

PANDERETAS Y MATEMÁTICAS

CARLOS ANDRÉS REYES



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011

PANDERETAS Y MATEMÁTICAS

CARLOS ANDRÉS REYES

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar
por el título de Matemático.

DIRECTOR:

JAIME ARANGO Dr.rer.nat.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
PROGRAMA ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

CARLOS ANDRÉS REYES, 1988

PANDERETAS Y MATEMÁTICAS

Palabras claves: Ecuación de onda, instrumentos de percusión, teorema espectral, funciones de Bessel, percepción del sonido.



UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
ACTA DE EVALUACION DE TRABAJO DE GRADO
PROGRAMA ACADEMICO DE MATEMATICAS

JURADO CONFORMADO POR:

1. DOCTOR JAIME ARANGO
2. DOCTORA ADRIANA GOMEZ

El día 27 de Mayo de 2011 a las 2:00 p.m se llevó a cabo la SUSTENTACION del TRABAJO DE GRADO titulado " PANDERETAS Y MATEMÁTICAS" presentado por el estudiante **CARLOS ANDRÉS REYES KREIE** código: 0740400, bajo la dirección del Doctor: JAIME ARANGO

RESULTADO DE LA EVALUACION:

- (☒) APROBADO.
(☒) RECOMENDACIÓN DE DISTINCION DE MERITORIO.
() RECOMENDACIÓN DE DISTINCION DE LAUREADO.
() REPROBADO.

Se recomienda modificaciones: SI () NO ().

OBSERVACIONES

JAIME ARANGO
DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO

ADRIANA GOMEZ
JURADO

HEBER MESA PALOMINO
DIRECTOR PROGRAMA ACADEMICO
(O SU REPRESENTANTE)

Resumen

El objetivo de este trabajo de grado es el análisis de los sonidos de una pandereta mediante el modelo de la ecuación de onda. Tomando como referencia resultados de la teoría espectral, discutiremos las similitudes y discrepancias entre el modelo teórico y los resultados experimentales. Por último, retomaremos el problema tratado por Mark Kac en su famoso artículo, “Can one Hear the Shape of a Drum?” [5]. En el artículo él da una fórmula para encontrar el área de una membrana que vibra a partir de sus frecuencias fundamentales. Abordaremos esta fórmula desde un punto de vista experimental indicando algunas dificultades tanto experimentales como teóricas.

Introducción

El sonido debido a la percusión de un objeto es algo que sucede naturalmente en el universo. Por ejemplo, cuando cae una manzana o un coco sobre el suelo escuchamos un sonido seco que se apaga rápidamente, o cuando se martilla una placa de acero nos aturde un agudo ruido. Desde muy jóvenes nos percatamos de que al aplauso le sucede un sonido fuerte, y cualquier objeto se convierte en nuestro primer instrumento musical (aparte de la voz); una mesa, el piso, incluso otra persona. Rápidamente nos damos cuenta de que el sonido que se produce depende del objeto que golpeamos y la forma en que lo hacemos; es un conocimiento muy útil para diferenciar un tronco hueco de uno sólido, basta con escuchar el sonido que se produce al golpearlo, es más, algunas tribus indígenas aun golpean troncos huecos con palos para comunicarse entre ellos a varios kilómetros de distancia. De esta simple observación y a partir de un poco de curiosidad humana, empiezan a surgir todo tipo de instrumentos de percusión, desde el sencillo tronco hueco hasta unos muchos más elaborados como el timbal o las congas. Entre estos instrumentos de percusión se encuentra la pandereta, que consiste en una membrana de cuero tensada sobre un marco circular de madera que actúa como caja de resonancia, usualmente tiene unas sonajas que cuelgan del marco de madera. Versiones de la pandereta están presentes en culturas muy distintas, como muestra de esto existen el riq árabe y el pandeiro brasileño.

Una cosa es clara, y es que los instrumentos de percusión han cautivado al ser humano desde que aún vivía en cavernas y actualmente son parte esencial de la música; esto a pesar de que en el sonido de la pandereta, como en el de la mayoría de instrumentos de percusión, no percibimos un tono claro como ocurre cuando se toca la cuerda de una guitarra, o se sopla a través de la flauta. Actualmente sabemos que el sonido se produce debido a las vibraciones de algún objeto, y que tanto en el caso de la cuerda de la guitarra como en el de la membrana circular de la pandereta, sus vibraciones

se pueden modelar por medio de la ecuación de onda. Así, mediante este modelo, podemos analizar matemáticamente el sonido de estos instrumentos musicales. En el caso de la cuerda y la flauta, su espectro sonoro, es decir, las distintas frecuencias a las que vibra el objeto, está determinado por el modo fundamental de vibración (el modo correspondiente a la frecuencia más baja), las demás frecuencias que contribuyen a su sonido son simplemente múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Ya en el siglo V A.C., Pitágoras de Samos había establecido, aunque indirectamente, que objetos que vibran uno con el doble de frecuencia que otro suenan en conjunto “armoniosamente”, en realidad él dijo que (Ver [6])

al tocar, simultáneamente, dos cuerdas tensas, fijas en sus extremos, una con el doble de longitud que la otra, el sonido producido es “armonioso”.

Sucede que la relación entre las frecuencias del modo fundamental de una cuerda o flauta y su segundo modo de vibración guardan la misma relación que el de los modos fundamentales de las cuerdas descritas por Pitágoras. De esta forma las dos frecuencias que más contribuyen al sonido de una cuerda o de una flauta tienen una relación “armoniosa”, esta es probablemente la razón por la cual percibamos un tono definido cuando escuchamos el sonido de una cuerda o de una flauta. Como ya dijimos la pandereta no da la sensación de un tono definido, y la teoría nos dice que las frecuencias del sonido que ésta produce no tienen relaciones racionales entre si.

Actualmente hay un gran interés en el análisis de sonido de instrumentos específicos. Por ejemplo, en [11] se estudia el sonido de un timbal, mientras que en [12] se estudian los tambores de la India. En este trabajo analizaremos el sonido de un instrumento concreto, la pandereta (sin las sonajas), tal cual lo capta un micrófono conectado a una grabadora digital. Tomaremos la transformada rápida de Fourier de la onda de presión y se analizará la contribución de los distintas frecuencias. Este es a grandes rasgos el montaje experimental, los detalles son complejos, pues el sonido se percibe distinto dependiendo del lugar y modo de percusión. En cuanto al marco teórico, tomaremos como base la ecuación de onda en una membrana circular con frontera fija. Desde luego, hay diferencias entre lo teórico y lo experimental, las cuales discutiremos a lo largo del trabajo, tomando como referencia algunos resultados de la teoría espectral.

Finalmente, abordaremos el problema de Mark Kac, el cual fue la motivación inicial de este trabajo. En 1966 este físico y matemático se planteó la



Figura 1: Riq árabe.

siguiente pregunta (Ver [5])

¿Se puede escuchar la forma de un tambor?

Es decir, Dado un tambor (una membrana 2-dimensional con borde fijo) ¿Podemos conocer su forma a partir de su espectro sonoro? Kac no logro dar una respuesta definitiva a este problema, que actualmente se sabe que es negativa (Ver [1]), sin embargo, hizo grandes aportes al respecto e inspiró a muchas personas a trabajar en este problema. Parte de su aporte fue dar una fórmula para el área de la membrana en consideración. Nuestro propósito es hacer una comparación de las frecuencias que se obtengan experimentalmente del sonido de la pandereta con las esperadas teóricamente. Al final trataremos la fórmula de Kac y veremos hasta que grado tiene validez desde el punto de vista experimental, indicando algunas dificultades, tanto técnicas como teóricas.

Índice general

Introducción	II
1. La ecuación de onda	1
1.1. El modelo físico	1
1.2. Percepción del sonido	5
1.3. Membranas circulares	6
2. La pandereta	10
2.1. El experimento	10
2.1.1. Montaje experimental	10
2.1.2. Análisis de sonido	14
2.2. El espectro sonoro	16
2.3. Análisis de resultados	19
2.3.1. La velocidad de propagación	20
3. Escuchando el área de un tambor	24
3.1. Una fórmula para el área	25
3.2. El sonido de π	30
3.3. Validez experimental de la fórmula	31
4. Conclusiones y perspectivas	33
4.1. Agradecimientos y créditos	34

Capítulo 1

La ecuación de onda

1.1. El modelo físico

En ésta sección mostraremos por qué la ecuación de onda describe las vibraciones en una membrana 2-dimensional y hablaremos sobre las condiciones que se imponen para modelar una pandereta.

En [3], L. Evans da una derivación física muy elegante de la ecuación de onda, la cual mostraremos a continuación con un enfoque un poco distinto. Para esto consideremos una membrana delimitada por una curva plana contenida en el plano xy y con densidad constante ρ . Sabemos de la experiencia que, al perturbarla, los puntos sobre la membrana sufren un desplazamiento vertical. Sea $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función que a cada punto (x, y) de la membrana le asocia el valor de su desplazamiento vertical en el tiempo t . Tomemos una región $W \subset \Omega$ pequeña, su desplazamiento promedio en el tiempo t estará dado por

$$\frac{1}{|W|} \iint_W u(x, y, t) \, dx dy,$$

donde $|W|$ es el área de la superficie W , de modo que su aceleración promedio será

$$\frac{1}{|W|} \frac{d^2}{dt^2} \left(\iint_W u(x, y, t) \, dx dy \right) = \frac{1}{|W|} \iint_W \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \, dx dy.$$

Por otro lado tenemos que la fuerza externa que actúa sobre un punto de la frontera de la superficie $S_W = \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in W\}$ se encuentra

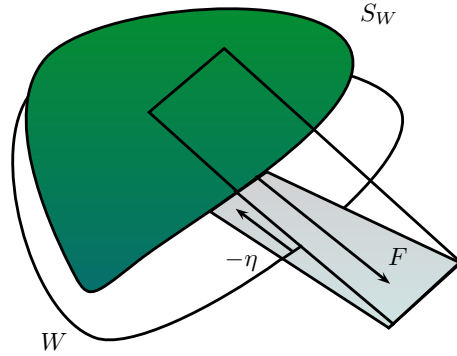


Figura 1.1: Región de una membrana 2-dimensional.

sobre el plano tangente a esta, de modo que

$$F = a(1, 0, \frac{\partial u}{\partial x}) + b(0, 1, \frac{\partial u}{\partial y}) = (a, b, a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}).$$

Además la proyección de F sobre el plano xy es paralela al vector normal saliente a la frontera de W en el punto (x, y) , es decir, $(a, b) = k\eta$, donde $k > 0$ se supone constante (esto se debe a que las fuerzas se distribuyen uniformemente en medios elásticos, su magnitud depende del material y corresponde a una medida de la tensión en la membrana. Entre más tensionada se encuentre la membrana mayores serán las fuerzas y por lo tanto k será mayor) y η es el vector normal. Como el desplazamiento de las partículas lo suponemos estrictamente vertical, sólo nos interesa la componente z de F .

Sucede, como lo veremos más adelante, que la fuerza de gravedad no afecta las frecuencias con las que vibra una membrana. En la parte experimental serán estas frecuencias las que mediremos y por lo tanto no consideraremos la fuerza de gravedad en el modelo teórico. De esta forma, la fuerza total externa que actúa sobre S_W será

$$\oint_{\partial W} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds,$$

por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\oint_{\partial W} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) ds = k \oint_{\partial W} (\nabla u \cdot \eta) ds = k \iint_W \operatorname{div}(\nabla u) dx dy.$$

La segunda ley de Newton implica lo siguiente:

$$\rho \frac{|W|}{|W|} \iint_W \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx dy = k \iint_W \operatorname{div}(\nabla u) dx dy,$$

y como esto se cumple para todos los W pequeños tenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho} \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{k}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{k}{\rho} \Delta u.$$

Esta ecuación en derivadas parciales se conoce como la ecuación de onda.

Recordemos que queremos modelar la pandereta, para esto supondremos que el parche de cuero es en realidad una membrana elástica, es decir, que las fuerzas se distribuyen de manera uniforme a través de la membrana. Además debemos poner la condición $u(x, y, t) = 0$ para todo $(x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty)$ ya que los bordes no se mueven. Para que la pandereta suene necesitamos tocarla; para esto introducimos las condiciones $u(x, y, 0) = f(x, y)$ y $u_t(x, y, 0) = p(x, y)$ para $(x, y) \in \Omega$. De esta forma la función f define la posición inicial de la membrana y p define la velocidad con la que se desplaza inicialmente. Llegamos así al siguiente problema en ecuaciones diferenciales parciales:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0, & \text{si } (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{si } (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u = f(x, y), & \text{si } t = 0, \\ u_t = p(x, y), & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ es la velocidad de propagación de la onda. Buscamos una solución que cumpla estas cuatro condiciones, para esto aplicamos el método de separación de variables. Suponemos entonces que u es el producto de una función que depende únicamente del tiempo, y una función que depende de sus coordenadas espaciales; $u(x, y, t) = T(t)\varphi(x, y)$. Reemplazando en (1.1) obtenemos que $\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{\Delta\varphi(x, y)}{\varphi(x, y)}$, esto sólo puede ocurrir si esta ecuación es además igual a una constante $-\lambda$. De modo que la función φ y la constante λ deben satisfacer lo que se conoce como el problema de Helmholtz de valores propios:

$$\begin{cases} \Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 & \text{en } \Omega, \\ \varphi = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

Por otro lado $T'' = -c^2 \lambda T$, y por lo tanto la función que depende del tiempo es una función periódica del tipo

$$T(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \text{ donde } \omega = c \sqrt{\lambda}.$$

Queda entonces el problema (1.2) por resolver, y sucede que es uno muy difícil. Sólo se conocen soluciones explícitas para muy pocas regiones como los rectángulos y los discos. Sin embargo sucede que el operador de Laplace es el operador inverso de

$$L[f] = \int_{\Omega} G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

donde $G(x, \xi)$ es la función de Green del operador de Laplace. Esta existe siempre que Ω tenga una frontera suficientemente suave, además si Ω es acotado se tiene que L es un operador compacto, por ser un operador integral de núcleo compacto. Por otro lado como el operador de Laplace es un operador auto-adjunto entonces también lo es L . Como los valores propios del operador de Laplace son los inversos multiplicativos de los valores propios de L , tenemos como consecuencia del teorema espectral para operadores compactos y auto-adjuntos lo siguiente (Para mayor información sobre las funciones de Green y la teoría espectral de operadores en espacios de Hilbert recomendamos consultar los libros [3] y [10]):

Teorema 1.1.1. *Los valores propios λ de la ecuación (1.2) forman un subconjunto discreto de números reales positivos. Cada valor propio tiene multiplicidad geométrica finita y repitiéndolos de acuerdo con su multiplicidad se tiene*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Existe una base ortonormal en $L^2(\Omega)$ de funciones propias $(\varphi_n)_n$, en donde cada φ_n satisface la ecuación (1.2) con $\lambda = \lambda_n$.

Ahora como la ecuación de onda es una ecuación en derivadas parciales lineal, la suma de soluciones también es solución. La solución general de (1.1) está dada por:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \sqrt{\lambda_n} c t + b_n \sin \sqrt{\lambda_n} c t \right) \varphi_n(x, y), \quad (1.3)$$

donde los coeficientes a_n y b_n se escogen de tal forma que u satisfaga las condiciones iniciales, el teorema (1.1.1) nos garantiza que esto se puede hacer.

1.2. Percepción del sonido

Antes de continuar es de gran importancia para nosotros resaltar lo siguiente; nótese que u es la superposición de funciones periódicas en el tiempo con frecuencias $\frac{c\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$. El aire, al estar en contacto con la membrana, se expande y contrae a las mismas frecuencias que esta; generando así variaciones de presión, las cuales se propagan a través del aire en forma de ondas longitudinales. En un punto dado del espacio, la función de presión, $p := p(t)$, del aire puede ser modelada como la superposición de funciones del tipo,

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

donde cada $\frac{\omega}{2\pi}$ es un armónico al cual vibra la membrana. Esta onda de presión llega a nuestros oídos, y hace vibrar a nuestro tímpano, una membrana circular muy parecida a un tambor. Pegado al tímpano se encuentra un sistema de palancas compuesto por los tres huesos más pequeños del cuerpo humano, el yunque, el martillo y el estribo, los cuales transmiten las vibraciones a la cóclea, un canal seccionado longitudinalmente en tres partes por medio de dos membranas, y enrollado en forma de espiral (Ver la figura 1.2). Lo que ocurre dentro de la cóclea es de altísima complejidad y aun no se entiende con exactitud. Una de las teorías con mayor aceptación dice que los fluidos contenidos en el interior de la cóclea son estimulados por el estribo, esto induce transferencias de sodio (Na^+) y potasio (K^+) a través de las membranas que dividen el canal. De esta forma se producen cambios en las propiedades electroquímicas de estos fluidos las cuales son evaluadas por el conjunto de células sensoriales que componen el llamado órgano de Corti, el encargado en enviar las señales al cerebro para finalmente ser interpretadas como un sonido. El lector que quiera informarse sobre este interesante tema puede consultar [8]. En pocas palabras lo que escuchamos es la interpretación que hacen nuestro oído y cerebro de una onda compuesta de distintas frecuencias con distintas amplitudes y fases. La complejidad de estas interpretaciones hacen que dar respuesta a preguntas sobre nuestra predilección por las notas que suenan armoniosas, sea casi imposible desde un punto de vista físico o matemático, así Pitágoras nos haya dado razones para pensar lo contrario.

Cuando derivamos la ecuación de onda dijimos que el campo gravitatorio no afecta las frecuencias a las cuales esta vibra. La explicación es sencilla, si consideremos la fuerza de gravedad entonces (1.1) sufre una pequeña altera-

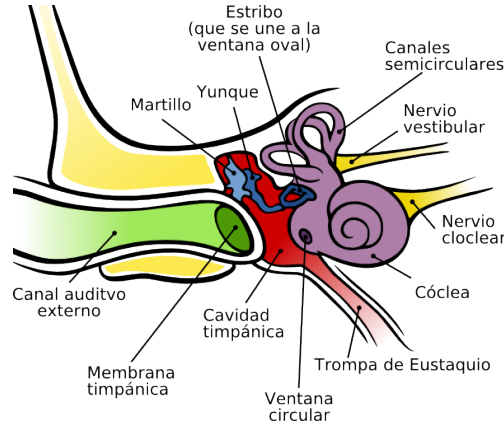


Figura 1.2: Diagrama del oído humano.

ción y queda de la siguiente forma

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 \Delta v + G = 0, & \text{si } (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ v = 0, & \text{si } (x, y, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty), \\ v = h(x, y), & \text{si } t = 0, \\ v_t = p(x, y), & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

donde g es la aceleración de un objeto debido a la gravedad. Para encontrar la solución de (1.4) basta resolver el problema de Poisson dado por

$$\begin{cases} c^2 \Delta w + g = 0, & \text{si } (x, y) \in \Omega, \\ w = 0, & \text{si } (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.5)$$

Sabemos que existe una función w que resuelve (1.5) y es independiente del tiempo (ver [3]). Por otro lado hacemos $f = h + w$ y resolvemos (1.1). La función $v = u - w$ será la solución de (1.4), donde sólo su componente u depende del tiempo, de modo que las frecuencias de vibración de la membrana no se modifican al considerar la gravedad, como queríamos probar.

1.3. Membranas circulares

Ahora que hemos repasado algunos conceptos generales de la ecuación de onda, y del sonido, pasemos a analizar el caso particular que nos interesa.

Consideraremos nuestra pandereta como una membrana circular fija en su frontera. Afortunadamente, en el caso de las membranas circulares el problema de Helmholtz tiene soluciones explícitas. Escribiendo (1.2) en coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, se obtienen los valores propios y las funciones propias mediante la separación de las variables r y θ (ver por ejemplo [7]). Será conveniente el uso del doble índice (h, k) para indicar los valores y las funciones propias que resuelven el problema de Helmholtz. En lo que sigue emplearemos la siguiente notación:

- $J_h(z)$ es la función de Bessel de primera especie de orden h , $h = 0, 1, \dots$.
- ξ_{hk} es el k -ésimo cero positivo de $J_h(z)$.

Teorema 1.3.1. *Los valores propios de la ecuación (1.2) en un disco de radio R están dados por*

$$\lambda_{hk} = \left(\frac{1}{R} \xi_{hk} \right)^2, \quad h = 0, 1, \dots, \quad k = 1, \dots.$$

Para todo $k \geq 1$ el valor propio λ_{0k} es simple y su espacio propio correspondiente está generado por la función radialmente simétrica:

$$\varphi_{0k}(r) = J_0\left(\frac{1}{R} \xi_{0k} r\right), \quad 0 \leq r \leq R.$$

Si $h \neq 0$, el valor propio λ_{hk} tiene multiplicidad geométrica 2. El espacio correspondiente de funciones propias está generado por

$$\varphi_{hk}(r, \theta) = J_h\left(\frac{1}{R} \xi_{hk} r\right) \cos k\theta, \quad \hat{\varphi}_{hk}(r, \theta) = J_h\left(\frac{1}{R} \xi_{hk} r\right) \sin k\theta,$$

con $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

Según (1.3), la solución de la ecuación de onda en una membrana circular está dada por

$$\begin{aligned} u(t, r, \theta) = & \sum_{k=1}^{\infty} (a_{0k} \cos \omega_{0k} t + c_{0k} \sin \omega_{0k} t) J_0\left(\frac{1}{R} \xi_{0k} r\right) \\ & + \sum_{h,k=1}^{\infty} \left((a_{hk} \cos \omega_{hk} t + c_{hk} \sin \omega_{hk} t) \cos(h\theta) \right. \\ & \left. + (b_{hk} \cos \omega_{hk} t + d_{hk} \sin \omega_{hk} t) \sin(h\theta) \right) J_h\left(\frac{1}{R} \xi_{hk} r\right), \end{aligned} \tag{1.6}$$

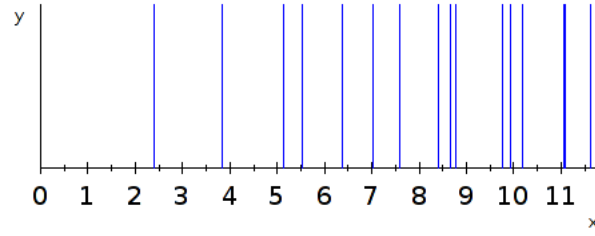


Figura 1.3: Primeros ceros de Bessel: cada línea azul representa la posición de un cero de Bessel sobre la recta real. En la figura se representan todos los ceros de Bessel menores que 12.

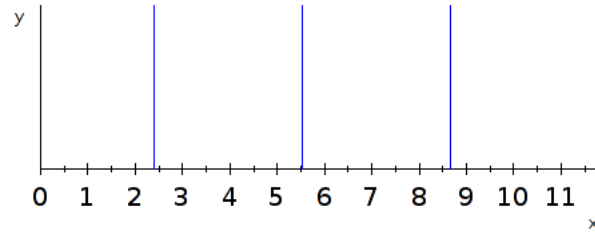


Figura 1.4: En la figura se representan todos los ceros de J_0 menores que 12.

en donde $\omega_{hk} = \frac{c}{R} \xi_{hk}$. Los coeficientes a_{hk} , b_{hk} , c_{hk} y d_{hk} están determinados por las condiciones iniciales de velocidad y posición. Las frecuencias que contribuyen al sonido de una vibración son entonces un escalamiento de los ceros de las funciones de Bessel, por lo tanto es importante ver como estos están distribuidos. La figura 1.3 muestra los valores de los primeros ceros, y muestra que, en comparación con las frecuencias en una flauta o en una cuerda, ellos no se acomodan de forma tan regular. La figura 1.4 muestra la distribución de los primeros cuatro ceros de la función J_0 , estos corresponden a modos radialmente simétricos, curiosamente ellos parecen estar separados por una misma distancia, tal como ocurre cuando se toca una cuerda o una flauta. Seguramente si sólo escucháramos las frecuencias correspondiente a estos ceros, el sonido de un tambor sería una nota definida como en los casos de la cuerda y la flauta. Sabemos que esto no es así. Ahora mostraremos como están concentrados los ceros, para esto tenemos una lista con todos los ceros menores que cien, esto corresponde a un total de 1244 ceros (La lista se obtuvo con la ayuda de [9]). En la figura 1.5 se muestra la densidad de los ceros de J_0 en un histograma, ellos tienen una distribución bastante

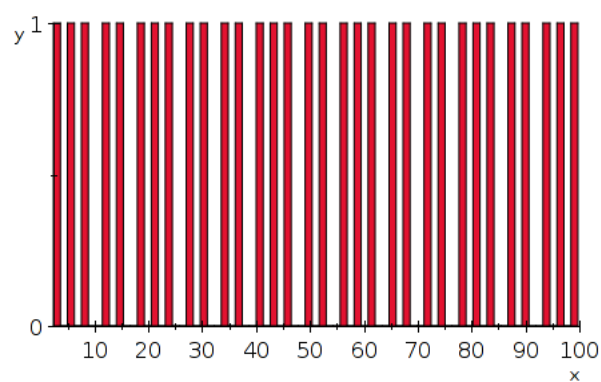
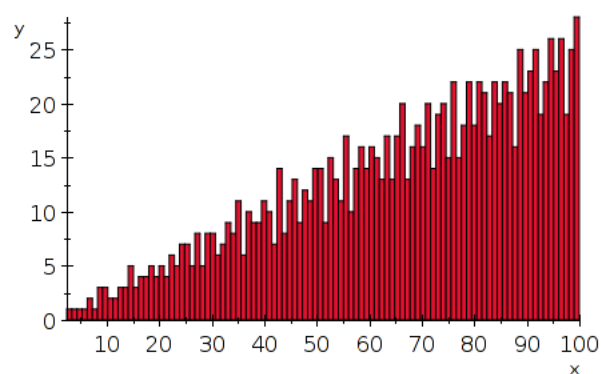
Figura 1.5: Histograma de los ceros de J_0 .

Figura 1.6: Histograma de los ceros de Bessel.

uniforme, casi como los ceros de senos y cosenos. En la figura 1.6 está la densidad de todos los ceros, es claro que a medida que crecen los ceros, ellos están más juntos entre si.

Capítulo 2

La pandereta

Nuestro propósito es realizar un análisis de sonido sobre algunas grabaciones de una pandereta, esto nos permitirá determinar las frecuencias que contribuyen a su sonido. En este capítulo exhibiremos con detalle el experimento que se realizó.

2.1. El experimento

2.1.1. Montaje experimental

Describiremos la metodología utilizada para hacer las grabaciones. En un lugar silencioso, montamos un micrófono de estudio (DPA-4099T) en un trípode, el micrófono estaba dentro de un cilindro hecho de icopor y corcho, dirigido hacia una pandereta sujeta por el borde con una prensa. La función del cilindro era aislar el sonido de la pandereta, de las reverberaciones debidas a las paredes, el piso y demás objetos. La pandereta era una pandereta común de trece centímetros de radio, con marco de madera y parche de cuero a la cual se le habían removido las sonajas. El micrófono estaba conectado a una grabadora digital (Sony IC Recorder, ICD P210). Sobre la pandereta colocamos un brazo con un electroimán, este sostenía un balón metálico que caía sobre la pandereta al abrir el circuito; este dispositivo nos permitía percutir la pandereta en el mismo sitio y con la misma intensidad varias veces. El montaje se muestra en las figuras 2.1 y 2.2. Además de tres balines metálicos de distintos tamaños (los llamaremos M1, M2, M3; M1 es el balón más grande y M3 el más pequeño), teníamos otros objetos para percutir



Figura 2.1: En el experimento el micrófono apunta hacia una pandereta sujeta con un prensa.

la pandereta, estos eran dos bolas de goma, una roja y la otra negra (la roja más grande y pesada que la negra), y una baqueta de madera con la punta revestida de caucho. Estos objetos se muestran en la figura 2.3. Si vemos la solución de la ecuación de onda en una membrana circular, (1.6), vemos que en ella aparecen los coeficientes a_{hk} , b_{hk} , c_{hk} y d_{hk} , los cuales están determinados por las condiciones iniciales; es decir, ellos dependen de la forma en que se percute la membrana. Teniendo esto en cuenta, hicimos varias grabaciones de la pandereta, percutiéndola en distintos lugares y con los distintos objetos que ya mencionamos; también utilizamos la palma de la mano. Los puntos donde percutimos la pandereta fueron: el centro, a una distancia de dos centímetros del centro y a una distancia de tres centímetros del borde tal como se muestra en la figura 2.4. En el caso de los balines, se posicionaba la pandereta de forma que los balines caían en el punto deseado y al rebotar en la pandereta caían sobre una manta, de esta forma no producían ningún ruido. Las bolas de goma se soltaban con la mano desde el mismo punto que los balines; y en el caso de la baqueta y la palma se intentaba tocar siempre en el mismo lugar y con la misma intensidad. Cada grabación hecha consiste en varias repeticiones (de cuatro a seis) de un mismo tipo de percusión. Por ejemplo, la primera grabación contiene cuatro repeticiones del sonido de la pandereta percutida por el balón M3 cerca del centro. Se hacían varias repeticiones de cada tipo de toque, para ver si los datos eran consistentes y así verificar que las grabaciones estuvieran bien hechas. La figura 2.5 muestra la bitácora con las grabaciones.

Una vez terminadas estas grabaciones cambiamos nuestro micrófono de



Figura 2.2: Sobre la pandereta se encuentra un electroimán que deja caer balines sobre la misma parte de la pandereta y con la misma intensidad.



Figura 2.3: En la figura se muestran los objetos utilizados para percutir la pandereta.

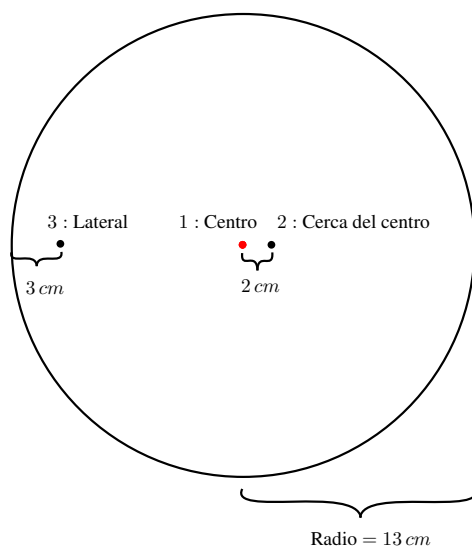


Figura 2.4: Puntos donde se percutió la pandereta.

Grabación no.	Objeto de percusión	Lugar de Percusión
1	Balín M3	Cerca del centro
2	Balín M2	Cerca del centro
3	Balín M1	Cerca del centro
4	Bola roja	Cerca del centro
5	Bola negra	Cerca del centro
6	Balín M3	Centro
7	Balín M2	Centro
8	Balín M1	Centro
9	Bola roja	Centro
10	Bola negra	Centro
11	Balín M3	Lateral
12	Bola roja	Lateral
13	Bola negra	Lateral
14	Baqueta	Centro
15	Baqueta	Cerca del centro
16	Baqueta	Lateral

Figura 2.5: Bitácora de las grabaciones hechas con el micrófono de estudio.

Grabación no.	Objeto de percusión	Lugar de Percusión
29	Balín M3	Centro
30	Bola roja	Centro
31	Bola negra	Centro
32	Balín M3	Lateral
33	Bola roja	Lateral
34	Bola negra	Lateral

Figura 2.6: Bitácora de las grabaciones hechas con el micrófono de contacto.

estudio por un micrófono de contacto (Selmer 723). Estos son micrófonos que registran las vibraciones de un objeto estando en contacto físico con él. Luego de pegar este micrófono al marco de la pandereta y conectarlo a la grabadora digital, seguimos el mismo procedimiento descrito anteriormente para hacer nuevas grabaciones, la bitácora de estas se muestra en la figura 2.6.

2.1.2. Análisis de sonido

La grabadora digital guarda sus registros en formato DVF (Digital Voice File, extensión: *.dvf), estos los podemos convertir al formato WAV (Wave Form Audio File) utilizando el programa Digital Voice Editor 3.3.01 de Sony®. Este programa nos permite también, para cada grabación, aislar cada una de las repeticiones en las que se toca la pandereta, de esta forma las guardamos por separado. Ya con los archivos en el formato WAV podemos empezar nuestro análisis de sonido, para esto usaremos el programa de código abierto SND versión 11.6 el cual fue desarrollado por Bill Schottstaedt para CCRMA (Center for Computer Research in Music and Acoustics) de la Universidad de Stanford. SND nos permite abrir un archivo de audio en formato WAV y nos lo muestra como el manchón en la figura 2.7, esta es en realidad la función que describe la presión del aire con respecto al tiempo tal cual la capta el micrófono (En la figura el tiempo está dado en segundos). Si visualizamos la gráfica en un lapso de tiempo pequeño veremos lo que se muestra en la figura 2.8, una función de la cual parece difícil discernir algún patrón o información sobre el sonido que esta representa. Los datos contenidos en el archivo de audio son en realidad un conjunto finito de puntos, cada punto representa la presión del aire en un instante de tiempo; las figuras 2.7

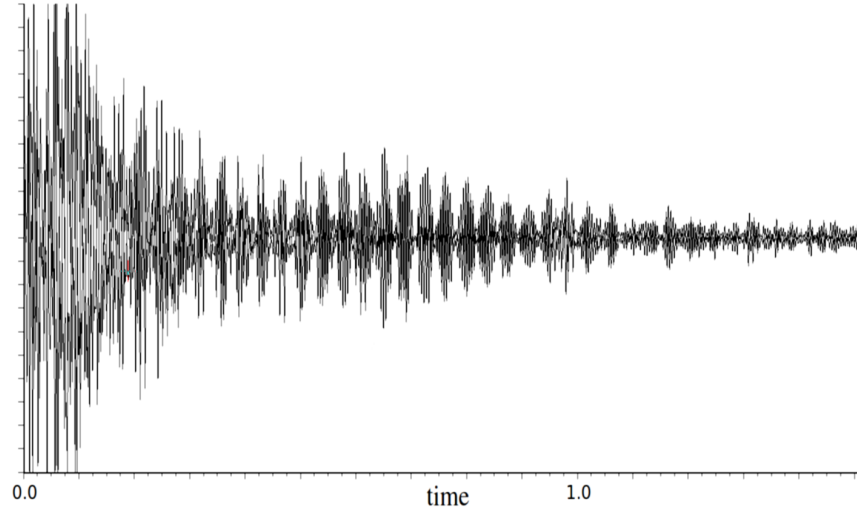


Figura 2.7: Onda de presión tal cual la capta el micrófono.

y 2.8 muestran una interpolación de estos datos. Afortunadamente contamos con una herramienta capaz de traducir una función de onda de este tipo a un lenguaje comprensible. Sabemos que una función, g , de periodo T se puede descomponer como la suma de funciones exponenciales (Ver [7]) de la siguiente forma,

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{i2\pi k}{T}t}, \text{ donde, } c_k = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-\frac{i2\pi k}{T}t} dt. \quad (2.1)$$

Las frecuencias que contribuyen a la función son de la forma $f_k = \frac{k}{T}$ y sus contribuciones dependen de los coeficientes c_k y c_{-k} . La herramienta de la que hablamos se conoce como la transformada discreta de Fourier (DFT). La transformada interpreta un conjunto de datos $\{(\frac{jT}{N}, L_j) : j = 0 \dots N\}$ como puntos pertenecientes a la gráfica de una función de período T , y aproxima la contribución de cada frecuencia a dicha función, por medio de la siguiente expresión:

$$F_k = \sum_{j=0}^N L_j e^{-\frac{i2\pi j}{T}k},$$

en nuestro caso L_j es el dato correspondiente a la presión del aire en el tiempo $\frac{jT}{N}$; podemos apreciar que esta fórmula es simplemente la versión discreta de

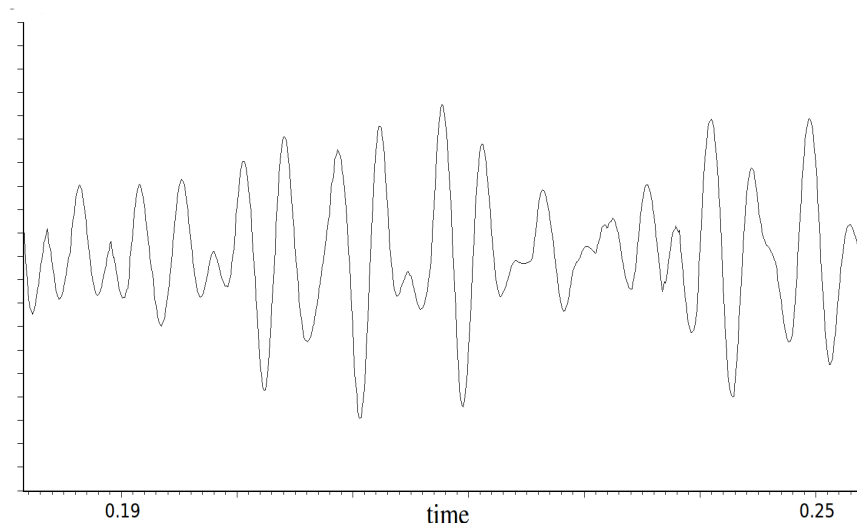


Figura 2.8: Detalle ampliado de la onda de presión.

la integral de (2.1). De esta forma el número F_k da cuenta de la contribución de la frecuencia f_k . El programa SND utiliza un algoritmo conocido como FFT (transformada rápida de Fourier) para calcular la DFT. El resultado es un diagrama de las frecuencias que componen la onda de presión, por ejemplo la figura 2.9 muestra la descomposición en frecuencias de la función de presión de la grabación número diez, parte tres. Los números en la parte superior derecha son las frecuencias correspondientes a los picos más altos. De la figura 2.9 podemos decir que las frecuencias que más contribuyen son 220, 247, 296 y 351 Hz. Al parecer nuestro oído tiene una clase de transformada de Fourier, ya que tenemos la capacidad de identificar las frecuencias en los sonidos que escuchamos; los músicos hacen esto con gran precisión. Para mayor información sobre los métodos DFT y FFT referimos al lector a [4].

2.2. El espectro sonoro

La tarea ahora era mirar la transformada de Fourier de cada una de las grabaciones y ver cuáles eran las frecuencias que aparecían, esto nos permitiría determinar cuáles eran las frecuencias más importantes y si aparecían cuando se tocaba el centro de la pandereta o cuando se tocaba el borde. Lo primero que vimos era que a excepción de los toques hechos con la palma de

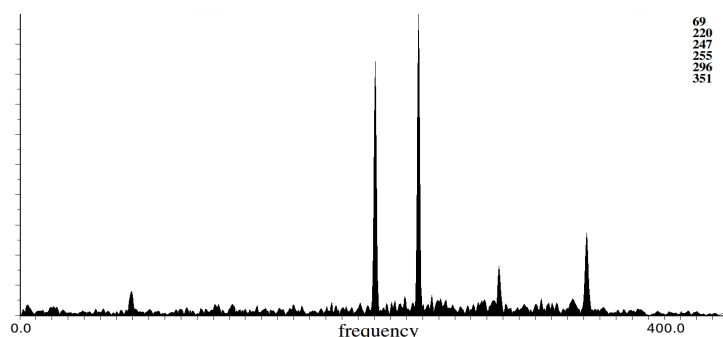


Figura 2.9: Gráfico de la transformada discreta de Fourier para la grabación no. 10 parte 3.

la mano (por esta razón no están incluidas en la bitácora), las grabaciones tenían unas frecuencias claramente definidas y contenían una cantidad reducida de ruido. Otra indicación de que las grabaciones estaban bien hechas era que las repeticiones correspondientes a la misma grabación mostraban espectros muy similares en el análisis de frecuencias. A su vez, en las grabaciones que compartían el sitio de percusión de la pandereta, participaban frecuencias muy similares con contribuciones muy similares. Decidimos entonces hacer nuestras observaciones por grupos conformados de la siguiente forma:

- Grupo A: Grabaciones 1, 2, 3, 4 y 5 (golpes cerca del centro)
- Grupo B: Grabaciones 6, 7, 8, 9 y 10 (golpes en el centro)
- Grupo C: Grabaciones 11, 12, y 13 (golpes en el borde)
- Grupo D: Grabación 14 (golpes en el centro con baqueta)
- Grupo E: Grabación 15 (golpes cerca del centro con baqueta)
- Grupo F: Grabación 16 (golpes en el borde con baqueta)
- Grupo G: Grabaciones 29, 30 y 31 (golpes en el centro)
- Grupo H: Grabaciones 32, 33 y 34 (golpes en el borde)

Para cada uno de estos grupos registramos las frecuencias con algunas observaciones; los datos se encuentran en la figura 2.10. Las frecuencias están

Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D
Cerca del centro	Centro	Borde	Centro
218, 245	245	218, 245	220, 247, 297, 352
348	218	297, 350	140
294, 190	350		
355	296		
Grupo E	Grupo F	Grupo G	Grupo H
Cerca del centro	Borde	Centro	Borde
140, 220, 245, 299	141, 248	161	162
331	222, 299	258, 282	261, 284
352	332, 354	352, 380, 404	356, 384

Figura 2.10: Contribución de las frecuencias. Para cada uno de los grupos las frecuencias se encuentran ordenadas de arriba hacia abajo en orden de mayor contribución a menor contribución. Frecuencias en la misma fila tenían una contribución similar en el grupo.

dadas en Hz y organizadas de acuerdo a su contribución; las que se encuentran más arriba son las que más contribuyeron al sonido.

Observaciones adicionales:

- En gran parte de las grabaciones de los grupos A, B y C, parece haber una contribución importante dada por frecuencias entre 131 y 143 Hz, pero no se detecta ningún pico claro. Posteriormente en los grupos D, E y F se detectaron picos muy marcados en 140 y 141 Hz.
- En los grupos D y E, aunque se detectaron siempre frecuencias muy similares, sus contribuciones variaban considerablemente de golpe en golpe, por esto no pudimos ordenar las frecuencias en orden de contribución con precisión.

Observaciones generales:

- Las contribuciones varían dependiendo del lugar y forma de percusión.
- Hay frecuencias que están muy cerca de otras, de los datos que tenemos no podemos distinguir si se trata de una o más frecuencias.
- En los grupos G y H, los que contienen grabaciones hechas con el micrófono de contacto, aparecen frecuencias muy distintas a las de los

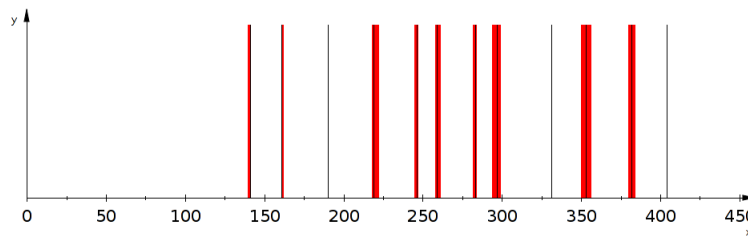


Figura 2.11: Frecuencias identificadas en el sonido de la pandereta. Cada barra representa un grupo de frecuencias cercanas, el ancho de la barra es equivalente al ancho del intervalo donde están frecuencias.

demás grupos. La única frecuencia que parece coincidir es la que está entre 350 y 356 Hz.

Frecuencias que varían con el lugar y forma de percusión:

- En el grupo B (golpe en el centro) la frecuencia 245 se distingue por encima de las otras, a diferencia de los grupos A y C en los cuales tiene la misma contribución que la frecuencia 218.
- En el grupo G (golpe en el centro) aparece la frecuencia 404 mientras que esta no se distingue en el grupo H.
- En los grupos E y F (golpe cerca del centro y en el borde con la baqueta) aparece una frecuencia entre 331 y 332 Hz, la cual no se ve en ninguno de los grupos anteriores.

Como no podemos distinguir entre las frecuencias que están muy cerca las agruparemos por intervalos. Para cada intervalo tomaremos un promedio teniendo en cuenta las veces que cada valor individual aparece en los grupos, para así crear una lista con todas las frecuencias distinguibles. Los intervalos, y las frecuencias promedio se muestran en la figura 2.11. La siguiente es la lista de las frecuencias promediadas: 141, 161, 190, 219, 246, 259, 283, 297, 331, 353, 382, 404.

2.3. Análisis de resultados

Lo primero que llama nuestra atención es que las frecuencias detectadas por cada uno de los micrófonos no coinciden, sin embargo confiamos en los resultados obtenidos debido a que cada micrófono mostraba siempre resultados

muy similares. En general los micrófonos son transductores electroacústicos, en el caso de nuestro primer micrófono las ondas de presión en el aire hacen vibrar un diafragma al que está pegada una bobina sometida a un campo magnético, al vibrar, se induce una corriente en la bobina, de esta forma la onda de presión es convertida en una señal de voltaje. El segundo micrófono funciona con un material piezo-eléctrico, estos son materiales que acumulan carga debido a la presión mecánica ejercida sobre ellos, convirtiendo así las vibraciones del micrófono mismo en una señal de voltaje. Vemos que los micrófonos además de funcionar de maneras distintas toman las vibraciones de medios distintos, el aire y el marco de madera, es posible que en estas diferencias existan muchos factores que afecten la señal de voltaje que finalmente se captura, de modo que es razonable que un micrófono detecte frecuencias que el otro no detecta y viceversa. Otra observación interesante es que las frecuencias que contribuyen al sonido y su intensidad varían dependiendo del modo y lugar de percusión, tal como lo predice la teoría. Es de esperarse que al tocar el centro aparezcan frecuencias correspondientes a modos radialmente simétricos o que su intensidad aumente, esto nos lleva a especular que las frecuencias 245 y 404 corresponden a modos radialmente simétricos.

2.3.1. La velocidad de propagación

A continuación haremos una comparación de las frecuencias que hallamos con los ceros de las funciones de Bessel. Sabemos que las frecuencias que deberían sonar son los ceros de las funciones de Bessel multiplicados por un escalar, y que ese escalar depende del radio de la pandereta y de la velocidad de propagación de las ondas en el parche de cuero. Existe una forma de determinar la velocidad de propagación de las ondas en un tambor circular. El experimento consiste en excitar la membrana del tambor por medio de un parlante que vibra a una frecuencia conocida, sobre el tambor se esparce arena fina, y se varia la frecuencia del parlante. Cuando la frecuencia del parlante está cerca de una de las frecuencias naturales del tambor, entonces en él se establece el modo de vibración correspondiente a esa frecuencia natural. En el momento en que esto sucede, se observa que las partículas de arena empiezan a saltar y se acomodan sobre el tambor formando figuras geométricas. Se sabe que la arena finalmente se acomoda sobre las líneas nodales del modo que se establece en la membrana, es decir, en los puntos donde la membrana no se mueve. En el caso de la frecuencia fundamental todas las partículas de arena se desplazan hacia el borde. Nosotros recreamos este experimento y



Figura 2.12: Posición final de la arena tras excitar la membrana de la pandereta con un parlante vibrando a una frecuencia de 60 Hz.

obtuvimos que la frecuencia fundamental de nuestra pandereta es de 60 Hz. La foto de la posición final de la arena se muestra en la figura 2.12. Una vez que se conoce la frecuencia fundamental podemos usar la relación

$$\omega_{hk} = 2\pi f_{hk} = \frac{c}{R} \xi_{hk} \quad (2.2)$$

para determinar la velocidad de propagación:

$$c = \frac{2\pi \times 60 \times 0,13}{\xi_{0,1}} \simeq 20,4 \frac{m}{s}.$$

Podemos nuevamente utilizar (2.2) para encontrar las frecuencias que deberían sonar según el modelo. En la figura 2.13 se hace una comparación de estas frecuencias con las capturadas por el micrófono. Podemos decir algunas cosas sobre las frecuencias:

- Las frecuencias en la pandereta no siguen ningún patrón sencillo. Esta es posiblemente la razón por la cual la pandereta no suene con una nota definida.
- La frecuencia fundamental no fue detectada por ninguno de los micrófonos, esto lo sabemos con certeza ya que si 141 fuera la frecuencia fundamental, la segunda frecuencia debería ser 1.59 veces este valor, es decir alrededor de 224, el cual está muy lejos de 161.

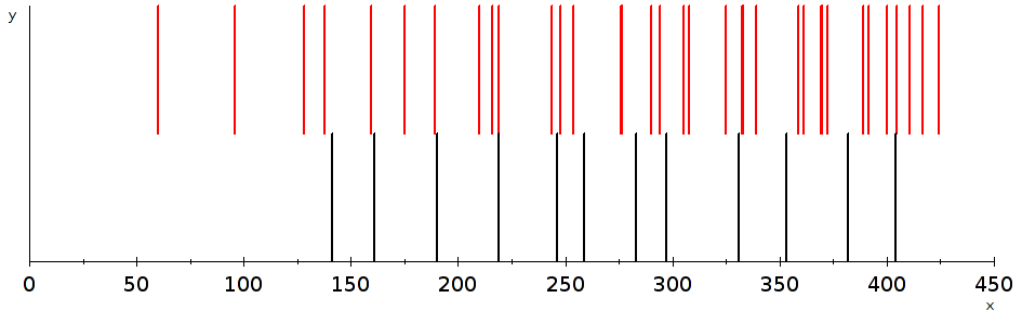


Figura 2.13: Comparación de las frecuencias teóricas (en rojo) contra las experimentales (en negro).

- La teoría nos dice que hay frecuencias que están muy cerca, y en estos casos, cuando se hacen mediciones, es muy difícil decir si en un intervalo pequeño hay una o más frecuencias.
- No se escucharon frecuencias mayores a 410 Hz, probablemente las frecuencias altas se disipaban muy rápido.

y especular sobre otras:

- Creemos que la primera frecuencia que se escucha es la correspondiente al cero radial $\xi_{0,2}$. Según [11], la pandereta y el timbal parecen diferir en esta propiedad, ya que en éste la frecuencia más baja que se escucha es la correspondiente al modo $\xi_{1,1}$.
- Según nuestro gráfico la correspondencia de las frecuencias con los ceros de las funciones de Bessel sería la siguiente: 141 - $\xi_{0,2}$, 161 - $\xi_{3,1}$, 190 - $\xi_{4,1}$, 219 - $\xi_{5,1}$, 246 - $\xi_{6,1}$, 259 - $\xi_{1,3}$, 283 - $\xi_{7,1}$, 297 - $\xi_{0,4}$, 331 - $\xi_{1,4}$, 353 - $\xi_{4,3}$, 382 - $\xi_{11,1}$, 404 - $\xi_{3,3}$.

Por último, queremos comentar algo sobre la multiplicidad de los valores propios del problema de Helmholtz (1.2). Usando sólo un micrófono, es difícil saber cual es la multiplicidad de los valores propios, sin embargo esto es en teoría posible. Por ejemplo en el caso de una membrana rectangular se conoce que los valores propios son de la forma $\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) \pi^2$, donde a y b son las dimensiones de los lados del rectángulo, n y m son números naturales (todo está hecho con detalle en [7]). Si el rectángulo es de dimensiones $a = 1$ y

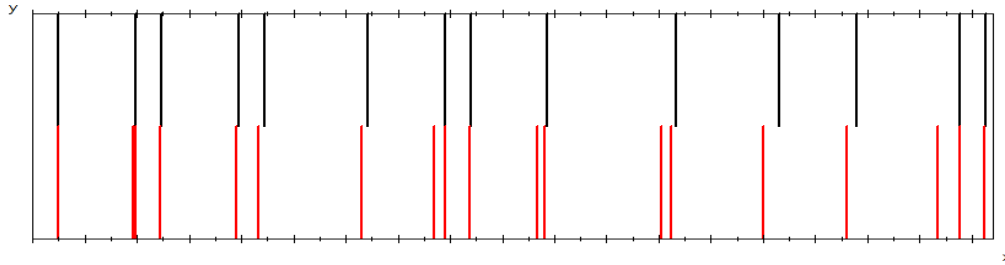


Figura 2.14: Al modificar uno de los lados del rectángulo, los valores propios con multiplicidad mayor que uno se dividen en varios valores propios. Las líneas negras representan los valores propios del rectángulo inicial, y las rojas representan los valores propios del rectángulo modificado.

$b = 2$ entonces los números $n = 1$ $m = 4$ y $n = 2$ $m = 2$ generan el mismo valor propio y por lo tanto el espacio propio asociado a este es de dimensión dos. Pero si tenemos sólo una lista de los valores propios ¿Cómo podemos saber la multiplicidad de cada uno? Si modificamos uno de los lados del rectángulo en una cantidad muy pequeña, y vemos cuales son los valores propios para el nuevo rectángulo sucede algo muy interesante; los valores propios que tenían multiplicidad uno permanecen casi iguales, mientras que los que tenían multiplicidad mayor a uno se dividen en varios valores propios. En la figura 2.14 se muestra esto, ahí las líneas negras representan los valores propios del rectángulo original mientras que las rojas representan los valores propios del rectángulo modificado. Al igual que con el cuadrado esperamos que al modificar ligeramente el marco de la pandereta, por ejemplo haciéndola un poco ovalada, los valores propios de multiplicidad mayor a uno se dividan. Sin embargo, observar esto con un micrófono sería muy difícil, ya que, como en el ejemplo, estos cambios deben ser muy sutiles y por lo tanto difíciles de detectar. Este problema lo abordaremos nuevamente en el capítulo tres.

Capítulo 3

Escuchando el área de un tambor

Todo fabricante de instrumentos musicales sabe que el sonido de un instrumento depende de su forma, podría uno entonces preguntarse, ¿Qué tanta información sobre la geometría de un instrumento viaja en el sonido de este? En 1966 el físico y matemático, Mark Kac, planteó este problema al preguntarse si se podía escuchar la forma de un tambor ([5]). Actualmente se conoce que la respuesta a esta pregunta es negativa; existen membranas de distintas formas con espectros sonoros idénticos (Ver [1]). Sin embargo se pueden saber algunas cosas; en ([5]), Kac da una fórmula para calcular el área de un tambor a partir de su espectro sonoro. De hecho el problema de determinar el área viene de algunos años antes; ya en 1910 H. Lorentz había conjeturado, con respecto a un problema de radiación en cuerpos completamente reflectantes, que las frecuencias de las ondas estacionarias que se forman en el cuerpo tienen un comportamiento asintótico que depende únicamente del volumen del cuerpo. La conjetura puede ser extendida a otros problemas modelados por la ecuación de onda; en el caso del tambor la conjetura toma la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{|\Omega|}{4\pi},$$

donde $N(\lambda)$ es el número de valores propios que satisfacen (1.2) y son menores a λ , y $|\Omega|$ es el área del tambor. Poco tiempo después la conjetura fue demostrada por Herman Weyl, y la ecuación anterior se conoce actualmente como fórmula de Weyl.

En este capítulo repasaremos la prueba de Kac de su fórmula, resultado que desafía el sentido común; ¿Cómo es posible que, sin verlo, se pueda conocer información sobre el tamaño de un tambor, simplemente escuchando su

sonido? Problemas similares aparecen comúnmente en la física matemática, estos se conocen como problemas inversos, y Kac con su artículo acerca de los tambores ([5]) inspiró a muchísimos científicos a trabajar en este tipo de problemas. Al final analizaremos la validez experimental de esta fórmula mostrando algunos cálculos numéricos.

3.1. Una fórmula para el área

La idea ahora es mostrar la prueba de Kac explicando algunos argumentos que el omite, utilizaremos además el principio del máximo para la ecuación del calor para desarrollar parte de la prueba como una alternativa a la demostración de Kac.

Teorema 3.1.1. (Fórmula de Kac para el área de una membrana)
Sean c la velocidad de propagación de las ondas en un tambor, Ω la región del plano que constituye la membrana del tambor, y λ_n los valores propios del problema:

$$\begin{cases} \Delta\varphi_n + \lambda_n \varphi_n = 0, & \text{si } \vec{x} \in \Omega, \\ \varphi_n = 0, & \text{si } \vec{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

entonces se tiene que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(4\pi c^2 t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \right) = |\Omega|. \quad (3.2)$$

Aquí $|\Omega|$ representa el área del tambor en consideración. En lo que sigue supondremos que cada φ_n está normalizada de tal forma que $\iint_{\Omega} \varphi_n^2 d\vec{x} = 1$.

Sin perder de vista estas frecuencias fundamentales y usando su intuición física como guía, Mark Kac, pasa a un contexto físico distinto; más precisamente, pasa a analizar el problema a través de procesos de difusión. Considerando una sustancia, concentrada inicialmente en un único punto, que se difunde a de través la región Ω , y es absorbida en la frontera, se vuelve al mismo problema de valores propios que para la ecuación de onda (3.1). La descripción matemática de este nuevo problema es la siguiente: Sea $P_{\Omega}(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$ la función que describe la concentración de la sustancia en el punto $\vec{x}$ y tiempo t , y que estaba inicialmente concentrada en el punto $\vec{x}_0$.

Entonces $P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$ satisface

$$\begin{cases} \frac{\partial P_\Omega}{\partial t} - c^2 \Delta P_\Omega = 0, & \text{si } (\vec{x}, t) \in \Omega \times (0, \infty), \\ P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \rightarrow 0, & \text{si } \vec{x} \text{ tiende a un punto de frontera,} \\ P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \rightarrow \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), & \text{si } t \rightarrow 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Resolviendo por el método de separación de variables llegamos a lo siguiente:

$$P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \langle \varphi_n, \delta(\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle \varphi_n(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \varphi_n(\vec{x}_0) \varphi_n(\vec{x}). \quad (3.4)$$

Donde los λ_n y φ_n son los mismos que en (3.1), y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual en L^2 .

Existe un motivo por el cual Mark Kac traslada el problema a este contexto; la razón es que existen soluciones explícitas para dos problemas particulares, las cuales acotan a $P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$ superior e inferiormente. Analicemos el primero de estos problemas; se trata de una sustancia que se encuentra inicialmente concentrada en el punto $\vec{x}_0$, y que a partir del tiempo $t = 0$ se difunde libremente en el plano. La solución de este problema la llamaremos P_0 , esta se conoce explícitamente y está dada por (ver [3])

$$P_0(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} e^{-\frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4c^2 t}}.$$

Probemos entonces que $P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \leq P_0(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$, para esto introducimos el principio del máximo para la ecuación del calor.

Teorema 3.1.2. (*Principio del máximo para la ecuación del calor*) Supongamos que $F(t, \vec{x}) \leq 0$ modela una fuente calórica. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ una solución de la ecuación diferencial

$$u_t = c^2 \Delta u + F(t, \vec{x}),$$

entonces el máximo global de u ocurre cuando $t = 0$ o cuando $\vec{x} \in \partial\Omega$.

La demostración de este teorema se encuentra en [7]. Consideremos la función $Q = P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) - P_0(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$, tenemos que Q es solución débil del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} - c^2 \Delta Q = 0, & \text{en } \Omega_T, \\ Q = h(t, \vec{x}) = -\frac{1}{4\pi c^2 t} e^{-\frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4c^2 t}}, & \text{en } \partial\Omega \times (0, T], \\ Q = 0, & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $T > 0$ es un tiempo positivo cualquiera y $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$. Probaremos primero que $Q \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$. Por un lado la función $h \in C^\infty((\bar{\Omega} \setminus A) \times [0, T])$, donde A es cualquier abierto que contenga al punto $\vec{x}_0$. De esta forma h se puede extender suavemente a $\bar{\Omega}_T$, denotaremos por $\hat{h}$ a la extensión de h . Ahora sea $W = Q - \hat{h}$ entonces W satisface:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} - c^2 \Delta W = -\hat{h}_t + c^2 \Delta \hat{h}, & \text{en } \Omega_T, \\ W = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, T] \\ W = 0, & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

Para probar que W es suave recurrimos a un teorema de regularidad exhibido en [3].

Teorema 3.1.3. *Sea L un operador elíptico, $f \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ y $g \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$, entonces existe una única solución $u \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ del problema:*

$$\begin{cases} u_t - Lu = g, & \text{en } \Omega_T, \\ u = 0, & \text{en } \partial\Omega \times (0, T] \\ u = f, & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

En nuestro caso tomamos $L = -\Delta$ y obtenemos que $W \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ y por lo tanto $Q \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$. Aplicando el principio del máximo para la ecuación del calor a Q con las condiciones dadas en (3.5) obtenemos que $Q \leq 0$, es decir $P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \leq P_0(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$.

Tenemos entonces una cota superior para P_Ω ,

$$P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \leq \frac{1}{4\pi c^2 t} e^{-\frac{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2}{4c^2 t}}, \text{ en particular, } P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \leq \frac{1}{4\pi c^2 t}. \quad (3.6)$$

Ahora consideremos un cuadrado S de lado a y con centro $\vec{x}_0$, que esté completamente contenido en Ω y cuya frontera sea completamente absorbente. Si denotamos por $P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$ la función de densidad de la sustancia, entonces P_S satisface lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_S}{\partial t} - c^2 \Delta P_S = 0, & \text{si } (\vec{x}, t) \in S \times (0, \infty), \\ P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \rightarrow 0, & \text{si } \vec{x} \text{ tiende a un punto de frontera de } S, \\ P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) \rightarrow \delta(\vec{x} - \vec{x}_0), & \text{si } t \rightarrow 0. \end{cases}$$

Utilizando separación de variables en las componentes espaciales (ver [7]) se llega a que P_S está dada explícitamente por

$$P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) = \frac{4}{a^2} \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) \exp\left[-\frac{(m^2 + n^2) c^2 \pi^2}{a^2} t\right] \times \\ \sin\left(\frac{x - x_0 + \frac{a}{2}}{a} n \pi\right) \sin\left(\frac{y - y_0 + \frac{a}{2}}{a} m \pi\right).$$

En particular para $\vec{x} = \vec{x}_0$ se tiene

$$P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) = \frac{4}{a^2} \sum_{\substack{n,m \\ \text{impares}}} \exp\left[-\frac{(m^2 + n^2) c^2 \pi^2}{a^2} t\right].$$

Nuevamente definimos $Q = P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}; t) - P_{\Omega}(\vec{x}_0 | \vec{x}; t)$, así Q satisface condiciones análogas a (3.5). Con estas hipótesis y con los mismos argumentos que siguen a (3.5), se comprueba que $Q \leq 0$ y por lo tanto

$$P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \leq P_{\Omega}(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \leq \frac{1}{4\pi c^2 t}. \quad (3.7)$$

Por otro lado, sea $\alpha = \frac{c^2 \pi^2}{a^2}$ entonces tenemos que

$$\sum_{\substack{n,m \\ \text{impares}}} 4 \exp\left[-\frac{(m^2 + n^2) c^2 \pi^2}{a^2} t\right] = 4 \frac{t}{t} \sum_{\substack{n,m \\ \text{impares}}} \exp\left[-\left((m\sqrt{t})^2 + (n\sqrt{t})^2\right) \alpha\right],$$

donde

$$4t \sum_{\substack{n,m \\ \text{impares}}} \exp\left[-\left((m\sqrt{t})^2 + (n\sqrt{t})^2\right) \alpha\right] \quad (3.8)$$

es una suma de Riemann para la integral

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)\alpha} dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2\alpha} d\theta dr = \frac{\pi}{4\alpha} = \frac{a^2}{4\pi c^2},$$

donde las particiones se toman como cuadrados de lado $2\sqrt{t}$, tal como se muestra en la figura 3.1. Ahora, cuando t tiende a cero el diámetro de las particiones se hace infinitamente pequeño y por lo tanto (3.8) converge a $\frac{a^2}{4\pi c^2}$ y por lo tanto $P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \rightarrow \frac{1}{4\pi c^2 t}$ cuanto $t \rightarrow 0$. Tenemos entonces que

$$P_S(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \leq P_{\Omega}(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \leq \frac{1}{4\pi c^2 t}$$

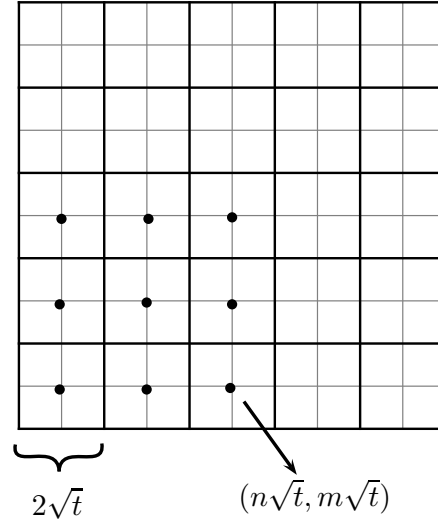


Figura 3.1: Se parte el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$ en infinitos cuadrados de lado $2\sqrt{t}$ y se considera la suma de Riemann correspondiente a esta partición, donde la función es evaluada en el centro de cada cuadrado.

y $P_S \rightarrow \frac{1}{4\pi c^2 t}$, además esta convergencia es independiente de $\vec{x}_0$, por lo tanto podemos decir que $4\pi c^2 t P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \rightarrow 1$ uniformemente cuando $t \rightarrow 0$, a su vez $P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \varphi_n^2(\vec{x}_0)$ converge uniformemente a una función infinitamente diferenciable para cualquier $t > 0$. Integrando sobre Ω obtenemos lo siguiente:

$$\iint_{\Omega} \left(\lim_{t \rightarrow 0} 4\pi c^2 t P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \right) d\vec{x}_0 = |\Omega|,$$

pero

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left(\lim_{t \rightarrow 0} 4\pi c^2 t P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) \right) d\vec{x}_0 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(4\pi c^2 t \iint_{\Omega} P_\Omega(\vec{x}_0 | \vec{x}_0; t) d\vec{x}_0 \right), \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(4\pi c^2 t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \iint_{\Omega} \varphi_n^2(\vec{x}_0) d\vec{x}_0 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(4\pi c^2 t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \right) \end{aligned}$$

Se tiene $\lim_{t \rightarrow 0} \left(4\pi c^2 t \sum_{n=1}^{\infty} e^{-c^2 \lambda_n t} \right) = |\Omega|$; una fórmula asintótica para el área de la membrana.

3.2. El sonido de π

Antes de verificar la validez experimental de la fórmula, haremos algunos cálculos numéricos para mostrar que la fórmula funciona en un caso particular. Para esto consideremos una membrana circular de radio 1 m y $c = 1 m/s$, la fórmula de Kac dice que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(4\pi t \sum_{m,n} e^{-\xi_{m,n}^2 t} \right) = \pi. \quad (3.9)$$

Aproximaremos este límite de forma numérica, para esto tenemos una lista con todos los ceros de las funciones de Bessel menores a 100 (un total de 1244 ceros), los cuales ordenaremos y llamaremos ξ_n . Cuando los organizamos de esta forma, tenemos en cuenta la multiplicidad, los ceros correspondientes a modos radiales se cuentan sólo una vez, el resto se cuentan dos veces. Lo que haremos será cortar la serie infinita en un número N , y haremos variar t en la expresión

$$S(N, t) = 4\pi t \sum_{n=1}^N e^{-\xi_n^2 t}. \quad (3.10)$$

El comportamiento de $S(N, t)$ con respecto a $\frac{1}{t}$ se muestra en la figura 3.2, en este caso $N = 200$, podemos observar que $S(N, t)$ alcanza un máximo. Si se hace lo mismo para distintos valores de N se obtiene algo como lo que se muestra en la figura 3.3, aquí se tiene una sucesión de funciones $(S(N, t))_N$, cada función tiene un máximo, y los máximos forman una sucesión creciente que debe converger a π . La línea negra corresponde a una extrapolación de los máximos, está se hizo teniendo en cuenta que la sucesión debe converger y observando el comportamiento de estos que se asemeja a una función del tipo

$$f(x) = -\frac{a}{x^c} + b, \text{ con } a, b, c > 0.$$

Los valores de a , b y c se calcularon escogiendo tres máximos igualmente espaciados ($N = 400$, $N = 700$, $N = 1000$), con las coordenadas de estos salen tres ecuaciones con tres incógnitas las cuales se resuelven para encontrar los valores deseados. En este caso obtuvimos $a = 6,107$, $b = 3,1422$ y $c = 0,501$. El valor de b será el valor hacia el cual converge esta función, este será nuestro estimativo del valor hacia el cual converge la sucesión de máximos en consideración. La extrapolación es necesaria debido a que al aumentar bastante el

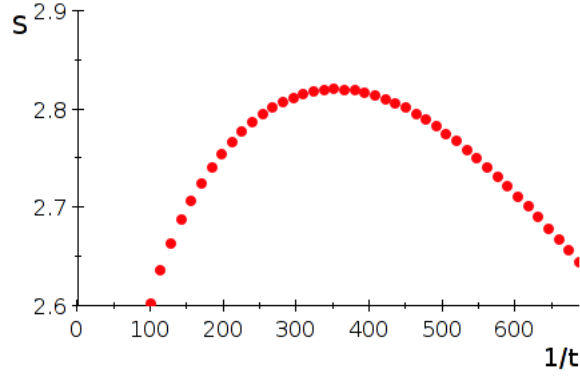


Figura 3.2: Gráfica de $S(N, t)$ con respecto a $\frac{1}{t}$ ($N = 200$).

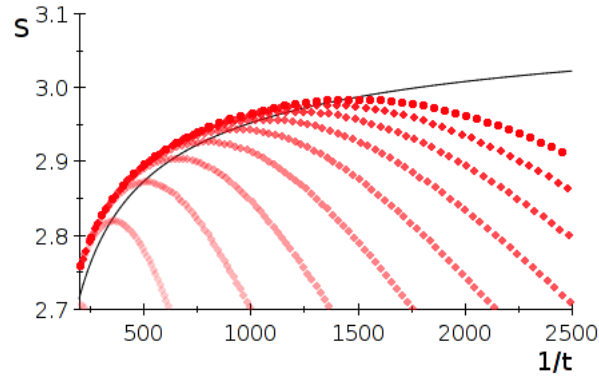


Figura 3.3: Gráfica de $S(N, t)$ con respecto a $\frac{1}{t}$ ($N = 200, 300, \dots, 1000$).

corte N , la suma (3.10) no cambia mucho y se necesitan muchísimos valores propios para acercarse lo suficiente al límite. Vemos que el valor obtenido de b es bastante cercano a π , como se esperaba y se pretendía mostrar. Esta sería una representación de π que proviene del sonido de una membrana circular.

3.3. Validez experimental de la fórmula

En esta sección repetiremos lo que se hizo en la sección anterior pero con las frecuencias medidas en el experimento. En el capítulo anterior hicimos una correspondencia entre cada una de las frecuencias y los ceros de las funciones

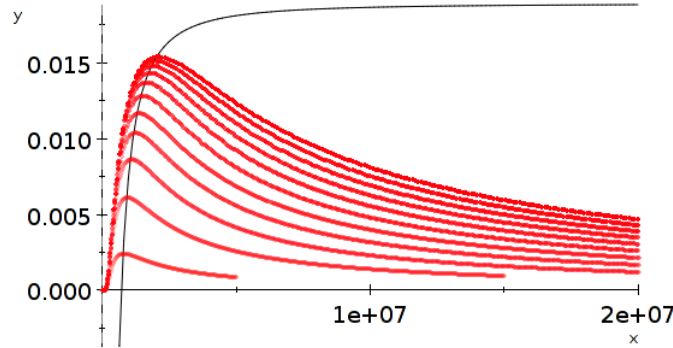


Figura 3.4: Gráfica de $S(N, t)$ con respecto a $\frac{1}{t}$ para las frecuencias experimentales. En este caso son pocas las frecuencias disponibles; el N más grande es 22.

de Bessel, usaremos esta para decidir la multiplicidad de los valores propios, las frecuencias con un cero correspondiente del tipo $\xi_{0,n}$ tendrán multiplicidad uno, el resto tendrán multiplicidad 2. Las frecuencias que se contaran sólo una vez son 141 y 297. La velocidad con la que trabajaremos será de 20,4 metros por segundo. Esta velocidad es un poco baja en comparación con velocidades medidas en tambores más grandes, en los cuales se han registrado velocidades de alrededor de 100 metros por segundo (Ver [2]), sin embargo, no está por fuera del orden de magnitud de estas velocidades. Con estos datos hicimos lo mismo que en la sección anterior, esta vez la suma en consideración sería

$$S(N, t) = 5219 t \sum_{n=1}^N e^{-(2\pi \text{freq}_n)^2 t},$$

donde freq_n es la n -ésima frecuencia (contando considerando la multiplicidad). Los valores de los parámetros para la línea de tendencia fueron $a = 9,1 \times 10^7$, $b = 0,019$, $c = 1,64$, según esto el área de la pandereta es de $0,019 \text{ m}^2$; la gráfica de las sumas $S(N, t)$ se muestran en la figura 3.4. De esta forma tenemos que

$$\pi \simeq \frac{\text{área}}{R^2} = \frac{0,019}{0,13^2} \simeq 1,12.$$

Esto nos indica que la fórmula no es precisa si no se tienen suficientes frecuencias medidas. Sin embargo, el orden de magnitud es correcto, de esta forma podemos concluir que la fórmula no es del todo inválida experimentalmente.

Capítulo 4

Conclusiones y perspectivas

Usando tecnología casera pudimos medir con buena precisión las frecuencias que contribuyen al sonido de una pandereta. Desde la teoría sabíamos que habían frecuencias muy cercanas y por esto el experimento no nos permitiría identificarlas a todas, sin embargo, se detectó un buen número de ellas (doce), y se ajustaron bastante bien al modelo teórico. Para futuros experimentos se puede aplicar el método de las configuraciones de Chladni, tal como lo hacen en los artículos [11] y [12]; esta técnica permite identificar las frecuencias con los ceros de las funciones de Bessel correspondientes de manera certera. En el momento estamos preparando un experimento para hacer un análisis de sonido de una caja vallenata, un instrumento típico colombiano usado para tocar la música del Vallenato. Este es un instrumento muy profesional, y a diferencia de la pandereta su membrana consiste de un acetato plástico, el cual es homogéneo y no tiene imperfecciones como el cuero. El énfasis en los nuevos experimentos será en las configuraciones de Chladni que, como dijimos, nos ayudarán a determinar con certeza la correspondencia entre los ceros de las funciones de Bessel y las frecuencias encontradas. En este trabajo ya tuvimos una primera experiencia exitosa con este método que nos permitió determinar la frecuencia fundamental. En relación con la fórmula de Kac, no conocemos ningún método que nos permita identificar la multiplicidad de los valores propios a partir de su sonido sin cambiar la geometría del tambor. De esta manera, en la práctica, la pregunta planteada por Kac es en realidad mucho más difícil ya que, aun teniendo una fórmula que da información sobre la geometría del tambor, su aplicación requiere información que es difícil de obtener. Además vimos en la sección 3.2 que la sucesión de los máximos de $(S(N, t))_N$ converge muy lentamente, y son

necesarios muchos valores propios para dar un estimativo preciso; añadiendo así otra dificultad experimental.

4.1. Agradecimientos y créditos

Quiero agradecer a Álvaro Ramirez del Grupo de Transiciones de Fase de la Universidad del Valle por su valiosa ayuda en los experimentos.

Los programas, las imágenes, los micrófonos y la grabadora utilizados están listados a continuación

- Micrófono 1: DPA-4099T.
- Micrófono 2: Selmer 723 (micrófono de contacto).
- Grabadora: Sony IC Recorder, ICD P210.
- Programas utilizados: MuPad 4.0; SND 11.6; Digital Voice Editor 3.3.01.
- La figura 1 fue tomada de Wikipedia: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Riqq.jpg>.
- La figura 1.2 fue tomada de Wikipedia: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anatomy_of_the_Human_Ear.es.png.

Bibliografía

- [1] CHAPMAN, S. J. Drums that sound the same. *The American Mathematical Monthly* 102, 2 (1995), 15.
- [2] EATON, B. Study of a physical drum. <https://ccrma.stanford.edu/~be/drum/drum.htm>, 2000.
- [3] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 1998.
- [4] GILLIAN, D. S. Discrete fourier transform. <http://texas.math.ttu.edu/~gilliam/ttu/dft.pdf>.
- [5] KAC, M. Can one hear the shape of a drum? *The American Mathematical Monthly* 73, 4 (1966), 23.
- [6] MIYARA, F. La música de las esferas: De pitágoras a xenakis... y más aca. <http://www.sectormatematica.cl/musica/esferas.pdf>.
- [7] OLVER, P. Introduction to partial differential equations. <http://www.math.umn.edu/~olver/pdn.html>, 2011.
- [8] PAPPARELLA, M. M., AND SHUMRICK, D. A. *Otolaryngology*, second ed., vol. 1 of *Basic Sciences and Related Disciplines*. W. B. Saunders Company, 1980.
- [9] POPOVA, E. Bessel zeros calculator. <http://cose.math.bas.bg/webMathematica/webComputing/BesselZeros.jsp>.
- [10] RESTREPO, G. *Introducción al análisis funcional*. Editorial Universidad del Valle, Septiembre 2010.

-
- [11] ROSSING, T. Física de los timbales. *Investigación y Ciencia* 21 (2000), 8.
 - [12] SATHEJ, G., AND ADHIKARI, R. The eigenspectra of indian musical drums. <http://arXiv.org/abs/0809.1320v1>, 2008.