

Existencia, unicidad y H^2 -regularidad interior de un problema semilineal

Jairo Duque Robles
Universidad del Valle

Gerardo Loaiza Motato
Universidad del Cauca

Recibido Ene. 25, 2010

Aceptado Sep. 09, 2010

Abstract

In this paper we prove the existence and uniqueness of the weak solution of the problem:

$$-\sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + F(x, u(x)) = f(x) \quad (\text{P})$$

defined in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ with smooth boundary and $f \in L^2(\Omega)$. In our problem we assume a Dirichlet boundary condition. With appropriated hypotheses on the nonlinear term F and the linear operator we prove the existence of a unique $u \in H_0^1(\Omega)$ that satisfies the weak formulation of (P). The proof is based on nonlinear Lax–Milgram’s theorem. Finally we can prove, under additional hypotheses, that the weak solution is locally H^2 .

Keywords: Ellipticity, Lipschitz function, strongly monotone operator, weak solution.

MSC(2000): 35B65, 35D05

Resumen

En este trabajo se demuestra un resultado de existencia y unicidad de la solución débil del problema

$$-\sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + F(x, u(x)) = f(x) \quad (\text{P})$$

definido en un conjunto Ω abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$, con frontera suave, con $f \in L^2(\Omega)$ y condición de frontera tipo Dirichlet. Bajo hipótesis apropiadas sobre el término no lineal F y el operador lineal se demuestra la existencia de un único $u \in H_0^1(\Omega)$ que es solución débil de (P). La demostración está basada en el Teorema de Lax–Milgram no lineal. Finalmente se demuestra, bajo hipótesis adicionales, que la solución débil es localmente H^2 .

Palabras y frases claves: Elipticidad, función Lipschitz, operador fuertemente monótono, solución débil.

1 Introducción

En este artículo presentamos una aplicación de la teoría de operadores monótonos en Ecuaciones Diferenciales Parciales. Nuestro trabajo consiste justamente en demostrar la existencia y unicidad de la solución débil de

$$-\sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + F(x, u(x)) = f(x) \quad (\text{P})$$

con hipótesis apropiadas sobre el operador lineal y el término no lineal F ; esto se probará en el Teorema 2. Finalmente, en el Teorema 3 se establecen condiciones para que la solución débil de (P) tenga cierto grado de regularidad local.

Es importante notar que para lograr regularidad local del tipo H^2 fue necesario exigir adicionalmente que la matriz A sea continuamente diferenciable y que el término no lineal F , que en principio era bastante general, sea además de cuadrado integrable.

2 Formulación débil

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto acotado con frontera suave. Dadas $f \in L^2(\Omega)$ y $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, con $A(x) = (a_{ij}(x))$, el problema es encontrar una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaga la ecuación $a(u, v) = (f, v)$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Donde $a(\cdot, \cdot)$ y $(\cdot, \cdot)$ están definidas por:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \{ (A(x) \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) + F(x, u(x))v(x) \} dx, \quad (1)$$

y además,

$$(f, v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx.$$

Aquí $(\cdot, \cdot)$ es el producto escalar en $L^2(\Omega)$. Las hipótesis que se imponen sobre los operadores $A(\cdot)$ y $F(\cdot, \cdot)$ son las siguientes:

i) (**Elipticidad**): Existe una constante no negativa b tal que:

$$z^t A(x) z \geq b \|z\|^2,$$

para todo $x \in \Omega$ y $z \in \mathbb{R}^N$.

ii) (**Continuidad**): $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $F(x, \cdot)$ es Lipschitz para todo x fijo y $(F(x, s) - F(x, t))(s - t) \geq 0$ para todo $x \in \Omega$ y todo $s, t \in \mathbb{R}$.

Suponemos, además, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j = 1, \dots, N$.

Definición 1. Una función $u \in H_0^1(\Omega)$ que satisfaga $a(u, v) = (f, v) \forall v \in H_0^1(\Omega)$ será llamada una solución débil de (P).

3 Teorema de existencia y unicidad

Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ fijo. Probemos que $v \mapsto a(u, v)$ es lineal y acotado, y por tanto continuo. La linealidad es una consecuencia inmediata de la definición de $a(\cdot, \cdot)$.

De ahora en adelante C designará una constante que no es necesariamente la misma entre un renglón y el otro.

La continuidad de F sobre $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ implica en particular que la función $g(x) = F(x, 0)$ está acotada. Además, de las condiciones sobre F , se deduce el estimativo $|F(x, u(x))| \leq L|u(x)| + |F(x, 0)|$, donde L es la constante Lipschitz de F . Entonces

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |\{(A(x)\nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) + F(x, u(x))v(x)\} dx| \\ &\leq \int_{\Omega} \{\|A(x)\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\| + (L|u(x)| + |F(x, 0)|) |v(x)|\} dx \quad (2) \end{aligned}$$

Ahora,

$$\int_{\Omega} \|A(x)\nabla u(x)\| \|\nabla v(x)\| dx \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} L|u(x)| |v(x)| dx \leq C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} |F(x, 0)| |v(x)| dx \leq C \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad (5)$$

Reemplazamos ahora (3), (4) y (5) en (2) y recordamos que u es fijo. Estos estimativos nos permiten concluir que $|a(u, v)| \leq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. De aquí que $v \mapsto a(u, v)$ es acotada, y por tanto continua.

Haciendo uso del teorema de representación Riesz definamos el operador no lineal $\mathcal{A} : X \rightarrow X'$, con $X = H_0^1(\Omega)$ y $X' = H^{-1}(\Omega)$ por $\langle \mathcal{A}u, \cdot \rangle = a(u, \cdot)$.

Proposición 1. *El operador $\mathcal{A}$ es fuertemente monótono.*

Demostración. A partir de la fórmula (1) se tiene que

$$\begin{aligned} a(u, u - v) - a(v, u - v) &= \int_{\Omega} \left\{ \left(A(x)\nabla(u(x) - v(x)) \right) \cdot \nabla(u(x) - v(x)) + \right. \\ &\quad \left. (F(x, u(x)) - F(x, v(x)))(u(x) - v(x)) \right\} dx \geq \int_{\Omega} b \|\nabla(u(x) - v(x))\|^2 dx, \quad (6) \end{aligned}$$

y haciendo uso de la desigualdad de Poincaré hemos probado entonces que

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq c \|u(x) - v(x)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

O bien,

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v \rangle \geq c \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Por lo tanto $\mathcal{A}$ es un operador fuertemente monótono. □

Proposición 2. *El operador $\mathcal{A}$ es globalmente Lipschitz.*

Demostración. Debemos demostrar que existe una constante B tal que

$$\|\mathcal{A}v - \mathcal{A}w\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq B \|v - w\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Veamos,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v - \mathcal{A}w\|_{H^{-1}} &= \sup_{\|z\|_{1,2}=1} |\langle \mathcal{A}v - \mathcal{A}w, z \rangle| = \sup_{\|z\|_{1,2}=1} |\langle \mathcal{A}v, z \rangle - \langle \mathcal{A}w, z \rangle| \\ &= \sup_{\|z\|_{1,2}=1} \left| \int_{\Omega} \{A(x) \nabla(v - w) \cdot \nabla z + (F(x, v) - F(x, w))z\} dx \right|. \end{aligned}$$

Por la Proposición 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}v - \mathcal{A}w\|_{H^{-1}} &\leq \sup_{\|z\|_{1,2}=1} \left\{ \int_{\Omega} |A(x) \nabla(v - w) \cdot \nabla z| dx + L \|v - w\|_{L^2} \|z\|_{L^2} \right\} \\ &\leq \sup_{\|z\|_{1,2}=1} \{ \|A(x) \nabla(v - w)\|_{L^2} \|\nabla z\|_{L^2} + L \|v - w\|_{L^2} \|z\|_{L^2} \}, \end{aligned}$$

y por la desigualdad de Poincaré,

$$\|\mathcal{A}v - \mathcal{A}w\|_{H^{-1}} \leq B \|v - w\|_{1,2} \quad \text{donde} \quad B = \max\{\|a_{ij}(x)\|_{\infty}, L\}.$$

□

Antes de presentar nuestro teorema de existencia y unicidad, enunciaremos sin demostración el Teorema de Lax–Milgram no lineal. Detalles adicionales sobre este resultado se encuentran en la referencia ([4, Theo. 2.H]).

Teorema 1. *Sean $b : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal continuo sobre un espacio de Hilbert real X , $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que, para cada $w \in X$, $v \mapsto a(w, v)$ representa un funcional lineal continuo sobre X . Supongamos que existen constantes positivas L y c tal que, para todo $u, v, w \in X$,*

$$c \|u - v\|^2 \leq a(u, u - v) - a(v, u - v)$$

y

$$|a(u, w) - a(v, w)| \leq L \|u - v\| \|w\|.$$

Entonces el problema: Hallar $u \in X$ tal que para todo $v \in X$, $a(u, v) = b(v)$ tiene solución única.

Nuestro teorema de existencia y unicidad es entonces:

Teorema 2. *Para todo $f \in L^2(\Omega)$, la ecuación $a(u, v) = (f, v)$ tiene solución única, con $a(u, v)$ y (f, v) definidas en (1).*

Demostración. De las Propositiones 1 y 2 se sigue que el operador $\mathcal{A}$ es fuertemente monótono y globalmente Lipschitz. Por la inclusión de $L^2(\Omega)$ en $H^{-1}(\Omega)$ es posible aplicar ahora el Teorema de Lax–Milgram no lineal a la ecuación $a(u, v) = (f, v)$ y así obtener el resultado deseado. $\square$

4 H^2 -regularidad interior

A continuación probamos que, bajo condiciones adicionales en el término no lineal F y en los coeficientes a_{ij} , la solución débil hallada en el Teorema 2 está en $H^2_{loc}(\Omega)$.

Teorema 3. *Sea u la solución débil del problema (P). Si $F(\cdot, 0) \in L^2(\Omega)$ y $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ entonces $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ y para cada abierto $V \subset\subset \Omega$ se tiene el estimativo*

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|F(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (7)$$

donde la constante $C = C(V, \Omega, a_{ij})$ no depende de u .

Demostración. Para comenzar fijemos algún abierto $V \subset\subset \Omega$ y elijamos ahora un abierto W tal que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$. Seleccionamos ahora una función de prueba ζ la cual le imponremos la siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 & \text{en } V \\ \zeta \equiv 0 & \text{en } \mathbb{R}^N - W \\ 0 \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

Como u es solución débil de (P), entonces u satisface:

$$\sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx \quad (P) \quad (8)$$

donde $\tilde{f}(x) := f(x) - F(x, u(x))$.

Procediendo como en Evans [1, §5.8.2] definamos el k -ésimo cociente de diferencias de tamaño h

$$D_k^h u(x) := \frac{u(x + h e_k) - u(x)}{h}, \quad k = 1, \dots, N$$

para cada $x \in V$ y $h \in \mathbb{R}$ con $0 < |h| < \text{dist}(V, \partial\Omega)$. Además $D^h u := (D_1^h u, \dots, D_N^h u)$.

Para todo $k \in \{1, \dots, N\}$ sustituyamos

$$v := -D_k^{-h} \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \quad (9)$$

en (P). Sean

$$A := \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} v_{x_j} dx \quad \text{y} \quad B := \int_{\Omega} \tilde{f} v dx.$$

A partir de Evans [1, pp. 311-312] tenemos el siguiente estimativo:

$$|A| \geq \frac{b}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx - C \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx,$$

donde b es la constante de elipticidad.

Encontraremos ahora un estimativo para B .

Es claro que,

$$|B| \leq C \int_{\Omega} (|f| + |F(x, 0)| + |u|) |v| dx. \quad (10)$$

Puesto que $u \in H_0^1(\Omega)$ el Teorema 2 (i) de Evans [1, §5.8.2] implica que para cada $V \subset\subset \Omega$ con $0 < |h| < \frac{1}{2} \text{dist}(V, \partial\Omega)$ y v dado en (9) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v|^2 dx &\leq C \left(\int_{\Omega} \left\| \nabla \left(\zeta^2 D_k^h u \right) \right\|^2 dx \right) \\ &\leq C \int_{\Omega} \left(\left| D_k^h u \right|^2 + \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 \right) dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \left(\|\nabla u\|^2 + \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Aplicamos ahora la desigualdad de Cauchy con ϵ ([1, App. B.2]) en (10) y usando el estimativo (11) obtenemos,

$$|B| \leq \epsilon \int_{\Omega} \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \int_{\Omega} \left\{ f^2 + |F(x, 0)|^2 + u^2 + \|\nabla u\|^2 \right\} dx.$$

Sea $\epsilon = \frac{b}{4}$. Así que:

$$|B| \leq \frac{b}{4} \int_{\Omega} \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx + C \int_{\Omega} \left\{ f^2 + u^2 + |F(x, 0)|^2 + \|\nabla u\|^2 \right\} dx \quad (12)$$

De los estimativos obtenidos para $|B|$, $|A|$ y (8) se concluye que:

$$\begin{aligned} & \frac{b}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx - C \int_{\Omega} \left\| \nabla u \right\|^2 dx \\ & \leq \frac{b}{4} \int_{\Omega} \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx + C \int_{\Omega} \left\{ f^2 + u^2 + |F(x,0)|^2 + \left\| \nabla u \right\|^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

O bien, reorganizando términos:

$$\begin{aligned} \int_V \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx & \leq \int_{\Omega} \zeta^2 \left\| D_k^h \nabla u \right\|^2 dx \\ & \leq C \int_{\Omega} \left\{ f^2 + u^2 + |F(x,0)|^2 + \left\| \nabla u \right\|^2 \right\} dx \\ & \leq C \left\{ \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|F(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Así que

$$\sup_h \left\| D_k^h \nabla u \right\|_{L^2(V)} < \infty \quad (14)$$

puesto que C no depende de h .

La desigualdad (14) es cierta para $k = 1, \dots, N$ y así

$$\left\| D^h \nabla u \right\|_{L^2(V)} < \infty \quad (15)$$

Por el Teorema 2 en [1, §5.8.2] se concluye que $\nabla u \in H_{loc}^1(\Omega)$ y por tanto $u \in H_{loc}^2(\Omega)$, con estimativo:

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|F(\cdot,0)\|_{L^2(\Omega)} \right), \quad (16)$$

para alguna constante apropiada $C = C(V, \Omega, a_{ij})$.

Para refinar el estimativo (16) notamos que si $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$, entonces los cálculos hechos hasta ahora implican que:

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)} + \|F(\cdot,0)\|_{L^2(W)} \right), \quad (17)$$

para alguna constante apropiada C .

Se escoge ahora una nueva función de prueba, llamada de nuevo ζ , la cual satisface las condiciones:

$$\begin{cases} \zeta \equiv 1 \text{ en } W \\ \text{supp } \zeta \subset \Omega \\ 0 \leq \zeta \leq 1 \end{cases}$$

Reemplazamos ahora $v = \zeta^2 u$ en (P) y obtenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} (\zeta^2 u)_{x_j} dx &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} (2\zeta \zeta_{x_j} u + \zeta^2 u_{x_j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} 2a_{ij} u_{x_i} \zeta \zeta_{x_j} u dx + \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} a_{ij} u_{x_i} \zeta^2 u_{x_j} := A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Por la condición de elipticidad,

$$A_2 = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} u_{x_i} \zeta^2 u_{x_j} dx \geq b \int_{\Omega} \zeta^2 \|\nabla u\|^2 dx.$$

Y por la acotación de ζ_{x_j} se tiene,

$$|A_1| \leq C \int_{\Omega} \zeta \|\nabla u\| |u| dx$$

y por la desigualdad de Cauchy con ϵ :

$$|A_1| \leq \epsilon \int_{\Omega} \zeta^2 \|\nabla u\|^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \int_W u^2 dx.$$

Como antes, se toma $\epsilon = b/2$ y se obtiene

$$\begin{aligned} |A| \geq A_2 - |A_1| &\geq b \int_{\Omega} \zeta^2 \|\nabla u\|^2 dx - \frac{b}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 \|\nabla u\|^2 dx - C \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \frac{b}{2} \int_{\Omega} \zeta^2 \|\nabla u\|^2 dx - C \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

Realizaremos ahora el estimativo para B con $v = \zeta^2 u$.

De la desigualdad de Cauchy con ϵ se sigue que

$$|B| \leq \epsilon \int_{\Omega} \zeta^2 u^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \int_{\Omega} (f^2 + |F(\cdot, 0)|^2 + u^2) dx.$$

Esto es,

$$|B| \leq C \int_{\Omega} (f^2 + |F(\cdot, 0)|^2 + u^2) dx.$$

Ponemos juntos los estimativos para $|A|$ y $|B|$, y concluimos que

$$\int_W \zeta^2 \|\nabla u\|^2 dx \leq C \int_{\Omega} (f^2 + |F(\cdot, 0)|^2 + u^2) dx.$$

Por lo tanto,

$$\|u\|_{H^1(W)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|F(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (18)$$

Finalmente (18) y (17) implican que:

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|F(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)} \right),$$

el cual es el estimativo deseado. $\square$

Agradecimientos Los autores presentan sus agradecimientos al Jurado del artículo por las observaciones y sugerencias, las cuales nos ayudaron a realizar algunos importantes ajustes en el documento inicial. Este artículo fue elaborado durante el año 2009 e hizo parte de las actividades académicas de los autores en las universidades del Valle y Cauca, respectivamente.

Referencias

- [1] Evans, Lawrence. Partial Differential Equations. American Mathematical Society. Volume 19, 1998.
- [2] Loaiza M., Gerardo. Existencia de soluciones para una clase de ecuaciones semilineales de segundo orden. Tesis de Maestría. Universidad del Valle, 2008.
- [3] Zeidler, Eberhard. Nonlinear Functional Analysis and Its Applications II/A, II/B. Springer-Verlag, 1988.
- [4] Zeidler, Eberhard. Applied Functional Analysis. Applied Mathematical Sciences. Volume 108. Springer-Verlag, 1997.

Dirección de los autores

Jairo Duque Robles — Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali-Colombia.

e-mail: jjduque@univalle.edu.co

Gerardo Loaiza Motato — Departamento de Matemáticas, Universidad del Cauca, Popayán-Colombia.

e-mail: gloaiza@unicauca.edu.co