Vol. XX, No 1, Junio (2012)
Matemáticas: 63–68

**Matemáticas:**
**Enseñanza Universitaria**


# Construcción de acciones parciales

Jesús Ávila
Universidad del Tolima

Liliana Hernández-González
Universidad del Tolima

Andrea Ortiz-Jara
Universidad del Tolima

Recibido Ago. 17, 2011 Aceptado Abr. 25, 2012

**Abstract**

In this paper we extend several well-known constructions in the theory of global actions to the more general framework of partial actions. In particular, we construct partial actions on the cartesian product $X \times Y$, the disjoint union $X \sqcup Y$, the set of functions $Y^X$ and the power set $P(X)$.

**Keywords:** Global action, Partial action.

**MSC(2000):** 58E40, 58D19

**Resumen**

En este trabajo extendemos varias construcciones bien conocidas en la teoría de acciones globales al contexto de acciones parciales. En particular, construimos acciones parciales sobre el producto cartesiano, la unión disjunta, el conjunto de funciones y el conjunto potencia.

**Palabras y frases claves:** Acción global, Acción parcial.

## 1 Introducción

Recientemente fueron introducidas las acciones parciales de grupos sobre conjuntos, las cuales han mostrado ser una muy buena generalización de las bien conocidas acciones globales. La definición formal de este concepto fue dada por Exel en [4], después Abadie en [1] dio inicio al estudio de las acciones envolventes de una acción parcial.

El desarrollo de esta teoría durante los últimos once años muestra que las acciones parciales son una poderosa herramienta para generalizar resultados de las acciones globales. Se destaca su versatilidad para ser utilizada en numerosas áreas de la matemática como sistemas dinámicos, topología y álgebra (ver [3], [5] y sus referencias). Relacionado directamenet con el espíritu del presente trabajo se destaca el estudio de Choi y Lim [3], donde definen las acciones parciales transitivas y prueban algunos resultados análogos a los conocidos en el caso global. Igualmente, Ávila et al. en [2] definen órbitas y estabilizadores parciales y estudian su relación con la acción envolvente de la acción parcial inicial.

A pesar de los estudios realizados sobre acciones parciales, el problema de construir nuevas acciones a partir de algunas conocidas no ha sido considerado. En la Sección 2 presentamos varias extensiones de acciones globales. En la Sección 3 se extienden al caso parcial las construcciones de la Sección 2. En particular, se construyen acciones parciales sobre el producto cartesiano, la unión disjunta, el conjunto de funciones y sobre el conjunto potencia.

## 2 Construcción de acciones globales

**Definición 1.** *Sea $X$ un conjunto no vacío y $G$ un grupo con elemento neutro 1. Una* ***acción global*** *de $G$ sobre $X$ es una función de $G \times X$ en $X$ que satisface:*

*(i) Para cada $x \in X$, $1 \cdot x = x$.*

*(ii) Para cada $x \in X$ y cada $g, h \in G$, $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.*

Si $G$ actúa sobre $X$ diremos que $X$ es un $G-$conjunto. Note que análogamente podrían definirse acciones por la derecha.

En general no es difícil hallar acciones de grupos, pues si $X$ es un conjunto y $S_X$ es el grupo de todas las biyecciones de $X$, entonces $X$ es un $S_X-$conjunto. Si $X$ es un $G-$conjunto, entonces para cada $g \in G$ la función $f_g : X \to X$ definida como $f_g(x) = g \cdot x$ para cada $x \in X$ es biyectiva. Esta asociación permite definir un homomorfismo de grupos de $G$ a $S_X$, por lo que claramente el conjunto de biyecciones $\{f_g \mid g \in G\}$ determinan completamente la acción.

Es clásico en matemáticas construir estructuras nuevas a partir de algunas conocidas. Por ejemplo en topología y álgebra es usual ver construcciones que involucren productos, uniones, intersecciones y cocientes. En el caso de acciones globales sobre conjuntos presentamos las siguientes, algunas de las cuales se encuentran en [6] (Secciones 1.2 y 1.3).

*Extensión al producto cartesiano.* Si $G$, $H$ son grupos que actúan sobre $X$ e $Y$ respectivamente, entonces $G \times H$ actúa sobre $X \times Y$ definiendo $(g, h) \cdot (x, y) = (g \cdot x, h \cdot y)$. En efecto, $(1, 1) \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$ para cada $(x, y) \in X \times Y$. Y para cada $(g, h)$, $(g', h') \in G \times H$ y cada $(x, y) \in X \times Y$, se tiene $((g, h)(g', h')) \cdot (x, y) = (gg', hh') \cdot (x, y) = ((gg') \cdot x, (hh') \cdot y) = (g \cdot (g' \cdot x), h \cdot (h' \cdot y)) = (g, h) \cdot (g' \cdot x, h' \cdot y) = (g, h) \cdot ((g', h') \cdot (x, y))$. De donde $X \times Y$ es un $(G \times H)-$conjunto.

Para $X$ e $Y$ conjuntos no vacíos, se denota su unión disjunta por $X \sqcup Y$. En general puede asumirse que $X$ e $Y$ son disjuntos.

*Extensión a la unión disjunta.* Si $G$, $H$ son grupos que actúan sobre $X$ e $Y$ respectivamente, entonces $G \times H$ actúa sobre $X \sqcup Y$ definiendo

$$(g, h) \cdot z = \begin{cases} g \cdot z, & \text{si } z \in X \\ h \cdot z, & \text{si } z \in Y. \end{cases}$$

Se tiene:

$i$) Para cada $z \in X \sqcup Y$,

$$(1, 1) \cdot z = \begin{cases} 1 \cdot z = z, & \text{si } z \in X \\ 1 \cdot z = z, & \text{si } z \in Y \end{cases}$$

*ii*) Para cada $(g,h)$, $(g',h') \in G \times H$ y cada $z \in X \sqcup Y$

$$(g,h)(g',h') \cdot z = (gg',hh') \cdot z = \begin{cases} (gg') \cdot z & \text{si } z \in X \\ (hh') \cdot z & \text{si } z \in Y \end{cases}$$
$$= \begin{cases} g \cdot (g' \cdot z) & \text{si } g \cdot z \in X \\ h \cdot (h' \cdot z) & \text{si } g \cdot z \in Y \end{cases}$$
$$= (g,h) \cdot ((g',h') \cdot z).$$

Así $X \sqcup Y$ es un $(G \times H)-$conjunto.

Dados los conjuntos no vacíos $X$ e $Y$, se define $Y^X$ como el conjunto de todas las funciones de $X$ en $Y$. A continuación se muestra que naturalmente se obtiene una acción sobre $Y^X$ a partir de una acción sobre $Y$.

*Extensión al conjunto de funciones* $Y^X$. Si $X$ e $Y$ son conjuntos no vacíos y el grupo $H$ actúa sobre $Y$, entonces $H$ actúa sobre $Y^X$. En efecto, para $h \in H$ y $\eta \in Y^X$ definimos $h \cdot \eta = f_h \circ \eta$. Así para cada $x \in X$ se tiene que $(1 \cdot \eta)(x) = (f_1 \circ \eta)(x) = \eta(x)$. Luego $1 \cdot \eta = \eta$. Ahora para $h, h' \in H$, $\eta \in Y^X$ y $x \in X$ se tiene $(hh' \cdot \eta)(x) = (f_{hh'} \circ \eta)(x) = (hh') \cdot \eta(x) = h \cdot (h' \cdot \eta(x)) = h \cdot ((f_{h'} \circ \eta)(x)) = (f_h \circ (f_{h'} \circ \eta))(x) = (h \cdot (h' \cdot \eta))(x)$. De donde $(hh') \cdot \eta = h \cdot (h' \cdot \eta)$ y así $Y^X$ es un $H-$conjunto.

*Entensión al conjunto potencia* $P(X)$. Si $G$ es un grupo que actúa sobre $X$, entonces $G$ actúa sobre el conjunto $P(X)$. Para $g \in G$ y $A \in P(X)$ definimos $g \cdot A = f_g(A) = \{g \cdot a : a \in A\}$. Así es evidente que $1 \cdot A = f_1(A) = A$ para cada $A \in P(X)$. Ahora para cada $g$, $h \in G$ y cada $A \in P(X)$, se tiene $(gh) \cdot A = f_{gh}(A) = f_g(f_h(A)) = g \cdot (h \cdot A)$. De donde $P(X)$ es un $G-$conjunto.

## 3 Construcción de acciones parciales

En esta sección generalizamos las construcciones de la sección anterior al caso parcial. En particular construimos acciones parciales sobre el producto cartesiano, la unión disjunta, el conjunto de funciones y sobre el conjunto potencia. Comenzamos con la definición de acción parcial [4].

**Definición 2.** *Sea $X$ un conjunto no vacío y $G$ un grupo con elemento neutro* 1. *Una* ***acción parcial*** *$\alpha$ de $G$ sobre $X$ es una colección de subconjuntos $S_g \subseteq X$ con $g \in G$ y biyecciones $\alpha_g : S_{g^{-1}} \to S_g$ tales que para todo $g, h \in G$ se cumple:*

*(i)* $S_1 = X$ *y* $\alpha_1$ *es la función identidad de* $X$.

*(ii)* $\alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}}) \subseteq S_{(gh)^{-1}}$.

*(iii)* $(\alpha_g \circ \alpha_h)(x) = \alpha_{gh}(x)$ *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(S_h \cap S_{g^{-1}})$.

La acción parcial $\alpha$ de $G$ sobre $X$ también será denotada por $\alpha = \{S_g, \alpha_g\}_{g \in G}$. Note que $(iii)$ implica que $\alpha_g^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ para todo $g \in G$.

**Afirmación 1.** *Si $\alpha$ y $\alpha'$ son acciones parciales de $G$ y $H$ sobre $X$ e $Y$ respectivamente, entonces $G \times H$ actúa parcialmente sobre $X \times Y$.*

*Demostración.* Asumamos que $\alpha = \{X_g, \alpha_g\}_{g\in G}$ y $\alpha' = \{Y_h, \alpha'_h\}_{h\in H}$. Para cada $(g,h) \in G \times H$ definimos $S_{(g,h)} = X_g \times Y_h$ y $\beta_{(g,h)} : S_{(g,h)^{-1}} \to S_{(g,h)}$ como $\beta_{(g,h)}(x,y) = (\alpha_g(x), \alpha'_h(y))$ para todo $x \in X_{g^{-1}}$ y todo $y \in Y_{g^{-1}}$.

Es claro que $\beta_{(g,h)}$ está bien definida y es una biyección, pues $\alpha_g$ y $\alpha'_h$ lo son. Ahora pasemos a verificar *(ii)* y *(iii)* de la Definición 2.1, ya que *(i)* es evidente.

*(ii)* Si $(x,y) \in \beta^{-1}_{(g',h')}(S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}})$ entonces $\beta_{(g',h')}(x,y) = (\alpha_{g'}(x), \alpha'_{h'}(y)) \in S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}} = (X_{g'} \cap X_{g^{-1}}) \times (Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}})$. Así $x \in \alpha^{-1}_{g'}(X_{g'} \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gg')^{-1}}$ y $y \in \alpha'^{-1}_{h'}(Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}}) \subseteq Y_{(hh')^{-1}}$. De donde $(x,y) \in (X_{(gg')^{-1}} \times Y_{(hh')^{-1}}) = S_{(gg',hh')^{-1}}$, que era lo que se quería probar.

*(iii)* Si $(x,y) \in \beta^{-1}_{(g',h')}(S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}})$, entonces $(\beta_{(g,h)} \circ \beta_{(g',h')})(x,y) = (\alpha_g(\alpha_{g'}(x)), \alpha'_h(\alpha'_{h'}(y))) = (\alpha_g \circ \alpha_{g'}(x), \alpha'_h \circ \alpha'_{h'}(y))$. Como por *(ii)*, $x \in \alpha^{-1}_{g'}(X_{g'} \cap X_{g^{-1}})$ e $y \in \alpha'^{-1}_{h'}(Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}})$ se tiene $(\alpha_g \circ \alpha_{g'}(x), \alpha'_h \circ \alpha'_{h'}(y)) = (\alpha_{gg'}(x), \alpha'_{hh'}(y)) = \beta_{(gg',hh')}(x,y)$ ya que $(x,y) \in S_{(gg',hh')^{-1}}$. Por tanto $(\beta_{(g,h)} \circ \beta_{(g',h')})(x,y) = \beta_{(gg',hh')}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \beta^{-1}_{(g',h')}(S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}})$. □

**Afirmación 2.** *Si $\alpha$ y $\alpha'$ son acciones parciales de $G$ y $H$ sobre $X$ e $Y$ respectivamente, entonces $G \times H$ actúa parcialmente sobre $X \sqcup Y$.*

*Demostración.* Asumamos que $\alpha = \{X_g, \alpha_g\}_{g\in G}$ y $\alpha' = \{Y_h, \alpha'_h\}_{h\in H}$. Definimos $S_{(g,h)} = X_g \sqcup Y_h \subseteq X \sqcup Y$ y $\beta_{(g,h)} : S_{(g,h)^{-1}} \to S_{(g,h)}$ por

$$\beta_{(g,h)}(z) = \begin{cases} \alpha_g(z), & \text{si } z \in X_{g^{-1}} \\ \alpha'_h(z), & \text{si } z \in Y_{h^{-1}}. \end{cases}$$

Es claro que $\beta_{(g,h)}$ está bien definida. Ahora, sean $z$, $z' \in S_{(g,h)^{-1}} = X_{g^{-1}} \sqcup Y_{h^{-1}}$ tales que $\beta_{(g,h)}(z) = \beta_{(g,h)}(z')$. Si $z$, $z' \in X_{g^{-1}}$ entonces $\alpha_g(z) = \alpha_g(z')$ y así $z = z'$. Si $z$, $z' \in Y_{h^{-1}}$ $\alpha'_h(z) = \alpha'_h(z')$ y así $z = z'$. El caso $z \in X_{g^{-1}}$ y $z' \in Y_{h^{-1}}$ no puede darse porque implicaría que $X$ tiene intersección no vacía con $Y$. Luego $\beta_{(g,h)}$ es inyectiva.

Para cada $z \in S_{(g,h)}$ existe $z' \in S_{(g,h)^{-1}}$ definido como

$$z' = \begin{cases} \alpha_{g^{-1}}(z), & \text{si } z \in X_g \\ \alpha'_{h^{-1}}(z), & \text{si } z \in Y_h \end{cases}$$

tal que $\beta_{(g,h)}(z') = z$, por lo que $\beta_{(g,h)}$ es sobre y por lo tanto biyectiva para cada $(g,h) \in G \times H$.

Ahora verifiquemos *(i)*, *(ii)* y *(iii)* de la Definición 2.1. *(i)* es evidente.

*(ii)* Si $z \in \beta^{-1}_{(g',h')}(S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}})$, entonces $\beta_{(g',h')}(z) \in S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}} = (X_{g'} \cap X_{g^{-1}}) \sqcup (Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}})$. Si $\beta_{(g',h')}(z) \in X_{g'} \cap X_{g^{-1}}$ entonces $z \in X_{g'^{-1}}$ y $\beta_{(g',h')}(z) =$

$\alpha_{g'}(z) \in X_{g'} \cap X_{g^{-1}}$. De donde, $z \in \alpha_{g'}^{-1}(X_{g'} \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gg')^{-1}}$. Si $\beta_{(g',h')}(z) \in Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}}$ entonces $z \in Y_{h'^{-1}}$ y $\beta_{(g',h')}(z) = \alpha'_{h'}(z) \in Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}}$. De donde, $z \in \alpha_{h'}'^{-1}(Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}}) \subseteq Y_{(hh')^{-1}}$. Por tanto $z \in X_{(gg'^{-1})} \sqcup Y_{(hh')^{-1}} = S_{(gg',hh')^{-1}}$ que era lo que se quería probar.

*(iii)* Si $z \in \beta_{(g',h')}^{-1}(S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}})$, entonces

$$(\beta_{(g,h)} \circ \beta_{(g',h')})(z) = \begin{cases} \alpha_{gg'}(z), & \text{si } z \in X_{g'^{-1}} \\ \alpha'_{hh'}(z), & \text{si } z \in Y_{h'^{-1}}. \end{cases}$$

Y como por *(ii)* $z \in S_{(gg',hh')^{-1}}$, se tiene $(\beta_{(g,h)} \circ \beta_{(g',h')})(z) = \beta_{(gg',hh')}(z)$ para todo $z \in \beta_{(g',h')}^{-1}(S_{(g',h')} \cap S_{(g,h)^{-1}})$. □

**Afirmación 3.** *Si $H$ actúa parcialmente sobre $Y$ entonces $H$ actúa parcialmente sobre el conjunto $Y^X$ de todas las funciones de $X$ en $Y$.*

*Demostración.* Asumamos que la acción parcial de $H$ sobre $Y$ está dada por $\alpha = \{Y_h, \alpha_h\}_{h\in H}$. Para cada $h \in H$ definimos $F_h = \{f : X \to Y \mid f(X) \subseteq Y_h\}$ y $\beta_h : F_{h^{-1}} \to F_h$ como $\beta_h(f) = \alpha_h \circ f$ para toda $f \in F_{h^{-1}}$.

Es claro que $\beta_h$ está bien definida. Ahora, sean $f$, $f^* \in F_{h^{-1}}$ tales que $\beta_h(f) = \beta_h(f^*)$. Entonces $\alpha_h \circ f = \alpha_h \circ f^*$ y así $\alpha_h(f(x)) = (\alpha_h \circ f)(x) = (\alpha_h \circ f^*)(x) = \alpha_h(f^*(x))$ para cada $x \in X$. Como $\alpha_h$ es inyectiva entonces $f(x) = f^*(x)$ para cada $x \in X$ y así $f = f^*$. Por tanto $\beta_h$ es inyectiva.

Para cada $f \in F_h$ existe $f^* \in F_{h^{-1}}$ definido como $f^* = \alpha_h^{-1} \circ f$ tal que $\beta_h(f^*) = \alpha_h \circ f^* = \alpha_h \circ (\alpha_h^{-1} \circ f) = (\alpha_h \circ \alpha_h^{-1}) \circ f = id_{Y_{h^{-1}}} \circ f = f$. Luego $\beta_h$ es sobre y biyectiva para cada $h \in H$. Ahora pasemos a verificar *(i)*, *(ii)* y *(iii)* de la Definición 2.1.

*(i)* $F_1 = \{f : X \to Y \mid f(X) \subseteq Y_1 = Y\} = Y^X$. Ahora, $\beta_1 : F_1 \to F_1$ está definida como $\beta_1(f) = \alpha_1 \circ f$, esto es, $(\alpha_1 \circ f)(x) = \alpha_1(f(x)) = f(x)$, para cada $x \in X$. Luego $\beta_1(f) = f$ para todo $f \in Y^X$ y entonces $\beta_1$ es la función identidad de $Y^X$.

*(ii)* Si $f \in \beta_{h'}^{-1}(F_{h'} \cap F_{h^{-1}})$ entonces $\beta_{h'}(f) = \alpha_{h'} \circ f \in F_{h'} \cap F_{h^{-1}} = \{f : X \to Y \mid f(X) \subseteq Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}}\}$. Luego para cada $x \in X$ se tiene $\alpha_{h'}(f(x)) \in (Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}})$ y así $f(x) \in \alpha_{h'}^{-1}(Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}}) \subseteq Y_{(hh')^{-1}}$. De donde $f \in \{f : X \to Y \mid f(X) \subseteq Y_{(hh')^{-1}}\} = F_{(hh')^{-1}}$, que era lo que se quería probar.

*(iii)* Para todo $f \in \beta_{h'}^{-1}(F_{h'} \cap F_{h^{-1}})$ se tiene que $(\beta_h \circ \beta_{h'})(f) = \alpha_h \circ (\alpha_{h'} \circ f)$. Luego para cada $x \in X$, $(\alpha_h \circ (\alpha_{h'} \circ f))(x) = (\alpha_{hh'} \circ f)(x)$, ya que por *(ii)* $f(x) \in \alpha_{h'}^{-1}(Y_{h'} \cap Y_{h^{-1}})$. Como $\alpha_{hh'} \circ f = \beta_{hh'}(f)$ se tiene que $(\beta_h \circ \beta_{h'})(f) = \beta_{hh'}(f)$. □

**Afirmación 4.** *Si $G$ actúa parcialmente sobre $X$, entonces $G$ actúa parcialmente sobre $P(X)$.*

*Demostración.* Asumamos que la acción parcial de $G$ sobre $X$ está dada por $\alpha = \{X_g, \alpha_g\}_{g\in G}$. Definimos $S_g = P(X_g) \subseteq P(X)$ y $\beta_g : S_{g^{-1}} \to S_g$ como $\beta_g(A) = \{\alpha_g(a) : a \in A\}$ para cada $g \in G$ y cada $A \in P(X_g)$.

Es claro que $\beta_g$ está bien definida y es una biyección, pues $\alpha_g$ lo es. Ahora pasemos a verificar *(ii)* y *(iii)* de la Definición 2.1, ya que *(i)* es evidente.

*(ii)* Si $A \in \beta_{g'}^{-1}(S_{g'} \cap S_{g^{-1}})$, entonces $\beta_{g'}(A) = \{\alpha_{g'}(a) : a \in A\} \in S_{g'} \cap S_{g^{-1}} = P(X_{g'} \cap X_{g^{-1}})$. Luego $\alpha_{g'}(a) \in X_{g'} \cap X_{g^{-1}}$ para cada $a \in A$. Así $a \in \alpha_{g'}^{-1}(X_{g'} \cap X_{g^{-1}}) \subseteq X_{(gg')^{-1}}$ para cada $a \in A$. De donde $A \in P(X_{(gg')^{-1}}) = S_{(gg')^{-1}}$, que era lo que se quería probar.

*(iii)* Para todo $A \in \beta_{g'}^{-1}(S_{g'} \cap S_{g^{-1}})$ se tiene que $(\beta_g \circ \beta_{g'})(A) = \{(\alpha_g \circ \alpha_{g'})(a) : a \in A\} = \{\alpha_{gg'}(a) : a \in A\}$. Como por $(ii)$ tenemos que $A \in S_{(gg')^{-1}}$, concluimos que $\{\alpha_{gg'}(a) : a \in A\} = \beta_{gg'}(A)$ y así $(\beta_g \circ \beta_{g'})(A) = \beta_{gg'}(A)$. $\square$

Finalmente es importante notar que todas las construcciones realizadas aquí, podrían ser estudiadas asumiendo algún tipo de estructura sobre los conjuntos base. En particular, podrían considerarse acciones parciales sobre espacios topológicos [1] o sobre anillos y álgebras [5].

**Agradecimientos.** Este trabajo fue parcialmente financiado por la Oficina de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad del Tolima.

## Referencias

[1] Abadie, F.: Enveloping actions and Takai duality for partial actions, J. Funct. Anal., 197 (1) (2003), pp. 14-67.

[2] Ávila, J., Hernández-González, L. and Ortiz-Jara, A.: On partial orbits and stabilizers, submitted.

[3] Choi, K. and Lim, Y.: Transitive partial actions of groups, Period. Math. Hung., 56 (2) (2008), pp. 169-181.

[4] Exel, R.: Partial actions of groups and actions of inverse semigroups, Proc. Am. Math. Soc, 126 (12) (1998), pp. 3481-3494.

[5] Ferrero, M.: Partial actions of groups on algebras, a survey, São Paulo J. Math. Sci. 3 (1) (2009), pp. 95-107.

[6] Kerber, A.: Applied finite group actions, Springer, Berlin, 1999.

*Dirección de los autores*

Jesús Ávila — Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué-Colombia

e-mail: `javila@ut.edu.co`

Liliana Hernández-González — Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué-Colombia

e-mail: `hernandezgonzalezliliana@gmail.com`

Andrea Ortiz-Jara — Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima, Ibagué-Colombia

e-mail: `flakaloja@hotmail.com`