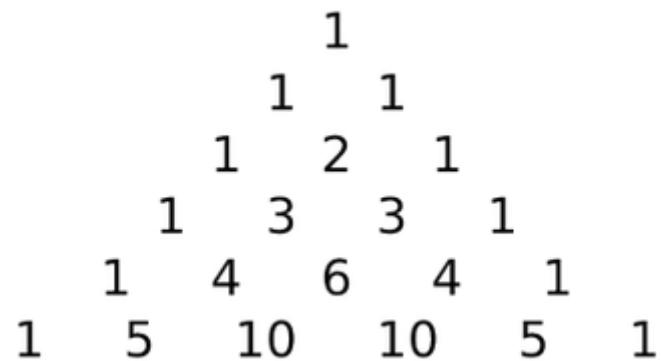


Imagen 7

3. Transformar la fila número 6 del triángulo de Pascal a números combinatorios.
4. Completa el triángulo de Pascal por medio de los números combinatorios hasta la fila número 8.