



UNIVERSIDAD DEL VALLE

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN

PROGRAMA DE CONTADURIA PÚBLICA

**PORTAFOLIO ÓPTIMO DE INVERSIÓN DE MARKOWITZ DE MEDIA VARIANZA
BAJO REBALANCEO CON EL MÍNIMO RIESGO COMO OBJETIVO.**

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR AL TÍTULO DE CONTADOR PÚBLICO

MARLON PEREZ MENDOZA

DIRECTOR:

JAVIER H. OSPINA H., Ph.D.

SANTIAGO DE CALI

ABRIL DE 2019

Resumen

El presente trabajo analiza el efecto del rebalanceo a distintas frecuencias temporales en los portafolios de mínimo riesgo de media varianza de Markowitz formados a partir de una muestra de acciones líquidas de la Bolsa de Valores de Colombia en un periodo reciente de aproximadamente siete años y medio. Los resultados muestran que el rebalanceo es capaz de mejorar la rentabilidad final y media y la rentabilidad ajustada al riesgo medida por la razón de Sharpe simplificada, además de reducir el riesgo medido por la desviación estándar y el *drawdown*.

Dedicatoria

A Dios, por haberme dado la vida y permitirme llegar hasta este momento en mi formación profesional que tanto he anhelado, a mi director de tesis Javier H Ospina H, Ph.D., quien con su tiempo, conocimientos y apoyo me permitió conocer uno de los temas que tanto me apasiona. A mi esposa, quien me brindó su amor, su apoyo y ánimos para convertirme en un profesional. A mi madre y mi abuela quienes siempre han estado conmigo durante este proceso de aprendizaje y durante todo mi trayecto estudiantil y de vida.

Contenido

1. Introducción al Problema de Investigación	8
2. Revisión de la Literatura.....	10
3. Objetivos	12
3.1 Objetivo General.....	12
3.2 Objetivos Específicos	12
3. Metodología	12
4. Resultados.....	21
4.1 Calculo de la Rentabilidad de Portafolios Óptimos Selectos de Media Varianza en Ausencia de Rebalanceo	21
4.2 Cálculo de la Rentabilidad de los Portafolios Óptimos de Mínima Varianza en Presencia de Rebalanceo	22
4.3 Análisis Comparativo de los Escenarios en Términos de Rentabilidad y Riesgo	27
5. Conclusiones	32
Referencias.....	34

Índice de Tablas

Tabla 1. Acciones objeto de estudio	16
Tabla 2. Estadísticas descriptivas básicas de las diferentes acciones de la muestra.	17
Tabla 3. Matriz de correlación de los retornos de las acciones de la muestra entre el 02-10-2009 hasta el 30-03-2017.....	19
Tabla 4. Razón de Sharpe simplificada de las acciones de la muestra entre 02/10/2009 y 30/03/2017	21
Tabla 5. Portafolios óptimos iniciales (sin rebalanceo) con una ventana de entrenamiento de aproximadamente un año	22
Tabla 6. Eficiencia del portafolio sin y con rebalanceo para las distintas frecuencias del rebalanceo	31

Índice de Figuras

Figura 1. Frontera del portafolio óptimo de media-varianza	14
Figura 2. Correlograma de los retornos de las acciones de la muestra entre el 02-10-2009 y el 30-03-2017	20
Figura 3. Distribución de los pesos óptimos para las frecuencias de rebalanceo anual, trimestral y mensual.	26
Figura 4. Análisis comparativo del rendimiento y riesgo de los portafolios bajo rebalanceo anual, trimestral y mensual.	29

1. Introducción al Problema de Investigación

De acuerdo con el método de flujos de caja descontados el valor presente de una empresa VP está dado por los flujos libres futuros que genere la empresa traídos a presente:

$$VP = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{C_t}{(1+i)^t} \quad (1)$$

donde:

- C_t es el flujo de efectivo en el tiempo t
- i es la tasa de interés de oportunidad

El valor de la acción de la empresa, por su parte, corresponderá al valor de la compañía dividido entre el número de acciones circulantes. A partir de este modelo puede escribirse el valor de la acción como el valor presente de los dividendos D_t en el modelo de descuento de los dividendos (Myers, 2010, p. 91), como ya lo había reconocido John Burr Williams en 1938 de acuerdo con Markowitz (s. f.):

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+i)^t} \quad (2)$$

puesto que los dividendos son los flujos futuros esperados de la empresa, y los dividendos no repartidos en un momento dado pueden escribirse recursivamente como la serie futura de dividendos aún sin repartir. De acuerdo con lo anterior, el rendimiento de la acción, (en presencia de un posible dividendo), no es más que el cambio porcentual en el precio, incluyendo el dividendo potencial:

$$r_t = \frac{P_{t+1} + D_{t+1} - P_t}{P_t}. \quad (3)$$

El punto clave en toda esta argumentación, notado ya por Williams (1938), es que el rendimiento, al depender de un dividendo esperado y por ende del valor presente de dividendos futuros esperados, es una variable aleatoria, pues no sé conoce al día de hoy la sucesión completa de dividendos de la empresa. Esto permite asignarle un valor esperado $E[r_{it}]$ al rendimiento de una acción dada r_{it} y una varianza $V[r_{it}]$. Markowitz (1952) asoció el valor de la varianza $V[r_{it}]$ como una medida (al cuadrado) del riesgo de la acción en tanto la varianza describe el valor esperado de las desviaciones o fluctuaciones alrededor del valor esperado de ella.

Sin embargo, como Markowitz (s. f.) atinó a comprender: “si el inversionista estuviera únicamente interesado en los valores esperados, él o ella solo podrían estar interesados en los valores esperados del portafolio y para maximizar el valor esperado de un portafolio se necesitaría invertir únicamente en un solo valor”. En otras palabras, si el único objetivo que tuviera el inversionista fuera maximizar el valor esperado de su portafolio, a este inversionista le bastaría con invertir única y exclusivamente en la acción de la empresa que se espere que tenga el mayor valor presente de sus dividendos y, por ende, este inversionista destinaría el 100% de su inversión a tal acción.

En contraposición, en la práctica, a los inversionistas no les interesa únicamente la rentabilidad sino también el riesgo asociado al proceso de intentar obtener su rentabilidad. Siguiendo una analogía drástica, de otra manera los inversionistas irían simplemente a un casino y apostarían todo su dinero al juego que tuviera como premio el mayor valor esperado sin pensarlo dos veces, cosa que raramente sucede en la realidad y que cuando sucede se toma por irracional. El hecho

de que los inversionistas no actúen de esta manera se debería a que comprenden bien que algunos premios extremadamente jugosos pueden obtenerse únicamente asumiendo riesgos (de pérdida) mucho mayores a aquellos con los que se sienten cómodos o que están dispuestos a asumir de acuerdo con su propia aversión al riesgo. La propuesta admirable de Markowitz es proponer un modelo, el modelo de optimización de media varianza, que permite maximizar una rentabilidad de todo el portafolio controlando su riesgo o minimizar el riesgo del portafolio sosteniendo una rentabilidad dada. En este trabajo se aborda la optimización de media varianza de Markowitz para el caso de la Bolsa de Colombia, utilizando el rebalanceo que es una técnica muy extendida cuyo propósito es actualizar los pesos del portafolio óptimo con la información nueva que se va acopiando progresivamente.

2. Revisión de la Literatura

Existen distintas formas de rebalanceo, tal como el rebalanceo de porcentaje de portafolio, el rebalanceo periódico o por calendario (SchweserNotes, 2014, pp. 41-45) o el rebalanceo de igual probabilidad (*cf.* Donohue & Yip, 2003). Este trabajo versa sobre el rebalanceo periódico o por calendario, de acuerdo con el cual el portafolio se rebalancea periódicamente cada cierto tiempo. El objetivo del rebalanceo de portafolio es en general reoptimizar los pesos del portafolio óptimo para lograr mejores retornos y mantener el riesgo controlado (Rowland & Lawson, 2012, Capítulo 11). La literatura sobre el rebalanceo es amplia y en cuanto a su relación con los costos de transacción, tal como las comisiones de transacción, cubre especialmente estudios teóricos de estrategias de rebalanceo óptimas. Davis & Norman (1990), Dumas & Luciano (1990) o Holden & Holden (2012), por ejemplo, encuentran que existen regiones en las que se debe evitar las transacciones en la estrategia óptima para minimizar los costos de transacción, cuando estos son

convexos. Ya el trabajo pionero de Leland (1996, 1999) había hallado que al rebalancear existe un rango de mínimos y máximos de posibles combinaciones de activos que hacen parte del portafolio dentro del cual no se debe negociar. Excedido este rango, el inversionista debe negociar solo hasta llegar a la proporción mínima o máxima del susodicho rango para volver a colocar las combinaciones de activos del portafolio dentro del rango. Leland (1999) en efecto desarrolla toda la matemática para un número grande de activos, mientras que Leland (1996) halla, por su parte, que el rebalanceo periódico reduce la cantidad de activos del portafolio que se necesitan negociar para volver a la zona de no negociación, pero que el rebalanceo pierde parte de su eficacia cuando el costo de transacción es proporcional a los montos en dólares negociados en el portafolio de inversión. Otros autores, han estudiado también como los costos de transacción pueden hacer que aplicar el rebalanceo periódico no sea menos rentable a la hora de regresar al portafolio óptimo. Dybvig (2005), por ejemplo, generó diferentes escenarios con costos variables y fijos para estudiar el supuesto de que los altos costos de transacción hacen que los pequeños inversionistas que los enfrentan busquen un portafolio más pequeño y menos diversificado (y por ende más subóptimo) que el de un gran inversionista con costos más pequeños.

El aporte del presente trabajo consiste en evaluar empíricamente el rebalanceo periódico en la Bolsa de Colombia, más allá de las consideraciones teóricas del rebalanceo. En esto resulta novedoso, pues analiza una práctica común entre los inversionistas colombianos estableciendo experimentalmente el desempeño de tal práctica, independientemente de su optimalidad o no optimalidad como técnica de rebalanceo. El trabajo como primera aproximación ignora los costos de transacción.

3. Objetivos

3.1 Objetivo General

El presente trabajo de investigación tiene como objetivo general averiguar el impacto sobre la rentabilidad de rebalancear el portafolio óptimo frecuentemente tomando como objetivo el mínimo riesgo y como base de estudio las acciones de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC).

3.2 Objetivos Específicos

- Seleccionar, de acuerdo con la base de datos obtenida, las acciones representativas de acuerdo con su liquidez y capitalización bursátil.
- Conformar portafolios óptimos de media varianza con el mínimo nivel de riesgo sin rebalanceo.
- Aplicar el método de rebalanceo a distintas frecuencias temporales en estos portafolios.
- Comparar la rentabilidad de los portafolios sin rebalanceo y con rebalanceo.

3. Metodología

Una vez se obtiene la información histórica de los precios de cierre de las acciones de Colombia se puede emplear la formulación planteada por Merton (1972) para obtener una solución analítica al problema de la elección del portafolio óptimo. Para n activos individuales el rendimiento esperado de cada activo puede estimarse por el promedio muestral en el tiempo de

cada activo i -ésimo $\bar{r}_i = \frac{1}{T} \sum_t r_{it}$ y la matriz de covarianza del rendimiento se puede estimar por

la matriz de covarianzas muestral, cuyos términos son de la forma

$\text{cov}(r_i, r_j) = \frac{1}{T} \sum_t (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j)$. El problema del portafolio óptimo de media varianza consiste

entonces en encontrar el conjunto de pesos óptimos ω_i^* para cada activo i -ésimo del portafolio que maximiza la rentabilidad del portafolio, dado cierto riesgo, denotado por la varianza del portafolio óptimo. La combinación de portafolios óptimos para distintas desviaciones estándar del portafolio es la conocida frontera eficiente (Figura 1).

En este trabajo, primero se seleccionarán las acciones representativas de acuerdo con su liquidez y capitalización bursátil, para conformar portafolios óptimos de media varianza con el mínimo nivel de riesgo (mínima varianza del portafolio).

Concretamente, sea $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n)'$ el vector de $n \times 1$ rendimientos de n activos del portafolio y sea V sea la matriz $n \times n$ de covarianza del rendimiento entre los n activos (se asume que V es de rango completo, es decir que no hay activos cuyos rendimientos resulten de una combinación lineal exacta de los rendimientos de otros activos)¹ y sea $\omega = (\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)'$ el vector $n \times 1$ de los pesos o proporciones del portafolio, es decir, que ω_i es la proporción del patrimonio total del portafolio que se invierte en el activo i . El problema de la optimización del portafolio de mínima varianza corresponde a hallar los pesos óptimos que minimizan la varianza del portafolio

$$\omega^* = \arg \min_{\omega} V_m(\omega), \quad (4)$$

¹ Si estos activos existen, pueden ser ignorados ya que no afectan la frontera eficiente del portafolio, pues son activos redundantes. También debe tener en cuenta que la matriz de covarianza debe ser positiva definida.

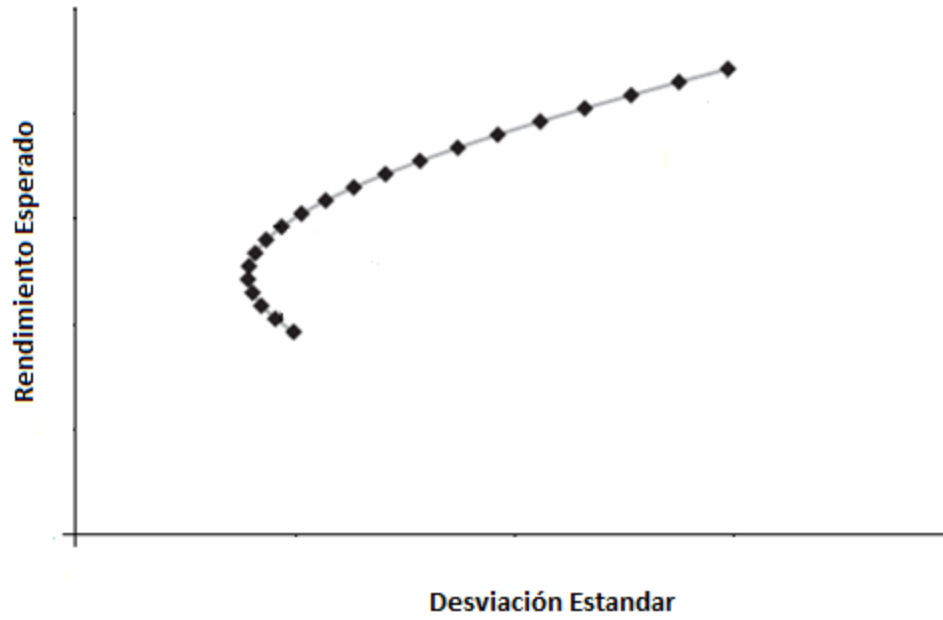


Figura 1. Frontera del portafolio óptimo de media-varianza

donde V_m es la varianza del portafolio dada por

$$V_m = \omega' V \omega, \quad (5)$$

sujeto a que los pesos sumen el 100% (y a que no haya posiciones en corto $\forall_i \omega^i \geq 0$)

$$\omega' e = 1, \quad (6)$$

donde e es un vector $n \times 1$ unitario (cf. Pennacchi, 1998).

En este contexto, la expresión

$$\bar{r}_p = \omega' \bar{r} \quad (7)$$

representa el rendimiento del portafolio.

El objeto de esta investigación consiste en averiguar el impacto sobre la rentabilidad de rebalancear el portafolio óptimo frecuentemente. El rebalanceo a utilizar es el rebalanceo periódico. El rebalanceo implica hallar nuevamente los pesos óptimos ω^* en momentos posteriores a una frecuencia temporal dada, utilizando la información nueva más reciente que ha sido generada para estimar los nuevos rendimientos muestrales y la varianza muestral. En otras palabras, en un proceso de rebalanceo se busca una sucesión en el tiempo de pesos óptimos $\omega_0^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_\tau^*, \dots$ correspondientes a portafolios cada uno con sus respectivas rentabilidades óptimas en el momento τ . El propósito del rebalanceo es reoptimizar los pesos en la búsqueda de un nuevo portafolio óptimo en el nuevo momento τ para adaptar y mejorar la rentabilidad con la información más reciente. El presente trabajo hará un comparativo de las rentabilidades obtenidas del portafolio con pesos óptimos dado el mínimo riesgo, en ausencia y en presencia de rebalanceo. En presencia de rebalanceo se recalculará la secuencia de pesos óptimos ω^* para construir la evolución de los portafolios en el tiempo. Con esto se buscará demostrar que el proceso de rebalanceo mejora la rentabilidad de los portafolios óptimos en el tiempo y reduce su riesgo.

Para la realización del presente trabajo de grado se utilizó fundamentalmente el software *R* y el paquete *PortfolioAnalytics*, entre otros. Respecto al base de datos se usaron los precios de cierre de las acciones que cotizan en la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) del 02/10/2009 hasta el 30/03/2017; lo que equivale a un periodo de 7 años, 5 meses y 28 días. Cabe mencionar que hay 69 activos financieros actualmente cotizando en la BVC, pero para el presente trabajo se escogió una muestra de 19 acciones (aquellas líquidas y con menos datos faltantes en el periodo de estudio). Las empresas escogidas para la generación de los portafolios óptimos de inversión con el mínimo riesgo se aprecian en la Tabla 1.

Tabla 1. Acciones objeto de estudio

Nombre de la Empresa	Nomenclatura Nemotécnica
Bancolombia SA	BCOLOMBIA
Banco de Bogotá SA	BOGOTA
Celsia SA	CELSIA
Cementos Argos SA	CEMARGOS
Coltejer SA	COLTEJER
Corficolombiana SA	CORFICOLCF
Ecopetrol SA	ECOPETROL
Enka de Colombia SA	ENKA
Grupo Éxito SA	EXITO
Fabricato SA	FABRICATO
Grupo Argos SA	GRUPOARGOS
Grupo Aval SA	GRUPOAVAL
Grupo Sura SA	GRUPOSURA
Interconexión Eléctrica SA ESP	ISA
Isagen SA	ISAGEN
Mineros SA	MINEROS
Grupo Nutresa SA	NUTRESA
Organización de Ingeniería Internacional SA	ODINSA
Valorem SA	VALOREM

Tabla 2. Estadísticas descriptivas básicas de las diferentes acciones del filtro no descriptivo.

BCOLOMBIA		BOGOTA		CELSIA		CEMARGOS		COLTEJER	
Min. :	-32,225	Min. :	-14,701	Min. :	-31,244	Min. :	-144,992	Min. :	-130,736
Media :	0,123	Media :	0,194	Media :	0,058	Media :	0,113	Media :	-0,115
Max. :	16,636	Max. :	27,793	Max. :	32,214	Max. :	36,598	Max. :	123,777
Des. Est.:	0,281	Des. Est.:	0,210	Des. Est.:	0,326	Des. Est.:	0,425	Des. Est.:	0,575

CORFICOLCF		ECOPETROL		ENKA		ÉXITO		FABRICATO	
Min. :	-51,639	Min. :	-35,394	Min. :	-68,422	Min. :	-50,655	Min. :	-128,728
Media :	0,216	Media :	-0,043	Media :	0,071	Media :	0,048	Media :	0,193
Max. :	20,902	Max. :	36,794	Max. :	59,468	Max. :	43,937	Max. :	79,801
Des. Est.:	0,235	Des. Est.:	0,354	Des. Est.:	0,441	Des. Est.:	0,357	Des. Est.:	0,619

GRUPOARGOS		GRUPOAVAL		GRUPOSURA		ISA		ISAGEN	
Min. :	-39,134	Min. :	-23,695	Min. :	-24,832	Min. :	-45,151	Min. :	-36,892
Media :	0,083	Media :	0,194	Media :	0,118	Media :	0,042	Media :	0,188
Max. :	36,363	Max. :	32,116	Max. :	18,695	Max. :	30,376	Max. :	48,582
Des. Est.:	0,327	Des. Est.:	0,286	Des. Est.:	0,270	Des. Est.:	0,312	Des. Est.:	0,352

MINEROS		NUTRESA		ODINSA		VALOREM	
Min. :	-39,593	Min. :	-22,426	Min. :	-37,785	Min. :	-43,937
Media :	-0,086	Media :	0,031	Media :	0,171	Media :	0,063
Max. :	58,155	Max. :	22,110	Max. :	66,036	Max. :	78,103
Des. Est.:	0,379	Des. Est.:	0,239	Des. Est.:	0,321	Des. Est.:	0,433

Nota: Los retornos y la desviación estándar están anualizados. Los retornos se encuentran en porcentaje y la desviación estándar en formato decimal.

Las estadísticas descriptivas de cada una de las acciones utilizadas se pueden apreciar en la Tabla 2. Los retornos medios se encuentran entre el -11% y el 21% y tienen un promedio global de del 8,7%. Las empresas con mayores retornos fueron CORFICOLCF con un 21,6%, BOGOTA con un 19,4%, GRUPOAVAL con un 19,4%, FABRICATO con un 19,3%, ISAGEN con un 18,8%, ODINSA con un 17,1%, BCOLOMBIA con un 12,3%, GRUPOSURA con un 11,8% CEMARGOS con un 11,3%. Por otro lado, las acciones de COLTEJER con un -11,5%, ECOPETROL con un -4,3% y MINEROS con un -8.6% tuvieron retornos negativos en el

periodo de estudio, representando pérdidas para los inversionistas en estas acciones. El promedio de la desviación estándar, como medida de riesgo, de las 19 acciones estuvo cerca al 35,5%. De acuerdo con esto, el riesgo asumido por un inversionista colombiano en acciones individuales es relativamente alto.

En la Tabla 3 se observa la matriz de correlación de los retornos de las acciones de la muestra. Debe recordarse que la correlación evalúa el grado de asociación o dependencia lineal que existe entre dos activos y oscila entre -1, valor que denota una correlación negativa o inversa perfecta, y 1, valor que denota una correlación positiva perfecta. En la Figura 2 se observa el correlograma correspondiente a la matriz de correlación. Según Myers (2010) “el mayor beneficio de la diversificación surge cuando dos acciones se correlacionan negativamente” pues ello permite minimizar el riesgo del portafolio diversificado, pero el mismo Myers afirma que esta situación casi nunca sucede. Lo anterior se puede constatar en el correlograma, ya que según la matriz de correlación, de las 19 acciones solo 3 (COLTEJER, ODINSA y FABRICATO) tienden a tener correlaciones cercanas a cero o negativas con respecto a las demás acciones.

Tabla 3. Matriz de correlación de los retornos de las acciones de la muestra entre el 02-10-2009 hasta el 30-03-2017

MATRIZ DE CORRELACIONES																			
PERIODO 02-10-2009 AL 30-03-2017																			
	BCOLOMBIA	BOGOTA	CELSIA	CEMARGOS	COLTEJER	CORFICOLCF	ECOPETROL	ENKA	EXITO	FABRICATO	GRUPOARGOS	GRUPOAVAL	GRUPOSURA	ISA	ISAGEN	MINEROS	NUTRESA	ODINSA	VALOREM
BCOLOMBIA	1	0,21	0,32	0,29	-0,08	0,27	0,33	0,12	0,26	0,04	0,42	0,34	0,51	0,37	0,26	0,06	0,33	-0,09	0,14
BOGOTA	0,21	1	0,19	0,18	0,02	0,26	0,17	0,19	0,17	-0,04	0,19	0,35	0,25	0,2	0,15	0,05	0,27	-0,05	0,04
CELSIA	0,32	0,19	1	0,35	-0,02	0,23	0,33	0,09	0,3	0,08	0,48	0,25	0,37	0,34	0,26	0,15	0,31	-0,01	0,11
CEMARGOS	0,29	0,18	0,35	1	-0,03	0,33	0,3	0,18	0,24	0,08	0,42	0,24	0,42	0,33	0,24	0,21	0,29	-0,03	0,16
COLTEJER	-0,08	0,02	-0,02	-0,03	1	-0,1	-0,03	-0,1	0,05	0,11	0	-0,02	-0,06	0,12	-0,06	0,05	-0,04	0,03	-0,01
CORFICOLCF	0,27	0,26	0,23	0,33	-0,1	1	0,33	0,14	0,19	0,03	0,32	0,33	0,42	0,21	0,18	0,02	0,35	-0,01	0,12
ECOPETROL	0,33	0,17	0,33	0,3	-0,03	0,33	1	0,09	0,29	0,09	0,41	0,32	0,46	0,34	0,19	0,1	0,29	0,01	0,09
ENKA	0,12	0,19	0,09	0,18	-0,1	0,14	0,09	1	0,07	0,06	0,18	0,13	0,13	0,03	0,07	0,23	0,19	0,05	0,18
EXITO	0,26	0,17	0,3	0,24	0,05	0,19	0,29	0,07	1	0,07	0,4	0,22	0,36	0,39	0,19	0,18	0,37	-0,03	0,1
FABRICATO	0,04	-0,04	0,08	0,08	0,11	0,03	0,09	0,06	0,07	1	0,12	0,09	0,07	0,04	0,01	0,15	0,11	0,08	0,07
GRUPOARGOS	0,42	0,19	0,48	0,42	0	0,32	0,41	0,18	0,4	0,12	1	0,31	0,56	0,44	0,26	0,16	0,42	-0,04	0,14
GRUPOAVAL	0,34	0,35	0,25	0,24	-0,02	0,33	0,32	0,13	0,22	0,09	0,31	1	0,38	0,25	0,1	0,09	0,35	-0,02	0,1
GRUPOSURA	0,51	0,25	0,37	0,42	-0,06	0,42	0,46	0,13	0,36	0,07	0,56	0,38	1	0,47	0,31	0,12	0,4	-0,05	0,19
ISA	0,37	0,2	0,34	0,33	0,12	0,21	0,34	0,03	0,39	0,04	0,44	0,25	0,47	1	0,25	0,17	0,37	0,03	0,14
ISAGEN	0,26	0,15	0,26	0,24	-0,06	0,18	0,19	0,07	0,19	0,01	0,26	0,1	0,31	0,25	1	0,12	0,28	-0,06	0,09
MINEROS	0,06	0,05	0,15	0,21	0,05	0,02	0,1	0,23	0,18	0,15	0,16	0,09	0,12	0,17	0,12	1	0,2	0,01	0,3
NUTRESA	0,33	0,27	0,31	0,29	-0,04	0,35	0,29	0,19	0,37	0,11	0,42	0,35	0,4	0,37	0,28	0,2	1	-0,01	0,11
ODINSA	-0,09	-0,05	-0,01	-0,03	0,03	-0,01	0,01	0,05	-0,03	0,08	-0,04	-0,02	-0,05	0,03	-0,06	0,01	-0,01	1	0,02
VALOREM	0,14	0,04	0,11	0,16	-0,01	0,12	0,09	0,18	0,1	0,07	0,14	0,1	0,19	0,14	0,09	0,3	0,11	0,02	1

Grafico de Correlación

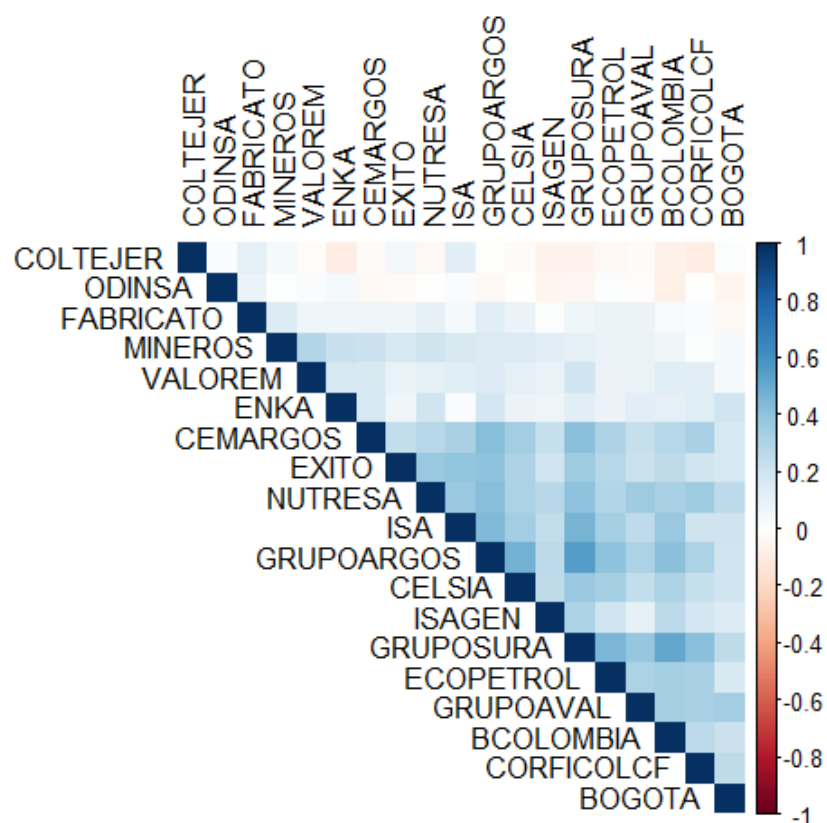


Figura 2. Correlograma de los retornos de las acciones de la muestra entre el 02-10-2009 y el 30-03-2017

La Tabla 4 muestra la razón de Sharpe simplificada para cada acción, calculada como el promedio del rendimiento de los retornos sobre su desviación estándar durante el periodo de estudio. Según Myers (2010), esta es una medida de desempeño de las inversiones por unidad de riesgo asumida que relaciona el rendimiento obtenido del activo con el riesgo para obtener dicho rendimiento.

Tabla 4. Razón de Sharpe simplificada de las acciones de la muestra entre 02/10/2009 y 30/03/2017

RAZÓN SHARPE

BCOLOMBIA	BOGOTA	CELSIA	CEMARGOS	COLTEJER	CORFICOLCF	ECOPETROL
0,438	0,922	0,178	0,265	-0,200	0,921	-0,123

ENKA	EXITO	FABRICATO	GRUPOARGOS	GRUPOAVAL	GRUPOSURA	ISA
0,161	0,134	0,312	0,254	0,676	0,437	0,136

ISAGEN	MINEROS	NUTRESA	ODINSA	VALOREM
0,534	-0,228	0,128	0,533	0,146

La Tabla 4 permite ver que las acciones tienen una razón Sharpe media de 0,296, es decir, que el inversionista ganaría un retorno relativamente bajo por unidad de riesgo asumida. COLTEJER con una razón de -0.20, ECOPETROL con -0.123 y MINEROS con -0.228 exhibieron razones de Sharpe negativas.

4. Resultados

4.1 Calculo de la Rentabilidad de Portafolios Óptimos Selectos de Media

Varianza en Ausencia de Rebalanceo

La Tabla 5 muestra el portafolio óptimo inicial ω_0^* logrado el último día del año 2009 para la frecuencia de tiempo anual y trimestral, mientras que para la frecuencia mensual el portafolio óptimo inicial ω_0^* se generó el 30 de noviembre del 2009. A partir de estas frecuencias se realiza el rebalanceo correspondiente. La Tabla 5 representa los portafolios sin rebalanceo para cada caso.

Tabla 5. Portafolios óptimos iniciales (sin rebalanceo)

PESOS DE LAS ACCIONES DEL PORTAFOLIO ÓPTIMO DE INVERSIÓN SIN REBALANCEO		
Acción	Frecuencia Anual y Trimestral	Frecuencia Mensual
	28/12/2009	30/11/2009
BOGOTA	16%	4%
CELSIA	9%	5%
COLTEJER	38%	56%
CORFICOLCF	12%	18%
ENKA	0%	2%
ÉXITO	4%	0%
ISAGEN	6%	0%
ODINSA	8%	8%
VALOREM	6%	7%
TOTAL	100%	100%

La combinación de los pesos óptimos ω_0^* sin rebalanceo es la misma para la frecuencia anual y trimestral ya que el software toma como la fecha del primer portafolio el último día de cada año para estas frecuencias (28/12/2009). Por otro lado, la fecha del portafolio inicial sin rebalanceo para la frecuencia mensual es el 30/11/2009 por lo que los pesos óptimos del portafolio sin rebalanceo difieren. A partir de estos pesos ω_0^* , y sin cambiarlos durante todo el periodo de estudio, se obtuvieron los resultados del portafolio sin rebalanceo (vide Sección 4.3).

4.2 Cálculo de la Rentabilidad de los Portafolios Óptimos de Mínima

Varianza en Presencia de Rebalanceo

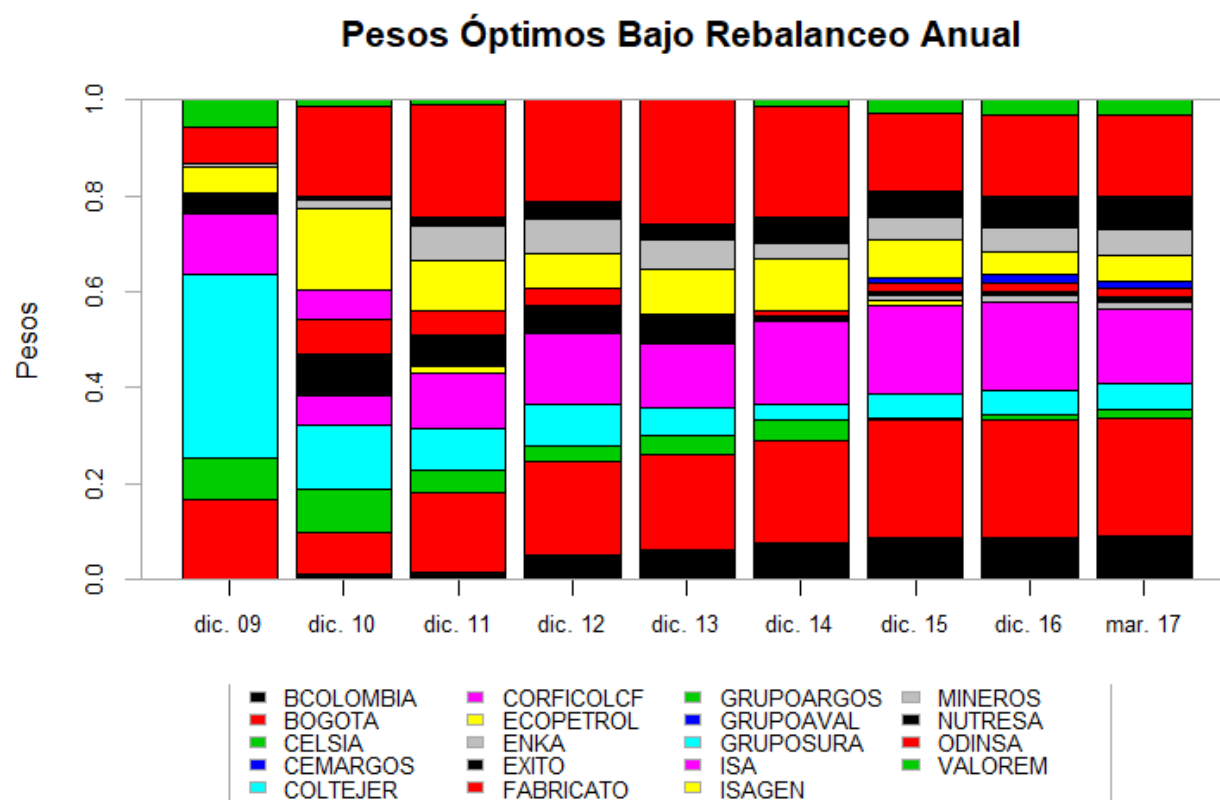
Como se explicó en la Sección 3, bajo el rebalanceo periódico el portafolio óptimo cambia la distribución de los ω^* en diferentes momentos τ a lo largo del tiempo con una frecuencia

periódica dada, dando lugar a una sucesión de pesos óptimos $\omega_0^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_\tau^*, \dots$. El rebalanceo mantiene así actualizadas las mejores combinaciones de los pesos ω^* en el portafolio óptimo. En este trabajo se evaluó el rebalanceo a tres diferentes frecuencias: mensual, trimestral y anual. La sucesión de los pesos óptimos $\omega_0^*, \omega_1^*, \omega_2^*, \dots, \omega_\tau^*, \dots$ para cada frecuencia entre el 02/10/2009 y el 30/03/2017 se observan en la Figura 3.

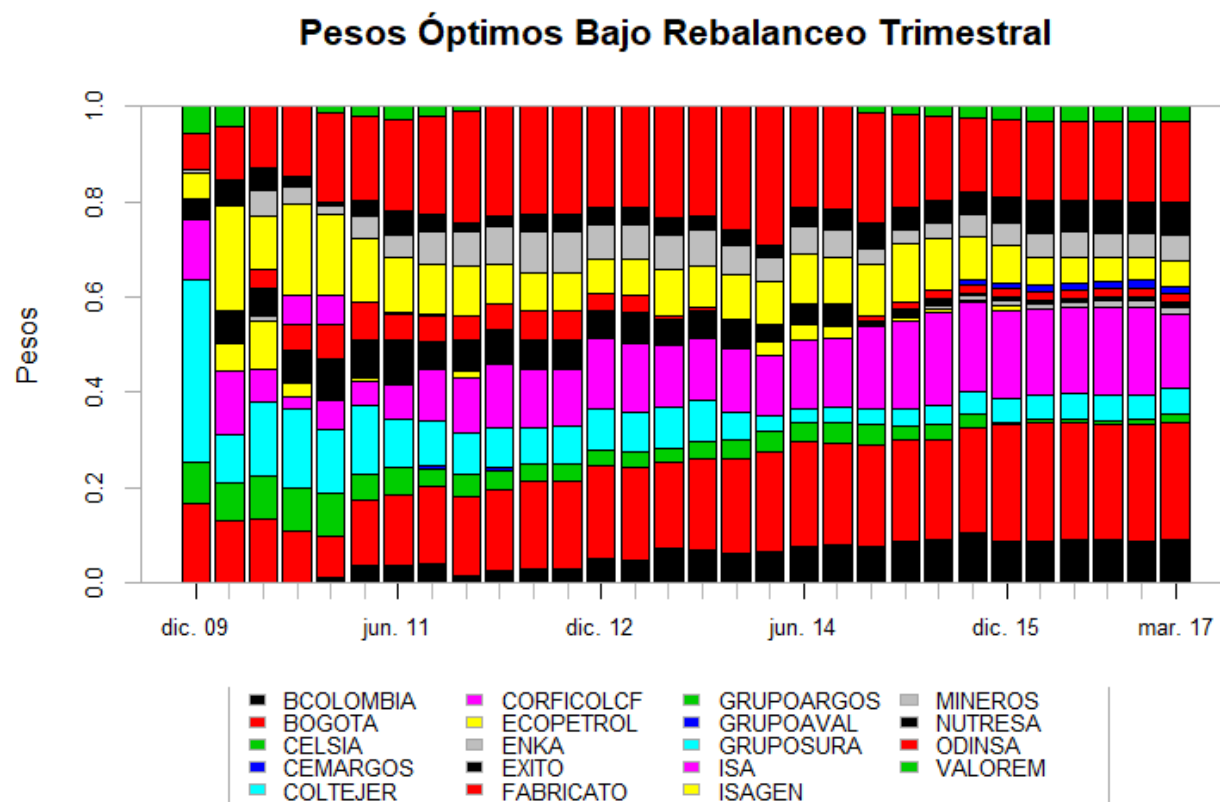
Al observar la evolución de los pesos anual, trimestral y mensual se aprecia que las participaciones de los pesos óptimos ω^* tienen un comportamiento similar en las tres diferentes frecuencias. Lo anterior demuestra que la restricción del mínimo riesgo hace que las combinaciones óptimas sean semejantes. Al evaluar el comportamiento de los pesos de las acciones se puede observar que con el pasar del tiempo, la volatilidad del mercado hizo necesario el reajuste de los pesos óptimos ω^* y las empresas variaron su porcentaje de participación del portafolio óptimo inicial así:

- COLTEJER disminuyó su participación de un 38% al inicio del periodo a un 5% al final del periodo. El peso de esta acción con el pasar de los años fue disminuyendo ya que a lo largo del tiempo la crisis por la que pasaba la empresa se incrementó a tal punto que en el periodo de 2017 la participación en el portafolio óptimo era solo de un 5%.
- BOGOTA disminuyó su participación de un 16% al inicio del periodo a un 9% entre el 2009 y el 2010 pero a partir de este periodo el valor de la acción empezó a incrementarse hasta terminar en el 2017 con el 25% de participación en el portafolio óptimo.

Panel A. Pesos óptimos de las acciones de la muestra calculados el último día de cada año bajo el rebalanceo con una frecuencia anual



Panel B. Pesos óptimos de las acciones de la muestra calculados el último día de cada trimestre en el periodo de estudio bajo el rebalanceo con una frecuencia trimestral



Panel C. Pesos óptimos de las acciones de la muestra calculados el último día de cada mes en el periodo de estudio bajo rebalanceo con una frecuencia mensual

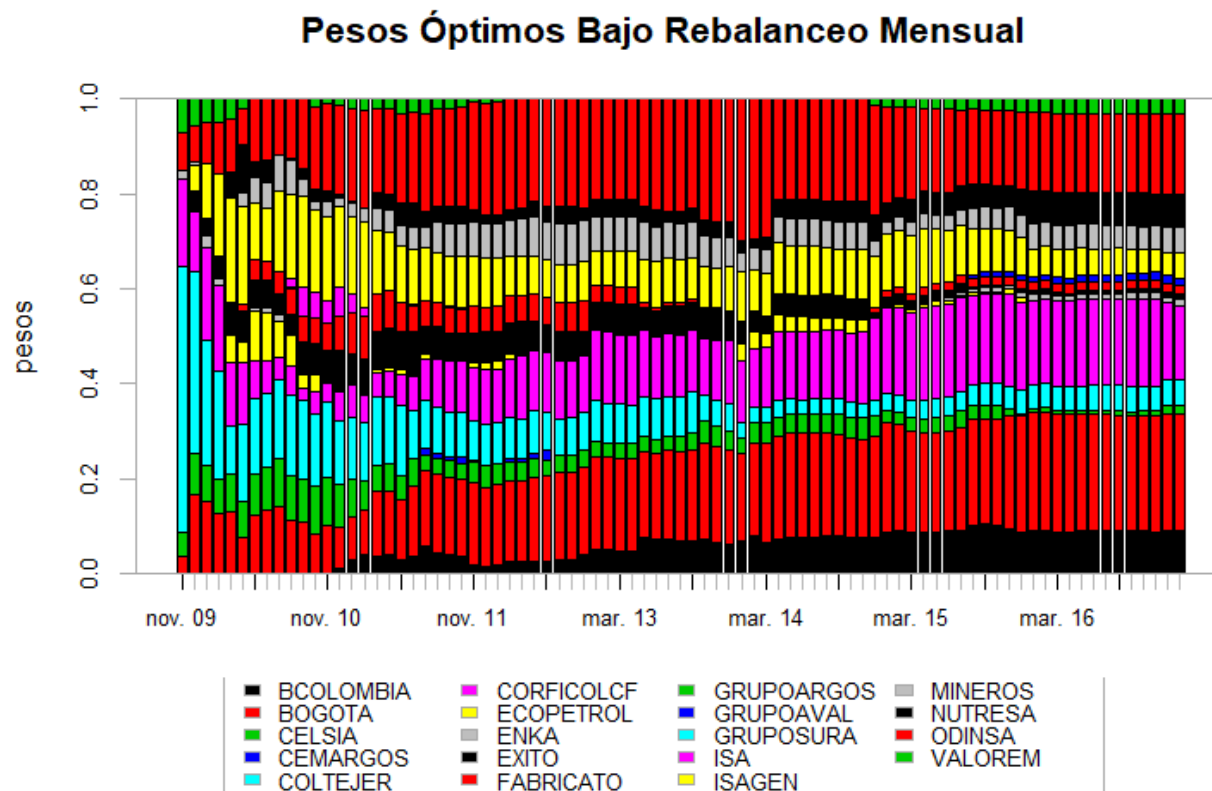


Figura 3. Distribución de los pesos óptimos dada las frecuencias de rebalanceo anual, trimestral y mensual.

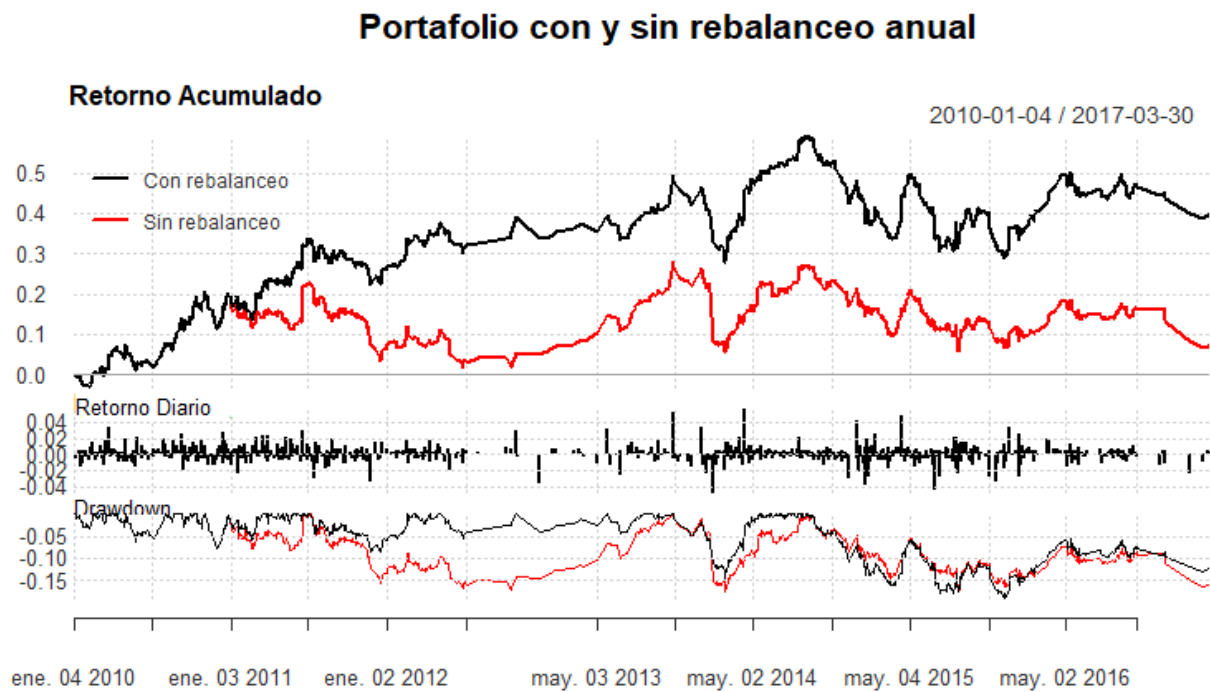
- Entre el 2009 y el 2010, la participación de la acción CORFICOLF en el portafolio disminuyó de un 12% a un 6%, pero a partir de este periodo su porcentaje de participación en los siguientes años se incrementó hasta llegar de nuevo al 12% en el año 2017.

Ahora bien, al avanzar el tiempo el porcentaje pendiente por repartir en el portafolio óptimo estuvo dividido entre BANCOLOMBIA, ÉXITO, FABRICATO, ISA, ISAGEN, MINEROS, NUTRESA, ODINSA Y VALOREM, acciones que no tenían participación relevante en el año 2009.

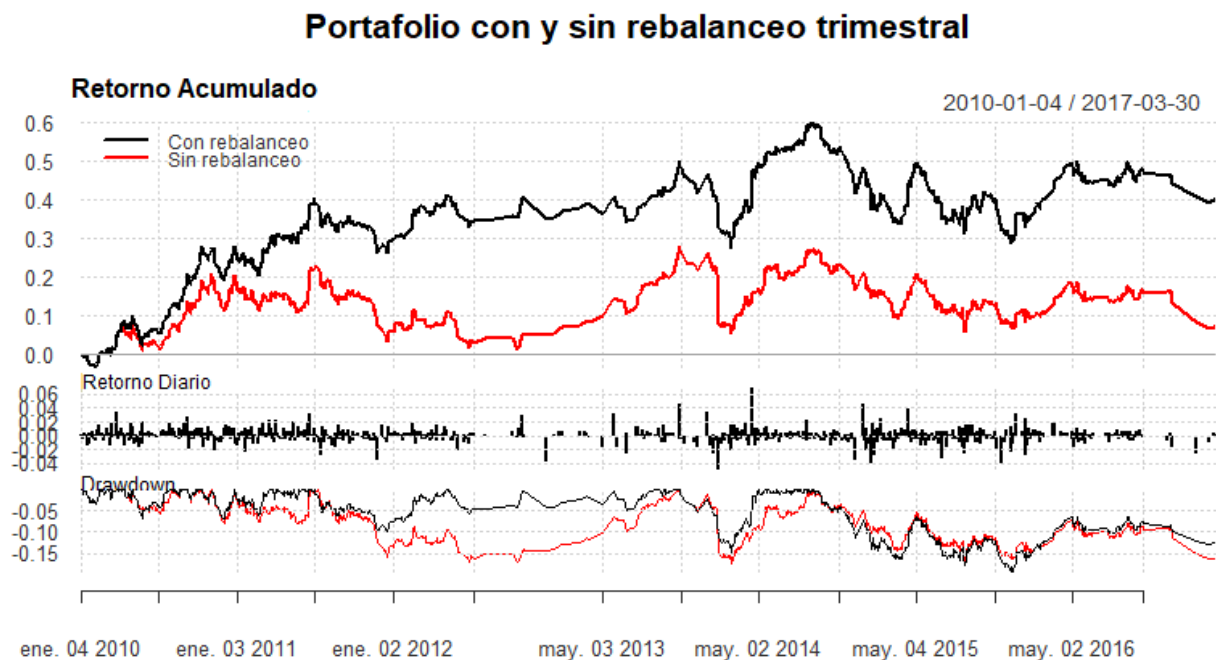
4.3 Análisis Comparativo de los Escenarios en Términos de Rentabilidad y Riesgo

La Figura 4 muestra los retornos acumulados con rebalanceo y sin rebalanceo, los retornos diarios sin rebalanceo y el *drawdown* con rebalanceo y sin rebalanceo utilizando un panel para representar los resultados para cada frecuencia.

Panel A. Retornos acumulados, retornos diarios y *drawdown* bajo rebalanceo el último día de cada año con una frecuencia anual



Panel B. Retornos acumulados, retornos diarios y *drawdown* bajo rebalanceo el último día de cada trimestre con una frecuencia trimestral



Panel C. Retornos acumulados, retornos diarios y *drawdown* bajo rebalanceo el último día de cada mes con una frecuencia mensual

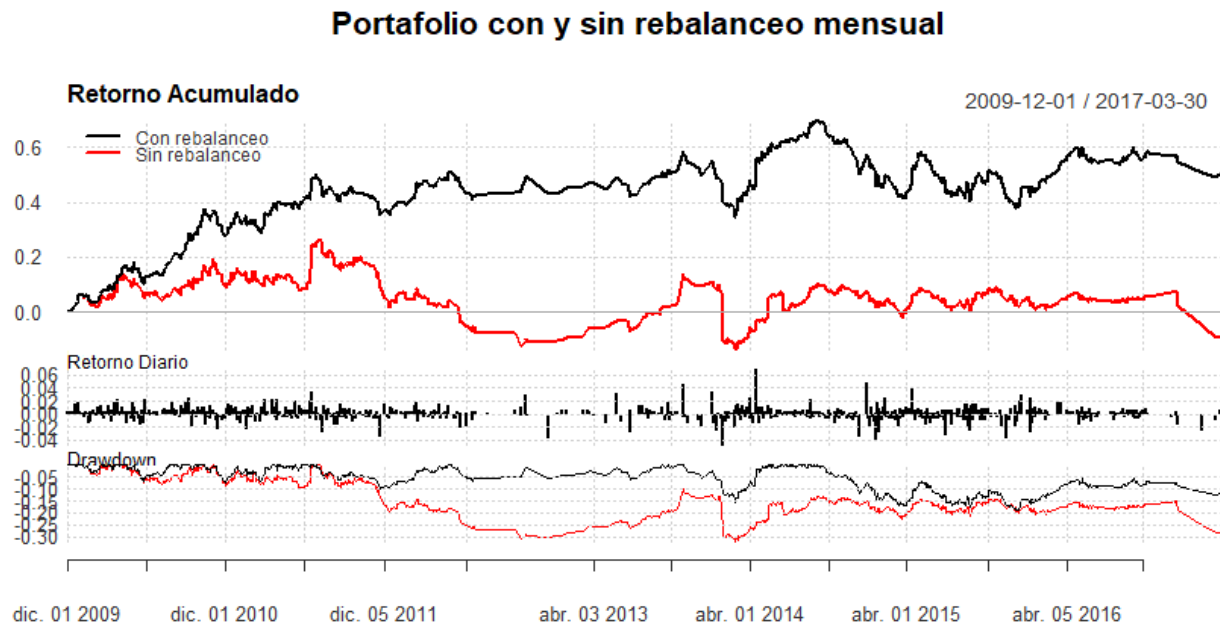


Figura 4. Análisis comparativo del rendimiento y riesgo de los portafolios bajo rebalanceo con frecuencias anual, trimestral y mensual.

El comportamiento del rendimiento del portafolio óptimo en ausencia de rebalanceo trazado con la línea roja en los subpáneos superiores de cada panel de la Figura 4 muestra que no utilizar la técnica de rebalanceo durante los 7 años, 5 meses y 28 días generó una desactualización en los pesos óptimos ω^* , lo que causó una pérdida en el valor del portafolio óptimo de inversión. Si se observan los rendimientos de los portafolios óptimos iniciales para la frecuencia anual y trimestral, estos resultan idénticos, pues como se apuntó, utilizan los mismos pesos iniciales. Tales portafolios sin rebalancear tienen un rendimiento final cercano al 10%. Si se analiza el portafolio óptimo inicial en el periodo mensual, se observa que genera una pérdida final cercana al 5% del valor de la inversión al mantener la combinación inicial de pesos durante los 7 años, 5 meses y 28 días.

Por otro lado, al observar el comportamiento de los portafolios óptimos con rebalanceo, trazados con una línea negra en los subpánes superiores de cada panel de la Figura 4 se observa que, a partir del primer rebalanceo, la sucesión de nuevos pesos ω_0^* , ω_1^* , ω_2^* , ..., ω_t^* , ... da como resultado un incremento en el rendimiento final, el cual es cercano al 40% en las frecuencias de rebalanceo anuales y trimestrales, y cercano al 50% en la frecuencia mensual.

La eficiencia del rebalanceo en la construcción de portafolios de inversión también se puede apreciar en las medidas de rentabilidad y riesgo medias anualizadas (Tabla 6). El retorno medio anualizado del portafolio aumenta en todos los casos al usar la técnica del rebalanceo: para la frecuencia anual pasa de un 2,8% sin rebalanceo a un 8,5% con rebalanceo, para la frecuencia trimestral, de un 2,8% sin rebalanceo a un 8,7% con rebalanceo, y para la frecuencia mensual ocurre el cambio más significativo, pasa de un -0,4% a un 10,4%.

Al evaluar el riesgo mediante la desviación estándar anualizada se observa que hay una leve disminución de esta a la frecuencia anual y trimestral de rebalanceo, pasando de un 14,9% sin rebalanceo a un 14,2% con rebalanceo en la frecuencia anual, y de un 14,9% sin rebalanceo a un 13,9% con rebalanceo en la frecuencia trimestral. En la frecuencia mensual hay una disminución incluso mayor pues se pasa de un 19% de desviación estándar anual sin rebalanceo a un 13,9% con rebalanceo.

Tabla 6. Eficiencia del portafolio sin y con rebalanceo para las distintas frecuencias del rebalanceo

Sin Rebalanceo			
	Anual	trimestral	Mensual
Retorno Medio	0,028	0,028	-0,004
Desviación Estándar	0,149	0,149	0,190
Razón de Sharpe	0,189	0,189	0,023

Con Rebalanceo			
	Anual	Trimestral	Mensual
Retorno Medio	0,085	0,087	0,104
Desviación Estándar	0,142	0,139	0,139
Razón de Sharpe	0,603	0,623	0,746

Por lo tanto, a pesar de que se mantiene un riesgo relativamente alto, la técnica de rebalanceo logra aumentar la rentabilidad y disminuir el riesgo. Esto se aprecia al calcular la razón de Sharpe simplificada. A la frecuencia anual y trimestral su valor es del 0.19 sin rebalanceo mientras que con rebalanceo se incrementa a 0.603 a la frecuencia anual y a 0.62 a la frecuencia trimestral, respectivamente. Por otro lado, a la frecuencia mensual se presenta un incremento de la razón de Sharpe simplificada de -0.02 sin rebalanceo a un 0.75 con rebalanceo.

El riesgo medido por el *drawdown* también muestra una disminución gracias al rebalanceo en varios lapsos del periodo de estudio. Recuérdese que el *drawdown* mide la máxima caída desde el pico anterior más cercano en un periodo de tiempo. Al analizar la Figura 4, se observa que para las frecuencias de rebalanceo anual y trimestral el comportamiento del *drawdown* para la inversión con y sin rebalanceo fue similar hasta el 3 de enero de 2011. A partir de esta fecha el *drawdown* del portafolio sin rebalanceo es mayor estabilizándose a finales del 2013, punto en el cual se generó un máximo en el rendimiento histórico sin rebalanceo. A partir de ahí, el *drawdown* se comportó de forma similar para los portafolios sin y con rebalanceo hasta el final

del periodo de estudio. Por otra parte, para la frecuencia de rebalanceo mensual, el *drawdown* a finales del 2011 es mayor para el portafolio sin rebalanceo. A partir de este momento, el *drawdown* del portafolio sin rebalanceo es menor que el del portafolio con rebalanceo hasta el final del periodo de estudio.

5. Conclusiones

En Colombia, el mercado bursátil presenta pocas acciones liquidas y de un riesgo relativamente alto, por lo que es común diversificar la inversión por medio de la creación de un portafolio óptimo para minimizar el riesgo. Aquí se evaluó el portafolio de mínimo riesgo que permite obtener el conjunto de pesos óptimos ω^{i*} para cada activo i -ésimo del portafolio que hacen mínimo el riesgo medido como la varianza del portafolio en el contexto de la optimización de Markowitz. Este portafolio puede ser de interés para el inversionista promedio, tanto persona natural como jurídica. Se encontró que en ausencia de rebalanceo, cuando se genera el portafolio óptimo en el momento inicial y no se modifica con el transcurrir del tiempo, al final del periodo el rendimiento del portafolio no supera el 10% de rentabilidad final para el caso el portafolio inicial de la frecuencia anual y trimestral, y genera una pérdida final aproximada del 5% para el portafolio inicial sin rebalanceo de la frecuencia mensual. No obstante, reoptimizar los pesos del portafolio ω_i^* , actualizando periódicamente el portafolio de manera óptima en cada momento nuevo τ mejora la rentabilidad final en el tiempo. La técnica de rebalanceo permitió incrementar el rendimiento en gran medida, obteniéndose un rendimiento final cercano al 40% para las frecuencias de rebalanceo anuales y trimestrales, mientras que para la frecuencia de rebalanceo mensual el rendimiento final logrado fue de aproximadamente un 50%. De acuerdo con lo

anterior, el rebalanceo permitió obtener un rendimiento mayor si se aplicaba en periodos de tiempo más frecuentes. La técnica de rebalanceo aumentó asimismo la rentabilidad media anualizada y disminuyó el riesgo medido tanto por la desviación estándar anualizada, como por el *drawdown* (durante varios lapsos para esta última medida). El rendimiento medio anualizado y la razón de Sharpe simplificada aumentaron con el aumento de la frecuencia del rebalanceo, mientras que la desviación estándar anualizada disminuyó. En suma, no solo el rebalanceo mejoró las propiedades del portafolio, sino que al aumentar su frecuencia las mejoras fueron más contundentes.

Cabe anotar que el presente estudio no consideró los costos de transacción, los cuales podrían ser estudiados en una futura línea de investigación. Debe tenerse en cuenta que al aplicar la técnica de rebalanceo es necesario comprar y vender acciones lo cual conlleva una comisión por cada compra y por cada venta que podrían afectar la rentabilidad final de los portafolios óptimos en el tiempo, en especial al aumentar la frecuencia del rebalanceo. Por esta razón, la inclusión de los costos de transacción constituye una línea de investigación futura promisoría.

Referencias

- Davis, M.H.A., & Norman, A.R. (1990). Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of Operations Research*, 15(4), 676–713.
- Donohue, C., & Yip, K. (2003). Optimal portfolio rebalancing with transaction costs. *The Journal of Portfolio Management*, 29(4), 49–63.
- Dumas, B., & Luciano, E. (1991). An exact solution to a dynamic portfolio choice problem under transactions costs. *The Journal of Finance*, 46(2), 577–595.
- Dybvig P. (2005) Mean-Variance portfolio rebalancing with transaction cost. Washington University in Saint Louis, 1–34. Recuperado de <http://phildybvig.com/papers/tcost1per2.pdf>
- Holden, H., & Holden, L. (2012). Optimal rebalancing of portfolios with transaction costs. *Stochastics*, 85(3), 371–394.
- Leland H. (1996). *Optimal asset rebalancing in the presence of transaction cost*, U.C. Berkeley, RPF-26, 1–18. Recuperado de <https://ssrn.com/abstract=7958>
- Leland H. (1999). *Optimal portfolio management with transaction costs and capital gains taxes*, RPF-290, U.C. Berkeley, 1–54. Recuperado de <https://ssrn.com/abstract=206871>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77–91.
- Markowitz, H. (s. f.). About Harry Markowitz. Recuperado de <http://hmarkowitz.com/about-harry-markowitz/>

- Merton, R. C. (1972). An analytical derivation of the efficient portfolio frontier, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4),1851–1872.
- Myers S, Allen F, Brealey R. (2010). *Principios de finanzas corporativas*. México: Mcgraw-HILL/Interamericana Editores.
- Pennacchi G. (2008). *Theory of asset pricing*. Boston: Pearson, MA.
- Rowland, C. & Lawson, M. (2012). *The permanent portfolio: Harry Browne's long-term investment strategy*. Hoboken, N.J: Wiley.
- SchweserNotes. (2014). *2015 CFA exam prep Level 3*. La Crosse, Wis: Kaplan Schweser.
- Williams J. (1938). *The theory of investment value*, USA: Harvard University Press.